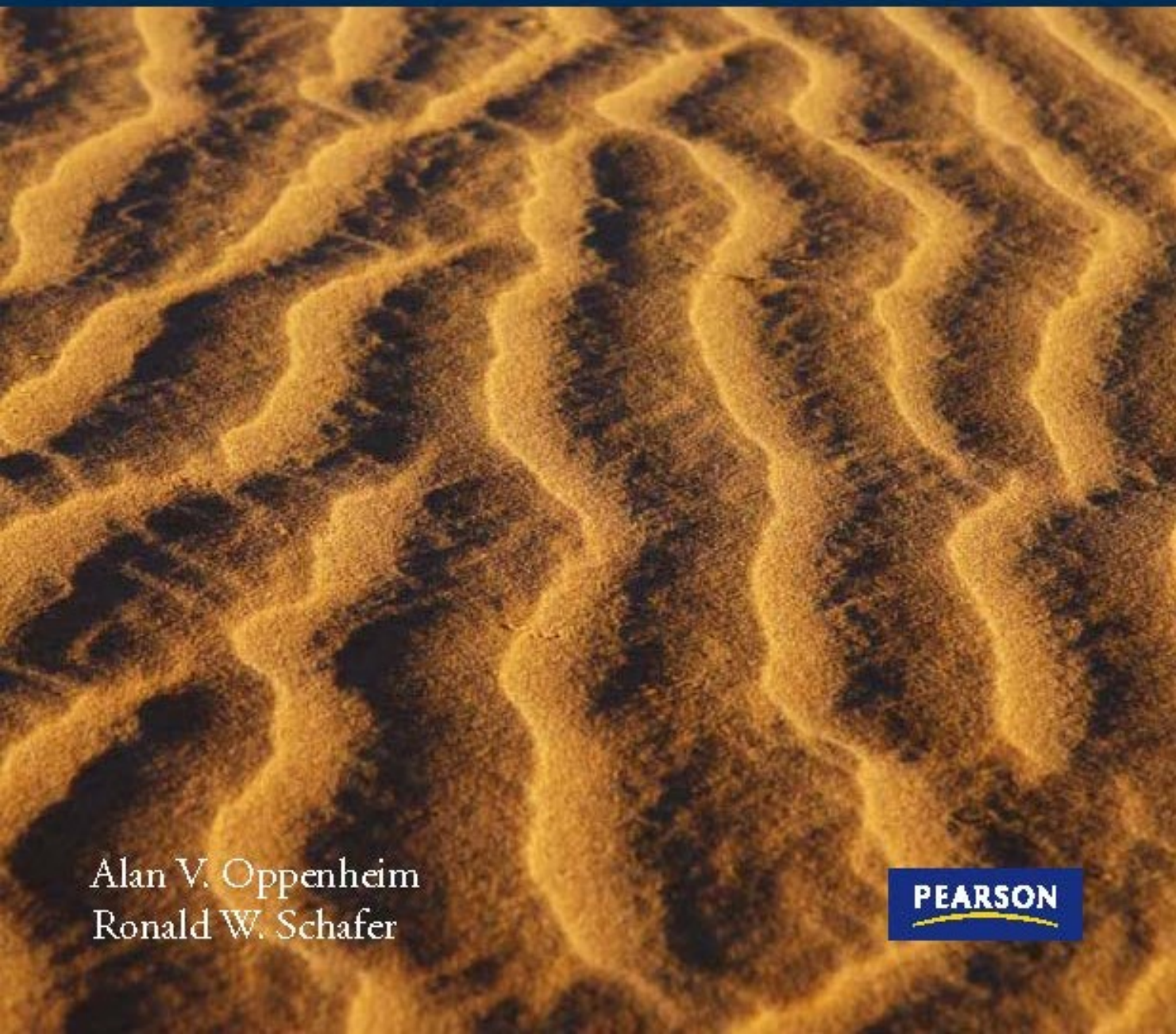
3ª edición

Tratamiento de señales en tiempo discreto



Alan V. Oppenheim
Ronald W. Schafer

PEARSON

Tratamiento de señales en tiempo discreto

TERCERA EDICIÓN

Alan V. Oppenheim
Ronald W. Schafer

Traducción

Javier Portillo
Profesor Titular de Universidad
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid

Revisión técnica

Emilio Soria Olivas
Profesor Titular de Universidad
Departamento de Ingeniería Electrónica
ETSE, Universidad de Valencia

Luis Vergara Domínguez
Catedrático de Universidad
Departamento de Comunicaciones
Universidad Politécnica de Valencia

Antonio Albiol Colomer
Catedrático de Universidad
Departamento de Comunicaciones
Universidad Politécnica de Valencia

Revisión técnica para Latinoamérica

Ingeniero Alejandro Furfaro
Director de departamento de Ingeniería Electrónica
UTN Regional Buenos Aires

Ingeniero Francisco Tropeano
Director
Departamento de Tecnología
Industrial y de Servicios
UADE

Ingeniero Norberto Cura
Director de Cátedra, Profesor Titular
UTN Regional Córdoba

Magíster Ingeniero Franco Martín Pessana
Adjunto Cátedra Análisis de Sistemas y Señales
Regional BS.AS.UTN

Doctor Ricardo Armentano
Director Cátedra-Titular
Análisis de Sistemas y Señales
Regional Buenos Aires UTN

Doctor Carlos Muravchik
Profesor Titular
Universidad Nacional de la Plata

Prentice Hall
es un sello editorial de

PEARSON

Harlow, England • London • New York • Boston • San Francisco • Toronto • Sydney • Singapore • Hong Kong • Tokyo • Seoul • Taipei • New Delhi • Cape Town Madrid • Mexico City • Amsterdam • Munich • Paris • Milan

TRATAMIENTO DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO
ALAN V. OPPENHEIM- RONALD W. SCHAFER
PEARSON EDUCACIÓN, S.A. 2011
ISBN: 978-84-8322-718-3
Materia: 621.39, Telecomunicaciones
Formato: 195 x 250 mm Páginas: 1108

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código penal*).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

DERECHOS RESERVADOS
© 2009, PEARSON EDUCACIÓN S. A.
Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

Authorized translation from the English language edition, entitled DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING, 3rd Edition by ALAN OPPENHEIM; RONALD SCHAFER, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2010 [*Publisher shall herein insert the name of the copyright holder of the English version of the Work; Publisher shall refer to the copyright notice page of the English version of the Work to determine such name*].

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc. SPANISH language edition published by PEARSON EDUCACION S. A., Copyright © [*Publisher shall herein insert the Year of Publication*].

ISBN: 978-84-8322-718-3

Depósito Legal: XXX

Equipo editorial:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico Editorial: Esther Martín González

Equipo de producción:
Director: José A. Clares
Técnico: Irene Iriarte
Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación S.A.
Composición: Vuelapluma S.L.

Impreso por:
IMPRESO EN ESPAÑA - *PRINTED IN SPAIN*

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: Este libro puede incluir enlaces a sitios web gestionados por terceros y ajenos a PEARSON EDUCACIÓN S.A. que se incluyen sólo con finalidad informativa. PEARSON EDUCACIÓN S. A. no asume ningún tipo de responsabilidad por los daños y perjuicios derivados del uso de los datos personales que pueda hacer un tercero encargado del mantenimiento de las páginas web ajenas a PEARSON EDUCACIÓN S. A. y del funcionamiento, accesibilidad o mantenimiento de los sitios web no gestionados por PEARSON EDUCACIÓN S. A. Las referencias se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas.

CONTENIDO

PRÓLOGO **xix**

EL SITIO WEB ASOCIADO **xxvi**

AGRADECIMIENTOS **xxx**

1 INTRODUCCIÓN **1**

2 SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO **9**

2.0 Introducción 9

2.1 Señales en tiempo discreto 10

2.2 Sistemas en tiempo discreto 17

2.2.1 Sistemas sin memoria 18

2.2.2 Sistemas lineales 18

2.2.3 Sistemas invariantes con el tiempo 20

2.2.4 Causalidad 21

2.2.5 Estabilidad 22

2.3 Sistemas lineales e invariantes con el tiempo 23

2.4 Propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo 29

2.5 Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes 35

2.6 Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas en tiempo discreto 39

2.6.1 Autofunciones de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo 40

2.6.2 Aplicación súbita de entradas exponenciales complejas 45

2.7 Representación de secuencias mediante transformadas de Fourier 48

2.8 Propiedades de simetría de la transformada de Fourier 54

2.9 Teoremas de la transformada de Fourier 56

2.9.1 Linealidad de la transformada de Fourier 58
2.9.2 Desplazamiento en el tiempo y en la frecuencia 58
2.9.3 Inversión temporal 59
2.9.4 Diferenciación en el dominio de la frecuencia 59
2.9.5 Teorema de Parseval 59
2.9.6 El teorema de convolución 59
2.9.7 El teorema de modulación o enventanado 60

2.10 Señales aleatorias en tiempo discreto 64

2.11 Resumen 69

Problemas 70

3 LA TRANSFORMADA Z **99**

3.0 Introducción 99

3.1 La transformada Z 99

3.2 Propiedades de la región de convergencia de la transformada Z 110

3.3 La transformada Z inversa 115
3.3.1 Método de inspección 116
3.3.2 Descomposición en fracciones simples 116
3.3.3 Desarrollo en serie de potencias 121

3.4 Propiedades de la transformada Z 123
3.4.1 Linealidad 124
3.4.2 Desplazamiento en el tiempo 125
3.4.3 Multiplicación por una secuencia exponencial 126
3.4.4 Diferenciación de $X(z)$ 127
3.4.5 Conjugación de una secuencia compleja 128
3.4.6 Inversión temporal 129
3.4.7 Convolución de secuencias 129
3.4.8 Resumen de algunas propiedades de la transformada Z 131

3.5 Transformadas Z y sistemas lineales e invariantes 131

3.6 La transformada Z unilateral 135

3.7 Resumen 137

Problemas 138

4 MUESTREO DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO 152

4.0 Introducción 152

4.1 Muestreo periódico 152

4.2 Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia 155

4.3 Reconstrucción de señales de banda limitada a partir de sus muestras 161

4.4 Procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo 165

4.4.1 Procesado de señales en tiempo continuo mediante sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo 166

4.4.2 Invarianza al impulso 171

4.5 Procesado en tiempo continuo de señales en tiempo discreto 173

4.6 Cambio de la frecuencia de muestreo utilizando procesado en tiempo dicreto . 177

4.6.1 Reducción de la frecuencia de muestreo por un factor entero 178

4.6.2 Incremento de la frecuencia de muestreo por un factor entero 180

4.6.3 Filtros de interpolación simples y prácticos 185

4.6.4 Cambio de la frecuencia de muestreo por un factor no entero 188

4.7 Tratamiento multitasa de señales 190

4.7.1 Intercambio de filtrado y compresor/expansor 192

4.7.2 Diezmado e interpolación multietapa 193

4.7.3 Descomposiciones polifásicas 194

4.7.4 Interpretación polifásica de filtros de diezmado 197

4.7.5 Implementación polifásica de filtros de interpolación 198

4.7.6 Bancos de filtros multitasa 199

4.8 Procesado digital de señales analógicas 203

4.8.1 Filtrado previo para evitar el solapamiento 203

4.8.2 Conversión A/D 206

4.8.3 Análisis de los errores de cuantificación 211

4.8.4 Conversión D/A 218

4.9 Sobremuestreo y conformación de ruido en la conversión A/D y D/A 222

4.9.1 Conversión A/D sobremuestreada con cuantificación directa 222

4.9.2 Conversión A/D sobremuestreada con conformación de ruido 227

4.9.3 Sobremuestreo y conformación de ruido en la conversión D/A 232

4.10 Resumen 233

Problemas 235

5 ANÁLISIS EN EL DOMINIO TRANSFORMADO DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO **271**

5.0 Introducción 271

5.1 Respuesta en frecuencia de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo . . . 272
5.1.1 Fase de la respuesta en frecuencia y retardo de grupo 272
5.1.2 Ilustración de los efectos del retardo de grupo y de la atenuación 275

5.2 Sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes 280
5.2.1 Estabilidad y causalidad 281
5.2.2 Sistemas inversos 283
5.2.3 Respuesta al impulso de funciones de transferencia racionales 285

5.3 Respuesta en frecuencia de funciones de transferencia racionales 287
5.3.1 Respuesta en frecuencia de un polo o un cero simple 289
5.3.2 Ejemplos con polos y ceros múltiples 293

5.4 Relación entre el módulo y la fase 298

5.5 Sistemas paso todo 302

5.6 Sistemas de fase mínima 306
5.6.1 Fase mínima y descomposición paso todo 308
5.6.2 Compensación de la respuesta en frecuencia de sistemas de fase no mínima 310
5.6.3 Propiedades de los sistemas de fase mínima 310

5.7 Sistemas lineales con fase lineal generalizada 317
5.7.1 Sistemas con fase lineal 318
5.7.2 Fase lineal generalizada 322
5.7.3 Sistemas causales con fase lineal generalizada 324
5.7.4 Relación entre los sistemas FIR de fase lineal y los sistemas de fase mínima 333

5.8 Resumen 337

Problemas 337

6 ESTRUCTURAS DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO **369**

6.0 Introducción 369

6.1 Representación de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes 370

6.2 Representación de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes mediante grafos de ujo de señales 377

6.3 Estructuras básicas de sistemas IIR 382
6.3.1 Formas directas 383

6.3.2 Forma en cascada 385
6.3.3 Forma en paralelo 387
6.3.4 Realimentación en sistemas IIR 390

6.4 Formas traspuestas 391

6.5 Estructuras básicas de redes para sistemas FIR 395
6.5.1 Forma directa 395
6.5.2 Forma en cascada 395
6.5.3 Estructuras de sistemas FIR de fase lineal 396

6.6 Filtros en celosía 399
6.6.1 Filtros FIR en celosía 399
6.6.2 Estructura en celosía todo polos 406
6.6.3 Generalización de sistemas en celosía 409

6.7 Revisión de los efectos numéricos de precisión finita 409
6.7.1 Representaciones numéricas 409
6.7.2 Efectos de la cuantificación en la realización de sistemas 413

6.8 Efectos de la cuantificación de coeficientes 415
6.8.1 Efectos de la cuantificación de coeficientes en sistemas IIR 415
6.8.2 Ejemplo de la cuantificación de coeficientes en un filtro elíptico 417
6.8.3 Polos de secciones de segundo orden cuantificadas 421
6.8.4 Efectos de la cuantificación de coeficientes en sistemas FIR 422
6.8.5 Ejemplo de cuantificación de un filtro FIR óptimo 424
6.8.6 Mantenimiento de la fase lineal 426

6.9 Efectos del ruido de redondeo en filtros digitales 430
6.9.1 Análisis de estructuras IIR en forma directa 430
6.9.2 Escalado en implementaciones en coma fija de sistemas IIR 438
6.9.3 Ejemplo de análisis de una estructura IIR en cascada 442
6.9.4 Análisis de sistemas FIR en forma directa 449
6.9.5 Realizaciones en coma flotante de sistemas en tiempo discreto 451

6.10 Ciclos límite con entrada cero en realizaciones en coma fija de filtros digitales IIR 453
6.10.1 Ciclos límite debidos al truncamiento y al redondeo 453
6.10.2 Ciclos límite debidos al desbordamiento 455
6.10.3 Cómo evitar los ciclos límite 456

6.11 Resumen 457

Problemas 458

7 TÉCNICAS DE DISEÑO DE FILTROS **484**

7.0 Introducción 484

7.1 Especificaciones del filtro 485

7.2 Diseño de filtros IIR en tiempo discreto a partir de filtros en tiempo continuo . 487
7.2.1 Diseño de filtros mediante invarianza al impulso 488
7.2.2 La transformación bilineal 495

7.3 Filtros en tiempo discreto de Butterworth, Chebyshev y elípticos 498
7.3.1 Ejemplos de diseño de filtros IIR 500

7.4 Transformaciones en frecuencia de filtros IIR paso bajo 516

7.5 Diseño de filtros FIR mediante enventanado 522
7.5.1 Propiedades de las ventanas comúnmente utilizadas 525
7.5.2 Incorporación de la fase lineal generalizada 528
7.5.3 El método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser 531

7.6 Ejemplos de diseño de filtros FIR mediante el método de la ventana de Kaiser . 534
7.6.1 Filtro paso bajo 534
7.6.2 Filtro paso alto 535
7.6.3 Diferenciadores en tiempo discreto 537

7.7 Aproximaciones óptimas de filtros FIR 543
7.7.1 Filtros paso bajo de tipo I óptimos 548
7.7.2 Filtros paso bajo de tipo II óptimos 553
7.7.3 El algoritmo de Parks–McClellan 555
7.7.4 Características de los filtros FIR óptimos 557

7.8 Ejemplos de aproximación de rizado constante de filtros FIR 558
7.8.1 Filtro paso bajo 559
7.8.2 Compensación para el filtro de retención de orden cero 562
7.8.3 Filtro paso banda 563

7.9 Comentarios sobre los filtros FIR e IIR en tiempo discreto 566

7.10 Diseño de un filtro de sobremuestreo 567

7.11 Resumen 570

Problemas 571

8 LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER **610**

8.0 Introducción 610

8.1 Representación de secuencia periódicas: desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto 611

8.2 Propiedades del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto 615
8.2.1 Linealidad 615

8.2.2 Desplazamiento de una secuencia 616
8.2.3 Dualidad 616
8.2.4 Propiedades de simetría 617
8.2.5 Convolución periódica 617
8.2.6 Resumen de las propiedades de la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto 620

8.3 La transformada de Fourier de señales periódicas 621

8.4 Muestreo de la transformada de Fourier 624

8.5 Representación de Fourier de secuencias de duración finita 628

8.6 Propiedades de la transformada discreta de Fourier 633
8.6.1 Linealidad 633
8.6.2 Desplazamiento circular de una secuencia 634
8.6.3 Dualidad 636
8.6.4 Propiedades de simetría 638
8.6.5 Convolución circular 640
8.6.6 Resumen de las propiedades de la DFT 645

8.7 Cálculo de la convolución lineal mediante la DFT 645
8.7.1 Convolución lineal de dos secuencias de longitud finita 645
8.7.2 La convolución circular como una convolución lineal con solapamiento . 646
8.7.3 Realización de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante la DFT 651

8.8 La transformada discreta del coseno (DCT) 657
8.8.1 Definiciones de la DCT 658
8.8.2 Definición de la DCT-1 y la DCT-2 658
8.8.3 Relación entre la DFT y la DCT-1 661
8.8.4 Relación entre la DFT y la DCT-2 662
8.8.5 Propiedad de compactación de la energía de la DCT-2 664
8.8.6 Aplicaciones de la DCT 667

8.9 Resumen 667

Problemas 668

9 CÓMPUTO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER **699**

9.0 Introducción 699

9.1 Cómputo directo de la transformada discreta de Fourier 700
9.1.1 Evaluación directa de la definición de la DFT 701
9.1.2 El algoritmo de Goertzel 702
9.1.3 Explotación de la simetría y la periodicidad 705

9.2 Algoritmos de FFT mediante diezmado en el tiempo 706
9.2.1 Generalización y programación de la FFT 712

9.2.2 Cómputo en el mismo lugar . . . 713
9.2.3 Formas alternativas . . . 716

9.3 Algoritmos de FFT mediante diezmado en frecuencia . . . 718
9.3.1 Cómputo en el mismo lugar . . . 722
9.3.2 Formas alternativas . . . 722

9.4 Consideraciones prácticas . . . 724
9.4.1 Indexación . . . 724
9.4.2 Coeficientes . . . 725

9.5 Algoritmos de FFT más generales . . . 726
9.5.1 Algoritmos para valores compuestos de N . . . 726
9.5.2 Algoritmos de FFT optimizados . . . 728

9.6 Realización de la DFT mediante convolución . . . 729
9.6.1 Presentación del algoritmo de Winograd para el cálculo de la transformada de Fourier . . . 729
9.6.2 El algoritmo de transformada chirp . . . 730

9.7 Efectos de la longitud finita de registros . . . 735

9.8 Resumen . . . 742

Problemas . . . 742

10 ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES MEDIANTE LA DFT **769**

10.0 Introducción . . . 769

10.1 Análisis de Fourier de señales mediante la DFT . . . 769

10.2 Análisis de señales sinusoidales mediante la DFT . . . 773
10.2.1 El efecto del enventanado . . . 773
10.2.2 Propiedades de las ventanas . . . 777
10.2.3 El efecto del muestreo del espectro . . . 779

10.3 La transformada de Fourier dependiente del tiempo . . . 787
10.3.1 Invertibilidad de $X[n,\lambda)$ . . . 792
10.3.2 Interpretación de $X[n,\lambda)$ como banco de filtros . . . 792
10.3.3 El efecto de la ventana . . . 793
10.3.4 Muestreo en el tiempo y en la frecuencia . . . 795
10.3.5 El método solapamiento-suma de reconstrucción . . . 798
10.3.6 Tratamiento de señales basado en la transformada de Fourier dependiente del tiempo . . . 801
10.3.7 Interpretación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo como banco de filtros . . . 803

10.4 Ejemplos de análisis de Fourier de señales no estacionarias . . . 806
10.4.1 Análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales de voz . . . 806
10.4.2 Análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales radar . . . 810

10.5 Análisis de Fourier de señales aleatorias estacionarias: el periodograma 812
10.5.1 El periodograma 813
10.5.2 Propiedades del periodograma 814
10.5.3 Promediado de periodogramas 818
10.5.4 Cálculo de periodogramas promedio mediante la DFT 820
10.5.5 Un ejemplo de análisis de periodogramas 821

10.6 Análisis espectral de señales aleatorias 825
10.6.1 Cómputo de la autocorrelación y de la estimación del espectro de potencia mediante la DFT 828
10.6.2 Estimación del espectro de potencia del ruido de cuantificación 830
10.6.3 Estimación del espectro de potencia de una señal de voz 836

10.7 Resumen 837

Problemas 839

11 MODELADO PARAMÉTRICO DE SEÑALES **865**

11.0 Introducción 865

11.1 Modelado todo polos de señales 866
11.1.1 Aproximación por mínimos cuadrados 867
11.1.2 Modelo inverso de mínimos cuadrados 867
11.1.3 Formulación de predicción lineal del modelado todo polos 869

11.2 Modelos de señales deterministas y aleatorios 870
11.2.1 Modelado todo polos de señales deterministas de energía finita 870
11.2.2 Modelado de señales aleatorias 871
11.2.3 Error cuadrático medio mínimo 872
11.2.4 Propiedad de ajuste de la autocorrelación 873
11.2.5 Determinación del parámetro de ganancia G 873

11.3 Estimación de las funciones de correlación 875
11.3.1 El método de la autocorrelación 875
11.3.2 El método de la covarianza 877
11.3.3 Comparación de métodos 878

11.4 Orden del modelo 879

11.5 Análisis espectral todo polos 881
11.5.1 Análisis todo polos de señales de voz 882
11.5.2 Posiciones de los polos 885
11.5.3 Modelado todo polos de señales sinusoidales 887

11.6 Solución de las ecuaciones normales de la autocorrelación 889
11.6.1 La recursión de Levinson–Durbin 890
11.6.2 Obtención del algoritmo de Levinson–Durbin 891

11.7 Filtros en celosía 894

11.7.1 Red en celosía de error de predicción 894
11.7.2 Red en celosía de un modelo todo polos 898
11.7.3 Cálculo directo de los parámetros k 898

11.8 Resumen 900

Problemas 900

12 TRANSFORMADAS DISCRETAS DE HILBERT **916**

12.0 Introducción 916

12.1 Suficiencia de las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier 918

12.2 Teoremas de suficiencia para secuencias de longitud finita 923

12.3 Relaciones entre el módulo y la fase 929

12.4 Relaciones de transformada de Hilbert para secuencias complejas 930
12.4.1 Diseño de transformadores de Hilbert 933
12.4.2 Representación de señales paso banda 937
12.4.3 Muestreo paso banda 940

12.5 Resumen 942

Problemas 943

13 ANÁLISIS CEPSTRAL Y DECONVOLUCIÓN HOMOMÓRFICA **953**

13.0 Introducción 953

13.1 Definición de cepstrum 954

13.2 Definición de cepstrum complejo 955

13.3 Propiedades del logaritmo complejo 957

13.4 Expresiones alternativas para el cepstrum complejo 958

13.5 Propiedades del cepstrum complejo 959
13.5.1 Secuencias exponenciales 959
13.5.2 Secuencias de fase mínima y de fase máxima 962
13.5.3 Relación entre el cepstrum real y el cepstrum complejo 963

13.6 Cálculo del cepstrum complejo 964
13.6.1 Desenrollado de la fase 966
13.6.2 Cálculo del cepstrum complejo utilizando la derivada logarítmica 969
13.6.3 Realizaciones de fase mínima de secuencias de fase mínima 970
13.6.4 Cálculo recursivo del cepstrum complejo para secuencias de fase mínima y de fase máxima 971
13.6.5 Uso de ponderación exponencial 972

13.7 Cálculo del cepstrum complejo utilizando raíces de polinomios 973

13.8 Deconvolución utilizando el cepstrum complejo 974

13.8.1 Deconvolución homomórfica fase mínima/paso todo 975
13.8.2 Deconvolución homomórfica fase mínima/fase máxima 977

13.9 Cepstrum complejo para un modelo multicamino simple 978
13.9.1 Cómputo del cepstrum complejo mediante análisis de transformada Z . . 980
13.9.2 Cómputo del cepstrum utilizando la DFT 983
13.9.3 Deconvolución homomórfica del modelo multicamino 988
13.9.4 Descomposición de fase mínima 989
13.9.5 Generalizaciones 995

13.10 Aplicaciones a procesado de voz 996
13.10.1 El modelo de la voz 996
13.10.2 Ejemplo de deconvolución homomórfica de voz 999
13.10.3 Estimación de los parámetros del modelo de voz 1001
13.10.4 Aplicaciones 1003

13.11 Resumen 1005

Problemas 1005

A Señales aleatorias 1015

B Filtros en tiempo continuo 1028

C Respuestas a problemas básicos seleccionados 1033

Bibliografía 1056

Índice 1064

PRÓLOGO

Esta tercera edición de *Tratamiento de señales en tiempo discreto* es un descendiente de nuestro libro de texto *Tratamiento digital de señales* que se publicó en 1975. Ese texto de éxito apareció en un momento en el que el campo estaba en su infancia, pero empezando a desarrollarse rápidamente. En ese momento existían cursos en unas pocas escuelas y se impartían casi exclusivamente en el nivel de postgrado. Nuestro texto de 1975 se diseñó para esos cursos. Todavía está en imprenta y todavía se utiliza con éxito en diversas escuelas de Estados Unidos y en otros países.

En la década de los años 80, el avance de las investigaciones en tratamiento de señales puso en evidencia que el tratamiento digital de señales (DSP, *Digital Signal Processing*) cumpliría las expectativas sobre su potencial que se habían hecho evidentes durante la década de los años 70. El importante resurgimiento del tratamiento digital de señales justificó claramente una revisión y actualización del texto original. Sin embargo, al organizar dicha revisión, se hizo evidente que habían tenido lugar tantos cambios en el campo y en el nivel y estilo de enseñanza de la materia que resultaba más apropiado desarrollar un nuevo libro de texto, que estuviera basado fundamentalmente en nuestro texto original, manteniendo también vigente dicho texto. Titulamos el nuevo libro, publicado en 1989 *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, para enfatizar que la mayor parte de la teoría y las técnicas de diseño presentadas en el texto se aplican, en general, a sistemas en tiempo discreto.

Al desarrollar la nueva edición del libro, los principios básicos del tratamiento digital de señales eran de enseñanza común en el nivel de graduado, e incluso algunas veces se incluían como parte de un primer curso de sistemas lineales en tiempo discreto pero, más frecuentemente, en un nivel algo más avanzado en el tercer curso, cuarto curso o como materia inicial de un curso de postgrado. Por tanto, se hizo necesario ampliar considerablemente el tratamiento de materias como los sistemas lineales, el muestreo, el tratamiento multitasa de señales, las aplicaciones y el análisis espectral. Además, se incluyeron más ejemplos para enfatizar e ilustrar los conceptos importantes. En consonancia con la importancia que damos a los ejemplos bien construidos y a los problemas a resolver por el alumno, el nuevo libro contenía más de 400 problemas.

Aunque el campo continuó su avance tanto en la teoría como en las aplicaciones, los fundamentos y las bases subyacentes seguían siendo los mismos, aunque con un refinamiento del énfasis, la com-

prensión y la pedagogía. En consecuencia, la segunda edición de *Tratamiento de señales en tiempo discreto* se publicó en 1999. Esa nueva edición fue una revisión importante, cuyo objetivo fue hacer el tratamiento digital de señales incluso más accesible a los estudiantes y a los ingenieros en ejercicio, sin comprometer el tratamiento de lo que considerábamos eran los conceptos importantes que definen el campo.

Esta tercera edición de *Tratamiento de señales en tiempo discreto* es una revisión importante de la segunda edición. Esta nueva edición surge como respuesta a cambios en la forma de enseñar esta materia y a cambios en el alcance de los cursos típicos de graduado y primer año de postgrado. Continúa con la tradición de hacer énfasis en la accesibilidad de los conceptos para los estudiantes e ingenieros en ejercicio y enfocarse en los principios fundamentales con amplias posibilidades de aplicación. Una característica importante de la nueva edición es la incorporación y ampliación de algunos de los temas más avanzados, cuya comprensión es ahora esencial para trabajar en este campo. Todos los capítulos de la segunda edición han sufrido importantes revisiones y cambios, se ha añadido un capítulo completamente nuevo y se ha recuperado y actualizado significativamente un capítulo de la primera edición. En esta tercera edición, los Profesores Mark Yoder y Wayne Padgett, del Rose-Hulman Institute of Technology, han desarrollado un sitio web que complementa al libro, muy integrado con éste y altamente interactivo. Una descripción más completa del sitio web se presenta en una sección dedicada al mismo que sigue a este prólogo.

A medida que hemos continuado impartiendo esta materia durante los diez años transcurridos desde la aparición de la segunda edición, hemos creado continuamente nuevos problemas y exámenes para los alumnos. Siendo conherentes con la importancia que siempre hemos dado a los ejemplos y ejercicios bien planteados, hemos seleccionado 130 de los mejores para incluirlos en la tercera edición, que ahora contiene un total de más de 700 problemas. Los problemas de la segunda edición que no aparecen en esta nueva edición están disponibles en el sitio web asociado.

Como en las anteriores generaciones de este texto, se supone que el lector posee formación sobre cálculo avanzado, así como una buena comprensión de los elementos de números complejos y variable compleja. Sigue siendo un prerrequisito básico el haber seguido un curso de teoría de sistemas lineales para señales en tiempo continuo que incluya las transformadas de Laplace y de Fourier, que se suele impartir en la mayor parte de los planes de estudio de ingeniería eléctrica y mecánica. Actualmente, es habitual, en una buena parte de los planes de estudio de grado, incluir en las fases tempranas de la formación las señales y los sistemas en tiempo discreto, las transformadas de Fourier en tiempo discreto y el tratamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo.

Nuestra experiencia en la enseñanza del tratamiento de señales en tiempo discreto en el nivel avanzado de grado y en el postgrado confirma que es esencial empezar con una revisión cuidadosa de los fundamentos, de forma que los estudiantes puedan asimilar temas más avanzados partiendo de una base sólida, y se les proporcione una familiaridad con un marco notacional consistente, que se utilizará en el desarrollo del curso y en el texto que lo acompaña. En los primeros cursos de nivel de grado, es muy típico que en el primer contacto con el tratamiento de señales en tiempo discreto, los estudiantes aprendan a realizar los cálculos matemáticos, pero es al volver sobre los conceptos cuando aprenden a razonar en profundidad sobre los mismos. Por tanto, en esta edición, hemos mantenido la presentación de los aspectos fundamentales de los cinco primeros capítulos, mejorándola con nuevos ejemplos y explicaciones ampliadas. En secciones posteriores de algunos capítulos, se incluyen temas, como el ruido de cuantificación, que suponen un conocimiento básico sobre señales estocásticas. El Capítulo 2 y el Apéndice A contienen una breve revisión de los conceptos necesarios para esas secciones.

Un cambio muy importante en la educación sobre tratamiento digital de señales que ha ocurrido en la última década es el uso cada vez más amplio de paquetes software sofisticados, como MATLAB, LabVIEW y Mathematica, que proporcionan una experiencia interactiva inmediata a los estudiantes. La accesibilidad y facilidad de uso de estos paquetes software proporciona la oportunidad de conectar los

conceptos e ideas matemáticas, que son básicas para el tratamiento de señales en tiempo discreto, con aplicaciones en las que intervienen señales reales y sistemas en tiempo real. Estos paquetes software están bien documentados, tienen un soporte técnico muy bueno y proporcionan interfaces de usuario excelentes. Hacen que los conceptos sean fácilmente accesibles a los estudiantes sin distraerles de la perspectiva e intuición sobre los aspectos fundamentales. En la actualidad, es muy común en muchos cursos de tratamiento de señales incluir proyectos y ejercicios para que se realicen con uno o varios de estos paquetes software. Por supuesto, esto debe hacerse con mucho cuidado, para maximizar el beneficio en cuanto al aprendizaje del estudiante enfatizando los experimentos con los conceptos, parámetros, etc., de modo que no se conviertan en un simple libro de recetas. Es particularmente excitante el hecho de que teniendo instalado uno de estos potentes paquetes software en el equipo portátil de un estudiante se puede convertir en un laboratorio acorde con el estado del arte que permite experimentar con los conceptos y sistemas de tratamiento de señales en tiempo discreto.

Como profesores, hemos buscado de forma coherente la mejor manera de utilizar los recursos computacionales para mejorar el entorno de aprendizaje de los estudiantes. Continuamos creyendo que los libros de texto son la mejor forma de empaquetar el conocimiento de la forma más conveniente y estable. Los libros de texto evolucionan en una escala temporal necesariamente lenta. Esto asegura una cierta estabilidad y permite disponer del tiempo necesario para revisar los desarrollos del campo de estudio y probar nuevas formas de presentar nuevas ideas a los estudiantes. Por otra parte, los cambios en el software de los computadores y en las tecnologías hardware se producen en una escala temporal mucho más rápida. Las revisiones del software suelen aparecer con una periodicidad semestral, y la velocidad del hardware continúa aumentando cada año. Esto, junto con la disponibilidad de Internet, proporciona la oportunidad de actualizar con más frecuencia los componentes interactivos y experimentales del entorno de aprendizaje. Por estas razones, parece ser un camino natural proporcionar entornos distintos, en forma de libro de texto para la matemática y los conceptos básicos, y en Internet para la experimentación práctica interactiva.

Con todo esto en mente, hemos creado la tercera edición de *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, incorporando lo que pensamos son los conceptos fundamentales del tratamiento de señales en tiempo discreto, y con una relación muy fuerte con el sitio web asociado creado por nuestros colegas Mark Yoder y Wayne Padgett del Rose-Hulman Institute of Technology. El sitio web contiene una variedad de recursos software e interactivos para el aprendizaje que refuerzan y amplían el impacto del texto. El sitio web se describe con más detalle en la sección introductoria que sigue a este Prólogo. Está diseñado para ser dinámico y cambiar continuamente con el fin de incorporar rápidamente nuevos recursos que puedan ser desarrollados por los autores del texto y por los autores del sitio web. Este sitio web será sensible a los entornos hardware y software continuamente cambiantes que sirven como plataforma de visualización de conceptos abstractos y de experimentación con problemas reales de tratamiento de señales. Estamos muy ilusionados con el potencial, prácticamente sin límites, que tiene este sitio web asociado para mejorar de forma significativa nuestra capacidad de enseñar y la capacidad de nuestros estudiantes para aprender la materia relativa al tratamiento de señales en tiempo discreto.

El material que se presenta en el libro se organiza de forma que proporciona una flexibilidad considerable para su uso tanto en niveles de grado como de postgrado. Un curso típico de un semestre a nivel de grado podría cubrir en profundidad el Capítulo 2, Secciones 2.0-2.9; el Capítulo 3; el Capítulo 4, Secciones 4.0-4.6; el Capítulo 5, Secciones 5.0-5.3; el Capítulo 6, Secciones 6.0-6.5; el Capítulo 7, Secciones 7.0-7.3 y una breve presentación de las Secciones 7.4-7.6. Si los alumnos han estudiado señales y sistemas en tiempo discreto en un curso previo sobre señales y sistemas, sería posible pasar más rápido por el material de los Capítulos 2, 3 y 4, liberando así tiempo para cubrir el Capítulo 8. Un curso de postgrado de primer año podría ampliar los conceptos anteriores con el resto del Capítulo 5, una presentación del tratamiento de señales multitasa (Sección 4.7), una exposición acerca de algunos aspectos de la cuantificación que se presentan en la Sección 4.8 y quizá una introducción a la conformación del ruido en conversores A/D y D/A, como se explica en la Sección 4.9. Un curso de postgrado

de primer año debería incluir también algunos de los aspectos de la cuantificación que se presentan en las Secciones 6.6-6.9, una presentación de los filtros FIR óptimos, que se incorpora en las Secciones 7.7-7.9 y un tratamiento completo de la transformada discreta de Fourier (Capítulo 8) y de su cálculo mediante la FFT (Capítulo 9). La presentación de la DFT se puede complementar de forma muy efectiva con muchos de los ejemplos del Capítulo 10. En un curso de postgrado de dos semestres, se puede cubrir el texto completo, incluyendo el nuevo capítulo sobre modelado paramétrico de señales (Capítulo 11) y el cepstrum (Capítulo 13), junto con algunos temas avanzados adicionales. En todos los casos, los problemas para trabajo personal al final de cada capítulo se pueden realizar con o sin la ayuda de un computador, y los problemas y proyectos del sitio web se pueden utilizar para reforzar la conexión entre la teoría y la implementación en computador de los sistemas de tratamiento de señales.

Concluimos este prólogo con un resumen de los contenidos de cada capítulo, resaltando los cambios significativos introducidos en la tercera edición.

En el Capítulo 2 presentamos la clase básica de señales y sistemas en tiempo discreto y definimos propiedades básicas de los sistemas, como linealidad, invarianza temporal, estabilidad y causalidad. El objetivo principal del libro son los sistemas lineales e invariantes con el tiempo, debido al rico conjunto de herramientas disponibles para el diseño y análisis de esta clase de sistemas. En concreto, en el Capítulo 2 desarrollamos la representación en el dominio del tiempo de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante la suma de convolución y presentamos la clase de sistemas lineales e invariantes con el tiempo representados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. En el Capítulo 6 se desarrolla esta clase de sistemas con un detalle considerablemente mayor. En el Capítulo 2 presentamos también la representación de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier en tiempo discreto. El principal objetivo del Capítulo 2 es la representación de secuencias en términos de su transformada de Fourier, es decir, como una combinación lineal de exponenciales complejas, y el desarrollo de las propiedades básicas de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

En el Capítulo 3 desarrollamos la transformada Z como una generalización de la transformada de Fourier. Este capítulo está enfocado hacia el desarrollo de los teoremas básicos y las propiedades de la transformada Z y el desarrollo del método de descomposición en fracciones simples para realizar la operación de transformada inversa. En el Capítulo 5 se utilizan ampliamente los resultados de los Capítulos 3 y 4 para llevar a cabo una explicación detallada de la representación y el análisis de los sistemas lineales invariantes con el tiempo. Aunque el contenido de los Capítulos 2 y 3 puede ser seguido por muchos estudiantes, la mayor parte de los cursos introductorios en señales y sistemas no se imparten ni con la profundidad ni con la amplitud de contenidos de estos capítulos. Además, en estos capítulos se establece la notación que se utilizará a lo largo del libro. Por tanto, recomendamos que los Capítulos 2 y 3 se estudien tan cuidadosamente como sea necesario para que los estudiantes tomen confianza con su comprensión de los fundamentos de las señales y sistemas en tiempo discreto.

En el Capítulo 4 realizamos una presentación detallada de la relación entre las señales en tiempo continuo y en tiempo discreto, cuando las señales en tiempo discreto se obtienen mediante el muestreo periódico de señales en tiempo continuo. Esto incluye un desarrollo del teorema de muestreo de Nyquist. Además, se explican también la interpolación y el diezmado de las señales en tiempo discreto que se utilizan, por ejemplo, en los sistemas de tratamiento de señales multitasa y en la conversión de frecuencia de muestreo. El capítulo finaliza con una presentación de algunos aspectos prácticos que aparecen en la conversión de tiempo continuo a tiempo discreto, entre los que se encuentran el filtrado previo para evitar el solapamiento, el modelado de los efectos de cuantificación de amplitud, cuando se representan digitalmente las señales en tiempo discreto y el uso de sobremuestreo para simplificar los procesos de conversión A/D y D/A. En esta tercera edición se incluyen nuevos ejemplos de simulaciones del ruido de cuantificación, una nueva presentación de los filtros de interpolación derivados de *splines*, y nuevas presentaciones de interpolación multietapa y de bancos de filtros multitasa de dos canales.

En el Capítulo 5 aplicamos los conceptos desarrollados en los capítulos previos para realizar un estudio detallado de las propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Definimos la clase de los filtros ideales selectivos en frecuencia y desarrollamos la función del sistema y la representación polo–cero de sistemas descritos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes, una clase de sistemas cuya implementación se considerará en detalle en el Capítulo 6. En el Capítulo 5 definimos y presentamos también el retardo de grupo, la respuesta de fase y la distorsión de fase, así como las relaciones existentes entre el módulo de la respuesta en frecuencia y la fase de la respuesta en frecuencia de los sistemas. Se incluye también una presentación de los sistemas de fase mínima, paso–todo y de fase lineal generalizada. Los cambios en la tercera edición incluyen un nuevo ejemplo de los efectos del retardo de grupo y de la atenuación, que está también disponible en el sitio web para experimentación interactiva.

El Capítulo 6 se dedica específicamente a los sistemas descritos por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, desarrollándose su representación mediante diagramas de bloques y diagramas lineales de grafo de flujo de señales. Una gran parte de este capítulo se dedica a desarrollar una variedad de estructuras importantes de sistemas y a comparar algunas de sus propiedades. La importancia de esta presentación y la variedad de estructuras de filtros se relaciona con el hecho de que en una implementación práctica de un sistema en tiempo discreto, los efectos de las inexactitudes en los coeficientes y de los errores aritméticos pueden ser muy dependientes de la estructura específica utilizada. Aunque estos hechos básicos son similares tanto si la tecnología utilizada en la implementación en tiempo discreto es digital o analógica, los ilustraremos en este capítulo en el contexto de la implementación digital mediante una discusión de los efectos de la cuantificación de coeficientes y el ruido de redondeo aritmético en filtros digitales. En una nueva sección se expone una presentación detallada de los filtros FIR e IIR en celosía para implementar ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes. Como se explica en el Capítulo 6 y posteriormente en el Capítulo 11, esta clase de estructuras de filtros se ha hecho extremadamente importante en muchas aplicaciones debido a sus excelentes propiedades. Es común en las presentaciones de los filtros en celosía de muchos textos y artículos ligar íntimamente su importancia al análisis y modelado de señales mediante predicción lineal. Sin embargo, la importancia del uso de las realizaciones de filtros FIR e IIR en celosía es independiente de la forma en que se obtiene la ecuación en diferencias que va a ser implementada. Por ejemplo, la ecuación en diferencias podría ser el resultado del uso de técnicas de diseño de filtros como las que se exponen en el Capítulo 7, del uso de modelado paramétrico de señales como se explica en el Capítulo 11 o de cualquiera de las muy diversas formas en las que se puede implementar una ecuación en diferencias.

Mientras que el Capítulo 6 se ocupa fundamentalmente de la representación e implementación de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, el Capítulo 7 es una presentación de los procedimientos para obtener los coeficientes de esta clase de ecuaciones en diferencias, con el fin de aproximar una función de transferencia deseada del sistema. Las técnicas de diseño se dividen en las utilizadas para filtros de respuesta al impulso infinita (IIR) y las utilizadas para filtros de respuesta al impulso finita (FIR). Se incluyen nuevos ejemplos de filtros IIR que permiten aumentar el conocimiento de las propiedades de los distintos métodos de aproximación. Un nuevo ejemplo de diseño de filtros por interpolación proporciona un marco para comparar en sus aspectos prácticos los filtros FIR e IIR.

En la teoría de sistemas lineales en tiempo continuo, la transformada de Fourier es principalmente una herramienta analítica para representar señales y sistemas. Por el contrario, en el caso de tiempo discreto, muchos sistemas y algoritmos de tratamiento de señal requieren el cálculo explícito de la transformada de Fourier. Aunque la propia transformada de Fourier no se puede calcular por sí misma, sí se puede obtener una versión muestreada de la misma, la transformada discreta de Fourier (DFT), y para señales de longitud finita, la DFT es una representación de Fourier completa de la señal. En el Capítulo 8 se presenta la transformada discreta de Fourier y sus propiedades y se desarrolla en detalle su relación con la transformada de Fourier en tiempo discreto. En este capítulo se proporciona también una

introducción a la transformada discreta del coseno (DCT), que está desempeñando un papel de creciente importancia en muchas aplicaciones entre las que se encuentran la compresión de audio y vídeo.

En el Capítulo 9 se presenta y discute la rica e importante variedad de algoritmos para calcular o generar la transformada discreta de Fourier, entre los que se encuentran el algoritmo de Goertzel, los algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT) y la transformada *chirp*. En esta tercera edición, se utilizan las operaciones básicas de sobremuestreo y submuestreo presentadas en el Capítulo 4 para proporcionar una comprensión adicional de la obtención de los algoritmos de FFT. Como se expone también en este capítulo, la evolución de la tecnología ha alterado considerablemente las importantes métricas para evaluar la eficiencia de los algoritmos de tratamiento de señales. En los años 70, momento de aparición de nuestro primer libro, tanto la memoria como las operaciones aritméticas (multiplicaciones y también sumas en coma flotante) eran costosas, y la eficiencia de los algoritmos se juzgaba típicamente por la cantidad de recursos necesarios. En la actualidad es habitual utilizar memoria adicional para aumentar la velocidad y reducir los requisitos de potencia en la implementación de algoritmos de tratamiento de señales. En un sentido similar, las plataformas multinúcleo han hecho que en algunos contextos se favorezcan las implementaciones en paralelo de algoritmos, incluso con un coste mayor de cálculo. Frecuentemente, son el número de ciclos de intercambio de datos, las comunicaciones en el chip y los requisitos de potencia las métricas clave a la hora de elegir la estructura de implementación de un algoritmo. Como se explica en el Capítulo 9, aunque la FFT es más eficiente en términos de multiplicaciones necesarias que el algoritmo de Goertzel o el cómputo directo de la DFT, es menos eficiente que éstos si la métrica dominante es los ciclos de comunicación, ya que el cómputo directo o el algoritmo de Goertzel son mucho más paralelizables que la FFT.

Con el material presentado en los capítulos anteriores, y particularmente en los Capítulos 2, 3, 5 y 8, en el Capítulo 10 nos centramos en el análisis de Fourier de señales mediante la DFT. Sin una comprensión cuidadosa de todos los aspectos involucrados y las relaciones existentes entre la transformada de Fourier en tiempo continuo, la transformada de Fourier en tiempo discreto y la DFT, la utilización práctica de la DFT para análisis de señales puede conducir a confusiones y a falsas interpretaciones. En el Capítulo 10 nos ocupamos de algunos de estos aspectos. También consideramos en detalle el análisis de Fourier de señales con características que varían con el tiempo mediante la transformada de Fourier dependiente del tiempo. Lo nuevo de la tercera edición es una presentación más detallada del análisis mediante banco de filtros, incluyendo una ilustración de un banco de filtros de MPEG, nuevos ejemplos de análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales *chirp*, ilustrando el efecto de la longitud de la ventana, y simulaciones más detalladas del análisis del ruido de cuantificación.

El Capítulo 11 es un capítulo completamente nuevo sobre el modelado paramétrico de señales. Partiendo del concepto básico de representación de una señal como la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo, en Capítulo 11 muestra cómo se pueden obtener los parámetros del modelo de señal mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Se presentan también detalles sobre los cálculos necesarios para plantear y resolver las ecuaciones, y se ilustran con ejemplos. Se da un énfasis particular al algoritmo de solución de Levinson-Durbin y a las muchas propiedades de la solución que se obtienen fácilmente de los detalles del algoritmo, como la interpretación de filtros en celosía.

En el Capítulo 12 presentamos la transformada discreta de Hilbert. Esta transformada surge en una variedad de aplicaciones prácticas entre las que se encuentran el filtrado inverso, las representaciones complejas de señales paso banda reales, las técnicas de modulación en banda lateral única y muchas otras. Con la llegada de sistemas de comunicaciones de sofisticación cada vez mayor y la creciente riqueza de los métodos de muestreo eficiente de señales de banda ancha y multibanda, la comprensión básica de las transformadas de Hilbert está siendo cada vez más importante. La transformada de Hilbert juega también un importante papel en la presentación del cepstrum en el Capítulo 13.

Nuestro primer libro de 1975 y la primera edición de este libro en 1989 incluían una exposición detallada de la clase de técnicas no lineales denominadas análisis cepstral y deconvolución homomórfica.

Estas técnicas han cobrado una importancia creciente y, actualmente, tienen un amplio uso en aplicaciones tales como codificación de voz, reconocimiento de voz y de locutores, análisis de datos de imágenes médicas o geofísicas, y muchas otras aplicaciones en las que la deconvolución es un tema importante. En consecuencia, en esta edición reintroducimos estos temas, ampliando las explicaciones y los ejemplos. El capítulo contiene una presentación detallada de la definición y propiedades del cepstrum, y de las diversas formas de calcularlo, incluyendo nuevos resultados sobre el uso de las raíces de polinomios como base para su cálculo. El Capítulo 13 ofrece también al lector la oportunidad de conocer otras perspectivas de los fundamentos presentados en los primeros capítulos, en el contexto de una serie de técnicas no lineales de análisis de señales de creciente importancia y que se prestan a disfrutar con el mismo tipo de riqueza de análisis que las técnicas lineales. El capítulo incluye también nuevos ejemplos que ilustran el uso del filtrado homomórfico en deconvolución.

Estamos deseando utilizar esta nueva edición en nuestras clases y esperamos que nuestros colegas y estudiantes se beneficien de las muchas mejoras introducidas respecto a ediciones anteriores. El tratamiento de señales en general y el tratamiento en tiempo discreto en particular tienen una riqueza en todas sus dimensiones que prometen desarrollos futuros incluso aún más excitantes.

Alan V. Oppenheim
Ronald W. Schafer

EL SITIO WEB ASOCIADO

Mark A. Yoder y Wayne T. Padgett del Rose-Hulman Institute of Technology han desarrollado un sitio web asociado a este texto, accesible en www.pearsonhighered.com/oppenheim. Este sitio web asociado, que estará en constante evolución, está diseñado para reforzar y mejorar el material que se presenta en el libro de texto permitiendo visualizar importantes conceptos, y como un marco para disfrutar de una experiencia directa en la aplicación de los conceptos. Contiene seis elementos principales: *Live Figures (Figuras en vivo)*, *Build-a-Figures (Realización de figuras)*, *MATLAB-based homework problems (Problemas de trabajo basados en MATLAB)*, *MATLAB-based projects (Proyectos basados en MATLAB)*, *Demos (Demostraciones)* y *Traditional Homework Problems (Problemas de trabajo tradicionales)*, cada uno de ellos ligado a secciones y páginas específicas del libro.

Live Figures

El elemento *Live Figures* refuerza conceptos del texto presentando versiones "en vivo" de algunas figuras seleccionadas. De este modo, el lector puede investigar interactivamente la forma en que los parámetros y conceptos operan entre sí, utilizando gráficos y audio. *Live Figures* se ha creado con las herramientas de tratamiento de señales de NI LabVIEW. Los tres ejemplos que siguen permiten hacerse una idea de lo que se puede hacer con este elemento del sitio web.

La Figura 2.10(a)-(c) de la Sección 2.3 muestra el método gráfico de cálculo de una convolución discreta, y el resultado se muestra en la Figura 2.10(d). La correspondiente *Live Figure* permite al usuario elegir las señales de entrada y desplazar manualmente la señal invertida por la respuesta al impulso, y ver el resultado que se calcula y representa. Los usuarios pueden explorar rápidamente muchas configuraciones diferentes y entender rápidamente cómo se realiza la convolución gráfica.

La Figura 4.73 de la Sección 4.9.2 muestra la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación y de la señal tras la conformación del ruido. La *Live Figure* muestra el espectro del ruido y de la señal en forma de un archivo de audio en vivo que se reproduce. El lector puede ver y oír el ruido cuando la conformación del ruido está activa o inactiva, y cuando se aplica un filtro paso bajo para eliminar el ruido.

La Figura 5.5(a) de la Sección 5.1.2 muestra tres pulsos, cada uno con una frecuencia diferente, que se aplican a la entrada de un sistema lineal e invariante con el tiempo. La Figura 5.6 muestra la salida del sistema lineal e invariante con el tiempo. La *Live Figure* asociada permite a los estudiantes experimentar con la posición de los polos y ceros del sistema, así como con la amplitud, frecuencia y posición de los pulsos para ver el efecto sobre la salida. Son sólo tres ejemplos de las muchas *Live Figures* web disponibles en el sitio web asociado.

Build-a-Figure

El elemento *Build-a-Figure* amplía el concepto del elemento *Live Figure*. Sirve de guía para que el estudiante vuelva a crear figuras seleccionadas del texto utilizando MATLAB para reforzar la comprensión de los conceptos básicos. *Build-a-Figure* no es simplemente un conjunto de recetas para construir una figura paso a paso. Más bien se supone un conocimiento básico de MATLAB y presenta nuevos comandos y técnicas de MATLAB necesarias para crear las figuras. Esto no sólo refuerza los conceptos de tratamiento de señales, sino que también permite adquirir conocimiento del uso de MATLAB en el contexto del tratamiento de señales. Por ejemplo, las Figuras 2.3 y 2.5 de la Sección 2.1 del texto son gráficas de varias secuencias. El elemento *Build-a-Figure* correspondiente presenta las técnicas de los comandos gráficos de MATLAB para etiquetar figuras, incorporar caracteres griegos y añadir una leyenda. Elementos *Build-a-Figure* posteriores utilizan estos conocimientos como elemento necesario para crear nuevas gráficas. Los elementos *Build-a-Figure* denominados *Noise Shaping (conformación de ruido)* y *Gruop Delay (retardo de grupo)* (Figura 4.73 y Figura 5.5) incluyen instrucciones para volver a crear las *Live Figures* comentadas anteriormente. En lugar de dar instrucciones paso a paso, presentan nuevos comandos de MATLAB y sugieren procedimientos para volver a crear las figuras con considerable flexibilidad para la experimentación.

MATLAB Homework Problems

Mediante el elemento *MATLAB-based homework problems*, el sitio web asociado proporciona un mecanismo fundamental para combinar MATLAB con los ejercicios de trabajo personal. Un aspecto de esto es el uso del trabajo personal para practicar en el uso de MATLAB de forma parecida al estilo del elemento *Build-a-Figure*. Estos ejercicios se parecen mucho a ejercicios donde no hay que emplear MATLAB, pero en ellos se utiliza MATLAB para facilitar ciertas partes, como por ejemplo, la representación de resultados. La segunda vía es el uso de MATLAB para explorar y resolver problemas que no se pueden resolver mediante análisis matemático. Los problemas de MATLAB han sido todos probados en el aula, y tienden a ser ejercicios cortos, comparables a los Problemas Básicos del libro de texto, en los que se pide al usuario que complete tareas directas de tratamiento de señales utilizando MATLAB. Son problemas de un alcance modesto, que serían típicos como uno de varios ejercicios en un planteamiento de tareas a ser resueltas semanalmente. Algunos problemas están relacionados directamente con problemas analíticos del libro, mientras que otros no lo están. En muchos problemas se mezclan soluciones analíticas con MATLAB, haciendo énfasis en la complementariedad de los dos planteamientos.

MATLAB-Based Projects

El elemento *Matlab-Based Projects* contiene proyectos o ejercicios más largos y sofisticados que los problemas de trabajo personal. Los proyectos exploran conceptos importantes del libro de texto con gran profundidad y son relativamente extensos. Los proyectos están ligados con secciones del texto y se pueden utilizar una vez que la sección se ha comprendido. Por ejemplo, el primer proyecto es de naturaleza tutelar y se puede utilizar en cualquier momento. Presenta MATLAB y muestra cómo se puede

utilizar para crear y manejar señales y sistemas en tiempo discreto. Se supone que los estudiantes poseen alguna experiencia de programación, pero no necesariamente en MATLAB. Muchos otros proyectos necesitan alguna técnica de diseño de filtros y por tanto están ligados al Capítulo 7 (Técnicas de diseño de filtros) o posteriores. Exploran temas como el diseño de filtros FIR e IIR, diseño de filtros para conversión de la frecuencia de muestreo, prueba de un "Teorema popular" que asevera que las personas no son capaces de oír la fase de una señal, mejora de una señal de voz eliminando ruido, consideraciones hardware en la eliminación de ruido, estimación espectral, y más. Todos se han probado en el aula y algunos han resultado en publicaciones de los estudiantes.

Demos

Las *Demos* son demostraciones interactivas que se relacionan con capítulos específicos. A diferencia de las *Live Figures*, no están ligadas directamente a una figura dada. En vez de eso, ilustran una idea mayor que el estudiante puede entender tras completar el capítulo. Por ejemplo, una demostración muestra la importancia de utilizar un filtro de fase lineal cuando es esencial preservar la forma de un pulso de banda limitada.

Additional Traditional Homework Problems

Un sexto componente importante del sitio web es una colección de problemas que se han eliminado de la segunda edición para hacer espacio para problemas nuevos. Estos problemas se pueden utilizar como complemento a los problemas del texto. Todos ellos se proporcionan en formatos `.pdf` y `.tex`, junto con las figuras necesarias para crear el problema.

En resumen, el sitio web asociado es una rica fuente de recursos muy ligados al texto. Los recursos van desde las figuras en vivo, que refuerzan los conceptos nuevos, hasta los proyectos basados en MATLAB que desafían a los estudiantes a ir más allá del texto para explorar nuevas ideas. Este sitio web evolucionará de forma constante a medida que se desarrollen nuevos recursos para la enseñanza por parte de los autores del libro y los autores del sitio web, Mark Yoder y Wayne Padgett.

La portada

En esta tercera edición del texto *Tratamiento de señales en tiempo discreto* continuamos con el tema "ondas" de la portada como símbolo de nuestro libro y del tratamiento de señales. La portada de la primera edición era una gráfica con interpretación llena de color de una cascada espectral variante con el tiempo. En la segunda edición, la artista Vivian Berman continuó con el tema, resultando una combinación de gráficas espectrales y patrones artísticos de ondas. Al considerar posibilidades para la portada, fuimos conducidos a una sorprendente fotografía de Librado Romero en un artículo del *New York Times* (7 de mayo de 2009). El artículo de Holland Cotter titulado "Storm King Wavefield" trataba sobre el nuevo trabajo de la artista Maya Lin en el Storm King Art Center.[1] Con esta sugerencia, Kristine Carney de Pearson/Prentice-Hall produjo la bella portada de esta edición.

Para nosotros, las ondas sobre la tierra cubierta de hierba de la escultura de Maya Lin simbolizan mucho acerca del campo del tratamiento de señales y sugieren la perfecta evolución de nuestras portadas. Como indica el artículo del *New York Times*,

> "Como todo paisaje, es un trabajo en progreso. La vegetación todavía está llegando, las canalizaciones están en prueba y existen variables rebeldes: las marmotas han empezado a transformar una onda en un complejo apartamento."

Cámbiense unas pocas palabras aquí y allá, y resultará una fascinante descripción del campo del tratamiento de la señal en tiempo discreto. Tiene un bello marco sólido. Además, nuevas ideas, restricciones y oportunidades mantienen el campo fluido y dinámicamente cambiante, y siempre habrá unas cuantas "variables rebeldes". Como también indica Holland Cotter, el trabajo de Maya Lin

> "abre nuestra mirada a armonías y simetrías existentes que de otra manera se pasarían por alto."

Incluso después de más de 40 años viviendo y trabajando en el campo del tratamiento de señales, quedamos sistemáticamente sorprendidos por las armonías, simetrías y asimetrías que constantemente se revelan.

---

[1] En www.stormking.org se puede encontrar información sobre el Storm King Art Center y en www.mayalin.com. sobre Maya Lin y su bello arte.

AGRADECIMIENTOS

Esta tercera edición de *Tratamiento de señales en tiempo discreto* ha evolucionado a partir de las primeras dos ediciones (1989, 1999) que se originaron a su vez a partir de nuestro primer libro de 1975. La influencia e impacto de los muchos colegas, estudiantes y amigos que han asistido, ayudado y contribuido en esos trabajos anteriores sigue siendo evidente en esta nueva edición, y nos gustaría expresar de nuevo nuestro profundo agradecimiento a todos los que hemos agradecido en las ediciones anteriores.

Durante nuestras carreras ambos hemos tenido la buena fortuna de tener extraordinarios mentores. Cada uno de nosotros deseamos agradecer a varias personas que han tenido un importante impacto en nuestras vidas y carreras.

Al Oppenheim ha sido profundamente dirigido e influenciado como estudiante de grado y durante su carrera por el Profesor Amar Bose, el Profesor Thomas Stockham y el Dr. Ben Gold. Como profesor ayudante durante varios años, mientras era un estudiante de doctorado supervisado por el Profesor Bose, Al se sintió significativamente influenciado por las inspiradoras enseñanzas, el creativo estilo de investigación y los extraordinarios estándares característicos del Profesor Bose en todo lo que hacía. Muy pronto en su carrera, Al Oppenheim tuvo la extraordinaria fortuna de mantener una estrecha colaboración y amistad tanto con el Dr. Ben Gold como con el Profesor Thomas Stockham. El estímulo increíble y modelo a imitar proporcionados por Ben fue importante para conformar el estilo de tutela e investigación de Al. Tom Stockham también aportó una considerable tutela, ayuda y ánimo, así como una continua amistad y otro maravilloso modelo a imitar. La influencia de estos extraordinarios mentores está presente a lo largo de todo este libro.

Los más notables entre los mentores y profesores que han influido en Ron Schafer son el Profesor Levi T. Wilson, el Profesor Thomas Stockham y el Dr. James L. Flanagan. El Profesor Wilson presentó a un muchacho procedente de una pequeña cuidad las maravillas de las matemáticas y la ciencia de una forma memorable que cambió su vida. Su dedicación a la enseñanza fue una inspiración demasiado fuerte como para resistirse. El Profesor Stockham fue un gran maestro, un amigo en un momento crucial, un valioso colega y un maravilloso ingeniero creativo. Jim Flanagan es un gigante en el área de la ciencia e ingeniería de la voz, y una inspiración para todos los que han tenido la suerte de trabajar con él. No todos los grandes maestros tienen el título de “Profesor”. Él enseñó a Ron y a muchos otros el valor del

pensamiento cuidadoso, el valor de la dedicación a un campo de aprendizaje y el valor de una expresión y una forma de escribir claras y lúcidas. Ron Schafer admite haberse apropiado de muchos hábitos de pensamiento y de expresión de estos grandes mentores, con la confianza de que no les importará en absoluto.

El MIT y el Georgia Tech nos han proporcionado un estimulante entorno para la enseñanza y la investigación durante nuestras carreras académicas y también han proporcionado soporte y apoyo para este proyecto. Desde 1977, Al Oppenheim ha pasado varios años sabáticos y casi todos los veranos en el *Woods Hola Oceanographic Institution* (WHOI), y aprecia profundamente esta especial oportunidad y asociación. Ha sido durante esos periodos y en el maravilloso entorno del WHOI donde ha desarrollado una buena parte de la labor de escritura de varias ediciones de este libro.

En el MIT y en Georgia Tech, ambos hemos recibido un generoso soporte financiero de diversas fuentes. Al Oppenheim está extremadamente agradecido por el soporte del Ray Stata y a Analog Devices, Inc., a la Fundación Bose y a la Fundación Ford por su generosa y continuada ayuda a las actividades de tratamiento de la señal en el MIT. Ambos hemos disfrutado también del soporte de Texas Instruments, Inc. tanto para nuestra labor en la enseñanza como en las actividades de investigación. En particular, Gene Franzs de Texas Instruments ha constituido un constante soporte dedicado a nuestro trabajo en la educación sobre tratamiento digital de señales, en general en ambas instituciones académicas. Ron Schafer también desea expreasar su agradecimiento a la fundación *John and Mary Franklin Foundation*, que patrocinan la Cátedra Marilu McCarty en el Georgia Tech. Demetrius Paris, largo tiempo director de la School of ECE en el Georgia Tech, y W. Kelly Mosley y Marilu McCarty de la Fundación Franklin, merecen un agradecimiento especial por su amistad y apoyo a lo largo de estos 30 años. Ron Schafer agradece la oportunidad de ser parte del equipo de investigación de Hewlett-Packard Laboratories, primero mediante una ayuda a la investigación en el Georgia Tech y, desde 2004, como HP Fellow. La tercera edición no se podría haber completado sin el ánimo y apoyo de los Directores de HP Fred Kitson, Susie Wee y John Apostolopoulos.

Nuestra relación con Prentice Hall Inc. empezó hace muchos años con nuestro primer libro publicado en 1975 y ha continuado durante las tres ediciones de este libro, así como con otro libros. Nos sentimos afortunados por haber trabajado con Prentice. El apoyo y soporte a esta edición que nos han proporcionado, Marcia Horton y Tom Robbins durante este y muchos otros proyectos de textos y de Michael McDonald, Andrew Gilfillan, Scott Disano y Clare Romeo en esta edición han aumentado significativamente el placer de escribir y completar este proyecto.

Como en ediciones anteriores, al producir la tercera edición, hemos tenido la suerte de recibir ayuda de muchos colegas, estudiantes y amigos. Apreciamos enormemente su generosidad al dedicar su tiempo para ayudarnos en este proyecto. Deseamos dar las gracias específicamente a:

El profesor John Buck por su importante papel en la preparación de la segunda edición y por el tiempo y esfuerzo dedicados durante el desarrollo de esa edición.

Los profesores Vivek Goyal, Jae Lim, Gregory Wornell, Victor Zue y los doctores Babak Ayazifar, Soosan Beheshti y Charles Rohrs que han utilizado varias ediciones en sus clases en el MIT y han hecho muchos comentarios y sugerencias de utilidad.

Los profesores Tom Barnwell, Russ Mersereau y Jim McClellan, amigos desde hace mucho tiempo y colegas de Ron Schafer, que han empleado frecuentemente varias ediciones en sus clases y han influido en muchos aspectos de este libro.

El profesor Bruce Black del Rose-Hulman Institute of Technology por organizar cuidadosamente el valor de diez años de nuevos problemas, seleccionando los mejores, y actualizándolos e integrándolos en los capítulos.

Los profesores Mark Yoder y Wayne Padgett por el desarrollo de un destacado sitio web asociado para esta edición.

Ballard Blair por su ayuda en la actualización de la bibliografía.

Eric Strattman, Darla Secor, Diane Wheeler, Stacy Schultz, Kay Gilstrap y Charlotte Doughty por su ayuda administrativa en la preparación de esta revisión y su apoyo constante en nuestras actividades en el campo de la enseñanza.

Tom Baran por su ayuda en muchos aspectos computacionales asociados con el manejo de los archivos de esta edición y por su importante ayuda con los ejemplos en algunos capítulos.

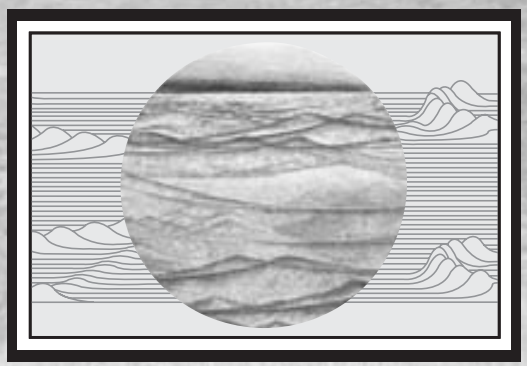
Shay Maymon, quien leyó meticulosamente la mayoría de los capítulos, trabajó los problemas de los capítulos más avanzados e hizo importantes correcciones y sugerencias.

Todos los que han ayudado en la revisión cuidadosa del manuscrito y las pruebas de imprenta: Berkin Bilgic, Albert Chang, Myung Jin Choi, Majid Fozunbal, Reeve Ingle, Jeremy Leow, Ying Liu, Paul Ryu, Sanquan Song, Dennis Wei y Zahi Karam.

Y a los muchos profesores ayudantes que han influido en esta edición directa o indirectamente mientras trabajan con nosotros enseñando esta materia en el MIT y en Georgia Tech.

1

Introducción



La rica historia y la promesa de futuro del tratamiento de señales proceden de una fuerte sinergia entre aplicaciones cada vez más sofisticadas, nuevos desarrollos teóricos y nuevas arquitecturas y plataformas hardware en constante evolución. Las aplicaciones del tratamiento de señales se extienden sobre un amplio conjunto de disciplinas entre las que se encuentran el ocio, las comunicaciones, la exploración del espacio, la medicina, la arqueología y la geofísica, por nombrar unas cuantas. Existe un amplio conjunto de sistemas donde son de especial importancia algoritmos sofisticados y hardware para tratamiento de señales, desde sistemas militares altamente especializados, pasando por aplicaciones industriales, hasta llegar a la electrónica de consumo, de bajo coste y altos volúmenes de ventas. Aunque de forma rutinaria vemos como cotidianas las extraordinarias prestaciones de los sistemas multimedia, como el vídeo de alta definición, el audio de alta fidelidad y los juegos interactivos, estos sistemas siempre han estado fuertemente basados en el estado del arte del tratamiento de señales. En el núcleo de los teléfonos móviles modernos hay siempre un sofisticado procesador de señales digitales. Los estándares MPEG para audio y vídeo y JPEG[1] para compresión de imágenes descansan en buena medida en muchos principios y técnicas de tratamiento de señales que se consideran en este libro. Los dispositivos de almacenamiento de datos de alta densidad y las nuevas memorias de estado sólido se basan cada vez más en el uso del tratamiento de señales para dar consistencia y robustez a tecnologías en esencia frágiles. En conjunto, si observamos el futuro, es claro que el papel que juega el tratamiento de señales se está acelerando, conducido en parte por la convergencia de las comunicaciones, los computadores y el tratamiento de señales tanto en el área de consumo como en las aplicaciones industriales avanzadas y en aplicaciones gubernamentales.

El creciente número de aplicaciones y la demanda de algoritmos de sofisticación creciente va de la mano con la rápida marcha de la tecnología de dispositivos para la implementación de sistemas de tratamiento de señales. Algunas estimaciones, incluso con las inminentes limitaciones impuestas

[1]Los acrónimos MPEG y JPEG son términos utilizados ya incluso en conversaciones cotidianas para referirse a los estándares desarrollados por el "Moving Picture Expert Group (MPEG)" y el "Joint Photographic Expert Group (JPEG)" de la "International Organization for Standardization (ISO)".

por la Ley de Moore, indican que la capacidad de proceso tanto de los microprocesadores específicos para tratamiento de señales como de los ordenadores personales se incrementará en varios órdenes de magnitud en los próximos diez años. Parece claro que en muchos aspectos la importancia y el papel del tratamiento de señales seguirá creciendo a un ritmo acelerado en el futuro.

El tratamiento de señales trata de la representación, transformación y manipulación de señales y de la información que contienen. Por ejemplo, podríamos desear separar dos o más señales que se han combinado mediante alguna operación como la suma, la multiplicación o la convolución, o podríamos querer realzar alguna componente de la señal o estimar algún parámetro de un modelo de señal. Generalmente, en los sistemas de comunicaciones es necesario realizar procesos previos como modulación, acondicionamiento de señal y compresión antes de realizar la transmisión por un canal y realizar después un procesado posterior en el receptor. Antes de los años sesenta, la tecnología para el tratamiento de señales era casi exclusivamente tecnología analógica en tiempo continuo.[2] Un desplazamiento continuado e importante hacia las tecnologías digitales ha producido una rápida evolución de los computadores y los microprocesadores digitales y chips de bajo coste para la conversión analógico digital (A/D) y digital-analógica (D/A). Estos desarrollos de la tecnología han impulsado a su vez muchos desarrollos teóricos como el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT)[3], el modelado paramétrico de señales, las técnicas multitasa, la implementación de filtros polifásicos y nuevas formas de representar señales, como los desarrollos basados en *wavelet*.[4] Como un ejemplo de este movimiento los sistemas analógicos de comunicación por radio han evolucionado hacia sistemas "radio software" reconfigurables, implementados prácticamente en su totalidad mediante computación digital.

El tratamiento de señales en tiempo discreto se basa en el procesamiento de secuencias numéricas indexadas con variables enteras en vez de utilizar funciones de variable independiente continua. En el tratamiento digital de señales (TDS) las señales se representan mediante secuencias de números de precisión finita y el proceso se realiza mediante cómputo digital. El término más general *tratamiento de señales en tiempo discreto* incluye el tratamiento digital de señales como un caso especial, pero incluye también la posibilidad de que las secuencias de muestras (datos muestreados) sean procesados con otras tecnologías en tiempo discreto. A menudo la distinción entre los términos tratamiento de señales en tiempo discreto y tratamiento digital de señales es de poca importancia, ya que ambos tratan con señales en tiempo discreto. Esto es particularmente cierto cuando se emplea cómputo de alta precisión. Aunque hay muchos ejemplos en los que las señales que se van a procesar son ya de por sí secuencias en tiempo discreto, la mayoría de las aplicaciones requieren el uso de la tecnología de tiempo discreto para procesar señales originadas en tiempo continuo. En este caso, las señales en tiempo continuo se convierten en una secuencia de muestras, es decir, en señales en tiempo discreto. De hecho, uno de los mayores impulsos para la aplicación generalizada del tratamiento digital de señales fue el desarrollo de chips de bajo coste para la conversión A/D y D/A basados en cuantificación diferencial con conformación de ruido. Tras el proceso en tiempo discreto, las secuencias de salida se vuelven a convertir en señales en tiempo continuo. A menudo es deseable que esos sistemas funcionen en tiempo real. A medida que aumenta la velocidad de los computadores, el tratamiento en tiempo discreto y en tiempo real de señales en tiempo continuo es práctica común en sistemas de comunicaciones, radar y sonar, codificación y mejora de voz y vídeo, ingeniería biomédica y muchas otras áreas de aplicación. Las aplicaciones que no funcionan en tiempo real son también muy comunes. Un reproductor de discos compactos y un reproductor MP3 son ejemplos de sistemas asimétricos en el sentido de que la señal de entrada se procesa sólo una vez.

---

[2] En un contexto general, típicamente nos referiremos a la variable independiente como "tiempo", incluso aunque en contextos específicos la variable independiente pueda tomar uno cualquiera de un amplio conjunto de posibles dimensiones. En consecuencia, tiempo continuo y tiempo discreto se deben ver sólo como términos genéricos que se refieren a una variable independiente continua o discreta, respectivamente.

[3] Se utilizarán las siglas inglesas FFT (Fast Fourier Transform) por ser de aplicación común en este campo *(N. del T.)*.

[4] Se ha preferido dejar el término en inglés, por ser de amplia utilización en la comunidad científica *(N. del T.)*.

El procesado inicial puede realizarse en tiempo real, más despacio que en tiempo real, o incluso más rápido que en tiempo real. La forma procesada de la entrada se almacena (en un disco compacto o en una memoria de estado sólido) y el procesamiento final para reconstruir la señal de audio se realiza en tiempo real cuando la salida se reproduce para ser escuchada. Los sistemas de grabación y reproducción de discos compactos y MP3 se basan en muchos conceptos de tratamiento de señales que presentamos en este libro.

La ingeniería financiera representa otro campo de fuerte crecimiento que incorpora muchos conceptos y técnicas de tratamiento de señales. El modelado, predicción y filtrado efectivos de datos económicos puede producir mejoras significativas en los resultados económicos y en la estabilidad. Por ejemplo, los gestores de carteras de inversiones utilizan cada vez más métodos sofisticados de tratamiento de señales, ya que incluso incrementos muy pequeños en la predictibilidad de las señales o de la relación señal ruido (SNR)[5] puede producir mejoras muy significativas.

Otra área importante del tratamiento de señales es la *interpretación de señales*. En estos problemas el objetivo del proceso es obtener una caracterización de la señal de entrada. Por ejemplo, en un sistema de reconocimiento o comprensión de voz el objetivo es interpretar la señal de entrada o extraer información de la misma. Típicamente, un sistema como ese aplicará un procesado previo digital (filtrado, estimación de parámetros, etc.) seguido por un sistema de reconocimiento de patrones que produce una representación simbólica, como por ejemplo una transcripción fonémica de la voz. Esta salida simbólica puede ser a su vez la entrada de un sistema de tratamiento simbólico, como un sistema experto basado en reglas, que proporciona la interpretación final de la señal.

Hay todavía otra categoría relativamente nueva de técnicas de tratamiento de señales en las que se realiza la manipulación simbólica de expresiones. Este tipo de tratamiento es particularmente útil en estaciones de trabajo dedicadas al tratamiento de señales y en el diseño asistido por computador de sistemas de tratamiento de señales. En este caso las señales y los sistemas se representan y se manejan como objetos abstractos de datos. Los lenguajes de programación orientada a objetos proporcionan un entorno conveniente para manejar señales, sistemas y expresiones de tratamiento de señales sin evaluar explícitamente las secuencias de datos. La sofisticación de los sistemas diseñados para realizar tratamiento de expresiones de señales está influenciada directamente por la incorporación de conceptos, teoremas y propiedades fundamentales del tratamiento de señales como los que forman las bases de este libro. Por ejemplo, un entorno de tratamiento de señales que incorpora la propiedad de que la convolución en el dominio del tiempo corresponde a multiplicación en el dominio de la frecuencia puede explorar diversas disposiciones de estructuras de filtros, incluyendo aquellas que utilizan directamente la transformada discreta de Fourier (DFT) [6] y el algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT). Análogamente, los entornos que incorporan la relación entre la frecuencia de muestreo y el solapamiento pueden hacer uso efectivo de las estrategias de diezmado e interpolación para la implementación de filtros. Actualmente se están explorando ideas similares para realizar tratamiento de señal en entornos de red. En este tipo de entornos, los datos se pueden etiquetar potencialmente con una descripción de alto nivel del procesamiento a realizar y los detalles de la implementación se pueden basar dinámicamente en los recursos disponibles en la red.

Muchos conceptos y técnicas de diseño que se presentan en este libro están actualmente incorporados en la estructura de sofisticados sistemas software como MATLAB, Simulink, Mathematica y labVIEW. En muchos casos en los que las señales en tiempo discreto se adquieren y almacenan en computadores, estas herramientas permiten realizar operaciones de tratamiento de señales extremadamente complejas, construidas utilizando funciones básicas. En esos casos, generalmente no es necesario conocer los detalles del algoritmo que realiza el cómputo de una operación como la FFT, pero es esencial

[5] Se utilizarán las siglas inglesas SNR (Signal to Noise Ratio) por ser de aplicación común en este campo *(N. del T.)*.

[6] Se utilizarán las siglas inglesas DFT (Discrete Fourier Transform) por ser de aplicación común en este campo *(N. del T.)*.

entender lo que se está calculando y cómo se debe interpretar. En otras palabras, es esencial una correcta comprensión de los conceptos considerados en este texto para realizar un uso inteligente de las herramientas software para tratamiento de señales que hoy en día están ampliamente disponibles.

Los problemas de tratamiento de señales no están confinados, por supuesto, a señales unidimensionales. Aunque hay algunas diferencias fundamentales entre las teorías del tratamiento de señales unidimensionales y multidimensionales, una buena parte del material que presentamos en este libro tiene su contrapartida directa en el ámbito de los sistemas multidimensionales. La teoría del tratamiento digital de señales multidimensionales se presenta con detalle en los libros de Dudgeon y Mersereau (1984), Lim (1989) y Bracewell (1994).[7] En muchas aplicaciones de tratamiento de imagen se requiere el uso de técnicas de tratamiento de señales bidimensionales. Es el caso de áreas como la codificación de vídeo, imágenes médicas, mejora y análisis de fotografías aéreas, análisis de fotografías de satélites meteorológicos, y mejora de transmisiones de vídeo de sondas lunares y del espacio profundo. Las aplicaciones del tratamiento de señales mutidimensionales al tratamiento de imagen se presentan, por ejemplo en Macowski (1983), Castleman (1996), Jain (1989), Bovic (ed.) (2005), Woods (2006), Gonzalez y Woods (2007) y Pratt (2007). El análisis de datos sísmicos que se requiere en aplicaciones de exploración petrolífera, medición de terremotos, y monitorización de pruebas nucleares utiliza también técnicas de tratamiento de señales multidimensionales. Las aplicaciones sísmicas se presentan, por ejemplo, en Robinson y Treitel (1980) y en Robinson y Durrani (1985).

El tratamiento de señales multidimensionales es sólo uno de los muchos temas avanzados y especializados que se basan en los fundamentos que se presentan en este libro. El análisis espectral que se basa en el uso de la DFT y el uso del modelado de señales es otro aspecto particularmente rico e importante del tratamiento de señales. Presentaremos muchas facetas de este tema en los Capítulos 10 y 11, enfocándonos en los conceptos y técnicas básicas relacionados con el uso de la DFT y el modelado paramétrico de señales. En el Capítulo 11 presentaremos con algún detalle los métodos de análisis espectral de alta resolución basados en representar la señal que se va a analizar como la respuesta de un filtro en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo (LTI) a un impulso o a ruido blanco. El análisis espectral se realiza estimando los parámetros (es decir, los coeficientes de la ecuación en diferencias) del sistema y calculando el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro del modelo. En los libros de Kay (1988), Marple (1987), Therrien (1992), Hayes (1996) y Stoica y Moses (2005) se pueden encontrar presentaciones detalladas sobre análisis espectral.

El modelado de señales tiene también un papel importante en la compresión y codificación de datos, y de nuevo los fundamentos sobre ecuaciones en diferencias proporcionan la base para entender muchas de estas técnicas. Por ejemplo, una clase de técnicas de codificación de señales denominada codificación predictiva lineal (LPC - *Linear Predictive Coding*) explota la noción de que si una señal es la respuesta de cierta clase de filtros en tiempo discreto, el valor de la señal en cualquier índice temporal es una función lineal (y por tanto predecible) de los valores anteriores. En consecuencia, se pueden obtener representaciones eficientes de señales estimando esos parámetros de predicción y utilizándolos junto con el error de predicción para representar las señales. Dichas señales se pueden volver a generar cuando sea necesario a partir de los parámetros del modelo. Esta clase de técnicas de codificación de señales ha sido particularmente efectiva en codificación de voz y se describe con considerable detalle en Jayant y Noll (1984), Markel y Gray (1976), Rabiner y Schafer (1978) y Quatieri (2002).

Otro tema avanzado de importancia considerable es el tratamiento adaptativo de señales. Los sistemas adaptativos representan una clase particular de sistemas variantes con el tiempo y, en cierto sentido, no lineales, con amplia aplicación y con técnicas efectivas y bien establecidas para su diseño y análisis. De nuevo, muchas de estas técnicas se basan en los fundamentos del tratamiento de señales en tiempo

[7] Los nombres de los autores y las fechas que se utilizan en el libro se refieren a libros y artículos que se recogen en la bibliografía al final del texto.

discreto que se presentan en este libro. Los detalles sobre el tratamiento adaptativo de señales se pueden encontrar en Widrow y Stearns (1985), Haykin (2002) y Sayed (2008).

Éstos representan sólo algunos de los muchos temas avanzados que van más allá de la materia que se presenta en este libro. Entre otros podemos citar los procedimientos de diseño de filtros avanzados y especializados, una variedad de algoritmos especializados para la evaluación de la transformada de Fourier, estructuras especializadas de filtros y técnicas avanzadas de tratamiento de señales multitasa, incluyendo bancos de filtros y transformadas *wavelet* (para una introducción a estos temas, véanse Burrus, Gopinath y Guo (1997), Vaidyanathan (1993) y Vetterli y Kovacević (1995)).

A menudo se dice que el propósito de un libro de texto fundamental debería ser descubrir una materia más bien que cubrirla. Al escoger los temas y la profundidad de su tratamiento en este libro nos ha guiado esta filosofía. La breve presentación anterior y la bibliografía que aparece al final del libro deja perfectamente clara la rica variedad de desafíos teóricos e interesantes aplicaciones que pueden ser descubiertos por aquellos que se preparen diligentemente con el estudio de los fundamentos del tratamiento digital de señales.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

El tratamiento de señales en tiempo discreto ha avanzado con pasos desiguales a lo largo del tiempo. Mirando hacia atrás en el desarrollo de este campo podemos obtener una valiosa perspectiva de los fundamentos que permanecerán en el núcleo en el futuro. Desde la invención del cálculo en el siglo XVII, los científicos e ingenieros han desarrollado modelos para representar fenómenos físicos en términos de funciones de variable continua y ecuaciones diferenciales. Sin embargo, se han utilizado técnicas numéricas para resolver estas ecuaciones cuando no es posible obtener una solución analítica. De hecho, Newton utilizó métodos de diferencias finitas que son casos especiales de algunos sistemas en tiempo discreto que presentamos en este libro. Los matemáticos del siglo XVIII, como Euler, Bernouilli y Lagrange desarrollaron métodos de integración e interpolación numérica de funciones de variable continua. Una interesante investigación histórica realizada por Heideman, Johnson y Burrus (1984) demostró que Gauss descubrió el principio fundamental de la transformada rápida de Fourier (que se presenta en el Capítulo 9) ya en 1805, incluso antes de la publicación del tratado de Fourier sobre la representación de funciones mediante series armónicas.

Hasta principios de los años 50 el tratamiento de señales como ha sido definido se hacía generalmente con sistemas analógicos que se implementaban con circuitos electrónicos o incluso con dispositivos mecánicos. Aunque los computadores digitales estaban ya disponibles en entornos de negocios y en laboratorios científicos, eran caros y de capacidad relativamente limitada. Por esa época, la necesidad de un tratamiento de señales más sofisticado en algunas áreas de aplicación creó un considerable interés en el tratamiento de señales en tiempo discreto. Uno de los primeros usos de los computadores digitales en el tratamiento digital de señales fue en la exploración geofísica, donde se grababan señales sísmicas de frecuencia relativamente baja en cinta magnética para su procesamiento posterior. Este tipo de tratamiento de señales no se podía realizar en general en tiempo real; a menudo eran necesarios minutos o incluso horas de tiempo de computador para procesar sólo algunos segundos de datos. Incluso así, la flexibilidad del computador digital y los potenciales beneficios económicos hicieron esta alternativa extremadamente interesante.

También durante los años 50, el uso de los computadores digitales en el tratamiento de señales surgió de una forma diferente. Debido a la flexibilidad de los computadores digitales, a menudo resultaba útil simular un sistema de tratamiento de señales en un computador digital antes de implementarlo utilizando un hardware analógico. De este modo, un nuevo algoritmo o sistema para tratamiento de señales se podía estudiar en un entorno experimental flexible antes de comprometer recursos económicos y de

ingeniería para realizarlo. Ejemplos típicos de esas simulaciones fueron las simulaciones del vocoder realizadas en el Laboratorio Lincoln del Instituto de Tecnología de Massachusetts y en los Laboratorios Bell Telephone. En la implementación de un vocoder analógico de canales, por ejemplo, las características de los filtros afectaban a la calidad percibida de las señales de voz en formas que eran difíciles de cuantificar objetivamente. Mediante las simulaciones en computador, se pudieron ajustar las características de los filtros y la calidad percibida del sistema de codificación de voz previamente a la construcción del equipo analógico.

En todos estos ejemplos de tratamiento de señales mediante computadores digitales, el computador ofrecía tremendas ventajas de flexibilidad. Sin embargo, el procesamiento no se podía realizar en tiempo real. En consecuencia, una actitud que prevaleció era que el computador digital se utilizaba para *aproximar* o *simular* un sistema de tratamiento de señales analógicas. De acuerdo con ese estilo, los primeros trabajos en filtrado digital se dedicaron en buena parte a las formas en las que se podía programar un filtro en un computador digital de manera que con una conversión analógico-digital de la señal, seguida por un filtrado digital y seguida por una conversión digital-analógico, el sistema completo se aproximara a un buen filtro analógico. La noción de que los sistemas digitales podrían de hecho ser prácticos para la implementación en tiempo real del tratamiento de señales necesario en comunicaciones de voz, procesado radar, y cualquier otra aplicación dentro de un amplio conjunto parecía, incluso en los momentos más optimistas, ser altamente especulativa. La velocidad, el coste y el tamaño eran, por supuesto, tres factores importantes a favor del uso de componentes analógicos.

Cuando las señales se procesaron en computadores digitales, los investigadores tuvieron una tendencia natural a experimentar con algoritmos de tratamiento de señales de complejidad creciente. Algunos de esos algoritmos surgieron de la flexibilidad de los computadores digitales y no tenían aparentemente implementaciones prácticas con componentes analógicos. Por tanto, muchos de esos algoritmos se consideraron como ideas interesantes pero poco prácticas. Sin embargo, el desarrollo de esos algoritmos hizo incluso más tentadora la noción de una implementación completamente digital de los sistemas de tratamiento de señales. Comenzaron trabajos activos de investigación en vocoders digitales, analizadores digitales de espectro y otros sistemas completamente digitales, con la esperanza de que, finalmente, esos sistemas pudieran llegar a ser prácticos.

La evolución de un nuevo punto de vista hacia el tratamiento de señales en tiempo discreto se aceleró más con el descubrimiento de Cooley y Tukey (1965) de un algoritmo eficiente para al cálculo de transformadas de Fourier. Esta clase de algoritmos se conocen con el nombre de transformada rápida de Fourier, o FFT. La FFT fue importante por varias razones. Muchos algoritmos de tratamiento de señales desarrollados en computadores digitales requerían tiempos de proceso varios órdenes de magnitud superiores al tiempo real. Frecuentemente eso era debido a que el análisis espectral era un componente importante del proceso de tratamiento de las señales y no existía una forma eficiente de implementarlo. El algoritmo de la FFT redujo en órdenes de magnitud el tiempo de cómputo de la transformada de Fourier, permitiendo así la implementación de algoritmos de tratamiento de señales de complejidad creciente, con tiempos de proceso que permitían la experimentación interactiva con el sistema. Además, al darse cuenta de que los algoritmos de la FFT podrían, de hecho, ser realizables utilizando hardware digital de propósito específico, muchos algoritmos de tratamiento digital de señales que previamente eran impracticables comenzaron a verse como posibles implementaciones prácticas.

Otra implicación importante del algoritmo de la FFT fue que se trataba de un concepto inherentemente de tiempo discreto. Estaba dirigido hacia el cálculo de la transformada de Fourier de una señal en tiempo discreto o secuencia, y utilizaba propiedades y conceptos matemáticos que eran exactos en el dominio discreto, es decir, no eran simplemente una aproximación a la transformada de Fourier en tiempo continuo. Esto tuvo el efecto de estimular una reformulación de muchos conceptos y algoritmos de tratamiento de señales en términos de matemáticas de tiempo discreto, y estas técnicas formaron después una serie de relaciones exactas en el dominio del tiempo discreto. Siguiendo con este alejamiento

de la idea de que el tratamiento de señales en un computador digital era meramente una aproximación a las técnicas analógicas de tratamiento de señales, surgió la visión actual del tratamiento de señales en tiempo discreto como un campo importante de investigación por derecho propio.

Otro desarrollo importante en la historia del tratamiento de señales en tiempo discreto ocurrió en el terreno de la microelectrónica. El descubrimiento y la posterior proliferación de los microprocesadores preparó el terreno para las implementaciones de bajo coste de los sistemas de tratamiento de señales en tiempo discreto. Aunque los primeros microprocesadores eran demasiado lentos para implementar en tiempo real la mayoría de los sistemas en tiempo discreto, excepto a frecuencias de muestreo muy bajas, a mediados de los 80 la tecnología de circuitos integrados había avanzado hasta el punto de permitir la realización de microcomputadores en coma fija y en coma flotante con arquitecturas especialmente diseñadas para implementar algoritmos de tratamiento de señales en tiempo discreto. Con esta tecnología llegó, por primera vez, la posibilidad de una amplia aplicación de las técnicas de tratamiento de señales en tiempo discreto. El rápido incremento del desarrollo de los microprocesadores impactó también de forma significativa en desarrollos alternativos de algoritmos de tratamiento de señales. Por ejemplo, en los inicios de los dispositivos de tratamiento de señales digitales en tiempo real, la memoria tenía un coste relativamente elevado y una de las métricas importantes en el desarrollo de algoritmos de tratamiento de señales era un uso eficiente de la memoria. Actualmente, la memoria digital es tan barata que muchos algoritmos incorporan intencionadamente más memoria que la mínima requerida, de forma que se reducen los requisitos de potencia del procesador. Otra área en la que las limitaciones tecnológicas supusieron una importante barrera para el amplio desarrollo del tratamiento digital de señales fue la de la conversión de señales analógicas a señales en tiempo discreto (digitales). Los primeros conversores A/D y D/A eran dispositivos separados con un coste de miles de dólares. Combinando la teoría de tratamiento digital de señales con la tecnología de microelectrónica, los conversores A/D y D/A que utilizan sobremuestreo, y que cuestan sólo unos pocos dólares o menos, han hecho posible un gran número de aplicaciones en tiempo real.

De forma similar, minimizar el número de operaciones aritméticas, como multiplicaciones o sumas en coma flotante, es ahora menos esencial, ya que los procesadores multinúcleo disponen a menudo de varios multiplicadores, y lo que cobra ahora mayor importancia es reducir la comunicación entre núcleos, incluso aunque así se requieran más multiplicaciones. Por ejemplo, en un entorno multinúcleo, el cálculo directo de la DFT (o el uso del algoritmo de Goertzel) es más "eficiente" que el uso del algoritmo de la FFT ya que, aunque se requieren más multiplicaciones, los requisitos de comunicación se reducen notablemente debido a que el cómputo se puede distribuir más eficientemente entre múltiples procesadores o núcleos. De forma amplia, la reestructuración de algoritmos o el desarrollo de algoritmos nuevos que exploten la oportunidad del procesamiento paralelo o distribuido está convirtiéndose en una nueva e importante dirección en el desarrollo de algoritmos de tratamiento de señales.

PROMESA DE FUTURO

Los ingenieros en microelectrónica continúan esforzándose por incrementar la densidad de los circuitos y los rendimientos de producción y como resultado, la complejidad y la sofisticación de los sistemas microelectrónicos está creciendo continuamente. La complejidad y la capacidad de los chips de tratamiento digital de señales ha crecido exponencialmente desde principios de los 80 y no muestra signos de ralentizarse. A medida que las técnicas de integración de obleas se vayan desarrollando progresivamente, se implementarán sistemas de tratamiento de señales con bajo coste, tamaño miniaturizado, y bajo consumo de potencia. Además, tecnologías como la de sistemas mecánicos microelectrónicos (MEMS) permiten fabricar muchos tipos de sensores diminutos cuyas salidas necesitarán ser procesadas utilizan-

do técnicas de tratamiento digital de señales que funcionen en arrays [8] En consecuencia, la importancia del tratamiento de señales en tiempo discreto continuará aumentando y los futuros desarrollos en este campo prometen ser incluso más importantes que los que ya hemos descrito.

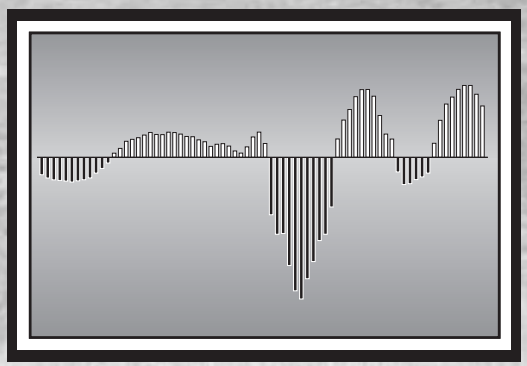
Las técnicas de tratamiento de señales en tiempo discreto ya están promoviendo avances revolucionarios en algunas áreas de aplicación. Un ejemplo notable es el área de las telecomunicaciones, en la que las técnicas de tratamiento de señales en tiempo discreto, la tecnología de microelectrónica, y la transmisión por fibra óptica se han combinado para cambiar la naturaleza de los sistemas de comunicaciones de forma verdaderamente revolucionaria. Un impacto similar se puede esperar en muchas otras áreas de la tecnología. Las necesidades de un nuevo campo de aplicación se pueden solventar algunas veces utilizando conocimiento adaptado de otras aplicaciones, pero con frecuencia, las nuevas aplicaciones requieren estimular el desarrollo de nuevos algoritmos y nuevos sistemas hardware para implementarlos. Ya desde un principio, las aplicaciones en sismología, radar y comunicaciones proporcionaron el contexto para desarrollar muchas técnicas de tratamiento de señales que forman el núcleo tratado en este libro. Con total certeza, el tratamiento de señales permanecerá en el corazón de aplicaciones en defensa, ocio, comunicaciones, y cuidado médico y diagnóstico. Recientemente se han visto aplicaciones de las técnicas de tratamiento de señales en áreas tan diferentes como las finanzas y el análisis de secuencias de ADN.

Aunque es difícil predecir dónde surgirán nuevas aplicaciones, sin duda serán obvias para aquellos que estén preparados para reconocerlas. La clave para estar preparado para resolver nuevos problemas de tratamiento de señales es, y siempre ha sido, un conocimiento profundo de los fundamentos matemáticos de señales y sistemas, así como en el diseño asociado y en algoritmos de procesamiento. Aunque el tratamiento de señales en tiempo discreto es un campo dinámico y rápidamente creciente, sus fundamentos están bien establecidos, y es de un valor inestimable aprenderlos correctamente. Nuestra meta con este libro es descubrir los fundamentos de este campo proporcionando un tratamiento coherente de la teoría de sistemas lineales en tiempo discreto, filtrado, muestreo, análisis de Fourier en tiempo discreto y modelado de señales. Los temas que se presentan proporcionarán al lector los conocimientos necesarios para apreciar el amplio rango de aplicaciones del tratamiento de señales en tiempo discreto y las bases para contribuir a los futuros desarrollos en este excitante campo.

[8] El término array se refiere a una disposición, habitualmente lineal o rectangular, de dispositivos. Se ha preferido mantener el término inglés, de uso común en su ámbito de aplicación *(N. del T.)*.

2

Señales y sistemas en tiempo discreto



2.0. INTRODUCCIÓN

El término *señal* señal se aplica generalmente a algo que lleva información. Las señales llevan generalmente información sobre el estado o el comportamiento de un sistema físico y a menudo se sintetizan señales con el propósito de comunicar información entre seres humanos o entre seres humanos y máquinas. Aunque las señales se pueden representar de muchas formas, en todos los casos la información está contenida en algún patrón de variaciones. Las señales se representan matemáticamente como funciones de una o más variables independientes. Por ejemplo, una señal de voz se representa matemáticamente como una función del tiempo, y una imagen fotográfica se representa como una función del brillo respecto a dos variables espaciales. Una convención común, que seguiremos en este libro, es referirse a la variable independiente de la representación matemática de la señal como el tiempo, aunque en ejemplos específicos la variable independiente puede no representar de hecho el tiempo.

La variable independiente de la representación matemática de una señal puede ser continua o discreta. Las *señales en tiempo continuo* se definen en un continuo temporal y se representan por tanto con una variable independiente continua. Las señales en tiempo continuo se denominan frecuentemente *señales analógicas*. Las *señales en tiempo discreto* se definen en instantes discretos del tiempo y, por tanto, la variable independiente toma valores discretos, es decir, los instantes discretos del tiempo se representan como secuencias de números. Señales como la voz o la imagen pueden tener una representación utilizando tanto variables continuas como discretas y, si se mantienen ciertas condiciones, ambas representaciones son completamente equivalentes. Además del carácter continuo o discreto de la variable independiente, la amplitud de la señal puede ser también continua o discreta. Las *señales digitales* son aquellas que son discretas tanto en el tiempo como en la amplitud.

Los sistemas de tratamiento de señales se pueden clasificar de una forma similar a las señales. Es decir, los sistemas en tiempo continuo son aquellos para los que tanto la entrada como la salida son señales en tiempo continuo, y los sistemas en tiempo discreto son aquellos para los que tanto la entrada como la salida son señales en tiempo discreto. Análogamente, un sistema digital es aquel para el que tanto la en-

trada como la salida son señales digitales. El tratamiento digital de señales trata, entonces, de la transformación de señales que son discretas tanto en tiempo como en amplitud. El objetivo principal de este libro no es las señales y sistemas digitales, sino las señales y sistemas en tiempo discreto. Sin embargo, la teoría de señales y sistemas en tiempo discreto es también extremadamente útil para su aplicación en señales y sistemas digitales, particularmente si la amplitud de las señales está cuantificada finamente. Los efectos de la cuantificación de la amplitud de las señales se considerarán en las secciones 4.8, 6.7–6.10 y 9.7.

En este capítulo se presentan las definiciones básicas, se establece la notación y se desarrollan y revisan los conceptos básicos asociados a las señales y sistemas en tiempo discreto. La presentación de los contenidos asume que el lector ya ha tenido un contacto anterior con este material, aunque quizá con énfasis y notación diferente. Por tanto, el objetivo principal de este capítulo es sentar una base común para los contenidos que se presentan en los capítulos siguientes. La Sección 2.1 trata de la representación de las señales en tiempo discreto como secuencias y en ella se describen las secuencias básicas como el impulso unidad, el escalón unidad y la exponencial compleja, que tienen un papel central en la caracterización de los sistemas en tiempo discreto y en la constitución de bloques para formar secuencias más generales.

En la Sección 2.2 se presentan la representación, propiedades básicas y ejemplos simples de sistemas en tiempo discreto. Las Secciones 2.3 y 2.4 se centran en la clase importante de sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI) y en su representación en el dominio del tiempo mediante la suma de convolución. La Sección 2.5 considera la clase específica de sistemas LTI representados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. La Sección 2.6 desarrolla la representación de sistemas discretos en el dominio de la frecuencia mediante los conceptos de exponenciales complejas y autofunciones, y las Secciones 2.7, 2.8 y 2.9 desarrollan y exploran la representación de señales en tiempo discreto en forma de combinación lineal de exponenciales complejas, mediante la transformada de Fourier. La Sección 2.10 presenta una breve introducción a las señales aleatorias en tiempo discreto.

2.1. SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Las señales en tiempo discreto se representan matemáticamente como secuencias de números. Una secuencia de números x, en los que el n-ésimo número se indica como $x[n]$,[1] se escribe formalmente así:

$$x = \{x[n]\}, \qquad -\infty < n < \infty, \tag{2.1}$$

siendo n un entero. En casos prácticos, estas secuencias surgen frecuentemente de muestrear una señal analógica (es decir, en tiempo continuo) $x_a(t)$. En este caso, el valor numérico del n-ésimo número de la secuencia es igual al valor de la señal analógica, $x_a(t)$, en el instante temporal nT, es decir,

$$x[n] = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty. \tag{2.2}$$

La cantidad T se denomina *periodo de muestreo,* y su inversa es la *frecuencia de muestreo*. Aunque las secuencias no surgen siempre del muestreo de señales analógicas, es conveniente referirse a $x[n]$ como la "n-ésima muestra" de la secuencia. Además, aunque estrictamente hablando, $x[n]$ indica el n-ésimo número de la secuencia, la notación de la Ecuación (2.1) es innecesariamente compleja, por lo que resulta conveniente y exento de ambigüedad hablar de "la secuencia $x[n]$" con lo que queremos indicar la secuencia completa, lo mismo que cuando decimos "la señal analógica $x_a(t)$". Las señales en tiempo discreto (es decir, las secuencias), se representan frecuentemente en forma gráfica como se indica en la

[1] Nótese que utilizaremos [ ] para encerrar a la variable independiente en las funciones de variable discreta, y utilizaremos ( ) para encerrar a la variable independiente en funciones de variable continua.

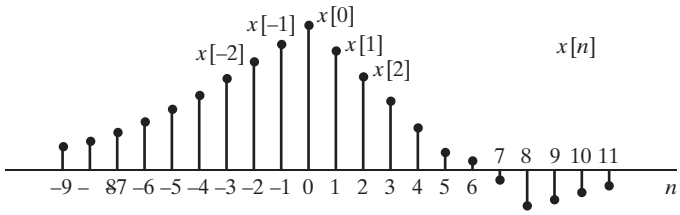


Figura 2.1 Representación gráfica de una señal en tiempo discreto.

Figura 2.1. Aunque la abscisa se dibuja como una línea continua, es importante tener en cuenta que $x[n]$ está definida sólo para valores enteros de n. No es correcto pensar que $x[n]$ es cero en valores de n no enteros. Simplemente, $x[n]$ no está definida para valores no enteros de n.

Como ejemplo de secuencia obtenida por muestreo, la Figura 2.2(a) muestra un segmento de señal de voz correspondiente a la variación de presión acústica en función del tiempo, y la Figura 2.2(b) presenta una secuencia de muestras de una señal de voz. Aunque la señal de voz original está definida para todos los valores del tiempo t, la secuencia contiene información sobre la señal sólo en instantes discretos. El teorema de muestreo, que se presentará en el Capítulo 4, garantiza que la señal original se puede reconstruir con la precisión que se desee a partir de la correspondiente secuencia de muestras si estas muestras se toman con la suficiente frecuencia.

Al presentar la teoría de las señales y los sistemas en tiempo discreto, aparecen varias secuencias básicas de particular importancia. Estas secuencias se muestran en la Figura 2.3 y se presentan a continuación.

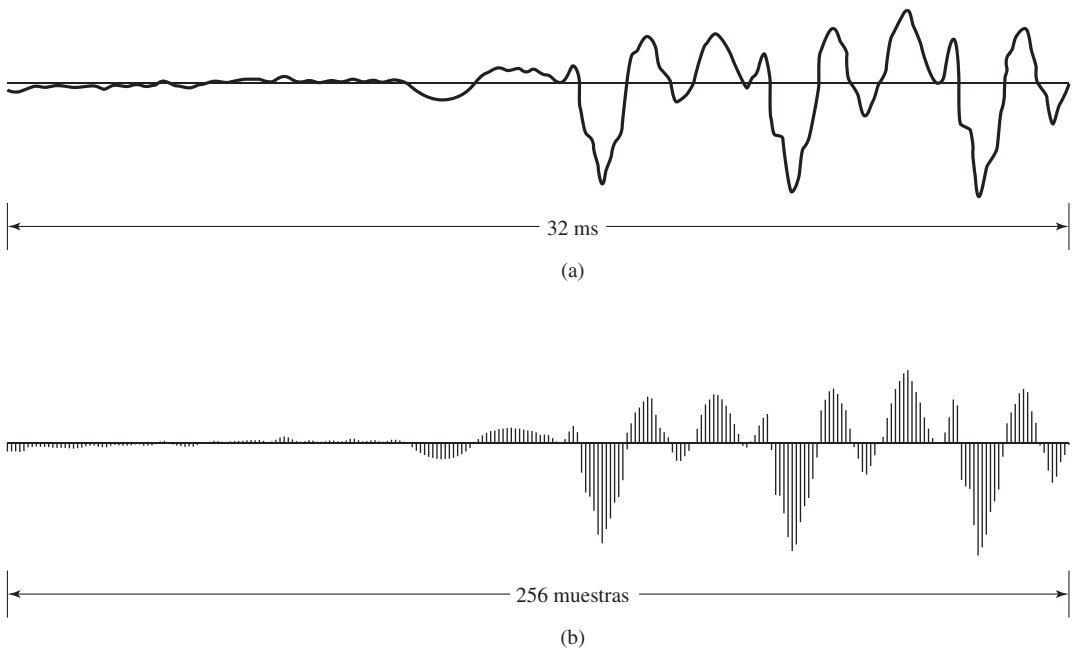


Figura 2.2 (a) Segmento de una señal de voz continua $x_a(t)$. (b) Secuencia de muestras $x[n] = x_a(nT)$ obtenidas de la señal de (a) con $T = 125\ \mu$s.

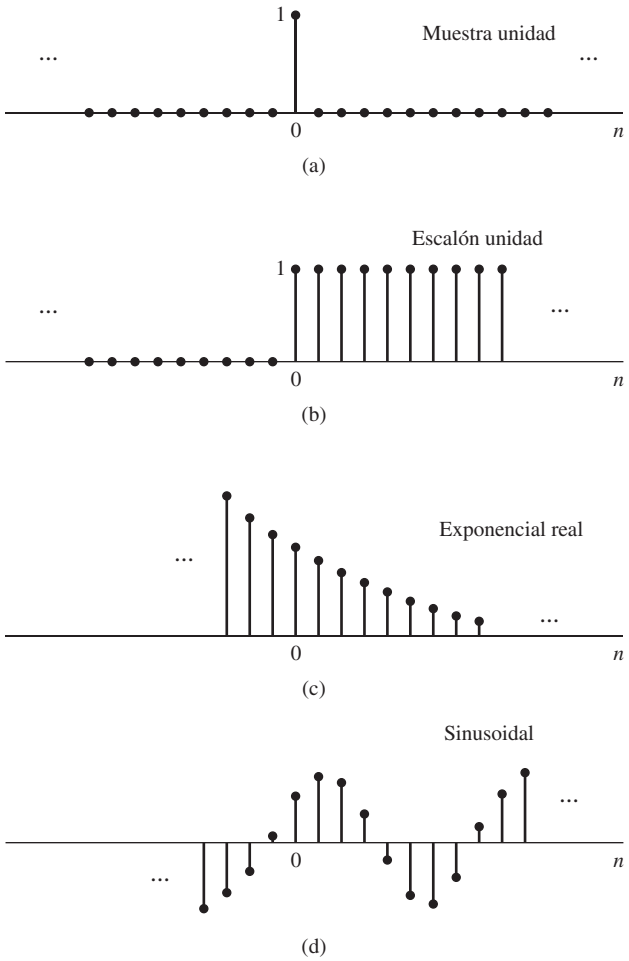


Figura 2.3 Algunas secuencias básicas. Las secuencias que se muestran desempeñan papeles importantes en el análisis y representación de señales y sistemas en tiempo discreto.

La *secuencia muestra unidad* (ver Figura 2.3(a)) se define como la secuencia

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

La secuencia muestra unidad juega el mismo papel en señales y sistemas en tiempo discreto que la función impulso unidad (función delta de Dirac) para señales y sistemas en tiempo continuo. Por conveniencia, la secuencia muestra unidad se denomina frecuentemente impulso en tiempo discreto o simplemente impulso. Es importante notar que el impulso en tiempo discreto no tiene las complicaciones matemáticas que presenta el impulso en tiempo continuo. Su definición, en la Ecuación (2.3), es simple y precisa.

Uno de los aspectos importantes de la secuencia impulso es que una secuencia arbitraria se puede expresar como una suma de impulsos desplazados y escalados. Por ejemplo, la secuencia $p[n]$ de la Figura 2.4 se puede expresar así:

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]. \tag{2.4}$$

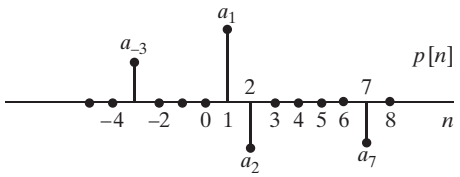


Figura 2.4 Ejemplo de secuencia representada como una suma de impulsos desplazados y escalados.

En términos más generales, cualquier secuencia se puede expresar de esta forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]. \tag{2.5}$$

Haremos uso específico de la Ecuación (2.5) al hablar de la representación de los sistemas lineales en tiempo discreto.

La secuencia escalón unidad (ver Figura 2.3(b)) se define como

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

La relación entre el escalón unidad y el impulso es

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]; \tag{2.7}$$

es decir, el valor de la secuencia escalón unidad en el índice (temporal) n es igual a la suma acumulada hasta el índice n de todos los valores anteriores de la secuencia impulso. Se puede obtener una representación alternativa del escalón unidad en función del impulso interpretando el escalón unidad que se muestra en la Figura 2.3(b) como una suma de impulsos retardados, como Ecuación (2.5). En este caso, los coeficientes que no son cero valen todos la unidad. Por lo tanto

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots \tag{2.8a}$$

o bien

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \tag{2.8b}$$

Recíprocamente, la secuencia impulso se puede expresar como la primera diferencia regresiva de la secuencia escalón unidad. Es decir

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \tag{2.9}$$

Las secuencias exponenciales son otra clase importante de señales básicas. La forma general de una secuencia exponencial es

$$x[n] = A\,\alpha^n. \tag{2.10}$$

Si A y α son números reales, la secuencia es real. Si $0 < \alpha < 1$ y A es positivo, los valores de la secuencia son positivos y decrecen al aumentar n, como se muestra en la Figura 2.3(c). Si $-1 < \alpha < 0$, los valores de la secuencia alternan el signo, pero su módulo decrece al aumentar n. Si $|\alpha| > 1$, el módulo de los valores de la secuencia crece al aumentar n.

La secuencia exponencial $A\,\alpha^n$ con α un número complejo tiene parte real e imaginaria que son sinusoides ponderadas exponencialmente. Concretamente, si $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ y $A = |A|e^{j\phi}$, la secuencia $A\,\alpha^n$ se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} x[n] = A\,\alpha^n &= |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} \\ &= |A|\,|\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)} \\ &= |A|\,|\alpha|^n \cos(\omega_0 n+\phi) + j|A|\,|\alpha|^n \operatorname{sen}(\omega_0 n+\phi). \end{aligned} \tag{2.11}$$

La secuencia oscila con una envolvente exponencial creciente si $|\alpha| > 1$ o con una envolvente exponencial decreciente si $|\alpha| < 1$. Considere, como un ejemplo simple, el caso de $\omega_0 = \pi$.

Si $|\alpha| = 1$, la secuencia tiene la forma

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n+\phi)} = |A|\cos(\omega_0 n+\phi) + j|A|\operatorname{sen}(\omega_0 n+\phi); \tag{2.12}$$

es decir, las partes real e imaginaria de $e^{j\omega_0 n}$ varían sinusoidalmente con n. Por analogía con el caso de tiempo continuo, la magnitud ω_0 se denomina *frecuencia* de la sinusoide compleja o exponencial compleja, y ϕ se denomina *fase*. Sin embargo, nótese que n es un número entero adimensional. Por lo tanto, la dimensión de ω_0 debe ser radianes. Si deseamos mantener una estrecha analogía con el caso de tiempo continuo, podemos especificar que las unidades de ω_0 sean radianes por muestra y las de n muestras.

El hecho de que n sea siempre un entero en la Ecuación (2.12) conduce a algunas diferencias importantes entre las propiedades de las secuencias exponenciales complejas y sinusoides en tiempo continuo y en tiempo discreto. Consideremos, por ejemplo, una frecuencia $(\omega_0 + 2\pi)$. En este caso

$$\begin{aligned} x[n] &= A\,e^{j(\omega_0+2\pi)n} \\ &= A\,e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = A\,e^{j\omega_0 n}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De forma más general, las secuencias exponenciales complejas con frecuencias $(\omega_0 + 2\pi r)$, siendo r un número entero, no se pueden distinguir entre sí. La misma propiedad se mantiene para secuencias sinusoidales. En concreto, se puede verificar fácilmente que

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos[(\omega_0 + 2\pi r)n + \phi] \\ &= A\cos(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \tag{2.14}$$

En el Capítulo 4 hablaremos de las implicaciones de esta propiedad para secuencias obtenidas muestreando sinusoides y otras señales. Por ahora, simplemente concluiremos que al tratar con señales exponenciales complejas de la forma $x[n] = A\,e^{j\omega_0 n}$ o sinusoides reales de la forma $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$, sólo es necesario considerar frecuencias en un intervalo de longitud 2π, como $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ o $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

Otra diferencia importante entre las exponenciales complejas y sinusoides en tiempo continuo y en tiempo discreto tiene que ver con su periodicidad en n. En el caso de tiempo continuo, las señales sinusoidales y las exponenciales complejas son ambas periódicas, con periodo igual a 2π dividido por la frecuencia. En el caso de tiempo discreto, una secuencia periódica es aquella que cumple la relación

$$x[n] = x[n+N], \qquad \text{para todo } n, \tag{2.15}$$

siendo el periodo N necesariamente un número entero. Si se prueba esta condición de periodicidad en una sinusoide en tiempo discreto, tenemos que

$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi), \tag{2.16}$$

lo que exige que

$$\omega_0 N = 2\pi k, \tag{2.17}$$

siendo k un número entero. Se puede realizar un razonamiento similar para una secuencia exponencial compleja $Ce^{j\omega_0 n}$. Es decir, la periodicidad con periodo N requiere que

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}, \tag{2.18}$$

lo que se cumple sólo si $\omega_0 N = 2\pi k$, como se indica en la Ecuación (2.17). En consecuencia, las secuencias exponenciales complejas y sinusoidales no son necesariamente periódicas en n con periodo $(2\pi/\omega_0)$ y dependiendo del valor de ω_0, pueden no ser periódicas en absoluto.

Ejemplo 2.1 Sinusoides en tiempo discreto periódicas y no periódicas

Consideremos la señal $x_1[n] = \cos(\pi n/4)$. Esta señal es de periodo $N = 8$. Para demostrarlo, vemos que $x[n+8] = \cos(\pi(n+8)/4) = \cos(\pi n/4 + 2\pi) = \cos(\pi n/4) = x[n]$, con lo que se satisface la definición de señal periódica en tiempo discreto. En contra de nuestra intuición proveniente de las sinusoides en tiempo continuo, al aumentar la frecuencia ω_0 de una sinusoide en tiempo discreto no disminuye necesariamente el periodo de la señal. Consideremos la sinusoide en tiempo discreto $x_2[n] = \cos(3\pi n/8)$, que tiene una frecuencia mayor que $x_1[n]$. Sin embargo, $x_2[n]$ no es periódica de periodo 8, ya que $x_2[n+8] = \cos(3\pi(n+8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -x_2[n]$. Utilizando un argumento análogo al utilizado en el caso de $x_1[n]$, se puede demostrar que $x_2[n]$ tiene un periodo $N = 16$. Por lo tanto, al aumentar la frecuencia desde $\omega_0 = 2\pi/8$ hasta $\omega_0 = 3\pi/8$, el periodo de la señal también aumenta. Esto ocurre porque las señales en tiempo discreto sólo están definidas para valores enteros de n.

La restricción de que n sea entero causa que algunas señales sinusoidales no sean periódicas en absoluto. Por ejemplo, no existe ningún entero N para el que la señal $x_3[n] = \cos(n)$ satisfaga la condición $x_3[n+N] = x_3[n]$ para todo n. Éstas y otras propiedades de las sinusoides en tiempo discreto que contradicen a sus correspondientes propiedades en tiempo continuo son debidas a la limitación existente para señales y sistemas en tiempo discreto: el índice n debe ser un número entero.

Cuando combinamos la condición de la Ecuación (2.17) con nuestra observación anterior de que las frecuencias ω_0 y $(\omega_0 + 2\pi r)$ son indistinguibles, resulta claro que existen N frecuencias distinguibles para las que las correspondientes secuencias son periódicas de periodo N. Un conjunto de tales frecuencias es $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Estas propiedades de las secuencias exponenciales complejas y sinusoidales son básicas en la teoría y el diseño de algoritmos numéricos para el análisis de Fourier en tiempo discreto, y se presentarán con mayor detalle en los Capítulos 8 y 9.

En relación con la exposición precedente tenemos el hecho de que la interpretación de las altas y bajas frecuencias es algo diferente para señales exponenciales complejas y sinusoidales en tiempo continuo y en tiempo discreto. Para una señal sinusoidal en tiempo continuo $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$, a medida que Ω_0 crece, $x(t)$ oscila más y más rápidamente. Para la señal sinusoidal en tiempo discreto $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$, a medida que ω_0 aumenta desde $\omega_0 = 0$ a $\omega_0 = \pi$, $x[n]$ oscila más y más rápidamente. Sin embargo, a medida que ω_0 aumenta desde $\omega_0 = \pi$ a $\omega_0 = 2\pi$, las oscilaciones se hacen más lentas. Esto se muestra en la Figura 2.5. De hecho, debido a la periodicidad en ω_0 de las secuencias exponenciales complejas y sinusoidales, $\omega_0 = 2\pi$ es indistinguible de $\omega_0 = 0$, y, de forma más general, las frecuencias alrededor de $\omega_0 = 2\pi$ son indistinguibles de las frecuencias alrededor de $\omega_0 = 0$. Como consecuencia, para señales exponenciales complejas y sinusoidales, los valores de ω_0 en la vecindad de $\omega_0 = 2\pi k$ para cualquier valor entero de k se denominan generalmente bajas frecuencias (oscilaciones relativamente lentas), mientras que los valores de ω_0 en la vecindad de $\omega_0 = (\pi + 2\pi k)$ para cualquier valor entero de k se denominan generalmente altas frecuencias (oscilaciones relativamente rápidas).

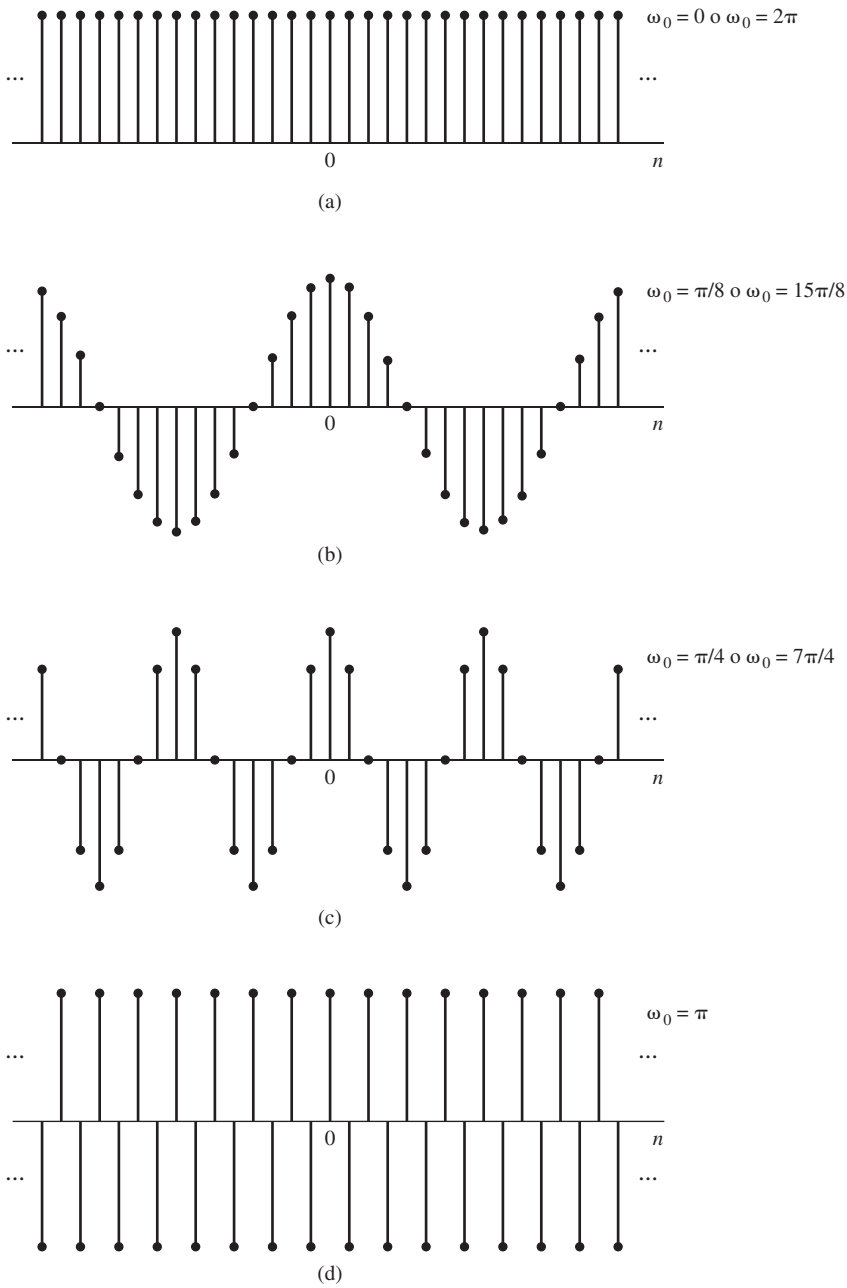


Figura 2.5 $\cos \omega_0 n$ para diversos valores de ω_0. A medida que ω_0 aumenta de cero a π (partes a–d), la secuencia oscila más rápido. Cuando ω_0 crece de π a 2π (partes d–a), las oscilaciones se van haciendo más lentas.

2.2. SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

Un sistema en tiempo discreto se define matemáticamente como una transformación u operador que transforma una secuencia de entrada con valores $x[n]$ en una secuencia de salida con valores $y[n]$. Esto se puede expresar así:

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{2.19}$$

y se muestra gráficamente en la Figura 2.6. La Ecuación (2.19) representa una regla o fórmula para calcular los valores de la secuencia de salida a partir de los valores de la secuencia de entrada. Es importante tener en cuenta que el valor de la secuencia de salida para cada valor del índice n puede depender de $x[n]$ para todos los valores de n, es decir, y en cada instante n puede depender de todo o parte de la secuencia x. Los siguientes ejemplos ilustran algunos sistemas simples de utilidad.

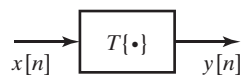


Figura 2.6 Representación de un sistema en tiempo discreto, es decir, de una transformación que convierte una secuencia de entrada $x[n]$ en una secuencia de salida única $y[n]$.

Ejemplo 2.2 El sistema de retardo ideal

El sistema de retardo ideal está definido por la ecuación

$$y[n] = x[n - n_d], \qquad -\infty < n < \infty, \tag{2.20}$$

siendo n_d un entero fijo positivo denominado retardo del sistema. En otras palabras, el sistema de retardo ideal forma la salida desplazando la secuencia de entrada n_d muestras a la derecha. Si en la Ecuación (2.20) n_d fuera un entero fijo negativo, el sistema desplazaría la entrada $|n_d|$ muestras a la izquierda, lo que corresponde a un avance temporal.

En el sistema del Ejemplo 2.2, para determinar una cierta muestra de la salida sólo se utiliza una muestra de la señal de entrada. En el ejemplo que sigue éste no es el caso

Ejemplo 2.3 Promediado móvil

El sistema de promediado móvil general se define mediante la ecuación

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \cdots + x[n] \\ &\quad + x[n-1] + \cdots + x[n-M_2]\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Este sistema calcula la n-ésima muestra de la secuencia de salida como el promedio de $(M_1 + M_2 + 1)$ muestras de la secuencia de entrada alrededor de la muestra n-ésima. La Figura 2.7 muestra una secuencia de entrada expresada en función de un índice auxiliar k y las muestras (puntos rellenos) que intervienen en el cálculo de la secuencia de salida $y[n]$ para $n = 7$, $M_1 = 0$ y $M_2 = 5$. La muestra de la salida $y[7]$ es igual a un sexto de la suma de todas las muestras entre las líneas de puntos verticales. Para calcular $y[8]$ se moverían las líneas verticales una muestra a la derecha.

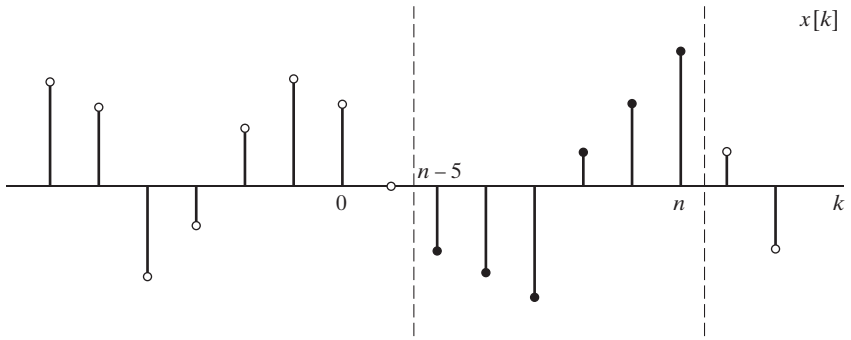


Figura 2.7 Valores de la secuencia que intervienen en el cálculo de un promediado móvil con $M_1 = 0$ y $M_2 = 5$.

Estableciendo restricciones en la transformación $T\{\cdot\}$ surgen diversas clases de sistemas. Proceder así conduce a menudo a representaciones matemáticas muy generales, como veremos posteriormente. Son de particular importancia las restricciones y propiedades de los sistemas que se presentan en las Secciones 2.2.1–2.2.5.

2.2.1. Sistemas sin memoria

Se dice que un sistema es sin memoria si la salida $y[n]$ para cualquier valor de n depende sólo de la entrada $x[n]$ en el mismo valor de n.

Ejemplo 2.4 Un sistema sin memoria

Un ejemplo de sistema sin memoria puede ser un sistema en el que $x[n]$ e $y[n]$ están relacionados por la expresión

$$y[n] = (x[n])^2, \qquad \text{para cada valor de } n. \tag{2.22}$$

El sistema del Ejemplo 2.2 no es sin memoria a menos que $n_d = 0$. En concreto, se dice que este sistema es con "memoria" si n_d es positivo (un retardo temporal) o negativo (un avance temporal). El sistema de promediado móvil del Ejemplo 2.3 no es sin memoria a menos que $M_1 = M_2 = 0$.

2.2.2. Sistemas lineales

La clase de los sistemas lineales está definida por el principio de superposición. Si $y_1[n]$ e $y_2[n]$ son las respuestas de un sistema cuando $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son las respectivas entradas, el sistema es lineal si y sólo si

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \tag{2.23a}$$

y

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n], \tag{2.23b}$$

siendo a una constante arbitraria. La primera propiedad se denomina *propiedad de aditividad* y la segunda se denomina *propiedad de homogeneidad* o *escalado*. Estas dos propiedades se pueden combinar en el principio de superposición, que se formula así

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \tag{2.24}$$

siendo a y b constantes arbitrarias. Esta ecuación se puede generalizar en el principio de superposición para muchas entradas. Concretamente si

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \tag{2.25a}$$

entonces la salida de un sistema lineal será

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n], \tag{2.25b}$$

siendo $y_k[n]$ la respuesta del sistema a la entrada $x_k[n]$.

Utilizando la definición del principio de superposición, podemos demostrar fácilmente que los sistemas de los Ejemplos 2.2 y 2.3 son sistemas lineales (véase el problema 2.39). Un ejemplo de sistema no lineal se presenta en el Ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.5 El sistema acumulador

El sistema definido por la ecuación de entrada–salida

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{2.26}$$

se denomina sistema acumulador, ya que la salida en el instante n es la suma o acumulación de la muestra actual y todas las muestras anteriores de la entrada. El sistema acumulador es un sistema lineal. Como esto puede no ser intuitivamente obvio, es útil realizar el ejercicio de seguir todos los pasos de la demostración formal. Comenzaremos por definir dos entradas arbitrarias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ junto con sus correspondientes salidas

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k], \tag{2.27}$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]. \tag{2.28}$$

Cuando la entrada es $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, el principio de superposición requiere que la salida sea $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$ para todos los valores posibles de los coeficientes a y b. Podemos demostrarlo partiendo de la Ecuación (2.26):

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k], \tag{2.29}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]), \tag{2.30}$$

$$= a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k], \tag{2.31}$$

$$= ay_1[n] + by_2[n]. \tag{2.32}$$

Por lo tanto, el sistema acumulador de la Ecuación (2.26) satisface el principio de superposición para todas las entradas y es por consiguiente un sistema lineal.

Ejemplo 2.6 Un sistema no lineal

Consideremos el sistema definido por la relación

$$w[n] = \log_{10}(|x[n]|). \tag{2.33}$$

Este sistema no es lineal. Para demostrarlo, sólo necesitamos encontrar un contraejemplo, es decir, un conjunto de entradas y salidas que demuestren que el sistema viola el principio de superposición de la Ecuación (2.24). Las entradas $x_1[n] = 1$ y $x_2[n] = 10$ son un contraejemplo. La salida para $x_1[n] + x_2[n] = 11$ es

$$\log_{10}(1+10) = \log_{10}(11) \neq \log_{10}(1) + \log_{10}(10) = 1.$$

La salida para la primera señal es $w_1[n] = 0$ y para la segunda es $w_2[n] = 1$. La propiedad de escalado de los sistemas lineales requiere que, como $x_2[n] = 10x_1[n]$, si el sistema es lineal, $w_2[n] = 10w_1[n]$. Como esto no se cumple para el sistema definido en la Ecuación (2.33), hemos encontrado un conjunto de entradas y salidas que nos permiten demostrar que el sistema *no* es lineal.

2.2.3. Sistemas invariantes con el tiempo

Un sistema invariante con el tiempo (a menudo denominado también sistema invariante al desplazamiento) es un sistema para el que un desplazamiento temporal o retardo de la secuencia de entrada provoca el mismo desplazamiento o retardo en la secuencia de salida. Concretamente, supongamos que un sistema transforma una secuencia de entrada con valores $x[n]$ en una secuencia de salida con valores $y[n]$. Diremos que este sistema es invariante con el tiempo si, para todo n_0, la secuencia de entrada de valores $x_1[n] = x[n-n_0]$ produce una secuencia de salida de valores $y_1[n] = y[n-n_0]$.

Como en el caso de la linealidad, demostrar que un sistema es invariante con el tiempo exige una demostración general, sin suposiciones específicas sobre las señales de entrada. Todos los sistemas de los Ejemplos 2.2–2.6 son invariantes con el tiempo. El procedimiento para demostrar la invarianza temporal se ilustra en los Ejemplos 2.7 y 2.8.

Ejemplo 2.7 El acumulador como sistema invariante con el tiempo

Consideremos el sistema acumulador presentado en el Ejemplo 2.5. Definimos $x_1[n] = x[n-n_0]$. Para demostrar la invarianza temporal obtendremos $y[n-n_0]$ e $y_1[n]$ y los compararemos para ver si son iguales. En primer lugar

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]. \tag{2.34}$$

Seguidamente, calculamos

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \tag{2.35}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]. \tag{2.36}$$

Realizando el cambio de variables $k_1 = k - n_0$ en la suma obtenemos

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1]. \tag{2.37}$$

Como el índice k en la Ecuación (2.34) y el índice k_1 en la Ecuación (2.37) corresponden a índices de los sumatorios, puenden denominarse como se desee. Las Ecuaciones (2.34) y (2.37) son iguales y por tanto $y_1[n] = y[n-n_0]$. El acumulador es un sistema invariante con el tiempo.

El siguiente ejemplo muestra un sistema que no es invariante con el tiempo

Ejemplo 2.8 El sistema compresor

El sistema definido por la relación

$$y[n] = x[Mn], \qquad -\infty < n < \infty, \tag{2.38}$$

siendo M un número entero positivo, se denomina compresor. En concreto, este sistema descarta $(M-1)$ muestras de cada M. Es decir, crea una secuencia de salida seleccionando una muestra de cada M. Este sistema no es invariante con el tiempo. Para demostrarlo, consideremos la respuesta $y_1[n]$ a la entrada $x_1[n] = x[n-n_0]$. Para que el sistema sea invariante con el tiempo, la salida del sistema cuando la entrada es $x_1[n]$ debe ser igual a $y[n-n_0]$. La salida $y_1[n]$ resultante cuando la entrada es $x_1[n]$ se puede calcular directamente aplicando la Ecuación (2.38)

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn-n_0]. \tag{2.39}$$

Retrasando n_0 muestras la salida $y[n]$ obtenemos

$$y[n-n_0] = x[M(n-n_0)]. \tag{2.40}$$

Comparando estas dos salidas, vemos que $y[n-n_0]$ no es igual a $y_1[n]$ para todo M y n_0, y por lo tanto el sistema no es invariante.

Es también posible demostrar que un sistema no es invariante encontrando un único contraejemplo que viole la propiedad de invarianza temporal. Un contraejemplo para el caso del compresor puede ser el caso de $M = 2$, $x[n] = \delta[n]$ y $x_1[n] = \delta[n-1]$. Para este conjunto de entradas y este valor de M, $y[n] = \delta[n]$, pero $y_1[n] = 0$; y resulta claro que para este caso, $y_1[n] \neq y[n-1]$.

2.2.4. Causalidad

Se dice que un sistema es causal si para cualquier valor de n_0, la secuencia de salida en el índice $n = n_0$ depende sólo de los valores de la secuencia de entrada para $n \leq n_0$. Esto implica que si $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, entonces $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$. Es decir, el sistema es *no anticipativo*. El sistema del Ejemplo 2.2 es causal para $n_d \geq 0$ y es no causal para $n_d < 0$. El sistema del Ejemplo 2.3 es causal si $-M_1 \geq 0$ y $M_2 \geq 0$; en los otros casos es no causal. El sistema del Ejemplo 2.4 es causal, como el acumulador del Ejemplo 2.5 y el sistema no lineal del Ejemplo 2.6. Sin embargo, el sistema del Ejemplo 2.8 es no causal si $M > 1$, ya que $y[1] = x[M]$. En el siguiente ejemplo se presenta otro sistema no causal.

Ejemplo 2.9 Los sistemas de diferencia progresiva y regresiva

El sistema definido por la relación

$$y[n] = x[n+1] - x[n] \tag{2.41}$$

se denomina *sistema de diferencia progresiva*. Este sistema es no causal, ya que el valor actual de la salida depende de un valor futuro de la entrada. La violación de la causalidad se puede demostrar considerando las dos entradas $x_1[n] = \delta[n-1]$ y $x_2[n] = 0$ y sus correspondientes salidas $y_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ e $y_2[n] = 0$ para todo n. Nótese que $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq 0$, por lo que la definición de

causalidad exige que $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq 0$, lo que claramente no es cierto para $n = 0$. Así, mediante este contraejemplo, hemos demostrado que el sistema no es causal. El *sistema de diferencia regresiva,* definido así:

$$y[n] = x[n] - x[n-1], \tag{2.42}$$

tiene una salida que depende sólo de los valores presente e inmediatamente anterior de la entrada. Como $y[n_0]$ depende sólo de $x[n_0]$ y $x[n_0 - 1]$, el sistema es causal por definición.

2.2.5. Estabilidad

Para definir la estabilidad de un sistema se utilizan diversas definiciones algo diferentes. En este libro consideraremos específicamente la estabilidad en el sentido de entrada acotada, salida acotada.

Un sistema es estable en el sentido de entrada acotada, salida acotada (BIBO, *Bounded–Input, Bounded–Output*) si y sólo si cualquier secuencia acotada a su entrada produce una secuencia de salida acotada. Se dice que la entrada $x[n]$ está acotada si existe un valor finito positivo fijo B_x tal que

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \qquad \text{para todo } n. \tag{2.43}$$

La estabilidad requiere que, para cualquier entrada acotada, exista un valor finito positivo fijo B_y tal que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \qquad \text{para todo } n. \tag{2.44}$$

Es importante tener en cuenta que las propiedades que hemos definido en esta sección son propiedades de los *sistemas,* y no de las entradas a dichos sistemas. Es decir, podemos ser capaces de encontrar entradas para las que las propiedades se mantengan, pero la existencia de una propiedad para algunas entradas no significa que el sistema tenga esa propiedad. Para que el sistema posea esa propiedad, debe cumplirse para *todas* las entradas. Por ejemplo, un sistema inestable puede tener algunas entradas acotadas para las que la salida esté acotada, pero para que el sistema tenga la propiedad de estabilidad, debe cumplirse que para *todas* las entradas acotadas, las salidas correspondientes están acotadas. Si pudiéramos encontrar tan sólo una entrada para la que no se mantuviera esa propiedad, habríamos demostrado que el sistema *no* posee esa propiedad. El siguiente ejemplo ilustra la comprobación de la estabilidad para algunos de los sistemas que hemos definido.

Ejemplo 2.10 Comprobación de la estabilidad e inestabilidad

El sistema del Ejemplo 2.4 es estable. Para demostrarlo supongamos que la entrada $x[n]$ está acotada de forma que $|x[n]| \leq B_x$ para todo n. Entonces $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$. Podemos escoger por tanto $B_y = B_x^2$ para demostrar que $y[n]$ está acotada.

Análogamente, podemos ver que el sistema definido en el Ejemplo 2.6 es inestable, ya que $y[n] = \log_{10}(|x[n]|) = -\infty$ para todos los valores de índice temporal en los que $x[n] = 0$, incluso aunque la salida no esté acotada para todas las muestras de la entrada distintas de cero.

El acumulador, definido en el Ejemplo 2.5 mediante la Ecuación (2.26) tampoco es estable. Por ejemplo, consideremos el caso de $x[n] = u[n]$, entrada claramente acotada por $B_x = 1$. Para esta entrada, la salida del acumulador es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] \tag{2.45}$$

$$= \begin{cases} 0, & n < 0, \\ (n+1), & n \geq 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

No existe ningún valor finito B_y tal que $(n+1) \leq B_y < \infty$ para todo n; y por lo tanto el sistema es inestable.

Utilizando argumentos similares, se puede demostrar que los sistemas de los Ejemplos 2.2, 2.3, 2.8 y 2.9 son todos estables.

2.3. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

Como en el caso de tiempo continuo, una clase de sistemas en tiempo discreto particularmente importante es la de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. La combinación de estas dos propiedades conduce a representaciones especialmente convenientes de los sistemas que las cumplen. Y lo que es más importante, esta clase de sistemas tiene importantes aplicaciones en tratamiento de señales. La clase de los sistemas lineales está definida por el principio de superposición que se indica en la Ecuación (2.24). Si la propiedad de linealidad se combina con la representación general de una secuencia como una combinación lineal de impulsos retrasados, como se indica en la Ecuación (2.5), se puede concluir que un sistema lineal queda completamente caracterizado por su respuesta al impulso. Concretamente, sea $h_k[n]$ la respuesta del sistema a la entrada $\delta[n-k]$, un impulso en $n = k$. Entonces, aplicando la Ecuación (2.5) para representar la entrada, se deduce que

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}, \tag{2.47}$$

Aplicando el principio de superposición de la Ecuación (2.24), podemos escribir

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]. \tag{2.48}$$

De acuerdo con la Ecuación (2.48), la respuesta del sistema a cualquier entrada se puede expresar en términos de las respuestas del sistema a las secuencias $\delta[n-k]$. Si sólo se impone la propiedad de linealidad, $h_k[n]$ dependerá tanto de n como de k, en cuyo caso la utilidad computacional de la Ecuación (2.48) es limitada. Obtenemos un resultado más útil si imponemos la restricción adicional de invarianza temporal.

La propiedad de invarianza temporal implica que si $h[n]$ es la respuesta a $\delta[n]$, entonces la respuesta a $\delta[n-k]$ es $h[n-k]$. Con esta restricción adicional, la Ecuación (2.48) se convierte en

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k], \qquad \text{para todo } n. \tag{2.49}$$

Como consecuencia de la Ecuación (2.49), los sistemas lineales e invariantes con el tiempo (que abreviaremos algunas veces como LTI – *Linear Time-Invariant*), están completamente caracterizados por su respuesta al impulso $h[n]$ en el sentido de que dadas las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ para todo n, es posible utilizar la Ecuación (2.49) para calcular cualquier muestra de la salida $y[n]$.

La Ecuación (2.49) se denomina comúnmente *suma de convolución*, y se representa mediante la notación

$$y[n] = x[n] * h[n]. \tag{2.50}$$

La operación de convolución en tiempo discreto toma dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$ y produce una tercera secuencia $y[n]$. La Ecuación (2.49) expresa cada muestra de la secuencia de salida en función de todas las muestras de las secuencias de entrada y respuesta al impulso.

La notación de la operación de convolución que se utiliza en la Ecuación (2.50), como abreviatura de la Ecuación (2.49) es adecuada y compacta, pero hay que utilizarla con precaución. La definición básica de convolución de dos secuencias se encuentra expresada en la Ecuación (2.49), y cualquier uso que se haga de la forma abreviada de la Ecuación (2.50) debe siempre tener en cuenta el sentido que tiene según la Ecuación (2.49). Por ejemplo, consideremos $y[n-n_0]$. Aplicando la Ecuación (2.49) podemos ver que

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-n_0-k] \tag{2.51}$$

o, con la notación abreviada,

$$y[n-n_0] = x[n] * h[n-n_0] \tag{2.52}$$

La sustitución de $(n-n_0)$ en la Ecuación (2.49) produce el resultado y la conclusión correctos, pero realizar la sustitución a ciegas en la Ecuación (2.50), no produce el resultado correcto. De hecho, $x[n-n_0] * h[n-n_0]$ da como resultado $y[n-2n_0]$.

La obtención de la Ecuación (2.49) sugiere la interpretación de que la muestra de entrada en $n=k$, representada como $x[k]\delta[n-k]$, es transformada por el sistema en una secuencia de salida $x[k]h[n-k]$, para $-\infty < n < \infty$, y que, para cada valor de k, estas secuencias se superponen para formar la secuencia total de salida. La Figura 2.8 ilustra esta interpretación. En ella se muestra una respuesta al impulso, una secuencia simple con tres valores distintos de cero, las salidas individuales debidas a cada muestra y la salida compuesta debida a todas las muestras de la secuencia de entrada. Concretamente, $x[n]$ se puede descomponer como la suma de tres secuencias: $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ y $x[3]\delta[n-3]$ que representan los tres valores distintos de cero de la secuencia $x[n]$. Las secuencias $x[-2]h[n+2]$, $x[0]h[n]$ y $x[3]h[n-3]$ son las respuestas del sistema a $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ y $x[3]\delta[n-3]$, respectivamente. La respuesta a la señal $x[n]$ es la suma de estas tres respuestas individuales.

Aunque la expresión de la suma de convolución es análoga a la integral de convolución de la teoría de sistemas lineales en tiempo continuo, no debe verse la suma de convolución como una aproximación a la integral de convolución. La integral de convolución tiene un papel más bien teórico en la teoría de sistemas lineales en tiempo continuo. Pero veremos que la suma de convolución, además de su importancia analítica, sirve a menudo como una realización explícita de un sistema en tiempo discreto. Por tanto, es importante detenerse a considerar las propiedades de la suma de convolución en cálculos reales.

La anterior interpretación de la Ecuación (2.49) resalta el hecho de que la suma de convolución es un resultado directo de las propiedades de linealidad e invarianza temporal. Sin embargo, si observamos la Ecuación (2.49) desde una perspectiva ligeramente diferente, llegamos a una interpretación de particular utilidad computacional. Vista como una fórmula para calcular un solo valor de la secuencia de salida, la Ecuación (2.49) dice que $y[n]$ (el n-ésimo valor de la salida) se obtiene multiplicando la secuencia de entrada (expresada en función de k) por la secuencia cuyos valores son $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$ para cada valor fijo de n, y después se suman todos los valores de los productos $x[k]h[n-k]$, siendo k el índice de la suma. Por tanto, la operación de convolución de dos secuencias requiere realizar los cálculos indicados por la Ecuación (2.49) para todos los valores de n, generándose así la secuencia completa de salida $y[n]$, $-\infty < n < \infty$. La clave para realizar los cálculos de la Ecuación (2.49) y obtener $y[n]$ es saber cómo se forma la secuencia $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, para todos los valores de n de interés. Con este fin, es útil tener en cuenta que

$$h[n-k] = h[-(k-n)]. \tag{2.53}$$

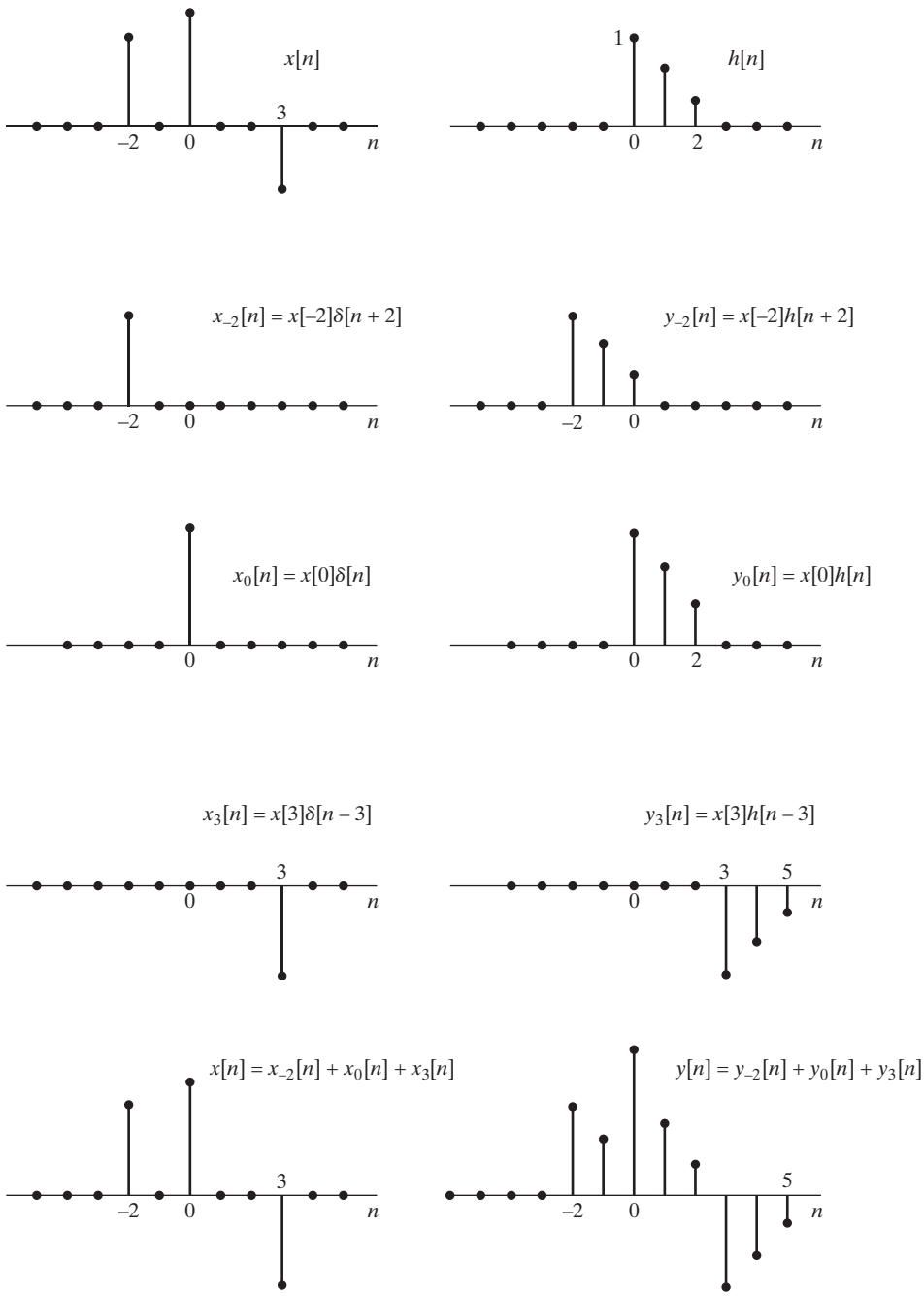


Figura 2.8 Representación de la salida de un sistema lineal invariante con el tiempo como la superposición de las respuestas a cada muestra de la entrada.

Para ilustrar la interpretación de la Ecuación (2.53), supongamos que $h[k]$ es la secuencia que se muestra en la Figura 2.9(a), y que deseamos calcular $h[n-k] = h[-(k-n)]$. Definimos $h_1[k] = h[-k]$, como se muestra en la Figura 2.9(b). Definimos seguidamente $h_2[k]$ como $h_1[k]$, retrasada n muestras en el eje

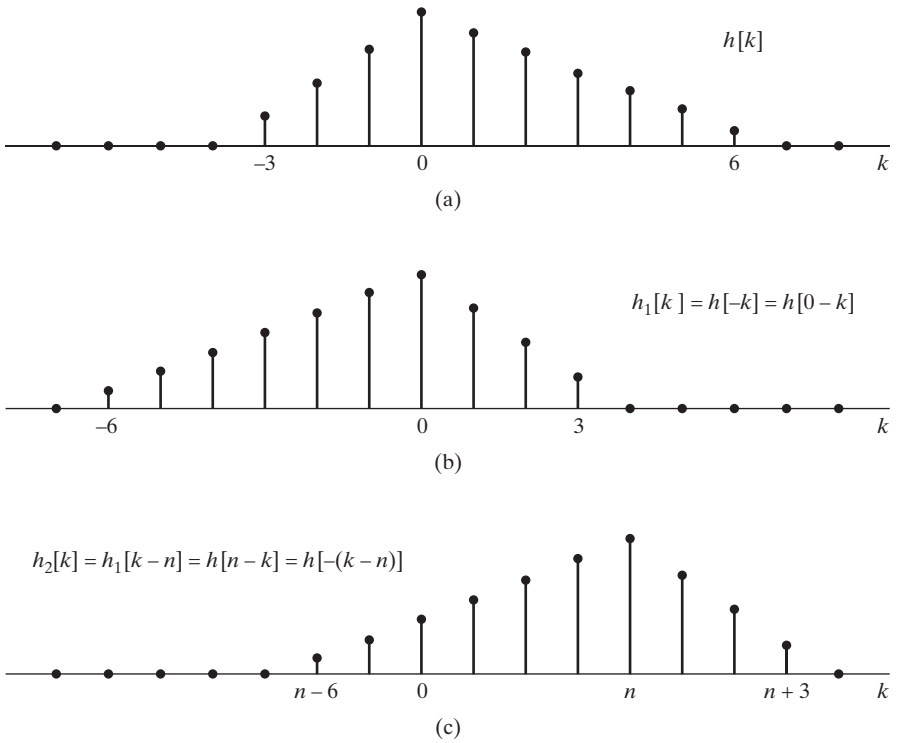


Figura 2.9 Formación de la secuencia $h[n-k]$. (a) La secuencia $h[k]$ en función de k. (b) La secuencia $h[-k]$ en función de k. (c) La secuencia $h[n-k] = h[-(k-n)]$ en función de k para $n = 4$.

k, es decir, $h_2[k] = h_1[k-n]$. La Figura 2.9(c) muestra la secuencia que resulta al retrasar n muestras la secuencia de la Figura 2.9(b). Utilizando la relación entre $h_1[k]$ y $h[k]$, se puede demostrar que $h_2[k] = h_1[k-n] = h[-(k-n)] = h[n-k]$, y por lo tanto, la figura de abajo es la señal deseada. Resumiendo, para calcular $h[n-k]$ a partir de $h[k]$, se invierte primero $h[k]$ en el tiempo alrededor del origen $k = 0$ y después se retrasa n muestras la señal invertida.

Para realizar la convolución en tiempo discreto, se multiplican las dos secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, y se suman los productos para obtener la muestra de salida $y[n]$. Para obtener otra muestra de la salida, se desplaza el origen de la secuencia $h[n-k]$ hasta la posición de la nueva muestra y se repite el proceso. Este procedimiento computacional se puede aplicar tanto si los cálculos se van a realizar numéricamente sobre datos muestreados como si se van a realizar analíticamente para secuencias con valores de muestras que se puedan expresar mediante fórmulas sencillas. El siguiente ejemplo ilustra la convolución en tiempo discreto en este último caso.

Ejemplo 2.11 Evaluación analítica de la suma de convolución

Consideremos un sistema cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

La entrada es

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

o de forma equivalente,

$$x[n] = a^n u[n].$$

Para calcular la salida en un índice particular n, debemos formar las sumas para todos los valores de k de los productos $x[k]h[n-k]$. En este caso podemos obtener fórmulas de $y[n]$ para diferentes conjuntos de valores de n. Para ello es útil dibujar las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ en función de k para diferentes valores representativos de n. Por ejemplo, la Figura 2.10(a) muestra las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$, dibujadas para un valor de n entero negativo. Claramente, para todos valores negativos de n se obtiene una gráfica

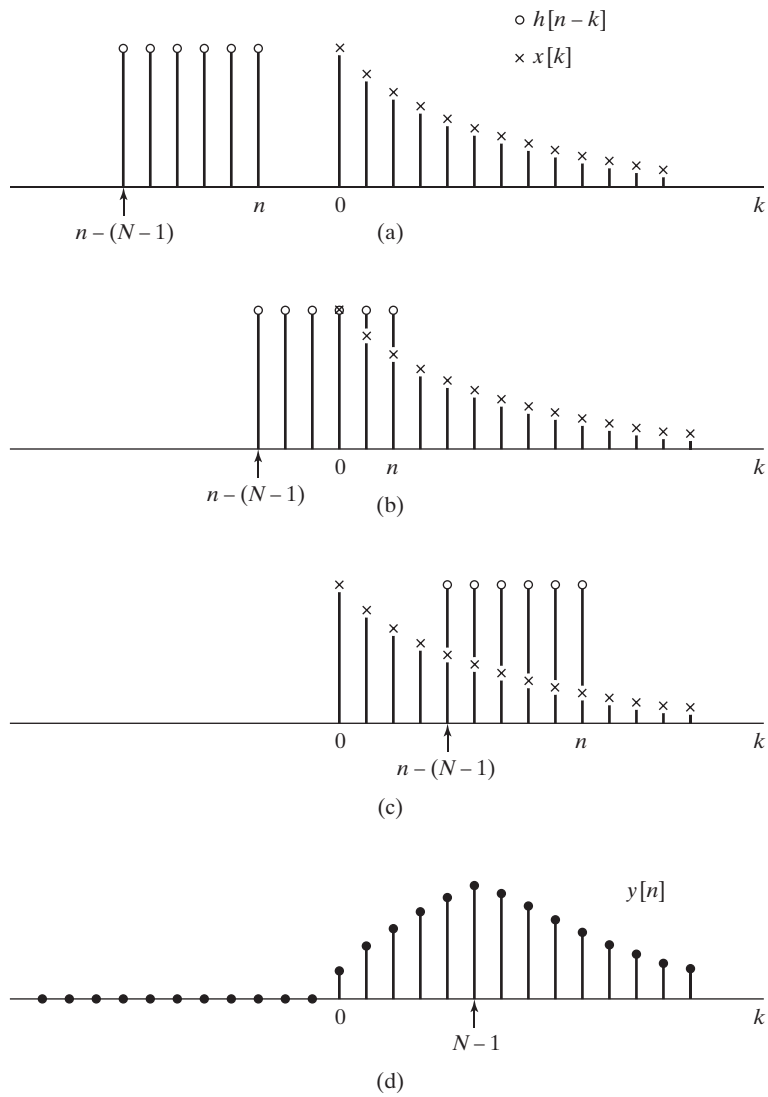


Figura 2.10 Secuencias que intervienen en el cálculo de una convolución discreta. (a)–(c) Las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ en función de k para diferentes valores de n (sólo se indican las muestras que son diferentes de cero). (d) La correspondiente secuencia de salida en función de n.

similar. Es decir, que las partes distintas de cero de las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ no se solapan, por lo que

$$y[n] = 0, \qquad n < 0.$$

La Figura 2.10(b) muestra las dos secuencias cuando $0 \leq n$ y $n - N + 1 \leq 0$. Estas dos condiciones se pueden combinar en una sola: $0 \leq n \leq N - 1$. Considerando la Figura 2.10(b) vemos que, como

$$x[k]h[n-k] = a^k, \qquad \text{para } 0 \leq k \leq n$$

cuando $0 \leq n \leq N - 1$ entonces

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k, \qquad \text{para } 0 \leq n \leq N - 1. \tag{2.54}$$

Los límites de la suma se determinan directamente observando la Figura 2.10(b). La Ecuación (2.54) muestra que $y[n]$ es la suma de $n + 1$ términos de una serie geométrica de razón a. Esta suma se puede expresar en forma cerrada utilizando la fórmula general

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}, \qquad N_2 \geq N_1. \tag{2.55}$$

Aplicando esta fórmula a la Ecuación (2.54), obtenemos

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad 0 \leq n \leq N - 1. \tag{2.56}$$

Finalmente, la Figura 2.10(c) muestra las dos secuencias cuando $0 < n - N + 1$ o $N - 1 < n$. Como antes,

$$x[k]h[n-k] = a^k, \qquad n - N + 1 \leq k \leq n,$$

pero ahora el límite inferior de la suma es $n - N + 1$, como se puede ver en la Figura 2.10(c). Por tanto,

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k, \qquad \text{para } N - 1 < n. \tag{2.57}$$

Utilizando la Ecuación (2.55), obtenemos

$$y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1 - a},$$

o

$$y[n] = a^{n-N+1} \left(\frac{1 - a^N}{1 - a} \right). \tag{2.58}$$

Por tanto, debido a la naturaleza exponencial por tramos de la entrada y a la forma de la respuesta al impulso, hemos sido capaces de obtener la siguiente expresión en forma cerrada de $y[n]$ en función del índice n:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ a^{n-N+1} \left(\dfrac{1 - a^N}{1 - a} \right), & N - 1 < n. \end{cases} \tag{2.59}$$

Esta secuencia se muestra en la Figura 2.10(d).

El Ejemplo 2.11 ilustra cómo calcular analíticamente la suma de convolución cuando la entrada y la respuesta al impulso se expresan mediante fórmulas simples. En esos casos, las sumas pueden expresarse de forma compacta, lo que se consigue utilizando la fórmula de la suma de una serie geométrica u otras fórmulas para obtener expresiones cerradas[2]. Cuando no es posible obtener una expresión simple, la suma de convolución se puede obtener todavía numéricamente utilizando la técnica que se muestra en el Ejemplo 2.11 siempre que la suma sea finita, que será el caso siempre que la secuencia de entrada o la respuesta al impulso sean de longitud finita, es decir, que tenga un número finito de muestras distintas de cero.

2.4. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

Como todos los sistemas lineales e invariantes con el tiempo se pueden describir mediante la suma de convolución de la Ecuación (2.49), las propiedades de esta clase de sistemas estarán determinadas por las propiedades de la convolución en tiempo discreto. Por tanto, la respuesta al impulso es una caracterización completa de las propiedades de un determinado sistema lineal e invariante con el tiempo.

Se pueden obtener algunas propiedades generales de la clase de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo considerando las propiedades de la operación de convolución [3]. Por ejemplo, la operación de convolución es conmutativa:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]. \tag{2.60}$$

Esta propiedad se puede demostrar aplicando sustitución de variables a la Ecuación (2.49). Concretamente, haciendo $m = n - k$,

$$y[n] = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n], \tag{2.61}$$

se intercambian los papeles de $x[n]$ y $h[n]$ en la suma. Es decir, el orden de las secuencias en la convolución no es relevante y por lo tanto, la salida del sistema es la misma si se intercambian los papeles de la entrada y de la respuesta al impulso. De acuerdo con esto, un sistema lineal e invariante con el tiempo con entrada $x[n]$ y respuesta al impulso $h[n]$ producirá la misma salida que otro sistema lineal en invariante con entrada $h[n]$ y respuesta al impulso $x[n]$. La operación de convolución es también distributiva con respecto a la suma. Es decir,

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]. \tag{2.62}$$

Esto se desprende de forma directa de la Ecuación (2.49) y es una consecuencia directa de la linealidad y conmutatividad de la convolución. La Ecuación (2.62) se muestra gráficamente en la Figura 2.11; la Figura 2.11(a) representa el miembro derecho de la Ecuación (2.62), y la Figura 2.11(b) el miembro izquierdo.

La operación de convolución tiene también la propiedad asociativa, es decir,

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]). \tag{2.63}$$

[2]Estos resultados se presentan, por ejemplo, en Grossman (1992) y Jolley (2004).

[3]En la presentación anterior y a lo largo de todo el texto, utilizaremos la notación abreviada de la Ecuación (2.50) para expresar la operación de convolución, pero hay que resaltar que las propiedades de la convolución se deducen de la definición de la Ecuación (2.49).).

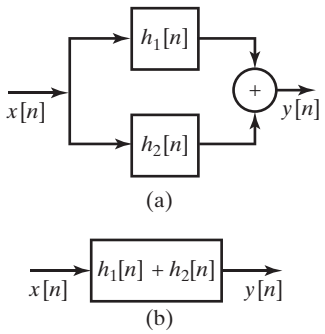


Figura 2.11 (a) Combinación en paralelo de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. (b) Un sistema equivalente.

Además, como la operación de convolución es conmutativa, la Ecuación (2.63) es equivalente a

$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]. \tag{2.64}$$

Estas equivalencias se muestran gráficamente en la Figura 2.12. Además, las Ecuaciones (2.63) y (2.64) implican claramente que si dos sistemas lineales e invariantes con el tiempo con respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$ se conectan en cascada, la respuesta al impulto global equivalente es

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]. \tag{2.65}$$

En una conexión en paralelo, los sistemas tienen la misma entrada, y sus salidas se suman para producir la salida total. De la propiedad distributiva de la convolución se desprende que la conexión en paralelo de dos sistemas lineales e invariantes con el tiempo es equivalente a un único sistema cuya respuesta al impulso es la suma de las respuestas al impulso de cada uno de los sistemas. Es decir

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]. \tag{2.66}$$

Las restricciones de linealidad e invarianza temporal definen una clase de sistemas con propiedades muy especiales. La estabilidad y la causalidad representan propiedades adicionales, y es muy importante saber si un sistema lineal e invariante con el tiempo es estable y si es causal. Recordemos de la Sección 2.2.5 que un sistema es estable si cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Los sistemas lineales e invariantes con el tiempo son estables si y sólo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable. Es decir, si

$$B_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \tag{2.67}$$

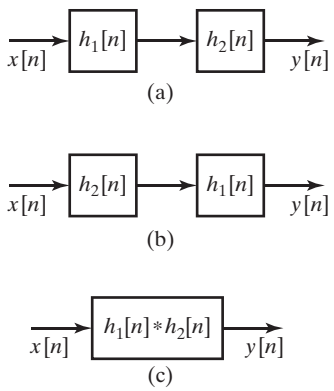


Figura 2.12 (a) Combinación en cascada de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. (b) Cascada equivalente. (c) Un único sistema equivalente.

Esta propiedad se puede demostrar como sigue. A partir de la Ecuación (2.61),

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|\,|x[n-k]|. \tag{2.68}$$

Si $x[n]$ está acotada, es decir si se cumple

$$|x[n]| \leq B_x,$$

podemos sustituir $|x[n-k]|$ por B_x sin que se deje de cumplir la desigualdad. Por tanto,

$$|y[n]| \leq B_x B_h. \tag{2.69}$$

Es decir, que $y[n]$ estará acotada si se cumple la Ecuación (2.67). En otras palabras, la Ecuación (2.67) es una condición suficiente para la estabilidad. Para demostrar que es también una condición necesaria, debemos demostrar que si $B_h = \infty$, se puede encontrar una entrada acotada que produzca una salida no acotada. Esta entrada es la secuencia cuyos valores son

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \tag{2.70}$$

siendo $h^*[n]$ el complejo conjugado de $h[n]$. Claramente, la secuencia $x[n]$ está acotada por la unidad. Sin embargo, el valor de la salida en $n = 0$ es

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = B_h. \tag{2.71}$$

Por lo tanto, si $B_h = \infty$, es posible que una secuencia de entrada acotada produzca una secuencia de salida no acotada.

La clase de los sistemas causales se definió en la Sección 2.2.4 como la de aquellos sistemas para los que la salida $y[n_0]$ depende sólo de las muestras de entrada $x[n]$, para $n \leq n_0$. Utilizando la Ecuación (2.49) o la (2.61) se puede ver que esta definición implica la condición

$$h[n] = 0, \qquad n < 0, \tag{2.72}$$

Esta es la condición de causalidad para sistemas lineales e invariantes con el tiempo (véase el problema 2.69). Por esta razón, algunas veces es conveniente denominar *secuencia causal*, lo que quiere decir que podría ser la respuesta al impulso de un sistema causal.

Para ilustrar cómo se reflejan las propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo en la respuesta al impulso, consideremos de nuevo algunos de los sistemas definidos en los Ejemplos 2.2 y 2.9. En primer lugar, nótese que sólo los sistemas de los Ejemplos 2.2, 2.3, 2.5 son lineales e invariantes con el tiempo. Aunque se puede obtener la respuesta al impulso de un sistema no lineal o variante con el tiempo, simplemente utilizando un impulso como entrada, su interés es generalmente limitado, ya que la fórmula de la suma de convolución y las Ecuaciones (2.67) y (2.72),que expresan las condiciones de estabilidad y causalidad, no sirven para estos sistemas.

En primer lugar, obtendremos las respuestas al impulso de los sistemas de los Ejemplos 2.2, 2.3, 2.5 y 2.9. Para ello, podemos calcular simplemente la respuesta de cada sistema a la entrada $\delta[n]$, utilizando la relación que define cada sistema. Las respuestas al impulso resultantes son las siguientes:

Retardo ideal (Ejemplo 2.2)

$$h[n] = \delta[n - n_d], \qquad n_d \text{ un entero positivo fijo.} \tag{2.73}$$

Promediado móvil (Ejemplo 2.3)

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \le n \le M_2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.74}$$

Acumulador (Ejemplo 2.5)

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \begin{cases} 1, & n \ge 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} = u[n]. \tag{2.75}$$

Diferencia progresiva (Ejemplo 2.9)

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]. \tag{2.76}$$

Diferencia regresiva (Ejemplo 2.9)

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]. \tag{2.77}$$

Dadas las respuestas al impulso de estos sistemas básicos (Ecuaciones (2.73)–(2.77)], podemos comprobar la estabilidad de cada uno de ellos calculando la suma

$$B_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|.$$

Para los ejemplos del retardo ideal, promediado móvil, diferencia progresiva y diferencia regresiva se puede ver claramente que $B_h < \infty$, ya que la respuesta al impulso sólo tiene un número finito de muestras distintas de cero. En general, un sistema con respuesta al impulso de duración finita (FIR,[4] *Finite-duration Impulse Response*) será siempre estable mientras los valores de su respuesta al impulso sean de módulo finito. Sin embargo el acumulador es un sistema inestable ya que

$$B_h = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

En la Sección 2.2.5 demostramos también la inestabilidad del acumulador proporcionando un ejemplo de entrada acotada (el escalón unidad) que producía una salida no acotada.

La respuesta al impulso del acumulador es de duración infinita. Este sistema es un ejemplo de la clase de sistemas denominada de *respuesta al impulso de duración infinita* (IIR,[5] *Infinite-duration*

[4] Se utilizarán las siglas inglesas FIR por ser de uso habitual en este ámbito *(N. del T.)*.

[5] Se utilizarán las siglas inglesas IIR por ser de uso habitual en este ámbito *(N. del T.)*.

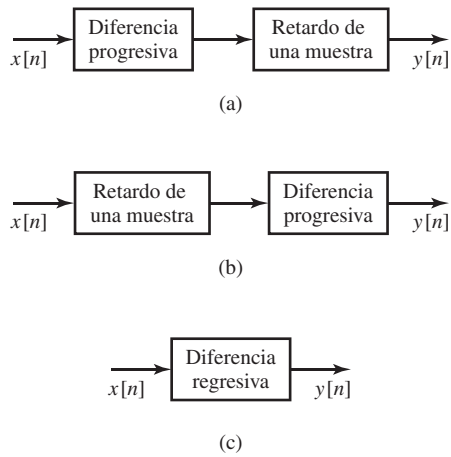


Figura 2.13 Sistemas que son equivalentes aplicando la propiedad conmutativa de la convolución.

Impulse Response). Un ejemplo de sistema IIR estable sería un sistema cuya respuesta al impulso es $h[n] = a^n u[n]$ con $|a| < 1$. En este caso,

$$B_h = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \tag{2.78}$$

Si $|a| < 1$, la fórmula de la suma de términos de una serie geométrica infinita proporciona el siguiente resultado

$$B_h = \frac{1}{1-|a|} < \infty. \tag{2.79}$$

Por otra parte, si $|a| \geq 1$, la suma es infinita y el sistema es inestable.

Para comprobar la causalidad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo de los Ejemplos 2.2, 2.3, 2.5 y 2.9, podemos ver si $h[n] = 0$ para $n < 0$. Como se vio en la Sección 2.2.4, el sistema de retardo ideal [$n_d \geq 0$ en la Ecuación (2.20)] es causal. Si $n_d < 0$, el sistema es no causal. Para el sistema de promediado móvil, la condición de causalidad exige que $-M_1 \geq 0$ y $M_2 \geq 0$. Los sistemas acumulador y de diferencia regresiva son causales, y el de diferencia progresiva es no causal.

El concepto de convolución como una operación entre dos secuencias puede simplificar muchos problemas en los que intervienen sistemas. Se puede obtener un resultado particularmente útil para el sistema de retardo ideal. Como la salida de este sistema es $y[n] = x[n-n_d]$, y dado que su respuesta al impulso es $h[n] = \delta[n-n_d]$, se deduce que

$$x[n] * \delta[n-n_d] = \delta[n-n_d] * x[n] = x[n-n_d]. \tag{2.80}$$

Es decir, que la convolución de cualquier señal $x[n]$ con un impulso desplazado se puede obtener fácilmente, simplemente desplazando $x[n]$ una cantidad igual al desplazamiento del impulso.

Como el retardo es una operación fundamental en la implementación de sistemas lineales, el resultado anterior es a menudo de utilidad en el análisis y simplificación de interconexiones de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Por ejemplo, consideremos el sistema de la Figura 2.13(a), que consiste en un sistema de diferencia progresiva seguido por un retardo ideal de una muestra. De acuerdo con la propiedad conmutativa de la convolución, el orden en el que se conectan los sistemas en cascada no es relevante, mientras se trate de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Por tanto, obtendremos el mismo resultado si calculamos primero la diferencia progresiva y seguidamente retardamos el resultado (Figura 2.13(a)) que si retardamos primero la secuencia y después calculamos la diferencia progresiva

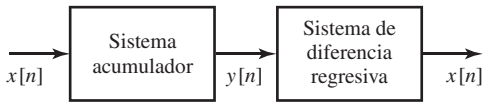


Figura 2.14 Un acumulador en cascada con un sistema de diferencia regresiva. Como el sistema de diferencia regresiva es el sistema inverso de acumulador, la combinación en cascada de los dos es equivalente al sistema identidad.

(Figura 213(b)). Además, como se indica en la Ecuación (2.65) y en la Figura 2.12, la respuesta total de una cascada de sistemas es la convolución de las respuestas al impulso de cada sistema. Por tanto,

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] \\ &= \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) \\ &= \delta[n] - \delta[n-1]. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Es decir, $h[n]$ es idéntica a la respuesta al impulso del sistema de diferencia regresiva. Por consiguiente, la cascada de sistemas de las Figuras 2.13(a) y 2.13(b) se puede sustituir por un sistema de diferencias regresivas, como muestra la Figura 2.13(c).

Nótese que los sistemas no causales de diferencia progresiva de las Figuras 2.13(a) y (b) se transforman en sistemas causales al colocarlos en cascada con un retardo. En general, cualquier sistema FIR no causal se puede convertir en causal colocándolo en cascada con un retardo suficientemente grande.

Otro ejemplo de sistemas en cascada puede servir para presentar el concepto de *sistema inverso*. Consideremos los sistemas en cascada que se muestran en la Figura 2.14. La respuesta al impulso de la cascada de sistemas es

$$\begin{aligned} h[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n]. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Es decir, la combinación en cascada de un acumulador seguido por un sistema de diferencia regresiva (o viceversa) produce un sistema global cuya respuesta al impulso es el propio impulso. Es decir, la salida de la combinación en cascada será siempre igual a la entrada, puesto que $x[n] * \delta[n] = x[n]$. En este caso, el sistema de diferencia regresiva compensa exactamente (o invierte) el efecto del acumulador. Es decir, que el sistema de diferencia regresiva es el *sistema inverso* del acumulador. Aplicando la propiedad conmutativa de la convolución, se puede ver que el acumulador es asimismo el sistema inverso del sistema de diferencia regresiva. Nótese que este ejemplo proporciona una interpretación de sistema de las Ecuaciones (2.7) y (2.9). En general, si un sistema lineal e invariante con el tiempo tiene como respuesta al impulso $h[n]$, su sistema inverso tendrá una respuesta al impulso $h_i[n]$ definida por la relación

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n]. \tag{2.83}$$

Los sistemas inversos son útiles en muchas situaciones en las que es necesario compensar los efectos de un sistema lineal. En general, es difícil resolver directamente la Ecuación (2.83) para obtener $h_i[n]$ dado $h[n]$. Sin embargo, en el Capítulo 3, veremos que la transformada z proporciona un método directo para obtener el sistema inverso.

2.5. ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una clase importante de sistemas lineales e invariantes con el tiempo está formada por aquellos sistemas en los que la entrada y la salida satisfacen una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden N, de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]. \tag{2.84}$$

Las propiedades presentadas en la Sección 2.4 y algunas de las técnicas de análisis que se han visto allí se pueden utilizar para obtener representaciones en forma de ecuación en diferencias para algunos de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo que hemos definido.

Ejemplo 2.12 Representación en forma de ecuación en diferencias del sistema acumulador

El sistema acumulador se define como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \tag{2.85}$$

Para demostrar que la entrada y la salida satisfacen una ecuación en diferencias de la forma de la Ecuación (2.84), podemos escribir la Ecuación (2.85) en la forma

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \tag{2.86}$$

Además, teniendo en cuenta la Ecuación (2.85)

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \tag{2.87}$$

Sustituyendo la Ecuación (2.87) en la Ecuación (2.86) obtenemos

$$y[n] = x[n] + y[n-1], \tag{2.88}$$

y de forma equivalente,

$$y[n] - y[n-1] = x[n]. \tag{2.89}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que además de satisfacer la relación de la Ecuación (2.85), la entrada y la salida satisfacen una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de la forma de la Ecuación (2.84), con $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = 0$ y $b_0 = 1$.

La ecuación en diferencias en la forma presentada en la Ecuación (2.88) nos proporciona una buena idea para implementar el sistema acumulador. De acuerdo con la Ecuación (2.88), para cada valor de n, sumaremos el valor actual de entrada $x[n]$ a la suma previamente acumulada $y[n-1]$. La Figura 2.15 representa el diagrama de bloques de esta interpretación del acumulador.

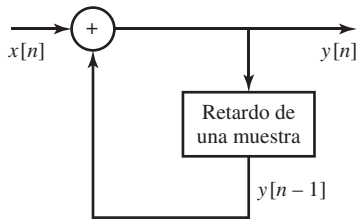


Figura 2.15 Diagrama de bloques de una ecuación en diferencias recursiva que representa un acumulador.

La Ecuación (2.88) y el diagrama de bloques de la Figura 2.15 se denominan representación recursiva del sistema, ya que cada valor se calcula utilizando los valores calculados previamente. Esta noción general se explorará más adelante en esta misma sección.

Ejemplo 2.13 Representación en forma de ecuación en diferencias de un sistema de promediado móvil

Consideremos el sistema de promediado móvil del Ejemplo 2.3, con $M_1 = 0$ de forma que el sistema sea causal. En este caso, aplicando la Ecuación (2.74), la respuesta al impulso es

$$h[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(u[n] - u[n-M_2-1]), \tag{2.90}$$

de donde se puede obtener que

$$y[n] = \frac{1}{(M_2+1)}\sum_{k=0}^{M_2} x[n-k], \tag{2.91}$$

que es un caso especial de la Ecuación (2.84) para $N = 0$, $a_0 = 1$, $M = M_2$ y $b_k = 1/(M_2+1)$ para $0 \le k \le M_2$.

La respuesta al impulso se puede expresar también así

$$h[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(\delta[n] - \delta[n-M_2-1]) * u[n], \tag{2.92}$$

lo que sugiere que el sistema de promediado móvil causal se puede representar como la combinación en cascada que se muestra en la Figura 2.16. Podemos obtener una ecuación en diferencias que represente a este diagrama de bloques si primero nos damos cuenta de que

$$x_1[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n-M_2-1]). \tag{2.93}$$

Aplicando la Ecuación (2.89) del Ejemplo 2.12, vemos que la salida del acumulador satisface la ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n-1] = x_1[n],$$

con lo que

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n-M_2-1]). \tag{2.94}$$

Y de nuevo tenemos una ecuación en diferencias con la forma de la Ecuación (2.84), pero esta vez con $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = M_2+1$ y $b_0 = -b_{M_2+1} = 1/(M_2+1)$ y $b_k = 0$ para el resto de valores de k.

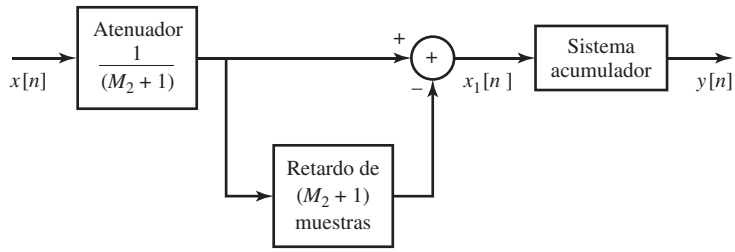


Figura 2.16 Diagrama de bloques de la forma recursiva de un sistema de promediado móvil.

En el Ejemplo 2.13, mostramos dos ecuaciones en diferencias distintas que representaban el mismo sistema de promediado móvil. En el Capítulo 6 veremos que exiten muchas ecuaciones en diferencias distintas que pueden representar la relación entrada-salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo.

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes para sistemas en tiempo continuo, sin restricciones adicionales ni ninguna otra información, una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes para sistemas en tiempo discreto no proporciona una especificación única de la salida para una entrada determinada. Concretamente, supongamos que, dada una entrada $x_p[n]$, somos capaces por cualquier medio de obtener una secuencia de salida $y_p[n]$ que satisface la Ecuación (2.84). Entonces, la misma ecuación con la misma entrada es satisfecha por cualquier salida de la forma

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n], \tag{2.95}$$

siendo $y_h[n]$ cualquier solución de la Ecuación (2.84) para $x[n] = 0$, es decir, de la ecuación

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_h[n-k] = 0. \tag{2.96}$$

La Ecuación (2.96) se denomina *ecuación en diferencias homogénea* e $y_h[n]$ es la solución homogénea. La secuencia $y_h[n]$ es de hecho un miembro de la familia de soluciones de la forma

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N} A_m z_m^n, \tag{2.97}$$

donde los coeficientes A_m se pueden elegir de forma que se cumpla un conjunto de condiciones auxiliares sobre $y[n]$. Sustituyendo la Ecuación (2.97) en la Ecuación (2.96) se puede demostrar que los números complejos z_m deben ser raíces del polinomio

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}. \tag{2.98}$$

es decir, $A(z_m) = 0$ para $m = 1, 2, \ldots, N$. La Ecuación (2.97) asume que las N raíces del polinomio de la Ecuación (2.98) son distintas. La forma de los términos asociados a raíces múltiples es ligeramente diferente, pero siempre hay N coeficientes indeterminados. En el Problema 2.50 se considera un ejemplo de solución homogénea con raíces múltiples.

Como $y_h[n]$ tiene N coeficientes indeterminados, se necesita un conjunto de N condiciones auxiliares para especificar de forma única $y[n]$ para un $x[n]$ dado. Estas condiciones auxiliares pueden consistir

en unos valores especificados de $y[n]$ para valores concretos de n, como $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$, resolviéndose después un sistema de N ecuaciones lineales en los N coeficientes indeterminados.

Alternativamente, si las condiciones auxiliares son una serie de valores de $y[n]$, se pueden generar los restantes valores de la señal $y[n]$ escribiendo la Ecuación (2.84) como una fórmula de recurrencia, es decir, de esta forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]. \tag{2.99}$$

Si se especifica la entrada $x[n]$ para todo n, junto con un conjunto de valores auxiliares, por ejemplo $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$, utilizando la Ecuación (2.99) se puede determinar $y[0]$. Con los valores de $y[0]$, $y[-1], \ldots, y[-N+1]$ se puede calcular $y[1]$, y así sucesivamente. Cuando se utiliza este procedimiento, se dice que $y[n]$ se obtiene *recursivamente,* es decir, el cálculo de la salida no sólo requiere el uso de la secuencia de entrada, sino también de los valores previos de la secuencia de salida.

Para generar los valores de $y[n]$ para $n < -N$ (suponiendo de nuevo que se dispone del conjunto de valores $y[-1]$, $y[-2]$, $\ldots$, $y[-N]$ que son las condiciones auxiliares) podemos escribir la Ecuación (2.84) de la siguiente forma

$$y[n-N] = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_N} x[n-k], \tag{2.100}$$

de donde se pueden obtener recursivamente los valores de $y[-N-1]$, $y[-N-2]$, etc. El ejemplo que sigue ilustra el procedimiento recursivo.

Nuestro principal interés en este texto son los sistemas lineales e invariantes con el tiempo, y en este caso las condiciones auxiliares deben ser consistentes con estos requerimientos adicionales. En el Capítulo 3, cuando presentemos la solución de ecuaciones en diferencias utilizando la transformada z, incorporaremos implícitamente las condiciones de linealidad e invarianza temporal. Como veremos entonces, incluso con las condiciones adicionales de linealidad e invarianza temporal, la solución de la ecuación en diferencias, y por consiguiente el sistema, no está definido de forma única. Concretamente existen sisrtemas lineales e invariantes causales y no causales que son consistentes con una determinada ecuación en diferencias.En particular, dada una determinada ecuación en diferencias, existen en general sistemas lineales e invariantes con el tiempo causales y no causales que son consistentes con ella.

Si un sistema está caracterizado por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes y se especifica adicionalmente que debe ser lineal, invariante con el tiempo y causal, la solución es única. En este caso, las condiciones auxiliares se denominan a menudo *condiciones de reposo inicial*. En otras palabras, la información auxiliar es que si la entrada $x[n]$ es cero para valores de n menores que algún instante n_0, la salida $y[n]$ debe valer cero para n menor que n_0. Esto proporciona suficientes condiciones iniciales para obtener recursivamente $y[n]$ para $n \geq n_0$ rutilizando la Ecuación (2.99).

En resumen, dado un sistema en el que la entrada y la salida satisfacen una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes:

- La salida para una entrada determinada no está especificada de forma única. Se necesita información adicional o condiciones auxiliares.
- Si la información auxiliar toma la forma de N valores secuenciales de la salida, los valores posteriores se pueden obtener reordenando la ecuación en diferencias en forma de una relación recursiva, e incrementando los valores de n. Los valores previos se puede obtener reordenando la ecuación en diferencias en forma de una relación recursiva, y disminuyendo los valores de n.

- Las propiedades de linealidad, invarianza temporal y causalidad del sistema dependen de las condiciones auxiliares. Si una condición adicional es que el sistema esté en reposo inicial, el sistema será lineal, invariante con el tiempo y causal.

La discusión precedente supone que, en la Ecuación (2.84). Si $N = 0$, no se requiere utilizar un procedimiento recursivo en la ecuación en diferencias para calcular la salida y, por lo tanto, no se requieren condiciones auxiliares. Es decir,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k]. \tag{2.101}$$

La Ecuación (2.101) tiene la forma de una convolución, y si hacemos $x[n] = \delta[n]$, vemos que la respuesta al impulso es

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) \delta[n-k],$$

o

$$h[n] = \begin{cases} \left(\dfrac{b_n}{a_0}\right), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{2.102}$$

La respuesta al impulso es claramente de duración finita. De hecho, la salida de cualquier sistema FIR se puede calcular de forma no recursiva, siendo los coeficientes los valores de la secuencia de respuesta al impulso. El sistema de promediado móvil del Ejemplo 2.15 con $M_1 = 0$ es un ejemplo de sistema FIR causal. Una característica interesante de este sistema es que se puede encontrar también una ecuación recursiva para obtener la salida. En el Capítulo 6 veremos que hay muchas formas posibles de implementar una determinada transformación de señales. Las ventajas de un método sobre otro dependen de consideraciones de índole práctica, como precisión numérica, requerimientos de almacenamiento de datos, y número de productos y sumas necesarios para calcular cada muestra de la salida.

2.6. REPRESENTACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

En las secciones anteriores hemos presentado algunos conceptos fundamentales de la teoría de señales y sistemas en tiempo discreto. Para el caso de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo, hemos visto que la representación de la secuencia de entrada como una suma ponderada de impulsos retardados nos conduce a la representación de la salida como una suma ponderada de respuestas al impulso retardadas. Como en el caso de las señales en tiempo continuo, las señales en tiempo discreto se pueden representar de varias formas diferentes. Por ejemplo, las secuencias sinusoidales y exponenciales complejas tienen un papel particularmente importante en la representación de señales en tiempo discreto. Esto es debido a que las secuencias exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo y la respuesta a una entrada sinusoidal es también sinusoidal de la misma frecuencia que la entrada, y con amplitud y fase determinadas por el sistema. Esta propiedad fundamental de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo hace que las representaciones de las señales mediante sinusoides o exponenciales complejas (es decir, las representaciones de Fourier) sean muy útiles en la teoría de sistemas lineales.

2.6.1. Autofunciones de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo

La propiedad de autofunción de las exponenciales complejas respecto a los sistemas en tiempo discreto se deduce directamente por sustitución en la Ecuación (2.61). Concretamente, se puede demostrar de forma sencilla que dada una secuencia de entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$, la correspondiente salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$ es

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}, \tag{2.103}$$

siendo

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}. \tag{2.104}$$

En consecuencia, $e^{j\omega n}$ es una autofunción del sistema, y su autovalor asociado es $H(e^{j\omega})$. Observando la Ecuación (2.103), podemos ver que $H(e^{j\omega})$ describe el cambio en función de la frecuencia ω de la amplitud compleja de una señal de entrada de tipo exponencial compleja. El autovalor $H(e^{j\omega})$ se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema. En general, $H(e^{j\omega})$ es un número complejo y se puede expresar por tanto en función de sus partes real e imaginaria:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \tag{2.105}$$

o en función de su amplitud y fase

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}. \tag{2.106}$$

Ejemplo 2.14 Respuesta en frecuencia del sistema de retardo ideal

Veamos un ejemplo simple e importante. Consideremos el sistema de retardo ideal definido así:

$$y[n] = x[n - n_d], \tag{2.107}$$

siendo n_d un entero fijo. Si consideramos que la entrada al sistema es $x[n] = e^{j\omega n}$, entonces, aplicando la Ecuación (2.107), tenemos que

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d}e^{j\omega n}.$$

La respuesta en frecuencia del retardo ideal es entonces

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}. \tag{2.108}$$

Podemos obtener la respuesta en frecuencia por un método alternativo si tenemos en cuenta que en el sistema de retardo ideal, $h[n] = \delta[n - n_d]$. Utilizando la Ecuación (2.104) obtenemos

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia son

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d), \tag{2.109a}$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\operatorname{sen}(\omega n_d). \tag{2.109b}$$

Y el módulo y la fase

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \tag{2.110a}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d. \tag{2.110b}$$

En la Sección 2.7, demostraremos que una amplia clase de señales se puede representar mediante una combinación lineal de exponenciales complejas de la forma

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}. \tag{2.111}$$

Aplicando el principio de superposición, la correspondiente salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \tag{2.112}$$

Por tanto, si podemos obtener una representación de $x[n]$ en forma de superposición de secuencias exponenciales complejas, como indica la Ecuación (2.111), y conocemos la respuesta en frecuencia del sistema en todas las frecuencias ω_k, podremos obtener la salida empleando la Ecuación (2.112). El sencillo ejemplo siguiente ilustra esta propiedad fundamental de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

Ejemplo 2.15 Respuesta de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo a una sinusoide

Consideremos una entrada sinusoidal

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \tag{2.113}$$

Aplicando la Ecuación (2.103), podemos obtener la respuesta a $x_1[n] = (A/2)e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}. \tag{2.114a}$$

La respuesta a $x_2[n] = (A/2)e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$ es

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \tag{2.114b}$$

Y por lo tanto, la respuesta total es

$$y[n] = \frac{A}{2}[H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}]. \tag{2.115}$$

Si $h[n]$ es real, se puede demostrar (véase el Problema 2.78) que $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$. En consecuencia,

$$y[n] = A\,|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi + \theta), \tag{2.116}$$

siendo $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ la fase de la función del sistema a la frecuencia ω_0.

En el caso simple del retardo ideal, $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ y $\theta = -\omega_0 n_d$, como ya determinamos en el Ejemplo 2.14. Por tanto,

$$\begin{aligned} y[n] &= A\cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d) \\ &= A\cos[\omega_0(n - n_d) + \phi], \end{aligned} \tag{2.117}$$

que es idéntico al resultado que habríamos obtenido aplicando directamente la definición de sistema de retardo ideal.

El concepto de respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo es esencialmente el mismo para sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto. Sin embargo, surge una distinción importante debida a que la respuesta en frecuencia de los sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes es siempre una función periódica en la variable de frecuencia ω con periodo 2π. Para demostrarlo, sustituiremos $\omega + 2\pi$ en la Ecuación (2.104) con lo que obtenemos

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}. \tag{2.118}$$

Utilizando el hecho de que $e^{\pm j2\pi n} = 1$ para n entero, tenemos que

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Por tanto,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}), \qquad \text{para todo } \omega, \tag{2.119}$$

y, de forma más general,

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \qquad \text{para } r \text{ entero.} \tag{2.120}$$

Es decir, $H(e^{j\omega})$ es periódica de periodo 2π. Nótese que esto es claramente cierto para el sistema de retardo ideal, ya que $e^{-j(\omega+2\pi)n_d} = e^{-j\omega n_d}$ siendo n_d un número entero.

El motivo de esta periodicidad está relacionado directamente con nuestra observación anterior de que la secuencia

$$\{e^{j\omega n}\}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

no se puede distinguir de la secuencia

$$\{e^{j(\omega+2\pi)n}\}, \qquad -\infty < n < \infty.$$

Como estas dos secuencias tienen los mismos valores para todo n, el sistema tiene que responder de igual forma a ambas secuencias de entrada. Esta condición exige que se cumpla la Ecuación (2.119).

Como $H(e^{j\omega})$ es periódica de periodo 2π, y como las frecuencias ω y $\omega + 2\pi$ no se pueden distinguir, se deduce que sólo es necesario especificar $H(e^{j\omega})$ en un intervalo de longitud 2π, como por ejemplo, $0 \le \omega < 2\pi$ o $-\pi < \omega \le \pi$. La periodicidad inherente define la respuesta en frecuencia para cualquier valor fuera del intervalo escogido. Por motivos de simplicidad y de consistencia con el caso de tiempo continuo, generalmente resulta conveniente especificar $H(e^{j\omega})$ en el intervalo $-\pi < \omega \le \pi$. Con respecto a este intervalo, las "bajas frecuencias" son las frecuencias cercanas a cero, y las "altas frecuencias" son las frecuencias cercanas a $\pm\pi$. Teniendo en cuenta que las frecuencias que difieren en un múltiplo entero de 2π son indistinguibles, podríamos generalizar la propiedad anterior como sigue: las "bajas frecuencias" son aquellas cercanas a un múltiplo par de π y las "altas frecuencias" son aquellas cercanas a un múltiplo impar de π. Esto es consistente con lo indicado en la Sección 2.1.

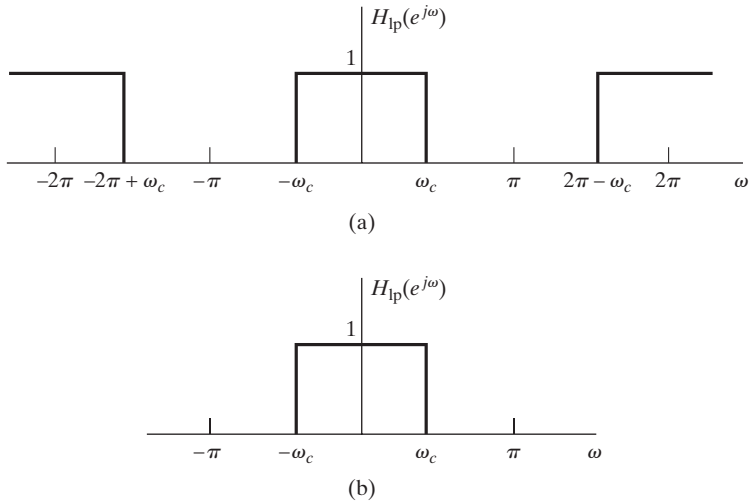


Figura 2.17 Filtro paso bajo ideal. (a) Se muestra la periodicidad de la respuesta en frecuencia y (b) se muestra un periodo de la respuesta en frecuencia.

Una clase importante de sistemas lineales invariantes con el tiempo incluye a los sistemas cuya respuesta en frecuencia es la unidad en un intervalo de frecuencias determinado y es cero para las restantes frecuencias, que se denominan filtros ideales selectivos en frecuencia. La Figura 2.17(a) muestra la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo ideal. Debido a la periodicidad implícita de la respuesta en frecuencia en tiempo discreto, tiene la apariencia de un filtro multibanda, ya que las frecuencias alrededor de $\omega = 2\pi$ son indistinguibles de las frecuencias alrededor de $\omega = 0$. En efecto, la respuesta en frecuencia deja pasar sólo las frecuencias bajas y rechaza las frecuencias altas. Como la respuesta en frecuencia queda completamente especificada por su comportamiento en el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$, es típico mostrar la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo ideal sólo en el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$, como se muestra en la Figura 2.17(b). Se sobreentiende que la respuesta en frecuencia se repite periódicamente con periodo 2π fuera del intervalo representado. Las Figuras 2.18(a), (b) y (c) muestran las respuestas en frecuencia de filtros ideales paso alto, banda eliminada y paso banda, respectivamente.

Ejemplo 2.16 Respuesta en frecuencia del sistema de promediado móvil

La respuesta al impulso del sistema de promediado móvil del Ejemplo 2.3 es

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Por tanto, la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}. \tag{2.121}$$

En el caso del sistema de promediado móvil causal $M_1 = 0$ y la Ecuación (2.121) se puede expresar como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n}. \tag{2.122}$$

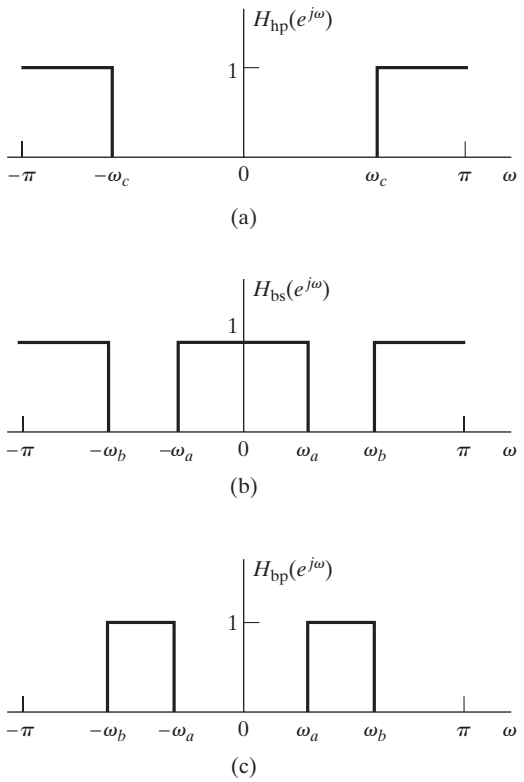


Figura 2.18 Filtros ideales selectivos en frecuencia. (a) Filtro paso alto. (b) Filtro banda eliminada. (c) Filtro paso banda. En todos los casos la respuesta en frecuencia es periódica de periodo 2. Sólo se muestra un periodo.

Utilizando la Ecuación (2.55), la Ecuación (2.122) se transforma en

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_2+1}\left(\frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}}\right) \\ &= \frac{1}{M_2+1}\frac{(e^{j\omega(M_2+1)/2}-e^{-j\omega(M_2+1)/2})e^{-j\omega(M_2+1)/2}}{(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{1}{M_2+1}\frac{\operatorname{sen}[\omega(M_2+1)/2]}{\operatorname{sen}\omega/2}e^{-j\omega M_2/2}. \end{aligned} \tag{2.123}$$

La Figura 2.19 muestra el módulo y la fase de $H(e^{j\omega})$ para este caso, con $M_2 = 4$.

Si el sistema de promediado móvil es simétrico, es decir, si $M_1 = M_2$, entonces la Ecuación (2.123) debe ser sustituida por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2M_2+1}\frac{\operatorname{sen}[\omega(2M_2+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}. \tag{2.124}$$

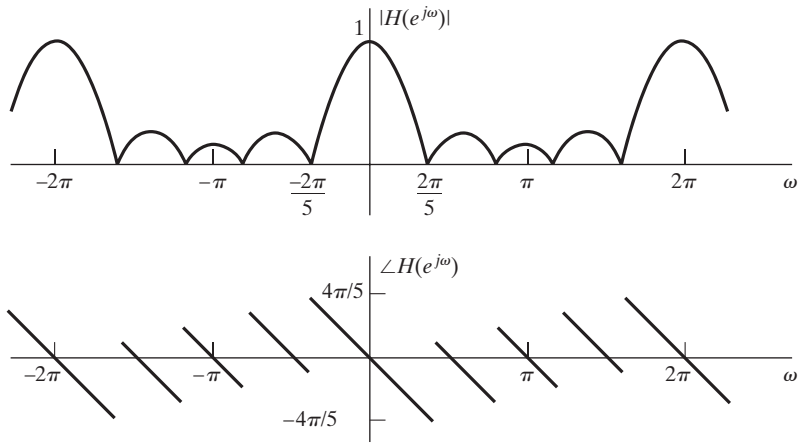


Figura 2.19 (a) Módulo y (b) fase de la respuesta en frecuencia del sistema de promediado móvil para el caso de $M_1 = 0$ y $M_2 = 4$.

Nótese que en ambos casos $H(e^{j\omega})$ es periódica, como debe ocurrir con la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto. Nótese también que $|H(e^{j\omega})|$ decrece en las "altas frecuencias" y que $\angle H(e^{j\omega})$, es decir, la fase de $H(e^{j\omega})$, varía linealmente con ω. Esta atenuación de las altas frecuencias sugiere que el sistema suavizará las variaciones rápidas de la secuencia de entrada. En otras palabras, el sistema es una aproximación tosca de un filtro paso bajo. Esto es consistente con lo que nuestra intuición nos sugiere acerca del comportamiento del sistema de promediado móvil.

2.6.2. Aplicación súbita de entradas exponenciales complejas

Hemos visto que las entradas exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$ producen en los sistemas lineales e invariantes con el tiempo salidas de la forma $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Esta clase de modelos son importantes en la representación matemática de un amplio conjunto de señales, incluso las que sólo existen en un dominio finito. Podemos aumentar nuestra comprensión de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo considerando entradas de apariencia más práctica, de la forma

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n], \tag{2.125}$$

es decir, exponenciales complejas que se aplican súbitamente en un instante temporal arbitrario, que por conveniencia escogeremos como $n = 0$. Utilizando la suma de convolución de la Ecuación (2.61) se puede obtener la correspondiente salida de un sistema lineal invariante con el tiempo y causal con respuesta al impulso $h[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Si consideramos la salida para $n \geq 0$, podemos escribir

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \tag{2.126}$$

$$= H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}. \tag{2.127}$$

Observando la Ecuación (2.127), vemos que la salida consta de la suma de dos términos, es decir, $y[n] = y_{\text{ss}}[n] + y_t[n]$. El primer término,

$$y_{\text{ss}}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n},$$

se denomina respuesta en estado estacionario. Es idéntica a la respuesta del sistema cuando la entrada es $e^{j\omega n}$ para todo n. En cierto sentido, el segundo término,

$$y_t[n] = -\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n},$$

representa la cantidad en la que la salida difiere del resultado correspondiente a la autofunción. Esta parte se denomina respuesta transitoria, ya que resulta claro que en algunos casos se puede aproximar a cero. Para ver las condiciones para las que esto ocurre, consideremos el tamaño del segundo término. Su módulo está acotado como se indica a continuación:

$$|y_t[n]| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|. \tag{2.128}$$

Observando la Ecuación (2.128), se puede ver claramente que si la respuesta al impulso es de longitud finita, es decir $h[n] = 0$ excepto para $0 \leq n \leq M$, el término $y_t[n] = 0$ para $n+1 > M$, o $n > M-1$. En este caso,

$$y[n] = y_{\text{ss}}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}, \qquad \text{para } n > M-1.$$

Si la respuesta al impulso tiene duración infinita, la respuesta transitoria no desaparece abruptamente, pero si las muestras de la respuesta al impulso se aproximan a cero al aumentar n, entonces $y_t[n]$ se aproximará a cero. Nótese que la Ecuación (2.128) se puede escribir como

$$|y_t[n]| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|. \tag{2.129}$$

Es decir, la respuesta transitoria está acotada por la suma de los valores absolutos de *todas* las muestras de la respuesta al impulso. Si el miembro derecho de la Ecuación (2.129) está acotado, es decir, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$

entonces el sistema será estable. De la Ecuación (2.129) se desprende que en sistemas estables, la respuesta transitoria debe decrecer progresivamente a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto una condición suficiente para que la respuesta transitoria se desvanezca asintóticamente es que el sistema sea estable.

La Figura 2.20 muestra la parte real de una señal exponencial compleja de frecuencia $\omega = 2\pi/10$. Los puntos rellenos indican las muestras $x[k]$ de la exponencial compleja aplicada súbitamente, mientras que los puntos no rellenos indican las muestras "perdidas" de la exponencial compleja, es decir, las que serían distintas de cero si la entrada fuera de la forma $e^{j\omega n}$ para todo n. Los puntos sombreados indican las muestras de la respuesta al impulso $h[n-k]$ en función de k para $n = 8$. En el caso de longitud finita

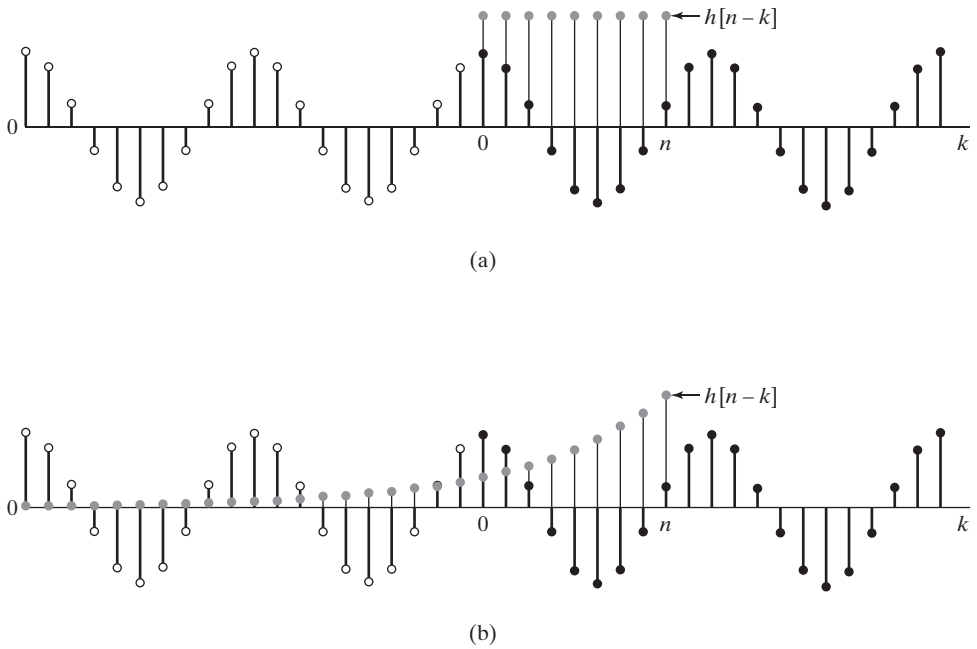


Figura 2.20 Ilustración de la parte real de una exponencial compleja aplicada súbitamente con (a) respuesta al impulso de longitud finita y (b) respuesta al impulso de longitud infinita.

que se muestra en la Figura 2.20(a), es claro que para $n \geq 8$, la salida constará sólo de la componente en estado estacionario, mientras que en el caso de longitud infinita, es claro que las muestras "perdidas" tendrán cada vez menos efecto a medida que n aumenta debido a la naturaleza decreciente de la respuesta al impulso.

La condición de estabilidad es también una condición suficiente para la existencia de la función de respuesta en frecuencia. Para ver que esto es así, basta con darse cuenta de que, en general,

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]e^{-j\omega k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$$

de forma que la condición general

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

asegura que $H(e^{j\omega})$ existe. No es sorprendente que la condición para la existencia de la respuesta en frecuencia sea la misma que la condición de existencia de un estado estacionario dominante. De hecho, una exponencial compleja que existe para todo n puede verse como una exponencial compleja aplicada en $n = -\infty$. La propiedad de autofunción de las exponenciales complejas depende de la estabilidad del sistema, ya que para n finito la respuesta transitoria debe anularse de forma que sólo veamos el término de respuesta en estado estacionario $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ a partir de algún valor finito de n.

2.7. REPRESENTACIÓN DE SECUENCIAS MEDIANTE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Una de las ventajas de la representación de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante su respuesta en frecuencia es que a menudo se pueden obtener fácilmente interpretaciones del comportamiento del sistema como la que obtuvimos en el Ejemplo 2.16. En el Capítulo 5 consideraremos este punto con mucho más detalle. Volvamos ahora a la pregunta de cómo podemos obtener representaciones de la forma (2.111) para una secuencia de entrada arbitraria.

Muchas secuencias se pueden representar mediante una integral de Fourier de la forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega, \tag{2.130}$$

siendo

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{2.131}$$

Las Ecuaciones (2.130) y (2.131) forman conjuntamente la representación de Fourier de la secuencia. La Ecuación (2.130), o *transformada inversa de Fourier,* es una ecuación de síntesis. Es decir, representa $x[n]$ como una superposición de sinusoides complejas infinitesimalmente pequeñas de la forma

$$\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega,$$

con ω en un intervalo de longitud 2π y $X\left(e^{j\omega}\right)$ representa la cantidad relativa de cada componente sinusoidal compleja. Aunque al escribir la Ecuación (2.130) hemos escogido el intervalo de valores de ω entre $-\pi$ y $+\pi$, se puede utilizar cualquier intervalo de longitud 2π. La Ecuación (2.131), o *transformada de Fourier,*[6] es una expresión para calcular $X\left(e^{j\omega}\right)$ a partir de la secuencia $x[n]$, es decir, para analizar la secuencia $x[n]$ determinando qué cantidad de cada componente en frecuencia es necesaria para sintetizar $x[n]$ utilizando la Ecuación (2.130).

En general, la transformada de Fourier es una función compleja de ω. Como en el caso de la respuesta en frecuencia, podemos expresar $X\left(e^{j\omega}\right)$ en forma rectangular

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \tag{2.132a}$$

o en forma polar

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\angle X\left(e^{j\omega}\right)}. \tag{2.132b}$$

Las cantidades $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ y $\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ son, respectivamente, el módulo y la fase de la transformada de Fourier.

La fase $\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ no está determinada de forma única por la Ecuación (2.132b), ya que se puede sumar a dicha fase cualquier múltiplo entero de 2π sin afectar al resultado de la exponenciación compleja. Cuando nos refiramos específicamente al valor principal, es decir, restringiendo $\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ al intervalo de valores entre $-\pi$ y $+\pi$, lo expresaremos como $\mathrm{ARG}[X\left(e^{j\omega}\right)]$. Si deseamos referirnos a la función de

[6] Algunas veces denominaremos la Ecuación (2.131) más explícitamente como transformada de Fourier en tiempo discreto, o DTFT (DTFT, *Discrete Time Fourier Transform*), particularmente cuando sea importante distinguirla de la transformada de Fourier en tiempo continuo.

fase como una función continua de ω para $0 < \omega < \pi$, es decir, no evaluada módulo 2π, utilizaremos la notación $\arg[X(e^{j\omega})]$.

Comparando las Ecuaciones (2.104) y (2.131) podemos ver que la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo es simplemente la transformada de Fourier de su respuesta al impulso. Por tanto, la respuesta al impulso se puede obtener a partir de la respuesta en frecuencia aplicando la integral de la transformada inversa de Fourier. Es decir,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{2.133}$$

Como comentamos anteriormente, la respuesta en frecuencia es una función periódica de ω. Asimismo, la transformada de Fourier es periódica en ω con periodo 2π. Para representar señales periódicas se utiliza habitualmente el desarrollo en serie de Fourier y es interesante advertir que, de hecho, la Ecuación (2.131) tiene la forma de desarrollo en serie de Fourier de la función periódica de variable continua $X(e^{j\omega})$ y la Ecuación (2.130), que expresa los valores de la secuencia $x[n]$ en función de la función periódica $X(e^{j\omega})$, tiene la forma de la integral que se utilizaría para obtener los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Nuestro uso de las Ecuaciones (2.130) y (2.131) se centra en la representación de la secuencia $x[n]$. No obstante, es útil tener constancia de la equivalencia entre la representación mediante el desarrollo en serie de Fourier de las funciones periódicas de variable continua y la representación mediante la transformada de Fourier de las señales en tiempo discreto, ya que todas las propiedades familiares del desarrollo en serie de Fourier se pueden aplicar, sin más que interpretar adecuadamente las variables, a las representaciones de secuencias mediante la transformada de Fourier (Oppenheim y Willsky (1997), McClellan, Schafer y Yoder (2003)).

Determinar la clase de señales que se pueden representar mediante la Ecuación (2.130) es equivalente a considerar la convergencia de la suma infinita de la Ecuación (2.131). Es decir, nos interesan las condiciones que deben satisfacer los términos de la suma de la Ecuación (2.131) para que se cumpla que

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \qquad \text{para todo } \omega,$$

siendo $X(e^{j\omega})$ el límite cuando $M \to \infty$ de la suma finita

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{2.134}$$

Se puede encontrar una condición suficiente para la convergencia como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|\,|e^{-j\omega n}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, si $x[n]$ es *absolutamente sumable* $X(e^{j\omega})$ existe. Es más, en este caso, se puede demostrar que la serie converge uniformemente a una función continua de ω (Körner (1988), Kammler (2000)). Como una secuencia estable es, por definición, absolutamente sumable, se deduce que todas las secuencias

estables tienen transformada de Fourier. Y, por lo tanto, cualquier *sistema* estable, es decir, aquel sistema cuye respuesta al impulso se absolutamente sumable, tiene una respuesta en frecuencia finita y continua.

La condición de ser absolutamente sumable es condición suficiente para la existencia de la representación de la transformada de Fourier. En los Ejemplos 2.14 y 2.16 calculamos las transformadas de Fourier de las respuestas al impulso del sistema de retardo y del sistema de promediado móvil. Estas respuestas al impulso son absolutamente sumables, ya que son de longitud finita. Claramente, cualquier secuencia de longitud finita será absolutamente sumable y por lo tanto admitirá una representación mediante la transformada de Fourier. En el contexto de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, cualquier sistema FIR será estable y por lo tanto tendrá una respuesta en frecuencia finita y continua. Sin embargo, cuando una secuencia es de longitud infinita, hay que estudiar la convergencia de la suma infinita. El siguiente ejemplo ilustra este caso.

Ejemplo 2.17 Condición de absolutamente sumable de una exponencial aplicada súbitamente

Sea $x[n] = a^n u[n]$. La transformada de Fourier de esta secuencia es

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad \text{si } |ae^{-j\omega}| < 1 \quad \text{o} \quad |a| < 1. \end{aligned}$$

Claramente, la condición $|a| < 1$ es la condición que hace que $x[n]$; sea absolutamente sumable. Es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty \qquad \text{si } |a| < 1. \tag{2.135}$$

La condición de ser absolutamente sumable es condición *suficiente* para la existencia de la representación mediante la transformada de Fourier, y garantiza también la convergencia uniforme. Algunas secuencias no son absolutamente sumables, pero son de cuadrado sumable, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{2.136}$$

Estas secuencias se pueden representar mediante la transformada de Fourier si relajamos la condición de convergencia uniforme de la suma infinita que define $X(e^{j\omega})$. Concretamente, en este caso tenemos convergencia en sentido cuadrático medio. Es decir, siendo

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{2.137a}$$

y

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}, \tag{2.137b}$$

se cumple que

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0. \tag{2.138}$$

En otras palabras, el error $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ puede no aproximarse a cero para cada valor de ω cuando $M \to \infty$, pero la "energía" total del error sí lo hace. El Ejemplo 2.18 ilustra este caso.

Ejemplo 2.18 Condición de ser sumable en sentido cuadrático medio del filtro paso bajo ideal

En este ejemplo determinaremos la respuesta al impulso del filtro paso bajo ideal presentado en la Sección 2.6. Su respuesta en frecuencia es

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \tag{2.139}$$

donde se sobreentiende periodicidad de periodo 2π. La respuesta al impulso $h_{\text{lp}}[n]$ se puede obtener utilizando la Ecuación (2.130) de síntesis de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} h_{\text{lp}}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{j\omega n}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn}(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \\ &= \frac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Vemos que como $h_{\text{lp}}[n]$ es distinta de cero para $n < 0$, el filtro paso bajo ideal es no causal. Además, $h_{\text{lp}}[n]$ no es absolutamente sumable. Los valores de la secuencia se aproximan a cero cuando $n \to \infty$, pero sólo como $1/n$. Esto se debe a que $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ es discontinua en $\omega = \omega_c$. Como $h_{\text{lp}}[n]$ no es absolutamente sumable, la suma infinita

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

no converge uniformemente para todos los valores de ω. Para obtener una interpretación intuitiva de esto, consideremos $H_M(e^{j\omega})$ como la suma de un número finito de términos:

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}. \tag{2.141}$$

La Figura 2.21 muestra la función $H_M(e^{j\omega})$ para varios valores de M. Nótese que a medida que M aumenta, el comportamiento oscilatorio en $\omega = \omega_c$ (que se denomina comúnmente fenómeno de Gibbs) es más rápido, pero la amplitud del rizado no decrece. De hecho, se puede demostrar que cuando $M \to \infty$, la amplitud máxima de las oscilaciones no tiende a cero, pero las oscilaciones convergen en posición hacia el punto $\omega = \pm\omega_c$. Por tanto, la suma infinita no converge uniformemente a la función discontinua $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ de la Ecuación (2.144). Sin embargo, $h_{\text{lp}}[n]$, definido en la Ecuación (2.140), es de cuadrado sumable y, por lo tanto, $H_M(e^{j\omega})$ converge en sentido cuadrático medio a $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$. Es decir,

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0.$$

Aunque el error entre $H_M(e^{j\omega})$ y $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ cuando $M \to \infty$ puede parecer irrelevante debido a que las dos funciones difieren sólo en $\omega = \omega_c$, veremos en el Capítulo 7 que el comportamiento de las sumas finitas como la de la Ecuación (2.141) tiene importantes implicaciones en el diseño de sistemas en tiempo discreto para filtrado.

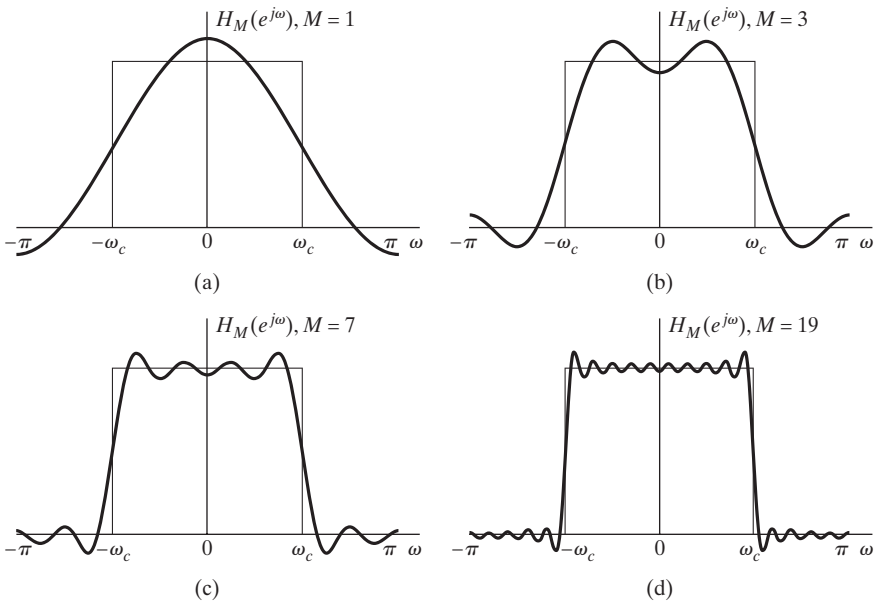


Figura 2.21 Convergencia de la transformada de Fourier. El comportamiento oscilatorio en $\omega = \omega_c$ se denomina a menudo fenómeno de Gibbs.

Algunas veces es útil tener la representación mediante la transformada de Fourier de ciertas secuencias que no son absolutamente sumables ni de cuadrado sumable. En los siguientes ejemplos presentaremos algunas de ellas.

Ejemplo 2.19 Transformada de Fourier de una constante

Consideremos la secuencia $x[n] = 1$ para todo n. Esta secuencia no es absolutamente sumable ni de cuadrado sumable, por lo que en este caso la Ecuación (2.131) no converge ni en sentido uniforme ni en sentido cuadrático medio. Sin embargo, es posible y útil definir la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ como el tren periódico de impulsos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r). \tag{2.142}$$

En este caso los impulsos son funciones de una variable continua y por lo tanto son de "altura infinita, anchura cero y área unidad", lo que es consistente con el hecho de que la Ecuación (2.131) no converge en ningún sentido regular (véase Oppenheim y Willsky (1997) donde se presentan la definición y propiedades de la función impulso). El uso de la Ecuación (2.142) como la representación de Fourier de la secuencia $x[n] = 1$ se justifica principalmente porque la sustitución formal de la Ecuación (2.142) en la Ecuación (2.130) produce el resultado correcto. El Ejemplo 2.20 es una generalización de este ejemplo.

Ejemplo 2.20 Transformada de Fourier de secuencias exponenciales complejas

Consideremos la secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier es el tren periódico de impulsos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \tag{2.143}$$

En este ejemplo demostraremos que $x[n]$ es la secuencia exponencial compleja $e^{j\omega_0 n}$, con $-\pi < \omega_0 \leq \pi$.

Podemos determinar $x[n]$ sustituyendo $X(e^{j\omega})$ en la integral de la transformada inversa de Fourier de la Ecuación (2.130). Como la integración de $X(e^{j\omega})$ se realiza en un periodo, es decir, $-\pi < \omega < \pi$, sólo necesitamos incluir el término $r = 0$ de la Ecuación (2.143). En consecuencia, podemos escribir

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}d\omega. \tag{2.144}$$

De la definición de la función impulso se deduce que

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \qquad \text{para todo } n.$$

Para $\omega_0 = 0$, esto se reduce a la secuencia considerada en el Ejemplo 2.19.

Claramente, la secuencia $x[n]$ en el Ejemplo 2.20 no es absolutamente sumable, ni es de cuadrado sumable y$|X(e^{j\omega})|$ no es finito para todo ω. Por tanto, la relación matemática

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \tag{2.145}$$

se debe interpretar de una forma especial, en el contexdo de las funciones generalizadas (Lighthill, 1958). Utilizando esa teoría, podemos extender el concepto de representación mediante la transformada de Fourier a la clase de secuencias que se pueden expresar como suma de componentes discretas de frecuencia, como

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{2.146}$$

Utilizando el resultado del Ejemplo 2.20, se deduce que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_k 2\pi a_k\delta(\omega - \omega_k + 2\pi r) \tag{2.147}$$

es una representación consistente mediante la transformada de Fourier de $x[n]$ en la Ecuación (2.146).

Otra secuencia que no es ni absolutamente sumable ni de cuadrado sumable es la secuencia escalón unidad $u[n]$. Aunque no es completamente inmediato de demostrar, esta secuencia se puede representar mediante la siguiente transformada de Fourier:

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r). \tag{2.148}$$

2.8. PROPIEDADES DE SIMETRÍA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Al utilizar transformadas de Fourier, es útil tener un conocimiento detallado de la forma en la que las propiedades de las secuencias se manifiestan en la transformada de Fourier y viceversa. En esta sección y en la Sección 2.9 presentaremos y resumiremos algunas de esas propiedades.

Las propiedades de simetría de la transformada de Fourier resultan a menudo muy útiles para simplificar la resolución de problemas. En lo que sigue presentamos estas propiedades; sus demostraciones se consideran en los Problemas 2.79 y 2.80. Sin embargo, antes de presentar las propiedades, daremos algunas definiciones.

Una *secuencia simétrica conjugada* $x_e[n]$ se define como una secuencia que cumple que $x_e[n] = x_e^*[-n]$, y una *secuencia antisimétrica conjugada* $x_o[n]$ se define como una secuencia que cumple que $x_o[n] = -x_o^*[-n]$, donde * indica conjugación compleja. Cualquier secuencia $x[n]$ se puede expresar como la suma de una secuencia simétrica conjugada y una secuencia antisimétrica conjugada. Concretamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \tag{2.149a}$$

donde

$$x_e[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n] \tag{2.149b}$$

y

$$x_o[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]. \tag{2.149c}$$

Sumando las Ecuaciones (2.149b) y (2.149c) se puede comprobar que se cumple la Ecuación (2.149a). Una secuencia real simétrica conjugada que cumpla $x_e[n] = x_e[-n]$ se denomina *secuencia par*, y una secuencia real antisimétrica conjugada, es decir, que cumpla $x_o[n] = -x_o[-n]$ se denomina *secuencia impar*.

Una transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ se puede descomponer en suma de funciones simétrica conjugada y antisimétrica conjugada:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}), \tag{2.150a}$$

donde

$$X_e(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \tag{2.150b}$$

y

$$X_o(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]. \tag{2.150c}$$

Sustituyendo $-\omega$ por ω en las Ecuaciones (2.150b) y (2.150c), se deduce que $X_e(e^{j\omega})$ es simétrica conjugada y $X_o(e^{j\omega})$ es antisimétrica conjugada. Es decir, que

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \tag{2.151a}$$

y

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}). \tag{2.151b}$$

Si una función real de una variable continua es simétrica conjugada, se denomina *función par*, y una función real de variable continua que es antisimétrica conjugada se denomina *función impar*.

Las propiedades de simetría de la transformada de Fourier se resumen en la Tabla 2.1. Las primeras seis propiedades se aplican a una secuencia compleja general $x[n]$ cuya transformada de Fourier es $X(e^{j\omega})$. Las propiedades 1 y 2 se consideran en el Problema 2.79. La propiedad 3 se deduce

TABLA 2.1 PROPIEDADES DE SIMETRIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Secuencia $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (parte simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4. $jIm\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (parte antisimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (parte simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (parte antisimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = jIm\{X(e^{j\omega})\}$
Las siguientes propiedades sólo se cumplen si $x[n]$ es real:	
7. Cualquier $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (la transformada de Fourier es simétrica conjugada)
8. Cualquier $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (la parte real es par)
9. Cualquier $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (la parte imaginaria es impar)
10. Cualquier $x[n]$ real	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (el módulo es par)
11. Cualquier $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (la fase es impar)
12. $x_e[n]$ (parte par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (parte impar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

de las propiedades 1 y 2, junto con el hecho de que la transformada de Fourier de la suma de dos secuencias es la suma de sus transformadas de Fourier. Concretamente, la transformada de Fourier de $Re\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$ es la parte simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$, or $X_e(e^{j\omega})$. Análogamente, $jIm\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n])$, o equivalentemente, $jIm\{x[n]\}$ tiene como transformada de Fourier la componente antisimétrica conjugada $X_o(e^{j\omega})$ lo que corresponde a la propiedad 4. Considerando las transformadas de Fourier de $x_e[n]$ y $x_o[n]$, las componentes simétrica conjugada y antisimétrica conjugada de $x[n]$, respectivamente, se puede demostrar que se cumplen las propiedades 5 y 6.

Si $x[n]$ es una secuencia real, éstas propiedades de simetría se transforman en propiedades muy directas y útiles. Concretamente, para una secuencia real, su transformada de Fourier es simétrica conjugada, es decir, $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (propiedad 7). Expresando $X(e^{j\omega})$ en función de sus partes real e imaginaria

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \tag{2.152}$$

podemos obtener las propiedades 8 y 9. En concreto

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \tag{2.153a}$$

y

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}). \tag{2.153b}$$

En otras palabras, si una secuencia es real, la parte real de su transformada de Fourier es una función par, y la parte imaginaria es una función impar. De forma similar, si expresamos $X(e^{j\omega})$ en la forma polar

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \tag{2.154}$$

se puede demostrar que dada una secuencia real $x[n]$, el módulo de su transformada de Fourier, $|X(e^{j\omega})|$, es una función par de ω y la fase, $\angle X(e^{j\omega})$, se puede escoger de forma que sea una función impar de ω (propiedades 10 y 11). También se cumple que dada una secuencia real $x[n]$, su parte par se transforma en $X_R(e^{j\omega})$, y su parte impar se transforma en $jX_I(e^{j\omega})$ (propiedades 12 y 13). (Véase el Ejemplo 2.21)

2.9. TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Además de las propiedades de simetría, existen una variedad de teoremas (que se presentan en las Secciones 2.9.1-2.9.7) que relacionan operaciones sobre secuencias con operaciones sobre su transformada de Fourier. Veremos que, en la mayoría de los casos, estos teoremas son muy similares a los correspondientes teoremas para señales en tiempo continuo y sus transformadas de Fourier. Para facilitar el planteamiento de los teoremas, presentaremos la siguiente notación de operadores:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathscr{F}\{x[n]\}, \\ x[n] &= \mathscr{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}, \\ x[n] &\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Es decir, $\mathscr{F}$ indica la operación "tomar la transformada de Fourier de $x[n]$" y $\mathscr{F}^{-1}$ es la inversa de esa operación. La mayoría de los teoremas se presentarán sin demostración. Las demostraciones, que se dejan como ejercicio (problema 2.81), generalmente requieren sólo operaciones simples de variables como la suma o la integración. Los teoremas de esta sección se resumen en la Tabla 2.2.

Ejemplo 2.21 Ilustración de las propiedades de simetría

Volvamos a la secuencia del Ejemplo 2.17, donde demostramos que la transformada de Fourier de la secuencia $x[n] = a^n u[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \qquad \text{si } |a| < 1. \tag{2.155}$$

Entonces, utilizando propiedades de los números complejos, se deduce que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega}) \qquad \text{(propiedad 7)}, \\ X_R(e^{j\omega}) &= \frac{1 - a\cos\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = X_R(e^{-j\omega}) \qquad \text{(propiedad 8)}, \\ X_I(e^{j\omega}) &= \frac{-a\,\mathrm{sen}\,\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = -X_I(e^{-j\omega}) \qquad \text{(propiedad 9)}, \\ |X(e^{j\omega})| &= \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}} = |X(e^{-j\omega})| \qquad \text{(propiedad 10)}, \\ \angle X(e^{j\omega}) &= \tan^{-1}\left(\frac{-a\,\mathrm{sen}\,\omega}{1 - a\cos\omega}\right) = -\angle X(e^{-j\omega}) \qquad \text{(propiedad 11)}. \end{aligned}$$

Estas funciones se muestran en la Figura 2.22 para $a > 0$. Concretamente, para $a = 0{,}75$ (curva continua) y $a = 0{,}5$ (curva discontinua). En el problema 2.32 consideraremos las correspondientes gráficas para $a < 0$.

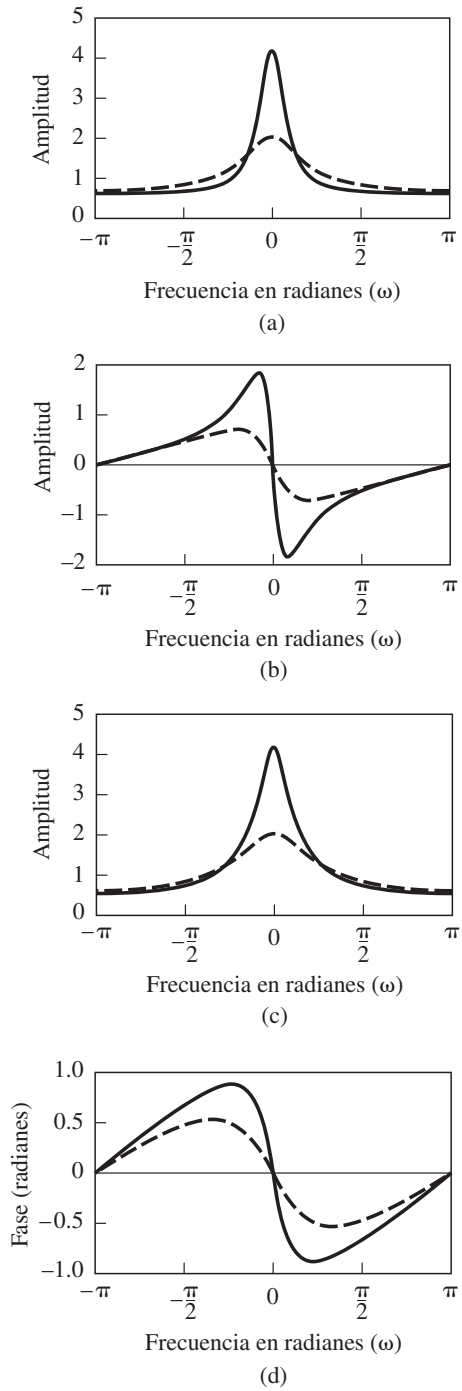


Figura 2.22 Respuesta en frecuencia de un sistema con respuesta al impulso $h[n] = a^n u[n]$. (a) Parte real. $a > 0$; $a = 0{,}75$ (curva continua) y $a = 0{,}5$ (curva discontinua). (b) Parte imaginaria. (c) Módulo. $a > 0$; $a = 0{,}75$ (curva continua) y $a = 0{,}5$ (curva discontinua). (d) Fase.

TABLA 2.2 TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Secuencia $x[n]$ $y[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
2. $x[n-n_d]$ (n_d un entero)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ si $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Teorema de Parseval:	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

2.9.1. Linealidad de la transformada de Fourier

Si

$$x_1[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$$

y

$$x_2[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega}),$$

entonces, por sustitución en la definición de transformada de Fourier en tiempo discreto se deduce que

$$ax_1[n]+bx_2[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega}). \tag{2.156}$$

2.9.2. Desplazamiento en el tiempo y en la frecuencia

Si

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}),$$

entonces, para la secuencia desplazada en el tiempo $x[n-n_d]$, una simple transformación del índice de la suma en la transformada de Fourier en tiempo discreto produce el siguiente resultado

$$x[n-n_d] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega}). \tag{2.157}$$

El siguiente resultado para el desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier se puede demostrar por sustitución directa

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)}). \tag{2.158}$$

2.9.3. Inversión temporal

Si

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right),$$

entonces, si se invierte temporalmente la secuencia,

$$x[-n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{-j\omega}\right). \tag{2.159}$$

Si $x[n]$ es real, el teorema se convierte en

$$x[-n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X^*(e^{j\omega}). \tag{2.160}$$

2.9.4. Diferenciación en el dominio de la frecuencia

Si

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right),$$

entonces, diferenciando la transformada de Fourier en tiempo discreto, se puede ver que

$$nx[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}. \tag{2.161}$$

2.9.5. Teorema de Parseval

Si

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right),$$

entonces

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X\left(e^{j\omega}\right)|^2 d\omega. \tag{2.162}$$

La función $|X\left(e^{j\omega}\right)|^2$ se denomina *densidad espectral de energía,* ya que determina cómo se distribuye la energía en el dominio de la frecuencia. La densidad espectral de energía se define necesariamente sólo para señales de energía finita. En el Problema 2.84 se demuestra una forma más general del teorema de Parseval.

2.9.6. El teorema de convolución

Si

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

y

$$h[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} H\left(e^{j\omega}\right),$$

y si

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n], \tag{2.163}$$

entonces

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \tag{2.164}$$

Por tanto, la convolución de secuencias implica la multiplicación de sus correspondientes transformadas de Fourier. Nótese que la propiedad de desplazamiento en el tiempo es un caso especial de la operación de convolución ya que

$$\delta[n-n_d] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_d} \tag{2.165}$$

y si $h[n] = \delta[n-n_d]$, entonces $y[n] = x[n] * \delta[n-n_d] = x[n-n_d]$. Por tanto,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \qquad \text{y} \qquad Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}).$$

Se puede obtener fácilmente una demostración formal del teorema de la convolución aplicando la definición de transformada de Fourier a la señal $y[n]$ expresada como se indica en la Ecuación (2.163). Este teorema se puede interpretar también como una consecuencia directa de la propiedad que poseen las exponenciales complejas de ser autofunciones de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Recordemos que $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h[n]$. Recordemos también que si

$$x[n] = e^{j\omega n},$$

entonces

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Es decir, las exponenciales complejas son *autofunciones* de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo y $H(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de $h[n]$, es el autovalor. Utilizando la definición de la operación de integración, la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier corresponde a la representación de una secuencia $x[n]$ como una superposición de exponenciales complejas de tamaño infinitesimal. Es decir,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de autofunción de los sistemas lineales y el principio de superposición, la correspondiente salida será

$$y[n] = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_k H(e^{jk\Delta\omega})X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

Por lo que concluimos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

como indica la Ecuación (2.164).

2.9.7. El teorema de modulación o enventanado

Si

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

y

$$w[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} W(e^{j\omega}),$$

TABLA 2.3 PAREJAS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Secuencia	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\dfrac{r^n \operatorname{sen}\omega_p(n+1)}{\operatorname{sen}\omega_p} u[n] \quad (\lvert r\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\dfrac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

y si

$$y[n] = x[n]w[n], \tag{2.166}$$

entonces

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \tag{2.167}$$

La Ecuación (2.167) es una convolución periódica. Es decir, una convolución de dos funciones periódicas en la que los límites de la integración se extienden sólo a un periodo. La dualidad inherente en la mayoría de los teoremas de la transformada de Fourier es evidente si comparamos los teoremas de modulación y de convolución. Sin embargo, a diferencia del caso de tiempo continuo donde esta dualidad es completa, en el caso de tiempo discreto surgen diferencias fundamentales debido a que la transformada de Fourier es una suma y la transformada inversa es una integral con integrando periódico. Aunque en el caso de tiempo continuo podemos decir que la convolución en el dominio del tiempo se representa en el dominio de la frecuencia mediante una multiplicación y viceversa, en el caso de tiempo discreto esta afirmación debe modificarse en parte. Concretamente, la convolución de secuencias en tiempo discreto (la suma de convolución) es equivalente a multiplicar las correspondientes transformadas de Fourier periódicas, y la multiplicación de secuencias es equivalente a la convolución *periódica* de las correspondientes transformadas de Fourier.

Las Tablas 2.2 y 2.3 resumen, respectivamente, los teoremas de esta sección y varias parejas fundamentales de transformadas de Fourier. En muchas ocasiones, utilizando los teoremas y parejas de transformadas conocidas, es posible representar una secuencia en función de operaciones sobre otras

secuencias de las que se conoce su transformada de Fourier, simplificándose así la resolución de un problema de otra forma complicado o tedioso. Los Ejemplos 2.22-2.25 ilustran esta forma de proceder.

Ejemplo 2.22 Determinación de una transformada de Fourier utilizando las Tablas 2.2 y 2.3

Supongamos que deseamos calcular la transformada de Fourier de la secuencia $x[n] = a^n u[n-5]$. Esta transformada se puede calcular utilizando los teoremas 1 y 2 de la Tabla 2.2 y la pareja de transformadas 4 de la Tabla 2.3. Sea $x_1[n] = a^n u[n]$. Empezamos con esta señal porque es la más semejante a una señal $x[n]$ de la Tabla 2.3. La tabla indica que

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{2.168}$$

Para obtener $x[n]$ a partir de $x_1[n]$, retrasaremos primero $x_1[n]$ cinco muestras, es decir, $x_2[n] = x_1[n-5]$. El teorema 2 de la Tabla 2.2 nos da la correspondiente relación en el dominio de la frecuencia. $X_2(e^{j\omega}) = e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega})$, por tanto,

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{2.169}$$

Para obtener la señal deseada $x[n]$ a partir de $x_2[n]$, sólo necesitamos multiplicar por la constante a^5, es decir, $x[n] = a^5 x_2[n]$. Aplicando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, teorema 1 de la Tabla 2.2, obtenemos la transformada de Fourier deseada,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{2.170}$$

Ejemplo 2.23 Determinación de una transformada inversa de Fourier utilizando las Tablas 2.2 y 2.3

Supongamos que

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}. \tag{2.171}$$

La sustitución directa de $X(e^{j\omega})$ en la Ecuación (2.130) conduce a una integral que es difícil de calcular utilizando técnicas ordinarias de resolución de integrales reales. Sin embargo, utilizando la técnica de descomposición en fracciones simples, que veremos en detalle en el capítulo 3, podemos expresar $X(e^{j\omega})$ en la forma

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a/(a-b)}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b/(a-b)}{1 - be^{-j\omega}}. \tag{2.172}$$

Aplicando el teorema 1 de la Tabla 2.2 y la pareja de transformadas número 4 de la Tabla 2.3, se obtiene que

$$x[n] = \left(\frac{a}{a-b}\right) a^n u[n] - \left(\frac{b}{a-b}\right) b^n u[n]. \tag{2.173}$$

Ejemplo 2.24 Determinación de la respuesta al impulso a partir de la respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de un filtro paso alto con retardo es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c, \end{cases} \tag{2.174}$$

que se sobreentiende periódica de periodo 2π. Esta respuesta en frecuencia se puede expresar así

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}(1 - H_{\text{lp}}(e^{j\omega})) = e^{-j\omega n_d} - e^{-j\omega n_d} H_{\text{lp}}(e^{j\omega}),$$

siendo $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ periódica de periodo 2π y

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Utilizando el resultado del Ejemplo 2.18 para obtener la transformada inversa de $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$, junto con las propiedades 1 y 2 de la Tabla 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n - n_d] - h_{\text{lp}}[n - n_d] \\ &= \delta[n - n_d] - \frac{\operatorname{sen} \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.25 Determinación de la respuesta al impulso a partir de una ecuación en diferencias

En este ejemplo determinaremos la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo y estable, tal que su entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$ satisfacen la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \tfrac{1}{4}x[n-1]. \tag{2.175}$$

En el Capítulo 3 veremos que la transformada z es más útil que la transformada de Fourier para manejar ecuaciones en diferencias. Sin embargo, este ejemplo nos permite tener una idea de la utilidad de los métodos basados en transformadas en el análisis de sistemas lineales. Para calcular la respuesta al impulso, haremos $x[n] = \delta[n]$. Si $h[n]$ indica la respuesta al impulso, la Ecuación (2.175) se transforma en

$$h[n] - \tfrac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \tfrac{1}{4}\delta[n-1]. \tag{2.176}$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de la Ecuación (2.176) y utilizando las propiedades 1 y 2 de la Tabla 2.2, obtenemos

$$H(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}, \tag{2.177}$$

o

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \tag{2.178}$$

Para obtener $h[n]$, tenemos que determinar la transformada inversa de $H(e^{j\omega})$. Para ello, volveremos a escribir la Ecuación (2.178) de esta forma

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \tag{2.179}$$

Aplicando la transformada número 4 de la Tabla 2.3,

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Combinando esta transformada con la propiedad 2 de la Tabla 2.2, obtenemos

$$-\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \tag{2.180}$$

Y utilizando la propiedad 1 de la Tabla 2.2,

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \tag{2.181}$$

2.10. SEÑALES ALEATORIAS EN TIEMPO DISCRETO

En las secciones anteriores nos hemos centrado en las representaciones matemáticas de las señales en tiempo discreto y en las interpretaciones que se pueden obtener de dichas representaciones matemáticas. Las señales y los sistemas en tiempo discreto se pueden representar tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, y cada una de esas representaciones tiene un papel importante en la teoría y en el diseño de los sistemas de tratamiento de señales en tiempo discreto. Hasta este momento hemos supuesto que las señales son deterministas, es decir, que cada valor de la secuencia está exactamente determinado por una expresión matemática, una tabla de datos o una regla de algún tipo

En muchas situaciones, los procesos que generan las señales son tan complejos que realizar una descripción precisa de una señal se hace extremadamente difícil o no es deseable, e incluso puede ser imposible. En estos casos, resulta útil modelar analíticamente la señal como un proceso estocástico [7] Por ejemplo, en el Capítulo 6 veremos que muchos de los efectos que aparecen al realizar sistemas de tratamiento de señales utilizando registros de longitud finita se pueden representar como ruido aditivo, es decir, como una secuencia aleatoria. Muchos sistemas mecánicos generan señales acústicas o vibratorias que se pueden procesar para diagnosticar fallos potenciales. Estas señales a menudo se procesan más adecuadamente considerándolas señales aleatorias. Las señales de voz que son procesadas para realizar reconocimiento automático o compresión de ancho de banda y las señales musicales que se procesan para mejorar su calidad son dos ejemplos más de entre otros muchos.

Una señal aleatoria se considera como miembro de un conjunto de señales en tiempo discreto caracterizada por un conjunto de funciones de densidad de probabilidad. Más concretamente, dada una señal particular en un instante concreto, su amplitud en ese instante se supone determinada por un esquema de probabilidades subyacente. Es decir, cada muestra individual $x[n]$de una señal particular se supone que es una realización de una variable aleatoria subyacente $\mathbf{x}_n$. La señal completa se representa mediante un conjunto de esas variables aleatorias, una para cada muestra temporal, $-\infty < n < \infty$. Este conjunto de variables aleatorias se denomina *proceso aleatorio*, y supondremos que cada secuencia particular de

[7] En la literatura sobre tratamiento de señales es habitual considerar del mismo significado a los términos “aleatorio” y “estocástico”. En este libro, nos referiremos principalmente a esta clase de señales como señales aleatorias o procesos aleatorios.

muestras, $x[n]$ para $-\infty < n < \infty$ es generada por el proceso aleatorio subyacente. Para describir completamente el proceso aleatorio necesitamos especificar las distribuciones de probabilidad individuales y conjuntas de todas las variables aleatorias.

La clave para obtener resultados útiles mediante estos modelos de señales está en la descripción en términos de promedios que se puede calcular utilizando leyes de probabilidad asumidas o estimadas a partir de las señales concretas. Aunque las señales estocásticas no son absolutamente sumables ni de cuadrado sumable y, en consecuencia, no tienen transformadas de Fourier, muchas de sus propiedades (pero no todas) se pueden expresar en términos de promedios como las secuencias de autocorrelación o autocovarianza, para las que muchas veces existe la transformada de Fourier. Como veremos en esta sección, la transformada de Fourier de la secuencia de autocovarianza tiene una interpretación útil en función de la distribución en la frecuencia de la potencia de la señal. El uso de la secuencia de autocovarianza y de su transformada tiene otra ventaja importante. El efecto de procesar señales estocásticas con un sistema lineal en tiempo discreto se puede describir adecuadamente en términos del efecto del sistema en la secuencia de autocovarianza.

En la presentación que sigue, supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de procesos estocásticos como promedios, funciones de correlación y covarianza y densidad espectral de potencia. En el Apéndice A se proporciona una breve revisión de la notación y los conceptos. Se puede encontrar una presentación más detallada en varios textos excelentes, como Davenport (1970) y Papoulis (2002), Gray y Davidson (2004), Kay (2006) y Bertsekas y Tsitsiklis (2008).

En esta sección nuestro principal objetivo es presentar un conjunto específico de resultados que serán de utilidad para los capítulos posteriores. Por lo tanto, nos centraremos en las señales aleatorias que son estacionarias en sentido amplio y en su representación en el contexto de su tratamiento con sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Aunque por simplicidad supondremos que $x[n]$ y $h[n]$ toman valores reales, los resultados se pueden generalizar al caso complejo.

Consideremos un sistema lineal invariante con el tiempo y estable cuya respuesta al impulso es $h[n]$. Sea $x[n]$ una secuencia real que es una realización de un proceso aleatorio en tiempo discreto estacionario en sentido amplio. La salida del sistema lineal es también una realización de un proceso aleatorio relacionado con el proceso de entrada mediante la transformación lineal

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Como ya hemos demostrado, si el sistema es estable, si $x[n]$ está acotada, $y[n]$ también lo estará. Enseguida veremos que si la entrada es estacionaria[8] la salida también lo será. La señal de entrada se puede caracterizar por su media m_x y su función de autocorrelación $\phi_{xx}[m]$, o bien podemos disponer de información adicional sobre sus distribuciones de probabilidad de primer o incluso de segundo orden. Para caracterizar el proceso aleatorio de salida $y[n]$ desearíamos tener similar información. En muchas aplicaciones, es suficiente con caracterizar tanto la entrada como la salida en términos de promedios simples como la media, la varianza y la autocorrelación. Por lo tanto, obtendremos relaciones de entrada-salida para estas magnitudes.

Las medias de los procesos de entrada y de salida son, respectivamente,

$$m_{x_n} = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\}, \qquad m_{y_n} = \mathscr{E}\{\mathbf{y}_n\}, \tag{2.182}$$

[8]En el resto del texto, utilizaremos el término *estacionario* para referirnos a "estacionario en sentido amplio," es decir, que $E\{x[n_1]x[n_2]\}$ para todo n_1, n_2 depende sólo de la diferencia $(n_1 - n_2)$. De forma equivalente, la autocorrelación sólo es función de la diferencia temporal $(n_1 - n_2)$.

donde $\mathscr{E}\{\cdot\}$ indica el valor esperado. En la mayor parte de nuestra presentación no será necesario diferenciar cuidadosamente las variables aleatorias $\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{y}_n$ y sus valores específicos $x[n]$ e $y[n]$. Esto simplificará significativamente la notación matemática. Por ejemplo, la Ecuación (2.182) se puede escribir de forma alternativa

$$m_x[n] = \mathscr{E}\{x[n]\}, \qquad m_y[n] = \mathscr{E}\{y[n]\}. \tag{2.183}$$

Si $x[n]$ es estacionaria, entonces $m_x[n]$ es independiente de n y se escribirá m_x. Lo mismo se aplicará a $m_y[n]$ si $y[n]$ es estacionaria.

La media del proceso de salida es

$$m_y[n] = \mathscr{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\mathscr{E}\{x[n-k]\},$$

donde hemos utilizado el hecho de que la esperanza de una suma es la suma de las esperanzas. Como la entrada es estacionaria, $m_x[n-k] = m_x$, y en consecuencia

$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]. \tag{2.184}$$

Utilizando la Ecuación (2.184) podemos ver que la media de la salida es también una constante. Se puede escribir una expresión equivalente a la (2.184) en función de la respuesta en frecuencia

$$m_y = H(e^{j0})m_x. \tag{2.185}$$

Suponiendo por el momento que la salida es no estacionaria, la función de autocorrelación del proceso de salida para una entrada real es

$$\begin{aligned}
\phi_{yy}[n,n+m] &= \mathscr{E}\{y[n]y[n+m]\} \\
&= \mathscr{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]h[r]x[n-k]x[n+m-r]\right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\mathscr{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}.
\end{aligned}$$

Como se supone que $x[n]$ es estacionaria, $\mathscr{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}$ depende sólo de la diferencia temporal $m+k-r$. Por lo tanto,

$$\phi_{yy}[n,n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\phi_{xx}[m+k-r] = \phi_{yy}[m]. \tag{2.186}$$

Es decir, la secuencia de autocorrelación de salida también depende sólo de la diferencia temporal m. Es decir, dado un sistema lineal e invariante con una entrada estacionaria en sentido amplio, su salida es también estacionaria en sentido amplio

Realizando la sustitución $\ell = r-k$, podemos escribir la Ecuación (2.186) así:

$$\begin{aligned}
\phi_{yy}[m] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-\ell] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k] \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-\ell]c_{hh}[\ell],
\end{aligned} \tag{2.187}$$

donde hemos definido

$$c_{hh}[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k]. \tag{2.188}$$

La secuencia de la forma $c_{hh}[\ell]$ se denomina *secuencia de autocorrelación determinista* o simplemente *secuencia de autocorrelación de* $h[n]$. Hacemos hincapié en que $c_{hh}[\ell]$ es la autocorrelación de una secuencia no periódica (es decir, de energía finita) que no se debe confundir con la autocorrelación de una secuencia aleatoria de energía infinita. De hecho, se puede ver que $c_{hh}[\ell]$ es simplemente la convolución discreta de $h[n]$ con $h[-n]$. La Ecuación (2.187) puede interpretarse como que la autocorrelación de la salida de un sistema lineal es la convolución de la entrada con la autocorrelación no periódica de la respuesta al impulso del sistema.

La Ecuación (2.187) sugiere que las transformadas de Fourier pueden ser útiles para caracterizar la respuesta de un sistema lineal invariante con el tiempo a una entrada estocástica. Supongamos por conveniencia que $m_x = 0$; es decir, que las secuencias de autocorrelación y de autocovarianza son idénticas. Entonces, si $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ y $C_{hh}(e^{j\omega})$ indican, respectivamente, las transformadas de Fourier de $\phi_{xx}[m]$, $\phi_{yy}[m]$ y $c_{hh}[\ell]$, utilizando la Ecuación (2.187),

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C_{hh}(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \tag{2.189}$$

De la ecuación (2.188) se deduce que

$$\begin{aligned} C_{hh}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= |H(e^{j\omega})|^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \tag{2.190}$$

La Ecuación (2.190) es la motivación del término *densidad espectral de potencia*. Concretamente,

$$\begin{aligned} \mathscr{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(e^{j\omega})\,d\omega \\ &= \text{potencia media total de la salida.} \end{aligned} \tag{2.191}$$

Sustituyendo la Ecuación (2.190) en la Ecuación (2.191), tenemos

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega})\,d\omega. \tag{2.192}$$

Supongamos que $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso banda ideal, como muestra la Figura 2.18(c). Teniendo en cuenta que $\phi_{xx}[m]$ es una secuencia real y par, su transformada de Fourier será también real y par:

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{xx}(e^{-j\omega}).$$

Asimismo, $|H(e^{j\omega})|^2$ es una función par de ω, por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[0] &= \text{potencia media de la salida} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_a}^{\omega_b} \Phi_{xx}(e^{j\omega})\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_b}^{-\omega_a} \Phi_{xx}(e^{j\omega})\,d\omega. \end{aligned} \tag{2.193}$$

Por tanto, el área encerrada bajo $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ para $\omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b$ puede verse como el valor cuadrático medio de la entrada en esa banda de frecuencias. Observemos que la potencia media de la salida no puede tener valores negativos, por lo que

$$\lim_{(\omega_b-\omega_a)\to 0} \phi_{yy}[0] \geq 0.$$

Este resultado, junto con la Ecuación (2.193) y el hecho de que la banda $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$ puede ser arbitrariamente pequeña implica que

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) \geq 0 \qquad \text{para todo } \omega. \tag{2.194}$$

Por tanto, la densidad espectral de potencia de una señal real es real, par y no negativa.

Ejemplo 2.26 Ruido blanco

El concepto de ruido blanco es extremadamente útil en una amplia variedad de contextos en el diseño y análisis de sistemas de tratamiento de señales y de comunicaciones. Una señal de ruido blanco es aquella para la que $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m]$. En este ejemplo supondremos que la señal tiene media cero. La densidad espectral de potencia de una señal de ruido blanco es una constante. Es decir,

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \qquad \text{para todo } \omega.$$

La potencia media de una señal de ruido blanco es por tanto

$$\phi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega})\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_x^2\,d\omega = \sigma_x^2.$$

El concepto de ruido blanco es también útil en la representación de señales aleatorias cuyo espectro de potencia no es constante con la frecuencia. Por ejemplo, una señal aleatoria $y[n]$ cuya densidad espectral de potencia es $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ se puede ver como la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada es ruido blanco. Es decir, utilizamos la Ecuación (2.190) para definir un sistema cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ satisface la ecuación

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\sigma_x^2,$$

siendo σ_x^2 la potencia media de la señal de ruido blanco asumida a la entrada. Ajustaremos la potencia media de esta señal de entrada para obtener la potencia media correcta de $y[n]$. Por ejemplo, supongamos que $h[n] = a^n u[n]$. Entonces,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}},$$

y podemos representar todas las señales aleatorias cuya densidad espectral de potencia es de la forma

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \left|\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right|^2 \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{1+a^2-2a\cos\omega}.$$

Otro resultado importante tiene que ver con la correlación cruzada entre la entrada y la salida de un sistema lineal invariante con el tiempo:

$$\begin{aligned}\phi_{yx}[m] &= \mathscr{E}\{x[n]y[n+m]\} \\ &= \mathscr{E}\left\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+m-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{xx}[m-k].\end{aligned} \tag{2.195}$$

En este caso vemos que la correlación cruzada entre la entrada y la salida es la convolución de la respuesta al impulso con la secuencia de autocorrelación de la entrada.

La transformada de Fourier de la Ecuación (2.195) es

$$\Phi_{yx}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \tag{2.196}$$

Este resultado es de aplicación útil cuando la entrada es ruido blanco, es decir, cuando $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m]$. Sustituyendo en la Ecuación (2.195) podemos ver que

$$\phi_{yx}[m] = \sigma_x^2 h[m]. \tag{2.197}$$

Es decir, si la entrada es ruido blanco de media nula la correlación cruzada entre la entrada y la salida de un sistema lineal es proporcional a la respuesta al impulso del sistema. Como la densidad espectral de potencia del ruido blanco es

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \qquad -\pi \le \omega \le \pi. \tag{2.198}$$

aplicando la Ecuación (2.196),

$$\Phi_{yx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega}). \tag{2.199}$$

En otras palabras, la densidad espectral de potencia cruzada es en este caso proporcional a la respuesta en frecuencia del sistema. Las Ecuaciones (2.197) y (2.198) pueden servir como base para estimar la respuesta al impulso o la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo, siempre que sea posible observar la salida del sistema como respuesta a una entrada de ruido blanco. Un ejemplo de aplicación es la medida de la respuesta acústica al impulso de una habitación o de una sala de conciertos.

2.11. RESUMEN

En este capítulo hemos revisado y presentado un conjunto de definiciones básicas relacionadas con las señales y los sistemas en tiempo discreto. Hemos considerado las definiciones de un conjunto de señales básicas, la definición y representación de sistemas lineales invariantes con el tiempo mediante la suma de convolución, y algunas implicaciones de estabilidad y causalidad. Hemos demostrado que la clase de los sistemas cuya entrada y salida satisface una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes con condiciones de reposo inicial es una subclase importante de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Se ha obtenido la solución recursiva de esas ecuaciones en diferencias y se han definido las clases de sistemas FIR e IIR.

Un medio importante para el análisis y representación de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo es su representación en el dominio de la frecuencia. Se ha considerado la respuesta de un sistema a una exponencial compleja, lo que lleva a la definición de respuesta en frecuencia. Posteriormente se ha interpretado la relación entre la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia como una pareja de transformadas de Fourier.

Hemos llamado la atención sobre muchas propiedades de la representación mediante la transformada de Fourier y hemos presentado varias parejas de transformadas de Fourier de utilidad. Las Tablas 2.1 y 2.2 resumen las propiedades y los teoremas y la Tabla 2.3 contiene algunas parejas de transformadas de Fourier de utilidad.

El capítulo finaliza con una introducción a las señales aleatorias en tiempo discreto. Estas ideas y resultados básicos se desarrollarán y utilizarán más adelante en capítulos posteriores.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

2.1. Para cada uno de los sistemas siguientes, determine si son (1) estables, (2) causales, (3) lineales, (4) invariantes con el tiempo y (5) sin memoria:

(a) $T(x[n]) = g[n]x[n]$ con $g[n]$ dada
(b) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k] \qquad n \neq 0$
(c) $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
(d) $T(x[n]) = x[n-n_0]$
(e) $T(x[n]) = e^{x[n]}$
(f) $T(x[n]) = ax[n]+b$
(g) $T(x[n]) = x[-n]$
(h) $T(x[n]) = x[n]+3u[n+1]$.

2.2. **(a)** Se sabe que la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema lineal e invariante con el tiempo vale cero excepto en el intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$. Se sabe que la entrada $x[n]$ es cero excepto en el intervalo $N_2 \leq n \leq N_3$. Como resultado, la salida debe ser cero excepto en un intervalo $N_4 \leq n \leq N_5$. Determinar N_4 y N_5 en función de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(b) Si $x[n]$ es cero excepto en N puntos consecutivos y $h[n]$ es cero excepto en M puntos consecutivos, ¿cuál es el máximo número de puntos consecutivos en los que $y[n]$ puede ser distinta de cero?

2.3. Evaluando directamente la suma de convolución, determine la respuesta al escalón ($x[n] = u[n]$) de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \qquad 0 < a < 1.$$

2.4. Considere la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$y[n] - \tfrac{3}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1].$$

Determine $y[n]$ para $n \geq 0$ si $x[n] = \delta[n]$ e $y[n] = 0$, $n < 0$.

2.5. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal está descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1].$$

(a) Determine la respuesta homogénea del sistema, es decir, las posibles salidas si $x[n] = 0$ para todo n.
(b) Determine la respuesta al impulso del sistema.
(c) Determine la respuesta al escalón del sistema.

2.6. **(a)** Calcule la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada y salida satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

(b) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}.$$

2.7. Determine si cada una de las señales siguientes es periódica. Para las que sean periódicas, indique su periodo

(a) $x[n] = e^{j(\pi n/6)}$
(b) $x[n] = e^{j(3\pi n/4)}$
(c) $x[n] = [\text{sen}(\pi n/5)]/(\pi n)$
(d) $x[n] = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.

2.8. Un sistema LTI tiene como respuesta al impulso $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$. Utilice la transformada de Fourier para calcular la salida del sistema cuando la entrada es $x[n] = (1/3)^n u[n]$.

2.9. Considere la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1].$$

(a) ¿Cuál es la respuesta al impulso, la respuesta en frecuencia y la respuesta al escalón del sistema lineal e invariante con el tiempo causal que satisface esta ecuación en diferencias?
(b) ¿Cuál es la forma general de la solución homogénea de la ecuación en diferencias?
(c) Considere un sistema diferente que satisface la ecuación en diferencias pero que no es ni causal ni tampoco lineal e invariante con el tiempo, pero que cumple que $y[0] = y[1] = 1$. Calcule la respuesta de este sistema a la entrada $x[n] = \delta[n]$.

2.10. Determine la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo si las respuestas al impulso $h[n]$ y las entradas $x[n]$ son las siguientes:
(a) $x[n] = u[n]$ y $h[n] = a^n u[-n-1]$, con $a > 1$.
(b) $x[n] = u[n-4]$ y $h[n] = 2^n u[-n-1]$.
(c) $x[n] = u[n]$ y $h[n] = (0{,}5)2^n u[-n]$.
(d) $h[n] = 2^n u[-n-1]$ y $x[n] = u[n] - u[n-10]$.

Utilice el conocimiento de la linealidad y la invarianza con el tiempo para minimizar el trabajo de los apartados (b)–(d).

2.11. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}}, \qquad -\pi < \omega \leq \pi.$$

Determine la salida $y[n]$ para todo n si la entrada $x[n]$ para todo n es

$$x[n] = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

2.12. Considere un sistema cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

El sistema es causal y satisface las condiciones de reposo inicial, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$.

(a) Si $x[n] = \delta[n]$, determine $y[n]$ para todo n.
(b) ¿Es lineal el sistema? Justifique su respuesta.
(c) ¿Es invariante con el tiempo el sistema? Justifique su respuesta.

2.13. Indique cuál de las siguientes señales en tiempo discreto son autofunciones de los sistemas en tiempo discreto lineales, invariantes con el tiempo y estables:

(a) $e^{j2\pi n/3}$
(b) 3^n
(c) $2^n u[-n-1]$
(d) $\cos(\omega_0 n)$
(e) $(1/4)^n$
(f) $(1/4)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$.

2.14. Para cada uno de los tres sistemas siguientes se da una única relación entrada-salida:

(a) Sistema A: $x[n] = (1/3)^n, \quad y[n] = 2(1/3)^n$.
(b) Sistema B: $x[n] = (1/2)^n, \quad y[n] = (1/4)^n$.
(c) Sistema C: $x[n] = (2/3)^n u[n], \quad y[n] = 4(2/3)^n u[n] - 3(1/2)^n u[n]$.

Basándose en esta información, seleccione de la siguiente lista de afirmaciones la conclusión más fuerte que se pueda obtener sobre cada sistema:

(I) El sistema posiblemente no puede ser lineal e invariante con el tiempo.
(II) El sistema debe ser lineal e invariante con el tiempo.
(III) El sistema puede ser lineal e invariante con el tiempo y sólo hay un sistema lineal e invariante con el tiempo que satisface esta relación entrada–salida.
(IV) El sistema puede ser lineal e invariante con el tiempo pero no se puede determinar de forma única a partir de la información de esta restricción de entrada–salida.

Si se escoge la opción (iii) de la lista, especifique, bien la respuesta al impulso $h[n]$ o bien la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema lineal e invariante con el tiempo.

2.15. Considere el sistema que se muestra en la Figura P2.15. La salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+10]$ se multiplica por una función escalón unidad $u[n]$ para obtener la salida del sistema completo. Responda a cada una de las siguientes cuestiones, justificando brevemente las respuestas:

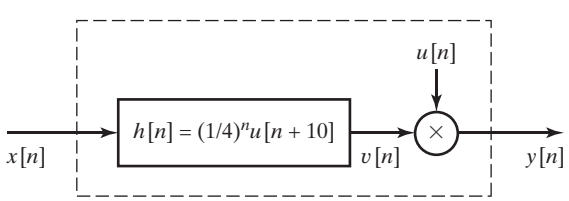


Figura P2.15

(a) ¿Es el sistema completo lineal e invariante con el tiempo?
(b) ¿Es el sistema completo causal?
(c) ¿Es el sistema completo estable en sentido BIBO?

2.16. Considere la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n].$$

(a) Determine la forma general de la solución homogénea de esta ecuación en diferencias.
(b) Esta ecuación en diferencias puede caracterizar tanto a un sistema lineal e invariante con el tiempo causal como a un sistema lineal e invariante con el tiempo anticausal. Calcule las respuestas al impulso de los dos sistemas.
(c) Demuestre que el sistema lineal e invariante con el tiempo causal es estable y que el sistema lineal e invariante con el tiempo anticausal es inestable.
(d) Obtenga una solución particular de la ecuación en diferencias si $x[n] = (1/2)^n u[n]$.

2.17. **(a)** Determine la transformada de Fourier de la secuencia

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(b) Considere la secuencia

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right)\right], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Dibuje $w[n]$ y exprese $W(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de $w[n]$, en función de $R(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de $r[n]$. (*Sugerencia*: exprese primero $w[n]$ en función de $r[n]$ y de las exponenciales complejas $e^{j(2\pi n/M)}$ y $e^{-j(2\pi n/M)}$.)
(c) Dibuje el módulo de $R(e^{j\omega})$ y de $W(e^{j\omega})$ para el caso de $M = 4$.

2.18. Para cada una de las siguientes respuestas al impulso de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, indique si el correspondiente sistema es o no causal.
(a) $h[n] = (1/2)^n u[n]$
(b) $h[n] = (1/2)^n u[n-1]$
(c) $h[n] = (1/2)^{|n|}$
(d) $h[n] = u[n+2] - u[n-2]$
(e) $h[n] = (1/3)^n u[n] + 3^n u[-n-1]$.

2.19. Para cada una de las siguientes respuestas al impulso de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, indique si el correspondiente sistema es o no estable.
(a) $h[n] = 4^n u[n]$
(b) $h[n] = u[n] - u[n-10]$
(c) $h[n] = 3^n u[-n-1]$
(d) $h[n] = \operatorname{sen}(\pi n/3)u[n]$
(e) $h[n] = (3/4)^{|n|}\cos(\pi n/4 + \pi/4)$
(f) $h[n] = 2u[n+5] - u[n] - u[n-5]$.

2.20. Considere la siguiente ecuación en diferencias que representa a un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal

$$y[n] + (1/a)y[n-1] = x[n-1].$$

(a) Calcule la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$, en función de la constante a.
(b) ¿Para qué intervalo de valores de a será el sistema estable?

Problemas básicos

2.21. La Figura P2.21 muestra una señal en tiempo discreto $x[n]$.

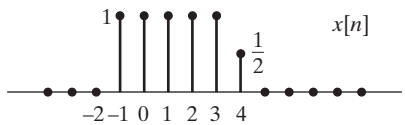


Figura P2.21

Dibuje y etiquete cuidadosamente las siguintes señales:

(a) $x[n-2]$
(b) $x[4-n]$
(c) $x[2n]$
(d) $x[n]u[2-n]$
(e) $x[n-1]\delta[n-3]$.

2.22. Considere un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. Si la entrada $x[n]$ es una secuencia periódica de periodo N (es decir, $x[n] = x[n+N]$), demuestre que la salida $y[n]$ es también una secuencia periódica de periodo N.

2.23. Determine si los sistemas siguientes son (1) estables, (2) causales, (3) lineales y (4) invariantes con el tiempo.

(a) $T(x[n]) = (\cos \pi n)x[n]$
(b) $T(x[n]) = x[n^2]$
(c) $T(x[n]) = x[n]\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$
(d) $T(x[n]) = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k]$.

2.24. Considere un sistema lineal arbitrario cuya entrada es $x[n]$ y cuya salida es $y[n]$. Demuestre que si $x[n] = 0$ para todo n, la salida $y[n]$ debe ser cero para todo n.

2.25. Considere un sistema en el que la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ cumplen la siguiente relación

$$8y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] \qquad \text{(P2.25-1)}$$

(a) Para $x[n] = \delta[n]$, demuestre que una secuencia *particular* que verifica la ecuación en diferencias es $y_p[n] = \frac{3}{40}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.
(b) Determine la solución(es) homogénea(s) la la ecuación en diferencias especificada en la Ecuación (P2.25-1).
(c) Determine $y[n]$ para $-2 \le n \le 2$ cuando $x[n]$ es igual a $\delta[n]$ en la Ecuación (P2.25-1) y en la resolución de la ecuación en diferencias se asume la *condición de reposo inicial*. Nótese que la condición de reposo inicial implica que el sistema definido por la Ecuación P(2.25-1) es causal.

2.26. Para cada uno de los sistemas de la Figura P2.26 seleccione la conclusión válida más fuerte que se pueda deducir sobre cada sistema de entre las siguientes:

(I) El sistema debe ser lineal e invariente con el tiempo, y queda especificado de forma única con la información dada.
(II) El sistema debe ser lineal e invariente con el tiempo, pero no queda especificado de forma única con la información dada.
(III) El sistema podría ser lineal e invariante con el tiempo y, si lo fuera, la información dada lo especifica de forma única.

(IV) El sistema podría ser lineal e invariante con el tiempo, pero no queda especificado de forma única con la información dada.

(V) El sistema posiblemente no podría ser lineal e invariante con el tiempo.

Para cada sistema para el que se seleccione la opción (i) o la opción (iii), proporcione la respuesta al impulso $h[n]$ para el sistema lineal e invariante en el tiempo especificado de forma unívoca. Para cada uno de los sistemas se muestra una entrada y su correspondiente salida.

Sistema A:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow \boxed{\text{Sistema A}} \longrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Sistema B:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema B}} \longrightarrow 3j\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

Sistema C:

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema C}} \longrightarrow -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Figura P2.26

2.27. Para cada uno de los sistemas de la Figura P2.27 seleccione la conclusión válida más fuerte que se pueda deducir sobre cada sistema de entre las siguientes:

(I) El sistema debe ser lineal e invariente con el tiempo, y queda especificado de forma única con la información dada.

(II) El sistema debe ser lineal e invariente con el tiempo, pero no queda especificado de forma única con la información dada.

(III) El sistema podría ser lineal e invariante con el tiempo y, si lo fuera, la información dada lo especifica de forma única.

(IV) El sistema podría ser lineal e invariante con el tiempo, pero no queda especificado de forma única con la información dada.

(V) El sistema posiblemente no podría ser lineal e invariante con el tiempo.

2.28. La Figura P2.28-1 muestra cuatro parejas entrada-salida de un sistema concreto S:

(a) ¿Puede ser invariante con el tiempo el sistema S? Explique por qué.

(b) ¿Puede ser lineal el sistema S? Explique por qué.

(c) Suponga que (2) y (3) son parejas entrada–salida de un sistema concreto S_2, y se sabe que dicho sistema es lineal e invariante con el tiempo. ¿Cuál es el valor de $h[n]$, la respuesta al impulso del sistema?

(d) Suponga que (1) es la pareja entrada–salida de un sistema S_3 lineal e invariante con el tiempo. ¿Cuál es la salida de este sistema cuando su entrada es la señal que se muestra en la Figura P2.28-2?

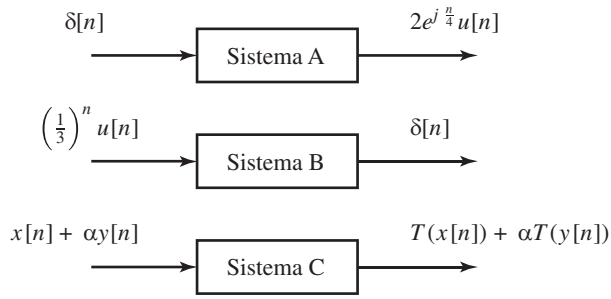
2.29. Un sistema lineal e invariante con el tiempo tiene una reapuesta al impulso definida como

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ -2 & n = 4, 5 \\ 0 & n > 5 \end{cases}$$

Determine y dibuje la salida $y[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es:

(a) $u[n]$

(b) $u[n-4]$
(c) $u[n]-u[n-4]$.



Para todas las señales $x[n]$, $y[n]$ y para toda constante α

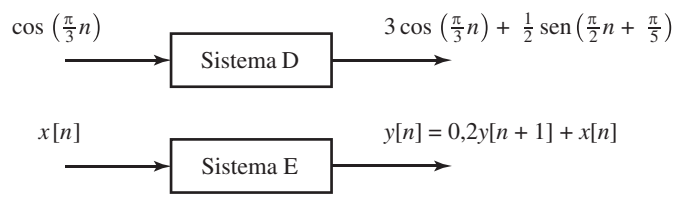


Figura P2.27

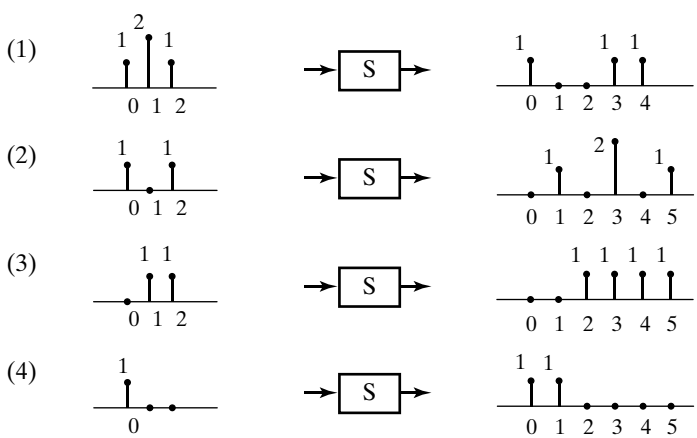


Figura P2.28–1

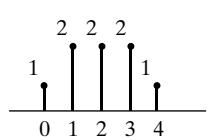


Figura P2.28–2

2.30. Considere la conexión en cascada de dos sistemas lineales e invariantes con el tiempo que se muestra en la Figura P2.30:

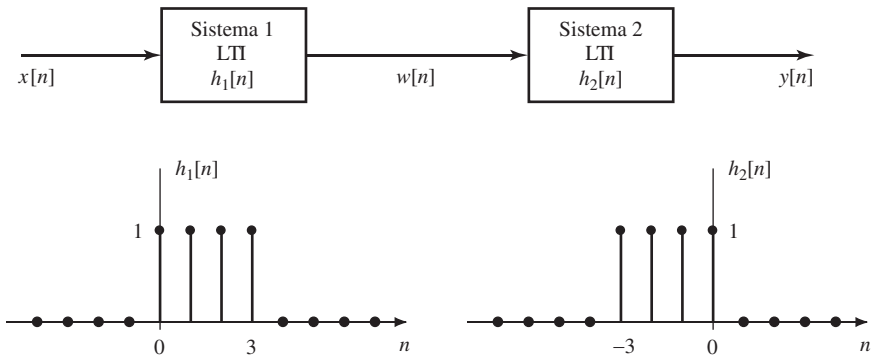


Figura P2.30

(a) Determine y dibuje $w[n]$ si $x[n] = (-1)^n u[n]$. Determine también la salida total $y[n]$.
(b) Determine y dibuje la respuesta al impulso total del sistema en cascada. Es decir, dibuje la salida $y[n] = h[n]$ cuando la entrada es $x[n] = \delta[n]$.
(c) Considere ahora la entrada $x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-4] - 2\delta[n-12]$. Dibuje $w[n]$.
(d) Dada la entrada del apartado (c), escriba la expresión de la salida $y[n]$ en función de la respuesta al impulso total $h[n]$ definida en el apartado (b). Dibuje y etiquete cuidadosamente su respuesta.

2.31. Si la entrada y la salida de un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal satisface la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n],$$

entonces la respuesta al impulso del sistema debe ser $h[n] = a^n u[n]$.

(a) ¿Para qué valores de a es estable el sistema?
(b) Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal en el que la entrada y la salida están relacionadas por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] - a^N x[n-N],$$

siendo N un entero positivo. Determine y dibuje la respuesta al impulso de este sistema. *Sugerencia*: Use la linealidad y la invarianza con el tiempo para simplificar la solución.
(c) ¿Es FIR o IIR el sistema del apartado (b)? Explique su respuesta.
(d) ¿Para qué valores de a es estable el sistema del apartado (b)? Explique su respuesta.

2.32. Dada $X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$, con $-1 < a < 0$, determine y dibuje en función de ω:

(a) $Re\{X(e^{j\omega})\}$
(b) $Im\{X(e^{j\omega})\}$
(c) $|X(e^{j\omega})|$
(d) $\angle X(e^{j\omega})$.

2.33. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo definido por la ecuación en diferencias

$$y[n] = -2x[n] + 4x[n-1] - 2x[n-2].$$

(a) Determine la respuesta al impulso de este sistema.

(b) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema. Exprese su respuesta en la forma

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega n_d},$$

siendo $A(e^{j\omega})$ una función real de ω. Especifique explícitamente $A(e^{j\omega})$ y el retardo n_d de este sistema.

(c) Dibuje una gráfica del módulo $|H(e^{j\omega})|$ y una gráfica de la fase $\angle H(e^{j\omega})$.

(d) Suponga que la entrada al sistema es

$$x_1[n] = 1 + e^{j0,5\pi n} \qquad -\infty < n < \infty.$$

Utilice la función respuesta en frecuencia para determinar la correspondiente salida $y_1[n]$.

(e) Suponga ahora que la entrada al sistema es

$$x_2[n] = (1 + e^{j0,5\pi n})u[n] \qquad -\infty < n < \infty.$$

Utilizando la ecuación en diferencias que define al sistema o la operación de convolución discreta, determine la correspondiente salida $y_2[n]$ para $-\infty < n < \infty$. Compare $y_1[n]$ con $y_2[n]$. ¿En qué intervalo de valores son iguales?

2.34. La respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 1,25e^{-j\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}} = 1 - \frac{0,45e^{-j\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}}.$$

(a) Especifique la ecuación en diferencias que relaciona la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$.

(b) Utilice una de las formas anteriores de la respuesta en frecuencia para determinar la respuesta al impulso $h[n]$.

(c) Demuestre que $|H(e^{j\omega})|^2 = G^2$, siendo G una constante. Determine dicha constante G. Esto es un ejemplo de *filtro paso todo* que se presentará en el Capítulo 5).

(d) Si la entrada al sistema anterior es $x[n] = \cos(0,2\pi n)$, la salida debe ser de la forma $y[n] = A\cos(0,2\pi n + \theta)$. ¿Qué son A y θ?

2.35. La Figura P2.35-1 muestra la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo.

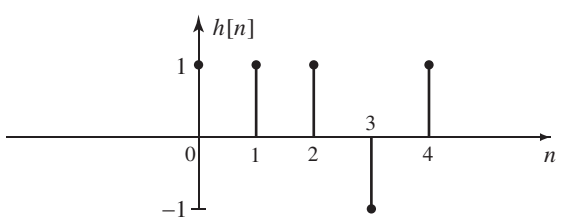


Figura P2.35-1

La entrada al sistema, $x[n]$, se muestra en la figura siguiente:

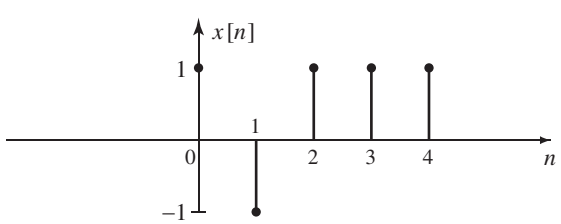


Figura P2.35-2

(a) Utilice convolución discreta para determinar la salida del sistema $y[n] = x[n] * h[n]$ para la entrada dada. Dibuje y etiquete cuidadosamente la señal $y[n]$ en el intervalo suficiente para que quede completamente definida.

(b) La autocorrelación determinista de una señal $x[n]$ se define en la Ecuación (2.188) como $c_{xx}[n] = x[n] * x[-n]$. El sistema definido en la Figura P2.35-1 es un *filtro adaptado* para la entrada de la Figura P2.35-2. Teniendo en cuenta que $h[n] = x[-(n-4)]$, exprese la salida del apartado (a) en función de $c_{xx}[n]$.

(c) Determine la salida del sistema cuya respuesta al impulso es $h[n]$ cuando la entrada es $x[n] = u[n+2]$. Dibuje su respuesta

2.36. Un sistema lineal e invariante con el tiempo tiene como respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1-je^{-j\omega})(1+je^{-j\omega})}{1-0{,}8e^{-j\omega}} = \frac{1+e^{-j2\omega}}{1-0{,}8e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-0{,}8e^{-j\omega}} + \frac{e^{-j2\omega}}{1-0{,}8e^{-j\omega}}.$$

(a) Utilice una de las formas anteriores de la respuesta en frecuencia para obtener una ecuación para la respuesta al impulso del sistema $h[n]$.

(b) A partir de la respuesta en frecuencia, determine la ecuación en diferencias que cumplen la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ del sistema.

(c) Si la entrada al sistema es

$$x[n] = 4 + 2\cos(\omega_0 n) \quad \text{para} -\infty < n < \infty,$$

¿Para qué valor de ω_0 será la salida de la forma

$$y[n] = A = \text{constante}$$

para $-\infty < n < \infty$? ¿Qué es la constante A?

2.37. Considere la cascada de sistemas lineales e invariantes con el tiempo que se muestra en la Figura P2.37.

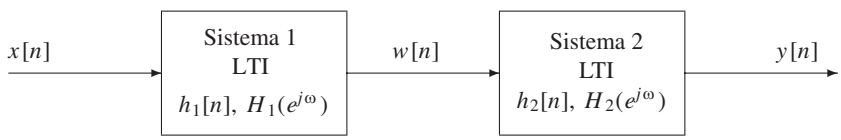


Figura P2.37

El primer sistema queda descrito por su respuesta en frecuencia

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \begin{cases} 0 & |\omega| \le 0{,}25\pi \\ 1 & 0{,}25\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

y el segundo sistema queda descrito por

$$h_2[n] = 2\frac{\operatorname{sen}(0{,}5\pi n)}{\pi n}$$

(a) Determine una ecuación que defina la respuesta en frecuencia, $H(e^{j\omega})$, del sistema completo en el intervalo $-\pi \le \omega \le \pi$.

(b) Dibuje el módulo $|H(e^{j\omega})|$ y la fase $\angle H(e^{j\omega})$ de la respuesta en frecuencia del sistema completo en el intervalo $-\pi \le \omega \le \pi$.

(c) Utilice el procedimiento que le parezca más conveniente para determinar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema en cascada completo.

2.38. Considere la cascada de sistemas lineales e invariantes con el tiempo que se muestra en la Figura P2.38.

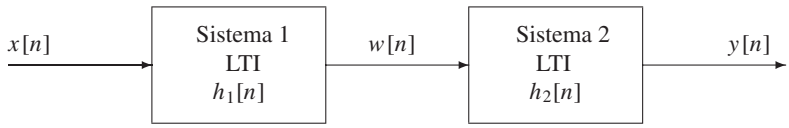


Figura P2.38

Las respuestas al impulso de los dos sistemas son:

$$h_1[n] = u[n-5] \qquad \text{y} \qquad h_2[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(a) Realice una gráfica que muestre $h_2[k]$ y $h_1[n-k]$ (para algún valor arbitrario de $n < 0$) como funciones de k.

(b) Determine $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$, la respuesta al impulso del sistema completo. Proporcione su respuesta en forma de ecuación (o conjunto de ecuaciones) que defina $h[n]$ para $-\infty < n < \infty$ o en forma de una gráfica de $h[n]$ cuidadosamente etiquetada en un intervalo lo suficientemente amplio para definirla completamente

2.39. Utilizando la definición de linealidad (Ecuaciones (2.23a)–(2.23b)) demuestre que el sistema de retardo ideal (Ejemplo 2.29) y el sistema de promediado móvil (Ejemplo 2.3) son lineales.

2.40. Determine cuál de las siguientes señales es periódica. Determine el periodo de las que sean periódicas.

(a) $x[n] = e^{j(2\pi n/5)}$

(b) $x[n] = \text{sen}(\pi n/19)$

(c) $x[n] = ne^{j\pi n}$

(d) $x[n] = e^{jn}$.

2.41. Considere un sistema LTI con $|H(e^{j\omega})| = 1$, y sea $\arg[H(e^{j\omega})]$ como se muestra en la Figura P2.41. Si la entrada es

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right),$$

determine la salida $y[n]$.

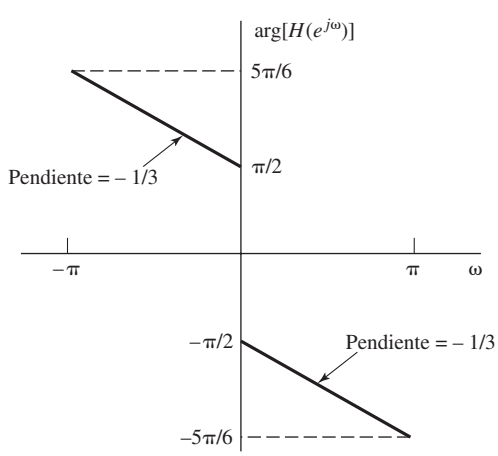


Figura P2.41

2.42. Las secuencias $s[n]$, $x[n]$ y $w[n]$ son realizaciones de procesos estacionarios en sentido amplio cumpliéndose que

$$s[n] = x[n]w[n].$$

Las secuencias $x[n]$ y $w[n]$ son de media cero y estadísticamente independientes. La función de autocorrelación de $w[n]$ es

$$E\{w[n]w[n+m]\} = \sigma_w^2 \delta[m],$$

y la varianza de $x[n]$ es σ_x^2.

Demuestre que $s[n]$ es blanca, con varianza $\sigma_x^2 \sigma_w^2$.

Problemas avanzados

2.43. El operador T representa un sistema lineal e invariante con el tiempo. Como muestran las figuras siguientes, si la entrada del sistema es $(\frac{1}{3})^n u[n]$, la salida del sistema es $g[n]$. Si la entrada es $x[n]$, la salida es $y[n]$.

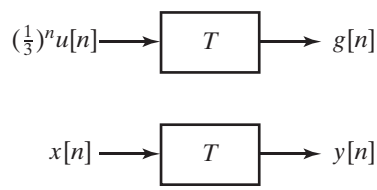


Figura P2.43

Exprese $y[n]$ en función de $g[n]$ y $x[n]$.

2.44. $X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la señal compleja $x[n]$, donde las partes real e imaginaria de $x[n]$ se muestran en la Figura P2.44. (*Nota*: la secuencia es cero fuera del intervalo mostrado.)

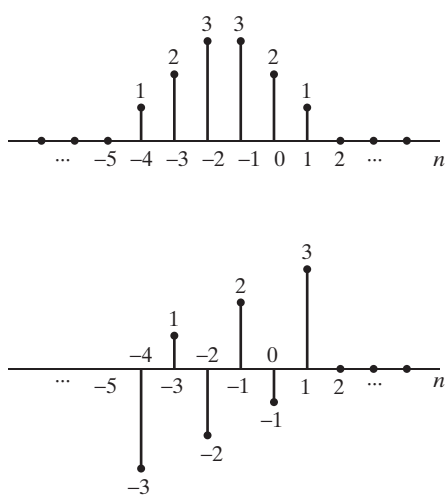


Figura P2.44

Realice los cálculos siguientes sin evaluar explícitamente $X(e^{j\omega})$.

(a) Calcule $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.

(b) Calcule $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$.

(c) Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega$.

(d) Determine y dibuje la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier es $X(e^{-j\omega})$.

(e) Determine y dibuje la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier es $j\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$.

2.45. Considere la cascada de sistemas lineales e invariantes con el tiempo que se muestra en la Figura P2.45.

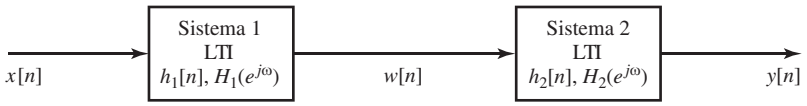


Figura P2.45

El sistema 1 está descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$w[n] = x[n] - x[n-1],$$

y el sistema 2 está descrito por

$$h_2[n] = \frac{\text{sen}(0,5\pi n)}{\pi n} \Longleftrightarrow H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 0,5\pi \\ 0 & 0,5\pi < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

La entrada $x[n]$ es

$$x[n] = \cos(0,4\pi n) + \text{sen}(0,6\pi n) + 5\delta[n-2] + 2u[n].$$

Determine la salida del sistema completo $y[n]$.
(*Pensando cuidadosamente, debe ser capaz de utilizar las propiedades de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo para obtener la respuesta por simple inspección.*)

2.46. Dada la siguiente pareja de transformadas de Fourier en tiempo discreto

$$a^n u[n] \Longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |a| < 1 \tag{P2.46-1}$$

(a) Utilizando la Ecuación (P2.46-1), determine la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$, de la secuencia

$$x[n] = -b^n u[-n-1] = \begin{cases} -b^n & n \le -1 \\ 0 & n \ge 0. \end{cases}$$

¿Qué restricción de b es necesaria para que exista la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$?

(b) Determine la secuencia $y[n]$ cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2e^{-j\omega}}{1+2e^{-j\omega}}.$$

2.47. Considere una "señal enventanada por un coseno"

$$x[n] = w[n]\cos(\omega_0 n).$$

(a) Determine una expresión de $X(e^{j\omega})$ en función de $W(e^{j\omega})$.

(b) Suponga que la secuencia $w[n]$ es de longitud finita

$$w[n] = \begin{cases} 1 & -L \le n \le L \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Determine la transformada de Fourier en tiempo discreto $W(e^{j\omega})$. *Sugerencia*: utilice las Tablas 2.2 y 2.3 para obtener una solución en "forma cerrada". $W(e^{j\omega})$ debe ser una función real de ω.

(c) Dibuje la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ con la ventana del apartado (b). Dado un ω_0, ¿qué valor debe tener L para que su dibujo muestre dos picos diferentes?

2.48. Se sabe que el sistema T que se muestra en la Figura P2.48 es *invariante con el tiempo*. Se muestran las respuestas del sistema $y_1[n]$, $y_2[n]$ e $y_3[n]$ cuando las entradas son, respectivamente, $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$.

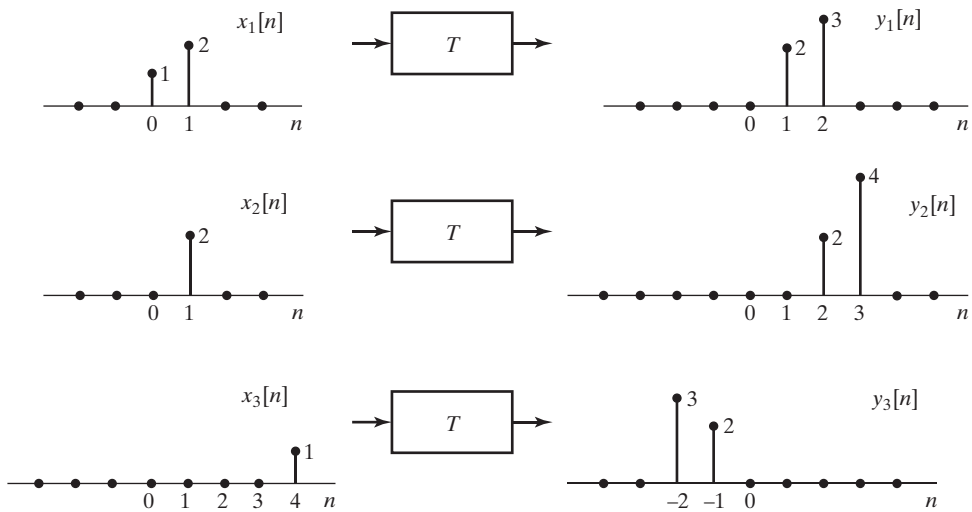


Figura P2.48

(a) Determine si el sistema T podría ser lineal.
(b) Si la entrada $x[n]$ al sistema T es $\delta[n]$, ¿cuál es la respuesta $y[n]$ del sistema?
(c) ¿Cuáles son las posibles entradas $x[n]$ para las que se puede determinar la respuesta del sistema T únicamente con la información que se proporciona?

2.49. Se sabe que el sistema L de la Figura P2.49 es *lineal*. Se muestran las respuestas del sistema $y_1[n]$, $y_2[n]$ e $y_3[n]$ cuando las entradas son, respectivamente, $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$.

(a) Determine si el sistema L podría ser invariante con el tiempo.
(b) Si la entrada $x[n]$ al sistema L es $\delta[n]$, ¿cuál es la respuesta del sistema, $y[n]$?

2.50. En la Sección 2.5 presentamos la solución de la ecuación en diferencias homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_h[n-k] = 0$$

que es de la forma

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N} A_m z_m^n, \tag{P2.50-1}$$

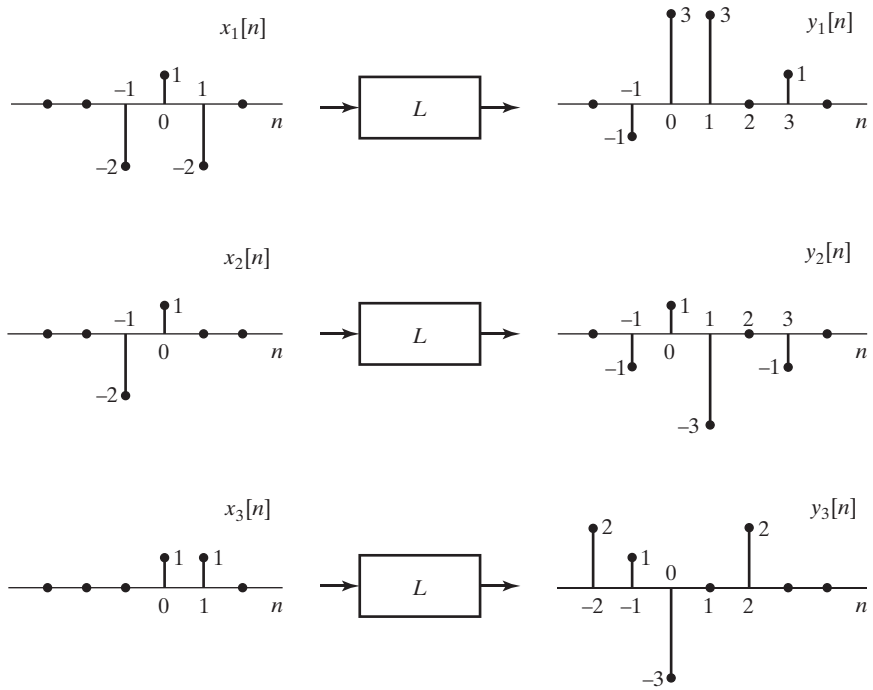


Figura P2.49

siendo A_m valores arbitrarios y z_m las N raíces del polinomio

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}; \tag{P2.50-2}$$

es decir,

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{m=1}^{N} (1 - z_m z^{-1}).$$

(a) Determine la forma general de la solución homogénea de la ecuación en diferencias

$$y[n] - \tfrac{3}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1].$$

(b) Determine los coeficientes A_m de la solución homogénea si $y[-1] = 1$ e $y[0] = 0$.

(c) Considere ahora la ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n-1] + \tfrac{1}{4}y[n-2] = 2x[n-1]. \tag{P2.50-3}$$

Si la solución homogénea contiene solamente términos de la forma indicada en la Ecuación (P2.50-1), demuestre que las condiciones iniciales $y[-1] = 1$ e $y[0] = 0$ no se pueden cumplir.

(d) Si la Ecuación (P2.50-2) tiene dos raíces idénticas entonces, en lugar de la Ecuación (P2.50-1), $y_h[n]$ tiene la siguiente forma

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N-1} A_m z_m^n + nB_1 z_1^n, \tag{P2.50-4}$$

donde hemos supuesto que la raíz doble es z_1. Utilizando la Ecuación (P2.50-4), determine la forma general de en la Ecuación (P2.50-3). Verifique expresamente que la solución satisface la Ecuación (P2.50-3) con $x[n] = 0$.

(e) Determine los coeficientes A_1 y B_1 en la solución homogénea obtenida en el apartado (d) si $y[-1] = 1$ e $y[0] = 0$.

2.51. Considere un sistema cuya entrada es $x[n]$ y cuya salida es $y[n]$. La relación entrada-salida del sistema está definida por las siguientes dos propiedades:

1. $y[n] - ay[n-1] = x[n]$,
2. $y[0] = 1$.

(a) Determine si el sistema es invariante con el tiempo.
(b) Determine si el sistema es lineal.
(c) Suponiendo que la ecuación en diferencias (propiedad 1) es la misma, pero se especifica que el valor de $y[0]$ es cero, indique si este cambio modifica la respuesta del apartado (a) o del apartado (b).

2.52. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n], \qquad \text{siendo } j = \sqrt{-1}.$$

Determine la respuesta en estado estacionario, es decir, la respuesta para n grande, a la excitación

$$x[n] = \cos(\pi n)u[n].$$

2.53. La respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega 3}, & |\omega| < \dfrac{2\pi}{16}\left(\dfrac{3}{2}\right), \\ 0, & \dfrac{2\pi}{16}\left(\dfrac{3}{2}\right) \le |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

La entrada al sistema es un tren periódico de impulsos unidad de periodo $N = 16$; es decir,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 16k].$$

Calcule la salida del sistema.

2.54. Considere el sistema de la Figura P2.54.

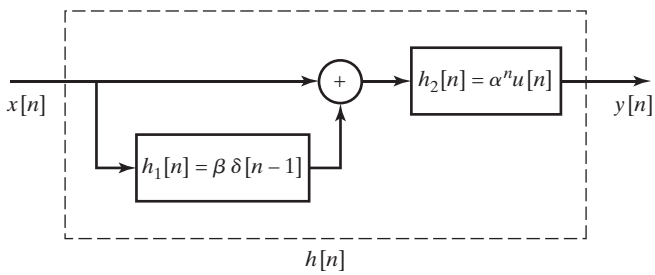


Figura P2.54

(a) Calcule la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema completo.
(b) Calcule la respuesta en frecuencia del sistema completo.
(c) Especifique la ecuación en diferencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.
(d) ¿Es causal este sistema? ¿Bajo qué condiciones sería estable?

2.55. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de la señal $x[n]$ que se muestra en la Figura P2.55. Realice los siguientes cálculos sin obtener explícitamente $X(e^{j\omega})$:

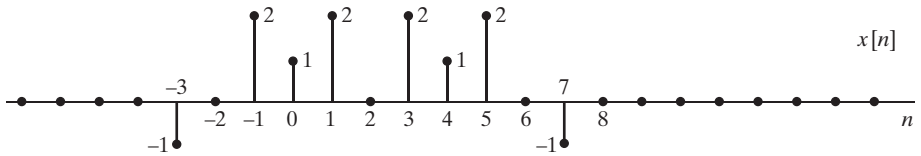


Figura P2.55

(a) Evalúe $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.
(b) Evalúe $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$.
(c) Calcule $\angle X(e^{j\omega})$.
(d) Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$.
(e) Determine y dibuje la señal cuya transformada de Fourier es $X(e^{-j\omega})$.
(f) Determine y dibuje la señal cuya transformada de Fourier es $Re\{X(e^{j\omega})\}$.

2.56. Dado el sistema de la Figura P2.56, determine la salida $y[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es $\delta[n]$ y $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo ideal como se indica,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

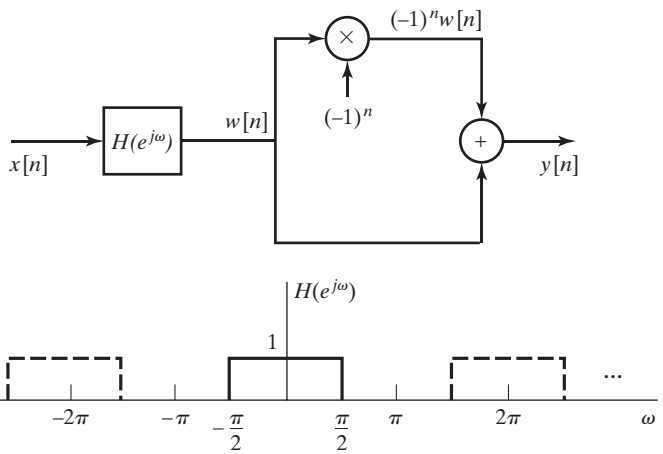


Figura P2.56

2.57. La transformada de Fourier en tiempo discreto de una secuencia es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}, \qquad |a| < 1.$$

(a) Obtenga la secuencia $x[n]$.
(b) Calcule $1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega)d\omega$.

2.58. Un sistema lineal invariante con el tiempo está descrito por la siguiente relación entrada–salida

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

(a) Determine $h[n]$, la respuesta al impulso del sistema.

(b) ¿Es un sistema estable?

(c) Determine $H(e^{j\omega})$, la respuesta en frecuencia del sistema. Utilice identidades trigonométricas para obtener una expresión simple de $H(e^{j\omega})$.

(d) Dibuje el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia.

(e) Considere ahora un nuevo sistema cuya respuesta en frecuencia es $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$. Determine $h_1[n]$, la respuesta al impulso del nuevo sistema.

2.59. Sea una señal real en tiempo discreto $x[n]$ cuya transformada de Fourier es $X(e^{j\omega})$ que actúa como entrada de un sistema cuya salida se define así:

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(a) Dibuje la señal en tiempo discreto $s[n] = 1 + \cos(\pi n)$ y su transformada de Fourier (generalizada) $S(e^{j\omega})$.

(b) Exprese $Y(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de la salida, en función de $X(e^{j\omega})$ y $S(e^{j\omega})$.

(c) Suponga que resulta de interés aproximar $x[n]$ mediante la señal interpolada $w[n] = y[n] + (1/2)(y[n+1] + y[n-1])$. Determine la transformada de Fourier $W(e^{j\omega})$ en función de $Y(e^{j\omega})$.

(d) Dibuje $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$ para el caso de $x[n] = \text{sen}(\pi n/a)/(\pi n/a)$ y $a > 1$. ¿Bajo qué condiciones es la señal interpolada $w[n]$ una buena aproximación de la señal original $x[n]$?

2.60. Considere un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo, con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y respuesta al impulso $h[n]$.

(a) Se proporciona la siguiente información sobre el sistema:

(I) El sistema es causal.

(II) $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$.

(III) La transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $h[n+1]$ es real.

Utilizando esta información, demuestre que la respuesta al impulso del sistema es de duración finita.

(b) Además de la información anterior, se proporciona ahora la siguiente información adicional:

(IV) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = 2.$

(V) $H(e^{j\pi}) = 0.$

¿Hay suficiente información para identificar el sistema de forma única? Si es así, determine su respuesta al impulso $h[n]$. Si no es así, especifique todo lo que se pueda la secuencia $h[n]$.

2.61. Considere las tres secuencias

$$\begin{aligned} v[n] &= u[n] - u[n-6], \\ w[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4], \\ q[n] &= v[n] * w[n]. \end{aligned}$$

(a) Calcule y dibuje la secuencia $q[n]$.

(b) Calcule y dibuje la secuencia $r[n]$ tal que $r[n] * v[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-1} q[k]$.

(c) ¿Es $q[-n] = v[-n] * w[-n]$? Justifique la respuesta.

2.62. La respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j[(\omega/2)+(\pi/4)]}, \qquad -\pi < \omega \leq \pi.$$

Determine la salida del sistema, $y[n]$, cuando la entrada es

$$x[n] = \cos\left(\frac{15\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

para todo n.

2.63. Considere un sistema S cuya entrada $x[n]$ y cuya salida $y[n]$ están relacionadas como indica el diagrama de bloques de la Figura P2.63-1.

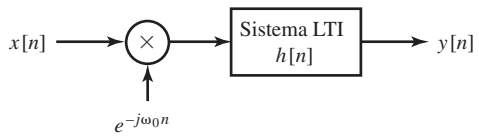


Figura P2.63–1

La entrada $x[n]$ se multiplica por $e^{-j\omega_0 n}$, y el producto se pasa por un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable cuya respuesta al impulso es $h[n]$.

(a) ¿Es el sistema S lineal? Justifique su respuesta.
(b) ¿Es el sistema S invariante con el tiempo? Justifique su respuesta.
(c) ¿Es el sistema S estable? Justifique su respuesta.
(d) Especifique un sistema C de modo que el diagrama de bloques de la Figura P2.63-2 represente una forma alternativa de expresar la relación entrada–salida del sistema S. (*Nota:* el sistema C no tiene por qué ser un sistema lineal e invariante con el tiempo.)

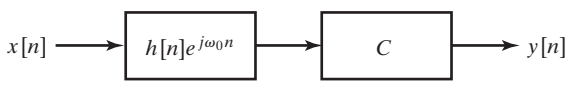


Figura P2.63–2

2.64. Considere un filtro paso bajo ideal con respuesta al impulso $h_{\text{lp}}[n]$ y respuesta en frecuencia

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0{,}2\pi, \\ 0, & 0{,}2\pi \le |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

(a) Se define un nuevo filtro mediante la ecuación $h_1[n] = (-1)^n h_{\text{lp}}[n] = e^{j\pi n} h_{\text{lp}}[n]$. Determine una expresión de la respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$, y dibuje dicha respuesta en frecuencia para $|\omega| < \pi$. ¿De qué clase de filtro se trata?
(b) Se define un segundo filtro mediante la ecuación $h_2[n] = 2h_{\text{lp}}[n]\cos(0{,}5\pi n)$. Determine la ecuación de la respuesta en frecuencia $H_2(e^{j\omega})$, y dibuje dicha respuesta en frecuencia para $|\omega| < \pi$. ¿De qué clase de filtro se trata?
(c) Se define un tercer filtro mediante la ecuación

$$h_3[n] = \frac{\operatorname{sen}(0{,}1\pi n)}{\pi n} h_{\text{lp}}[n].$$

Determine la ecuación de la respuesta en frecuencia $H_3(e^{j\omega})$, y dibuje dicha respuesta en frecuencia para $|\omega| < \pi$. ¿De qué clase de filtro se trata?

2.65. El sistema lineal e invariante con el tiempo

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0, \end{cases}$$

se denomina desplazador de fase de 90°, y se utiliza para generar la denominada señal analítica $w[n]$, como se muestra en la figura P2.65-1. Concretamente, la señal analítica $w[n]$ es una señal compleja que cumple

$$Re\{w[n]\} = x[n],$$
$$Im\{w[n]\} = y[n].$$

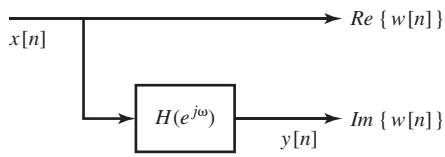


Figura P2.65–1

Si $Re\{X(e^{j\omega})\}$ es como muestra la Figura P2.65-2 y $Im\{X(e^{j\omega})\} = 0$, determine y dibuje $W(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de la señal analítica $w[n] = x[n] + jy[n]$.

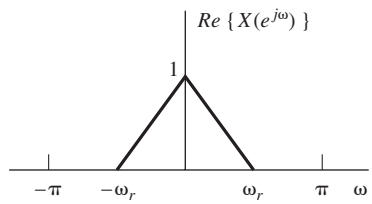


Figura P2.65–2

2.66. La secuencia de autocorrelación de una señal $x[n]$ se define así:

$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k].$$

(a) Demuestre que con una selección apropiada de la señal $g[n]$, $R_x[n] = x[n] * g[n]$, e identifique dicha selección apropiada de $g[n]$.

(b) Demuestre que la transformada de Fourier de $R_x[n]$ es igual a $|X(e^{j\omega})|^2$.

2.67. Las señales $x[n]$ e $y[n]$ que se muestran en la Figura P2.67-1 son la entrada y la correspondiente salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo.

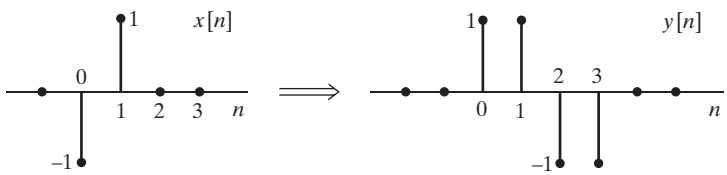


Figura P2.67-1

(a) Obtenga la respuesta del sistema a la secuencia $x_2[n]$ que se muestra en la Figura P2.67-2.

(b) Obtenga la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema LTI.

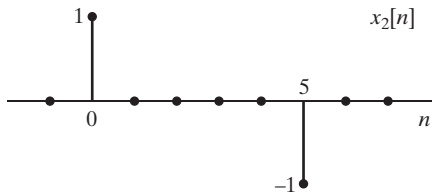


Figura P2.67-2

2.68. Considere un sistema en el que la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

y para el que $y[-1]$ es cero para cualquier entrada. Determine si el sistema es o no estable. Si la conclusión es que es estable, explique el razonamiento. Si la conclusión es que no es estable, proporcione un ejemplo de entrada acotada que produzca una salida no acotada.

Problemas de ampliación

2.69. La causalidad de un sistema se ha definido en la Sección 2.2.4. A partir de esta definición, demuestre que dado un sistema lineal e invariante con el tiempo, la causalidad implica que la respuesta al impulso $h[n]$ debe ser cero para $n < 0$. Una forma de hacerlo es demostrar que si $h[n]$ *no* es cero para $n < 0$, el sistema no puede ser causal. Demuestre también que si la respuesta al impulso es cero para $n < 0$, el sistema debe ser necesariamente causal.

2.70. Considere un sistema en tiempo discreto cuya entrada es $x[n]$ y cuya salida es $y[n]$. Cuando la entrada es

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n],$$

la salida es

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{para todo } n.$$

Determine cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- El sistema debe ser lineal e invariante con el tiempo.
- El sistema podría ser lineal e invariante con el tiempo.
- El sistema no puede ser lineal e invariante con el tiempo.

Si la respuesta es que el sistema es o podría ser lineal e invariante con el tiempo, proporcione una posible respuesta al impulso. Si la respuesta es que el sistema no puede ser lineal e invariante con el tiempo, explique claramente por qué no.

2.71. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}, \quad |\omega| < \pi.$$

Determine si el sistema es o no causal. Justifique el razonamiento realizado.

2.72. En la Figura P2.72 se muestran dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Ambas secuencias valen cero para todo n fuera de las regiones mostradas. Las transformadas de Fourier de esas secuencias son $X_1(e^{j\omega})$ y $X_2(e^{j\omega})$, que serán en general complejas y que se pueden escribir de la siguiente forma:

$$X_1(e^{j\omega}) = A_1(\omega)e^{j\theta_1(\omega)},$$

$$X_2(e^{j\omega}) = A_2(\omega)e^{j\theta_2(\omega)},$$

siendo $A_1(\omega), \theta_1(\omega), A_2(\omega)$ y $\theta_2(\omega)$ funciones reales escogidas de modo que $A_1(\omega)$ y $A_2(\omega)$ sean no negativas en $\omega = 0$, pero que en los restantes puntos puedan tomar valores positivos y negativos. Determine los valores apropiados de $\theta_1(\omega)$ y $\theta_2(\omega)$, y dibuje ambas funciones de fase en el intervalo $0 < \omega < 2\pi$.

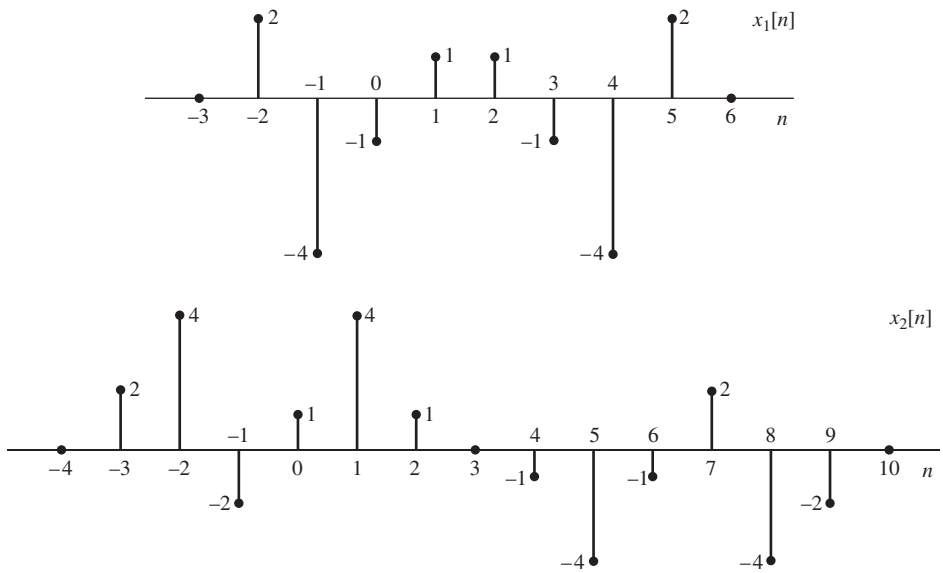


Figura P2.72

2.73. Considere la cascada de sistemas en tiempo discreto que se muestra en la Figura P2.73. Los sistemas de inversión temporal están definidos por las ecuaciones $f[n] = e[-n]$ e $y[n] = g[-n]$. Suponga en todo el problema que las secuencias $x[n]$ y $h_1[n]$ son reales.

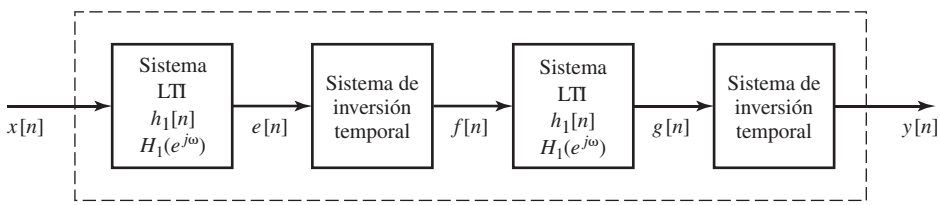


Figura P2.73

(a) Exprese $E(e^{j\omega}), F(e^{j\omega}), G(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$.

(b) El resultado del apartado (a) debería convencernos de que el sistema completo es lineal e invariante con el tiempo. Obtenga la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema completo.

(c) Determine una expresión de la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema completo en función de $h_1[n]$.

2.74. Se puede demostrar que el sistema completo encerrado en la caja de puntos de la Figura P2.74 es lineal e invariante con el tiempo.

(a) Determine una expresión para $H(e^{j\omega})$, la respuesta en frecuencia del sistema completo desde la entrada $x[n]$ hasta la salida $y[n]$, en función de $H_1(e^{j\omega})$, la respuesta en frecuencia del sistema lineal e invariante con el tiempo interno. Recuerde que $(-1)^n = e^{j\pi n}$.

(b) Dibuje $H(e^{j\omega})$ para el caso de que la respuesta en frecuencia del sistema lineal e invariante con el tiempo interno sea

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

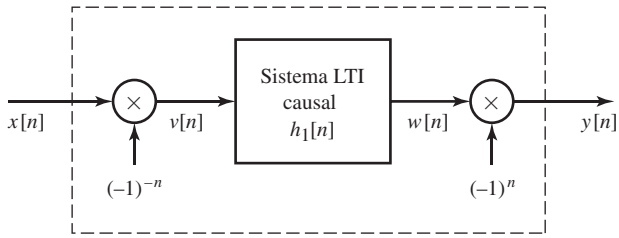


Figura P2.74

2.75. La Figura P2.75-1 muestra las relaciones entrada-salida de los sistemas A y B, y la Figura P2.75-2 muestra dos posibles combinaciones en cascada de dichos sistemas.

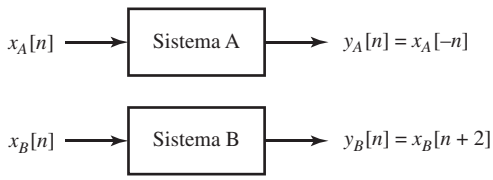


Figura P2.75-1

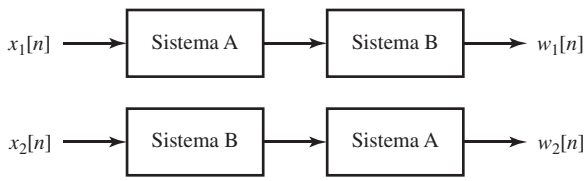


Figura P2.75-2

Si $x_1[n] = x_2[n]$, ¿serán $w_1[n]$ y $w_2[n]$ necesariamente iguales? Si la respuesta es *sí*, explique clara y concisamente por qué e ilústrelo con un ejemplo. Si la respuesta es *no necesariamente,* demuéstrelo con un contraejemplo.

2.76. Considere el sistema de la Figura P2.76, en el que los subsistemas S_1 y S_2 son lineales e invariantes con el tiempo.

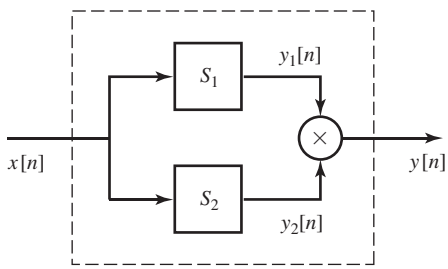


Figura P2.76

(a) ¿Hay garantía de que sea lineal e invariante con el tiempo el sistema completo encerrado por la línea de puntos con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ igual al producto de $y_1[n]$ e $y_2[n]$? Si es así, explique el razonamiento seguido. Si no, proporcione un contraejemplo.

(b) Suponga que S_1 y S_2 tienen respuestas en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ que se sabe que son cero en ciertas regiones. Sean

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq 0{,}2\pi, \\ \text{no especificada}, & 0{,}2\pi < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{no especificada}, & |\omega| \leq 0{,}4\pi, \\ 0, & 0{,}4\pi < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Suponga también que se sabe que la entrada $x[n]$ es de banda limitada a $0{,}3\pi$, es decir,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{no especificada}, & |\omega| < 0{,}3\pi, \\ 0, & 0{,}3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

¿En qué región de $-\pi \leq \omega < \pi$ se garantiza que $Y(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $y[n]$ es cero?

2.77. Una operación numérica comúnmente utilizada es la *primera diferencia regresiva,* que se define como

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1],$$

siendo $x[n]$ la entrada e $y[n]$ la salida del sistema de cómputo de la primera diferencia regresiva.

(a) Demuestre que este sistema es lineal e invariante con el tiempo.
(b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema.
(c) Calcule y dibuje la respuesta en frecuencia (módulo y fase).
(d) Demuestre que si

$$x[n] = f[n] * g[n],$$

entonces

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n]).$$

(e) Obtenga la respuesta al impulso de un sistema que se pudiera colocar en cascada con el sistema de cómputo de la primera diferencia regresiva para recuperar la entrada. Es decir, obtenga $h_i[n]$, tal que

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n].$$

2.78. Sea $H(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h[n]$, siendo $h[n]$ en general compleja.

(a) Utilizando la Ecuación (2.104), demuestre que $H^*(e^{-j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un sistema cuya respuesta al impulso es $h^*[n]$.
(b) Demuestre que si $h[n]$ es real, la respuesta en frecuencia es simétrica conjugada. Es decir, $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$.

2.79. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de $x[n]$. Utilizando las ecuaciones de síntesis o análisis de la transformada de Fourier (2.130) y (2.131) demuestre que

(a) La transformada de Fourier de $x^*[n]$ es $X^*(e^{-j\omega})$,
(b) La transformada de Fourier de $x^*[-n]$ es $X^*(e^{j\omega})$.

2.80. Demuestre que si $x[n]$ es real, la propiedad 7 de la Tabla 2.1 se deduce de la propiedad 1 y que las propiedades 8-11 se deducen de la propiedad 7.

2.81. En la Sección 2.9 presentamos sin demostración una serie de propiedades de la transformada de Fourier. Utilizando las ecuaciones de síntesis o de análisis de la transformada de Fourier (2.130) y (2.131), demuestre la validez de los teoremas 1-5 de la Tabla 2.2.

2.82. En la Sección 2.9.6, argumentamos de forma intuitiva que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \tag{P2.82-1}$$

siendo $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$, respectivamente, las transformadas de Fourier de la salida $y[n]$, la respuesta al impulso $h[n]$ y la entrada $x[n]$ de un sistema lineal e invariante con el tiempo. Es decir,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \tag{P2.82-2}$$

Verifique la Ecuación (P2.82-1) aplicando la transformada de Fourier a la suma de convolución dada en la Ecuación (P2.82-2).

2.83. Aplicando la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier (Ecuación (2.130)) a la Ecuación (2.167) y utilizando el teorema 3 de la Tabla 2.2, demuestre la validez del teorema de modulación (teorema 7 de la Tabla 2.2).

2.84. Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos secuencias complejas cuyas transformadas de Fourier son respectivamente $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$.

(a) Utilizando el teorema de convolución (teorema 6 de la Tabla 2.2) y las propiedades apropiadas de la Tabla 2.2 determine, en función de $x[n]$ e $y[n]$, la secuencia cuya transformada de Fourier es $X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$.

(b) Utilizando el resultado del apartado (a), demuestre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega. \tag{P2.84-1}$$

La Ecuación (P2.84-1) es una forma más general del teorema de Parseval dado en la Sección 2.9.5.

(c) Utilizando la Ecuación (P2.84-1), determine el valor numérico de la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n/4)}{2\pi n}\frac{\operatorname{sen}(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

2.85. Sean $x[n]$ y $X(e^{j\omega})$ una secuencia y su correspondiente transformada de Fourier, respectivamente. Determine, en función de $X(e^{j\omega})$, las transformadas de $y_s[n]$, $y_d[n]$ e $y_e[n]$ definidas a continuación. Dibuje las correspondientes transformadas de Fourier $Y_s(e^{j\omega})$, $Y_d(e^{j\omega})$ e $Y_e(e^{j\omega})$, respectivamente, siendo $X(e^{j\omega})$ como se indica en la Figura P2.85.

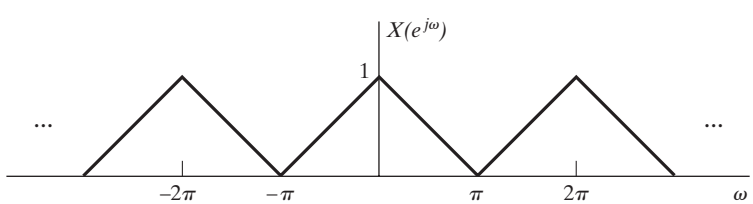


Figura P2.85

(a) (a) Sistema de muestreo:

$$y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Nótese que $y_s[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + (-1)^n x[n]\}$ y $-1 = e^{j\pi}$.

(b) Compresor:

$$y_d[n] = x[2n].$$

(c) Expansor:

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

2.86. La función de correlación bi-frecuencia $\Phi_x(N,\omega)$ se utiliza a menudo en radar y sonar para evaluar la resolución en frecuencia y en tiempo de transmisión de una señal. Para señales en tiempo discreto se define

$$\Phi_x(N,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega n}.$$

(a) Demuestre que

$$\Phi_x(-N,-\omega) = \Phi_x^*(N,\omega).$$

(b) Si

$$x[n] = A\,a^n u[n], \qquad 0 < a < 1,$$

obtenga $\Phi_x(N,\omega)$. (suponiendo que $N \geq 0$.)

(c) La función $\Phi_x(N,\omega)$ tiene un dominio dual en frecuencia. Demuestre que

$$\Phi_x(N,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j[v+(\omega/2)]}\right)X^*\left(e^{j[v-(\omega/2)]}\right)e^{j2vN}dv.$$

2.87. Sean $x[n]$ y $y[n]$ dos señales aleatorias estacionarias e incorreladas. Demuestre que si

$$w[n] = x[n] + y[n],$$

entonces

$$m_w = m_x + m_y \quad \text{y} \quad \sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

2.88. Sea $e[n]$ una secuencia de ruido blanco, y sea $s[n]$ una secuencia incorrelada con $e[n]$. Demuestre que la secuencia

$$y[n] = s[n]e[n]$$

es blanca, es decir, que

$$E\{y[n]y[n+m]\} = A\,\delta[m],$$

siendo A una constante.

2.89. Considere una señal aleatoria $x[n] = s[n] + e[n]$, siendo $s[n]$ y $e[n]$ señales aleatorias estacionarias e independientes cuyas funciones de autocorrelación son respectivamente $\phi_{ss}[m]$ y $\phi_{ee}[m]$.

(a) Determine expresiones para $\phi_{xx}[m]$ y $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$.

(b) Determine expresiones para $\phi_{xe}[m]$ y $\Phi_{xe}(e^{j\omega})$.

(c) Determine expresiones para $\phi_{xs}[m]$ y $\Phi_{xs}(e^{j\omega})$.

2.90. Considere un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n] = a^n u[n]$ con $|a| < 1$.

(a) Calcule la función de autocorrelación determinista $\phi_{hh}[m]$ de esta respuesta al impulso.

(b) Determine la función módulo al cuadrado $|H(e^{j\omega})|^2$ del sistema.

(c) Utilice el teorema de Parseval para calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

para este sistema.

2.91. La entrada al sistema de primera diferencia regresiva (Ejemplo 2.9) es una señal de ruido blanco de media cero cuya función de autocorrelación es $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$.

(a) Determine y dibuje la función de autocorrelación y el espectro de potencia de la correspondiente salida del sistema.

(b) ¿Cuánto vale la potencia media de la salida del sistema?

(c) ¿Qué enseña este problema sobre la primera diferencia regresiva de una señal de ruido?

2.92. Sea $x[n]$ un proceso de ruido blanco real y estacionario, de media cero y varianza σ_x^2. Sea $y[n]$ la correspondiente salida cuando $x[n]$ es la entrada a un sistema lineal invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. Demuestre que

(a) $E\{x[n]y[n]\} = h[0]\sigma_x^2$,

(b) $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n]$.

2.93. Sea $x[n]$ una secuencia de ruido blanco real y estacionaria, de media cero y varianza σ_x^2, que actúa como entrada a una cascada de dos sistemas en tiempo discreto lineales, invariantes con el tiempo y causales, que se muestran en la Figura P2.93.

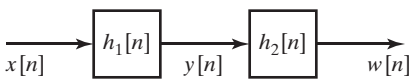


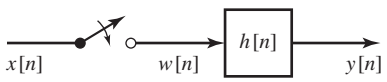
Figura P2.93

(a) ¿Es $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k]$?

(b) ¿Es $\sigma_w^2 = \sigma_y^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k]$?

(c) Sea $h_1[n] = a^n u[n]$ y $h_2[n] = b^n u[n]$. Determine la respuesta al impulso del sistema completo de la Figura P2.93 y a partir de dicha respuesta al impulso, determine σ_w^2. ¿Son consistentes las respuestas de los apartados (a) y (b)?

2.94. Algunas veces resulta de interés el comportamiento estadístico de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuando se aplica bruscamente a la entrada una señal aleatoria. La Figura P2.94 ilustra esa situación.



(interruptor cerrado en $n = 0$)

Figura P2.94

Sea $x[n]$ un proceso de ruido blanco estacionario. La entrada del sistema, $w[n]$, dada por

$$w[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

es un proceso no estacionario, como la salida $y[n]$.

(a) Obtenga una expresión para la media de la salida en función de la media de la entrada.

(b) Obtenga una expresión de la secuencia de autocorrelación de la salida $\phi_{yy}[n_1, n_2]$.

(c) Demuestre que para n grande, las fórmulas obtenidas en los apartados (a) y (b) se aproximan a los resultados para señales estacionarias.

(d) Suponga que $h[n] = a^n u[n]$. Calcule la media y el valor cuadrático medio de la salida en función de la media y el valor cuadrático medio de la entrada. Dibuje estos parámetros en función de n.

2.95. Sean $x[n]$ e $y[n]$ respectivamente, la entrada y la salida de un determinado sistema. La relación entrada–salida de un sistema que se utiliza algunas veces para reducción de ruido en imágenes está dada por

$$y[n] = \frac{\sigma_s^2[n]}{\sigma_x^2[n]}(x[n] - m_x[n]) + m_x[n],$$

siendo

$$\sigma_x^2[n] = \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1}(x[k]-m_x[n])^2,$$

$$m_x[n] = \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1}x[k],$$

$$\sigma_s^2[n] = \begin{cases} \sigma_x^2[n]-\sigma_w^2, & \sigma_x^2[n] \geq \sigma_w^2, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

y donde σ_w^2 es una constante conocida proporcional a la potencia de ruido.

(a) ¿Es el sistema lineal?
(b) ¿Es el sistema invariante al desplazamiento?
(c) ¿Es el sistema estable?
(d) ¿Es el sistema causal?
(e) Dada una señal fija $x[n]$, determine $y[n]$ cuando σ_w^2 es muy grande (potencia de ruido grande) y cuando σ_w^2 es muy pequeño (potencia de ruido pequeña). ¿Tiene sentido el valor de $y[n]$ en esos casos extremos?

2.96. Considere un proceso aleatorio $x[n]$ que es la respuesta de un sistema lineal e invariante con el tiempo que se muestra en la Figura P2.96. En dicha figura, $w[n]$ representa un proceso de ruido blanco estacionario real de media cero con $E\{w^2[n]\} = \sigma_w^2$.

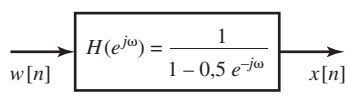


Figura P2.96

(a) Exprese $\mathscr{E}\{x^2[n]\}$ en función de $\phi_{xx}[n]$ o de $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$.
(b) Determine $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, la densidad espectral de potencia de $x[n]$.
(c) Determine $\phi_{xx}[n]$, la función de correlación de $x[n]$.

2.97. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso $h[n]$ es real. Suponga que las respuestas del sistema a dos entradas $x[n]$ y $v[n]$ son, respectivamente, $y[n]$ y $z[n]$, como indica la Figura P2.97.

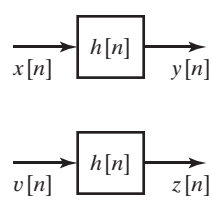


Figura P2.97

Las entradas $x[n]$ y $v[n]$ de la figura representan procesos aleatorios estacionarios de media cero con funciones de autocorrelación $\phi_{xx}[n]$ y $\phi_{vv}[n]$, función de correlación cruzada $\phi_{xv}[n]$, densidades espectrales de potencia $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ y $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$, y densidad espectral de potencia cruzada $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$.

(a) Dadas $\phi_{xx}[n]$, $\phi_{vv}[n]$, $\phi_{xv}[n]$, $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$ y $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$, determine $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$, la densidad espectral de potencia cruzada de $y[n]$ y $z[n]$, definida como

$$\phi_{yz}[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \Phi_{yz}(e^{j\omega}),$$

siendo $\phi_{yz}[n] = E\{y[k]z[k-n]\}$.

(b) ¿Es siempre no negativa la densidad espectral de potencia cruzada $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$; es decir, ¿es $\Phi_{xv}(e^{j\omega}) \geq 0$ para todo ω? Justifique su respuesta.

2.98. Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo que se muestra en la Figura P2.98. La entrada de este sistema, $e[n]$, es una señal de ruido blanco estacionaria de media cero con potencia media σ_e^2. El primer sistema es un sistema de primera diferencia regresiva definido en la Ecuación (2.45) con $f[n] = e[n] - e[n-1]$. El segundo sistema es un filtro paso bajo ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

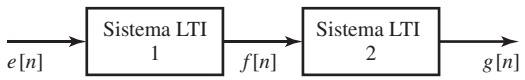


Figura P2.98

(a) Determine una expresión de $\Phi_{ff}(e^{j\omega})$, la densidad espectral de potencia de $f[n]$, y dibújela en el intervalo $-2\pi < \omega < 2\pi$.

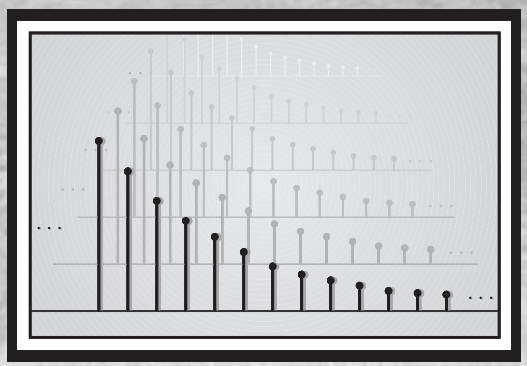
(b) Determine una expresión de $\phi_{ff}[m]$, la función de autocorrelación de $f[n]$.

(c) Determine una expresión de $\Phi_{gg}(e^{j\omega})$, la densidad espectral de potencia de $g[n]$, y dibújela en el intervalo $-2\pi < \omega < 2\pi$.

(d) Determine una expresión de σ_g^2, la potencia media de la salida.

3

La transformada Z



3.0. INTRODUCCIÓN

En este capítulo desarrollaremos la representación de una secuencia mediante su transformada Z y estudiaremos cómo se relacionan las propiedades de una secuencia con las propiedades de su transformada Z. La transformada Z de señales en tiempo discreto es el equivalente de la transformada de Laplace para señales en tiempo continuo, y cada una de ellas está relacionada con la correspondiente transformada de Fourier. Uno de los motivos para introducir esta generalización es que la transformada de Fourier no converge para todas las secuencias, y es útil disponer de una generalización de la transformada de Fourier que cubra una clase más amplia de señales. Una segunda ventaja es que en problemas analíticos la notación de la transformada Z es muchas veces más adecuada que la notación de la transformada de Fourier.

3.1. LA TRANSFORMADA Z

En el Capítulo 2 definimos la transformada de Fourier de una secuencia $x[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{3.1}$$

la transformada Z de una secuencia $x[n]$ se define así

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \tag{3.2}$$

Esta ecuación es, en general, una suma infinita o una suma de potencias infinita, siendo z una variable compleja. Algunas veces es útil considerar la Ecuación (3.2) como un operador que transforma una

secuencia en una función. Es decir, el *operador transformada Z* $\mathscr{Z}\{\cdot\}$, definido así:

$$\mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z), \tag{3.3}$$

transforma una secuencia $x[n]$ en una función $X(z)$, siendo z una variable compleja continua. La correspondencia única entre una secuencia y su transformada Z se indicará mediante la notación

$$x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z). \tag{3.4}$$

La transformada Z, tal como se ha definido en la Ecuación (3.2), se denomina comúnmente *transformada Z bilateral* en contraste con la *transformada Z unilateral* que se define así:

$$\mathscr{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \tag{3.5}$$

Puede verse claramente que las transformadas Z bilateral y unilateral coinciden si $x[n] = 0$ para $n < 0$. En la Sección 3.6 presentaremos una breve introducción a las propiedades de la transformada Z unilateral.

Comparando las Ecuaciones (3.1) y (3.2) resulta evidente que existe una estrecha relación entre la transformada de Fourier y la transformada Z. En particular, si sustituimos la variable compleja z de la Ecuación (3.2) por la variable compleja $e^{j\omega}$, la transformada Z se reduce a la transformada de Fourier. Este es el motivo para utilizar la notación $X(e^{j\omega})$ en la transformada de Fourier. Cuando ésta existe, es simplemente $X(z)$ con $z = e^{j\omega}$. Esto corresponde a restringir a la variable z para que tenga módulo unidad. Es decir, para $|z| = 1$, la transformada z equivale a la transformada de Fourier. De forma más general, podemos expresar la variable compleja z en forma polar

$$z = re^{j\omega}.$$

Si z se representa de esta forma, la Ecuación (3.2) se convierte en

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n},$$

o

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}. \tag{3.6}$$

La Ecuación (3.6) se puede interpretar como la transformada de Fourier del producto de la secuencia original $x[n]$ por la secuencia exponencial r^{-n}. Obviamente, para $r = 1$, la Ecuación (3.6) se reduce a la transformada de Fourier de $x[n]$.

Como la transformada Z es una función de variable compleja, es conveniente describirla e interpretarla utilizando el plano complejo z. En el plano z, el contorno correspondiente a $|z| = 1$ es una circunferencia de radio unidad, como se muestra en la Figura 3.1. Este contorno, denominado *circunferencia unidad*, es el conjunto de puntos $z = e^{j\omega}$ para $0 \leq \omega < 2\pi$. La transformada Z evaluada en la circunferencia unidad es la transformada de Fourier. Nótese que ω es el ángulo que forma un vector desde el origen al punto z de la circunferencia unidad con el eje real del plano complejo z. Si evaluamos $X(z)$ en puntos de la circunferencia unidad comenzando en $z = 1$ (es decir, $\omega = 0$) pasando por $z = j$ (es decir, $\omega = \pi/2$) hasta $z = -1$ (es decir, $\omega = \pi$), obtenemos la transformada de Fourier para $0 \leq \omega \leq \pi$.

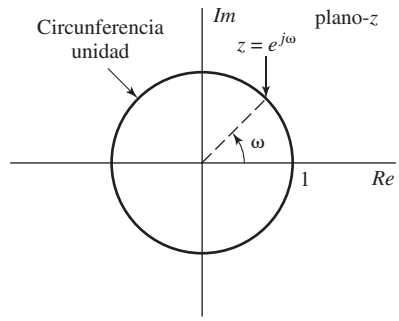


Figura 3.1 La circunferencia unidad en el plano complejo z.

Continuar alrededor de la circunferencia unidad correspondería a examinar la transformada de Fourier desde $\omega = \pi$ hasta $\omega = 2\pi$ o, de forma equivalente, desde $\omega = -\pi$ hasta $\omega = 0$. En el Capítulo 2 representamos la transformada de Fourier utilizando un eje de frecuencias lineal. Interpretar la transformada de Fourier como la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad del plano z corresponde conceptualmente a enrollar el eje lineal de frecuencias alrededor de la circunferencia unidad situando el punto $\omega = 0$ en $z = 1$ y el punto $\omega = \pi$ en $z = -1$. Con esta interpretación, la periodicidad inherente de la transformada de Fourier se refleja de forma natural, ya que un cambio angular de 2π radianes en el plano z corresponde a recorrer una vez la circunferencia unidad regresando exactamente al mismo punto.

Como presentamos en el Capítulo 2, la representación de la transformada de Fourier mediante una serie de potencias no converge para todas las secuencias. Es decir, la suma infinita no siempre produce un resultado finito. Análogamente, la transformada Z tampoco converge para todas las secuencias ni todos los valores de z. Dada una secuencia, el conjunto de valores de z para el que la transformada Z converge se denomina *región de convergencia* (ROC). Como indicamos en la Sección 2.7, si la secuencia es absolutamente sumable, su transformada de Fourier converge a una función continua de ω. Al aplicar este criterio a la Ecuación (3.6) llegamos a la condición

$$|X(re^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \tag{3.7}$$

de convergencia de la transformada Z. La Ecuación (3.7) permite apreciar claramente que, debido a la multiplicación de la secuencia por la exponencial real r^{-n}, es posible que la transformada Z converja aunque la transformada de Fourier no lo haga. Por ejemplo, la secuencia $x[n] = u[n]$ no es absolutamente sumable y por lo tanto, su transformada de Fourier no converge. Pero la secuencia, $r^{-n}u[n]$ es absolutamente sumable si $r > 1$. Esto significa que la transformada Z del escalón unidad existe con una región de convergencia definida por $r = |z| > 1$.

La convergencia de la serie de potencias de la Ecuación (3.2) depende sólo de $|z|$, ya que $|X(z)| < \infty$ si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty, \tag{3.8}$$

es decir, la región de convergencia de la serie de potencias definida en la Ecuación (3.2) está formada por todos los valores de z para los que se cumple la desigualdad de la Ecuación (3.8). Por tanto, si un valor de z, por ejemplo, $z = z_1$, está en la región de convergencia, todos los valores de z de la circunferencia definida por $|z| = |z_1|$ estarán también en la región de convergencia. Como consecuencia, la región de convergencia será un anillo en el plano z centrado en el origen. Su frontera exterior será una circunferencia (o bien la región de convergencia se extenderá por el exterior hasta el infinito),

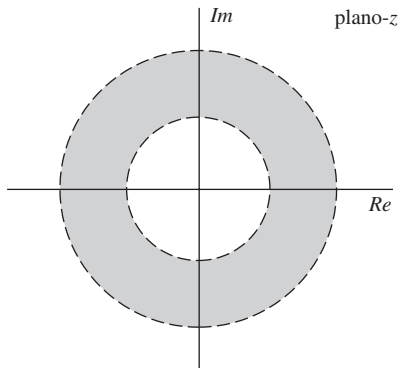


Figura 3.2 La región de convergencia como un anillo en el plano z. En casos específicos, la frontera interior puede extenderse hacia dentro hasta incluir el origen, con lo que la región de convergencia se transforma en un disco. En otros casos, la frontera exterior puede extenderse hasta el infinito.

y su frontera interior será también una circunferencia (o se extenderá por el interior hasta incluir el origen). Todo esto se ilustra en la Figura 3.2. Si la región de convergencia incluye la circunferencia unidad, la transformada Z converge en $|z| = 1$, o lo que es lo mismo, la transformada de Fourier de la secuencia converge. Por el contrario, si la región de convergencia no incluye la circunferencia unidad, la transformada de Fourier no convergerá.

Una serie de potencias de la forma de la Ecuación (3.2) se denomina serie de Laurent. Por lo tanto, en el estudio de la transformada Z se pueden emplear varios teoremas elegantes y potentes tomados de la teoría de funciones de variable compleja (véase Brown y Churchill, 1990). Por ejemplo, una serie de Laurent, y por tanto la transformada Z, representa una función analítica en todos los puntos del interior de su región de convergencia. Por lo tanto, la transformada Z y todas sus derivadas deben ser funciones continuas de z dentro de su región de convergencia. Esto implica que si la región de convergencia incluye la circunferencia unidad, entonces la transformada de Fourier y todas sus derivadas con respecto a ω deben ser funciones continuas de ω. Además, como consecuencia de la presentación de la Sección 2.7, la secuencia debe ser absolutamente sumable. Es decir, debe ser una secuencia estable.

La convergencia uniforme de la transformada Z requiere que la secuencia ponderada exponencialmente sea absolutamente sumable, como se indica en la Ecuación (3.7). Las secuencias

$$x_1[n] = \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty, \tag{3.9}$$

y

$$x_2[n] = \cos \omega_0 n, \qquad -\infty < n < \infty, \tag{3.10}$$

no son absolutamente sumables. Es más, ninguna de las dos secuencias, multiplicadas por r^{-n} es absolutamente sumable para ningún valor de n . Por lo tanto, la transformada Z de estas secuencias no converge para todo z. Sin embargo, como demostramos en la Sección 2.7, existen secuencias como $x_1[n]$ que, no siendo absolutamente sumables, tienen energía finita, y su transformada de Fourier converge en sentido cuadrático medio hacia una función periódica discontinua. Análogamente, la secuencia $x_2[n]$ no es ni absolutamente sumable ni de cuadrado sumable, pero se puede definir de forma útil su transformada de Fourier utilizando impulsos (es decir, funciones generalizadas o funciones delta de Dirac). En ambos casos las transformadas de Fourier no son funciones continuas infinitamente diferenciables, por lo que no pueden ser el resultado de evaluar una transformada Z en la circunferencia unidad. Por consiguiente, en estos casos no es estrictamente correcto ver la transformada de Fourier como la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad; no obstante, seguiremos utilizando la notación $X(e^{j\omega})$, que implica lo anterior.

La transformada Z alcanza toda su utilidad cuando la suma infinita se puede expresar en forma cerrada, es decir, cuando se puede sumar y expresar mediante una fórmula matemática simple. Entre las transformadas Z más útiles e importantes destacamos aquellas en las que $X(z)$ es una función racional en la región de convergencia, es decir,

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{3.11}$$

siendo $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios en z. Los valores de z para los que $X(z) = 0$ se denominan ceros de $X(z)$, y los valores de z para los que $X(z)$ es infinito se denominan polos de $X(z)$. Los polos de $X(z)$ (para valores finitos de z) son las raíces del polinomio del denominador. En el caso de transformadas Z racionales, existen varias relaciones importantes entre la posición de los polos de $X(z)$ y la región de convergencia de la transformada Z. En la Sección 3.2 las presentaremos más específicamente. Antes, ilustraremos la transformada Z con varios ejemplos.

Ejemplo 3.1 Secuencia exponencial limitada por la izquierda

Consideremos la señal $x[n] = a^n u[n]$, siendo a un número complejo. Como sólo es distinta de cero para $n \geq 0$, es un ejemplo de la clase de secuencias *limitadas por la izquierda*, que son secuencias que empiezan en algún instante N_1 y sólo toman valores distintos de cero en el intervalo $N_1 \leq n < \infty$. Utilizando la Ecuación (3.2),

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n.$$

La convergencia de $X(z)$, exige que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty.$$

Por tanto, la región de convergencia será el conjunto de valores de z que cumplan que $|az^{-1}| < 1$ o equivalentemente, $|z| > |a|$. En el interior de la región de convergencia, la serie infinita converge a la función

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad |z| > |a|. \tag{3.12}$$

Para obtener esta expresión en forma cerrada hemos utilizado la fórmula familiar de la suma de términos de una serie geométrica. La transformada Z de la secuencia $x[n] = a^n u[n]$ tiene una región de convergencia para cualquier valor finito de $|a|$. Para $a = 1$, $x[n]$ es la secuencia escalón unidad cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1. \tag{3.13}$$

Si $|a| < 1$, la transformada de Fourier de $x[n] = a^n u[n]$ converge a

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{3.14}$$

Sin embargo, si $a \geq 1$, la transformada de Fourier de la secuencia limitada por la izquierda no converge.

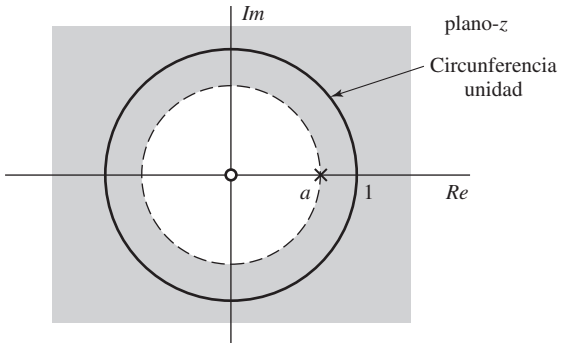


Figura 3.3 Diagrama polo–cero y región de convergencia del Ejemplo 3.1.

En el Ejemplo 3.1, la suma infinita es igual a una función racional de z en el interior de la región de convergencia. Para la mayoría de los propósitos, esta función racional es una representación mucho más adecuada que la suma infinita. Veremos posteriormente que cualquier secuencia que se pueda representar como una suma de exponenciales se puede representar de forma equivalente mediante una transformada Z racional. Esta transformada Z queda determinada, salvo una constante multiplicativa, por la posición de sus ceros y sus polos. En este ejemplo, hay un cero en $z = 0$, y un polo en $z = a$. La Figura 3.3 muestra el diagrama polo–cero y la región de convergencia para el Ejemplo 3.1. En esta figura, el símbolo "$\circ$" indica el cero y el símbolo "$\times$" el polo. Para $|a| \geq 1$, la región de convergencia no incluye la circunferencia unidad, lo que es consistente con el hecho de que para esos valores de a, la transformada de Fourier de la secuencia con crecimiento exponencial $a^n u[n]$ no converge.

Ejemplo 3.2 Secuencia exponencial limitada por la derecha

Sea ahora

$$x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} -a^n & n \leq -1 \\ 0 & n > -1. \end{cases}$$

Como la secuencia es distinta de cero sólo para $n \leq -1$, se trata de una secuencia *limitada por la derecha*. La transformada Z en este caso es

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si $|a^{-1}z| < 1$ o equivalentemente, $|z| < |a|$, la suma de la Ecuación (3.15) converge, y usando de nuevo la fórmula de la suma de términos de una serie geométrica

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| < |a|. \tag{3.16}$$

La Figura 3.4 muestra el diagrama polo–cero y la región de convergencia para este ejemplo.

Nótese que si $|a| < 1$, la secuencia $-a^n u[-n-1]$ crece exponencialmente cuando $n \to -\infty$, y por lo tanto, no existe la transformada de Fourier. Sin embargo, si $|a| > 1$ la transformada de Fourier es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \tag{3.17}$$

que es idéntica en su forma a la Ecuación (3.14). A primera vista, esto parece violar la unicidad de la transformada de Fourier. Sin embargo, esta ambigüedad se resuelve si recordamos que la Ecuación (3.14) es la transformada de Fourier de $a^n u[n]$ si $|a| < 1$, mientras que la Ecuación (3.17) es la transformada de Fourier de $-a^n u[-n-1]$ cuando $|a| > 1$.

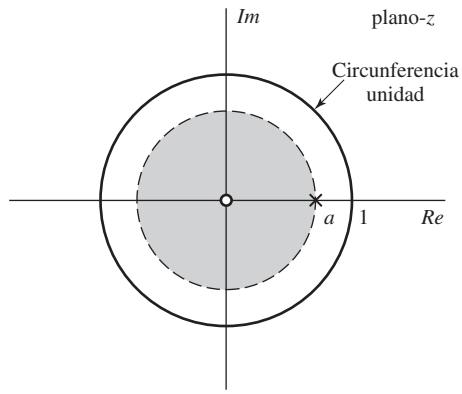


Figura 3.4 Diagrama polo–cero y región de convergencia del Ejemplo 3.2.

Comparando las Ecuaciones (3.12) y (3.16) y las Figuras 3.3 y 3.4 vemos que las secuencias, y por lo tanto las sumas infinitas, son diferentes. Sin embargo, las expresiones algebraicas de $X(z)$ y los correspondientes diagramas polo–cero son idénticos en ambos ejemplos. Las transformadas Z se diferencian sólo en la región de convergencia. Esto resalta la necesidad de especificar tanto la expresión algebraica como la región de convergencia de la transformada Z de una determinada secuencia. Además, en ambos ejemplos, las secuencias son exponenciales y la transformada Z ha resultado ser una función racional. Esta idea aparece otra vez en el ejemplo siguiente: $X(z)$ será una función racional siempre que $x[n]$ sea una combinación lineal de exponenciales reales o complejas.

Ejemplo 3.3 Suma de dos secuencias exponenciales

Consideremos una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \tag{3.18}$$

Su transformada Z es

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \\
&= \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Para que $X(z)$ converja, las dos sumas de la Ecuación (3.19) deben converger. Ello requiere que $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1$ y $\left|\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}\right| < 1$ simultáneamente. De otra forma, que $|z| > \frac{1}{2}$ y $|z| > \frac{1}{3}$. Por tanto, la región de convergencia es la región donde se solapan, $|z| > \frac{1}{2}$. La Figura 3.5 muestra el diagrama polo–cero y la región de convergencia de la transformada Z de cada uno de los términos y de la señal combinada.

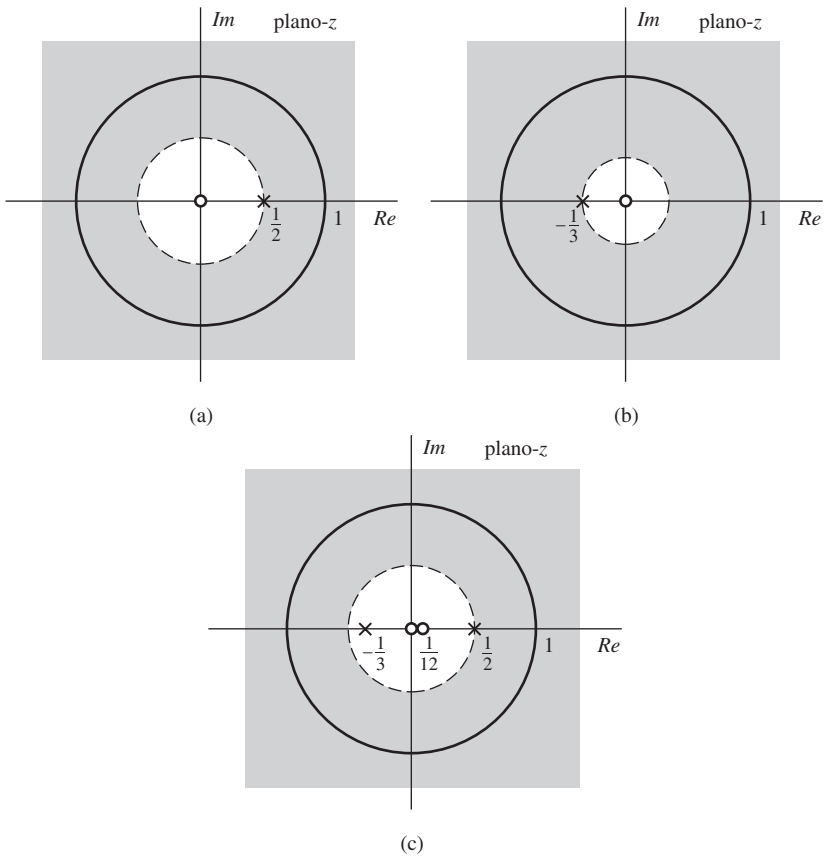


Figura 3.5 Diagrama polo–cero y región de convergencia de cada término y de la suma de términos de los Ejemplos 3.3 y 3.4. (a) $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$. (b) $1/(1+\frac{1}{3}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{3}$. (c) $1/(1-\frac{1}{2}z^{-1}) + 1/(1+\frac{1}{3}z^{-1})$, $|z| > \frac{1}{2}$.

En cada uno de los ejemplos anteriores hemos partido de la definición de la secuencia, transformando cada una de las sumas infinitas hasta llegar a una expresión cuya suma pudiera ser reconocida. Si una secuencia se reconoce como una suma de secuencias exponenciales de la forma de los Ejemplos 3.1 y 3.2, su transformada Z se puede obtener de forma mucho más simple utilizando el hecho de que el operador transformada Z es lineal. Concretamente, a partir de la definición de transformada Z de la Ecuación (3.2), podemos ver que si $x[n]$ es la suma de dos términos, $X(z)$ será la suma de las transformadas Z de cada uno de los sumandos. La región de convergencia será la intersección de las regiones de convergencia correspondientes a cada término y contiene los valores de z para los que ambas sumas convergen por separado. Ya hemos demostrado este hecho al obtener la Ecuación (3.19) en el Ejemplo 3.3. El Ejemplo 3.4 ilustra cómo se puede obtener la transformada Z del Ejemplo 3.3 de forma mucho más directa.

Ejemplo 3.4 Suma de dos exponenciales (de nuevo)

Sea de nuevo la señal $x[n]$ de la Ecuación (3.18). Utilizando el resultado general del Ejemplo 3.1 con $a = \frac{1}{2}$ y $a = -\frac{1}{3}$, se puede ver fácilmente que la transformada Z de cada uno de los dos sumandos es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \tag{3.21}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}, \tag{3.22}$$

y en consecuencia

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \tag{3.23}$$

como ya hemos obtenido en el Ejemplo 3.3. La Figura 3.5 muestra el diagrama polo-cero y la región de convergencia de cada uno de los términos y de la señal combinada.

El Ejemplo 3.5 resume los puntos principales de los Ejemplos 3.1–3.4.

Ejemplo 3.5 Secuencia exponencial bilateral

Consideremos la secuencia

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]. \tag{3.24}$$

Nótese que esta secuencia crece exponencialmente cuando $n \to -\infty$. Utilizando el resultado general del Ejemplo 3.1 con $a = -\frac{1}{3}$, obtenemos

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3},$$

y utilizando el resultado del Ejemplo 3.2 con $a = \frac{1}{2}$ tenemos

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{2}.$$

Por tanto, por la linealidad de la transformada Z,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \frac{1}{3} < |z| \text{ y } |z| < \frac{1}{2}, \\ &= \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

En este caso, la región de convergencia es la región anular $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$. Nótese que la función racional de este ejemplo es idéntica a la función racional de los Ejemplos 3.3 y 3.4 pero que la región de convergencia es diferente en los tres casos. La Figura 3.6 muestra el diagrama polo-cero y la región de convergencia en los tres casos.

Como la región de convergencia no contiene a la circunferencia unidad, la secuencia de la Ecuación (3.24) no tiene transformada de Fourier.

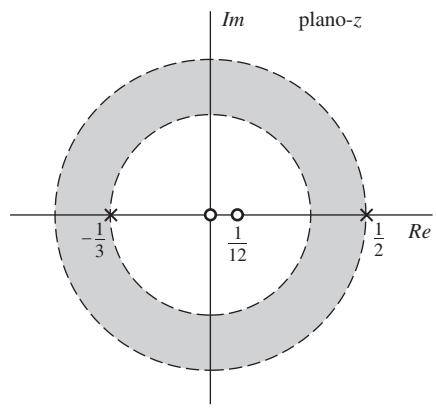


Figura 3.6 Diagrama polo–cero y región de convergencia del Ejemplo 3.5.

En todos los ejemplos anteriores hemos expresado la transformada Z como un cociente de polinomios en z y como un cociente de polinomios en z^{-1}. Observando la forma de la definición de transformada Z dada en la Ecuación (3.2), vemos que, en secuencias que son cero para $n < 0$, $X(z)$ contiene sólo potencias negativas de z. Por tanto, para esta clase de señales resulta particularmente conveniente expresar $X(z)$ mediante polinomios en z^{-1} en vez de polinomios en z. Sin embargo, incluso cuando $x[n]$ es distinto de cero para $n < 0$, sigue siendo todavía posible expresar $X(z)$ en función de factores de la forma $(1 - az^{-1})$. Es conveniente tener en cuenta que un factor como este introduce un polo y un cero, como ilustran las expresiones algebraicas obtenidas en los ejemplos anteriores.

Mediante dichos ejemplos se puede ver fácilmente que las secuencias exponenciales de longitud infinita tienen transformadas Z que se pueden expresar como funciones racionales de z o de z^{-1}. El caso correspondiente a una secuencia de longitud finita tiene también una forma simple. Si la secuencia es distinta de cero únicamente en el intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$, su transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{3.26}$$

no tiene problemas de convergencia siempre que cada uno de los términos $|x[n]z^{-n}|$ sea finito. En general, puede no ser posible expresar la suma de un número finito de términos en forma cerrada, pero en estos casos puede no ser necesario. Por ejemplo, se puede ver fácilmente que si $x[n] = \delta[n] + \delta[n-5]$, entonces $X(z) = 1 + z^{-5}$, que es finita para $|z| > 0$. En el Ejemplo 3.6 presentamos un caso en el que se suma un número finito de términos para producir una representación más compacta de la transformada Z.

Ejemplo 3.6 Secuencia de longitud finita

Consideremos la señal

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Entonces

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}, \tag{3.27}$$

donde para sumar la serie finita hemos utilizado la fórmula general de la Ecuación (2.55). La región de convergencia está determinada por los valores de z que cumplen

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty.$$

Como sólo hay un número finito de términos distintos de cero, la suma será finita siempre que az^{-1} sea finito, lo que a su vez requiere sólo que $|a| < \infty$ y $z \neq 0$. Por tanto, suponiendo que $|a|$ sea finito, la región de convergencia es el plano z completo, con excepción del origen $(z = 0)$. La Figura 3.7 muestra el diagrama polo–cero para este ejemplo con $N = 16$ y a un número real entre 0 y 1. Concretamente, las N raíces del polinomio del numerador están en

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3.28}$$

(Nótese que estos valores satisfacen la ecuación $z^N = a^N$ y que cuando $a = 1$, estos valores complejos son las N raíces de la unidad. El cero en $k = 0$ cancela al polo en $z = a$. Por lo tanto, no hay más polos que los $N-1$ polos del origen. Los ceros restantes están en las posiciones del plano z

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{3.29}$$

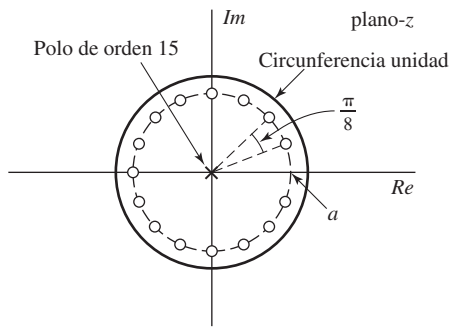


Figura 3.7 Diagrama polo–cero del Ejemplo 3.6 para $N = 16$ y a real, $0 < a < 1$. La región de convergencia en este ejemplo contiene todos los valores de z excepto $z = 0$.

TABLA 3.1 ALGUNAS PAREJAS COMUNES DE TRANSFORMADAS Z

Secuencia	Transformada	RDC
1. $\delta[n]$	1	Todo z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	Todo z excepto 0 (si $m>0$) o ∞ (si $m<0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $\operatorname{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $r^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\operatorname{sen}(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

La Tabla 3.1 contiene las parejas de transformadas Z correspondientes a algunos de los ejemplos anteriores, junto con otras parejas que aparecen frecuentemente. Veremos que estas parejas de transformadas básicas son muy útiles para obtener la transformada Z de algunas secuencias, o en el problema contrario, obtener la secuencia que corresponde a una transformada Z determinada.

3.2. PROPIEDADES DE LA REGIÓN DE CONVERGENCIA DE LA TRANSFORMADA Z

Los ejemplos presentados en la sección anterior sugieren que las propiedades de la región de convergencia dependen de la naturaleza de la señal. Estas propiedades se resumen en esta sección, junto con unos breves comentarios y una justificación intuitiva. Supondremos específicamente que la expresión algebraica de la transformada Z es una función racional y que $x[n]$ es de amplitud finita, excepto posiblemente en $n=\infty$ o $n=-\infty$.

Propiedad 1: La región de convergencia en el plano z puede ser un anillo o un disco centrados en el origen. Es decir, $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

Propiedad 2: La transformada de Fourier de $x[n]$ converge si y sólo si la región de convergencia de la transformada Z de $x[n]$ contiene a la circunferencia unidad.

Propiedad 3: La región de convergencia no contiene ningún polo.

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una *secuencia de duración finita*, es decir, una secuencia que es cero excepto en un intervalo finito $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, la región de convergencia es el plano z completo, pudiendo exceptuarse los valores $z = 0$ o $z = \infty$.

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una *secuencia limitada por la izquierda*, es decir, una secuencia que es cero para $n < N_1 < \infty$, la región de convergencia se extiende hacia fuera desde el polo finito *más exterior* (el de mayor módulo) de $X(z)$ hasta (y pudiendo incluir) el valor $z = \infty$.

Propiedad 6: Si $x[n]$ es una a *secuencia limitada por la derecha*, es decir, una secuencia que es cero para $n > N_2 > -\infty$, la región de convergencia se extiende hacia dentro desde el polo finito *más interior* (el de menor módulo) de $X(z)$ hasta (y pudiendo incluir) el valor $z = 0$.

Propiedad 7: Una *secuencia bilateral* es una secuencia de duración infinita, no limitada por la izquierda ni por la derecha. Si $x[n]$ es una secuencia bilateral, la región de convergencia será un anillo en el plano z, limitado en el interior y en el exterior por un polo y que, de acuerdo con la propiedad 3, no contendrá ningún polo.

Propiedad 8: La región de convergencia debe ser una región conexa.

La propiedad 1 resume la forma general de la región de convergencia. Como ya se dijo en la Sección 3.1, la propiedad 1 surge del hecho de que la convergencia de la Ecuación (3.2) está dada por la Ecuación (3.7), que repetimos aquí:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty \tag{3.30}$$

siendo $r = |z|$. La Ecuación (3.30) demuestra que para una señal dada, la convergencia depende sólo de $r = |z|$ (es decir, no depende de la fase de z). Nótese que si la transformada Z converge para $|z| = r_0$, entonces podemos disminuir r hasta que la transformada Z no converja. Este es el valor $|z| = r_R$ tal que $|x[n]|r^{-n}$ crece demasiado rápido (o decrece demasiado lento) cuando $n \to \infty$, de forma que la serie no es absolutamente sumable. Esto define r_R. La transformada Z no puede converger para $r \leq r_R$ porque r^{-n} crecerá más rápido. De forma similar, el límite exterior r_L se puede obtener aumentando r desde r_0 y considerando lo que ocurre cuando $n \to -\infty$.

La propiedad 2 es consecuencia de que la Ecuación (3.2) se reduce a la transformada de Fourier cuando $|z| = 1$. La propiedad 3 aparece si tenemos en cuenta que $X(z)$ es infinita en los polos y, por definición, no converge.

La propiedad 4 se sigue del hecho de que la transformada Z de una secuencia de longitud finita es una suma finita de potencias de Z, es decir

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}.$$

Por tanto, $|X(z)| < \infty$ para todo z excepto $z = 0$ cuando $N_2 > 0$ y/o $z = \infty$ cuando $N_1 < 0$.

Las propiedades 5 y 6 son un caso especial de la propiedad 1. Para interpretar la propiedad 5 en el caso de transformadas Z racionales, nótese que una secuencia de la forma

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (d_k)^n u[n] \tag{3.31}$$

Es un ejemplo de secuencia limitada por la izquierda formada por exponenciales complejas de amplitudes A_k y factores exponenciales d_k. Aunque no es el caso más general de secuencia limitada por la izquierda, es suficiente para ilustrar la propiedad 5. Se pueden formar secuencias limitadas por la izquierda más generales secuencias de longitud finita o desplazando las secuencias exponenciales una cantidad finita. No obstante, estas modificaciones de la Ecuación (3.31) no cambiarían nuestras conclusiones. Utilizando la propiedad de linealidad, la transformada Z de $x[n]$ en la Ecuación (3.31) es

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \cdot \qquad |z| > \{|d_k|\} \tag{3.32}$$

Nótese que para los valores de Z que están en todas las regiones de convergencia, $|z| > |d_k|$, se pueden combinar los términos en una única función racional con denominador común

$$\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1});$$

es decir, los polos de $X(z)$ están situados en $z = d_1, \ldots, d_N$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los polos están ordenados de forma que d_1 tiene el menor módulo, y corresponde por tanto al polo más interno, y d_N tiene el mayor módulo, y corresponde por tanto al polo más externo. La exponencial que crece con menor rapidez cuando n aumenta es la correspondiente al polo más interno, es decir, d_1, y la que decrece más lentamente (o crece más rápidamente) es la correspondiente al polo más externo, es decir, d_N. No es sorprendente entonces que d_N determine la frontera interna de la región de convergencia, que es la intersección de las regiones $|z| > |d_k|$. Es decir, la región de convergencia de la transformada Z de una suma de secuencias exponenciales limitadas por la izquierda es

$$|z| > |d_N| = \max_k |d_k| = r_R, \tag{3.33}$$

es decir, la región de convergencia es hacia el exterior del polo más externo, y se extiende hasta el infinito. Si una secuencia limitada por la izquierda comienza en $n = N_1 < 0$, la región de convergencia no incluirá $|z| = \infty$.

Otra forma de llegar a la propiedad 5 es aplicar la Ecuación (3.30) a la Ecuación (3.31), obteniéndose

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} A_k (d_k)^n \right| r^{-n} \leq \sum_{k=1}^{N} |A_k| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |d_k/r|^n \right) < \infty, \tag{3.34}$$

que demuestra que la convergencia está garantizada si todas las secuencias $|d_k/r|^n$ son absolutamenten sumables. De nuevo, como $|d_N|$ es el polo de mayor módulo, escogemos $|d_N/r| < 1$, o $r > |d_N|$.

Para la propiedad 6, que trata de secuencias limitadas por la derecha, se puede desarrollar un argumento totalmente paralelo utilizando una suma de secuencia exponenciales limitadas por la derecha, y demostrar así que la región de convergencia estará definida por el polo con mínimo módulo. Utilizando el mismo supuesto sobre la ordenación de los polos, la región de convergencia será

$$|z| < |d_1| = \min_k |d_k| = r_L, \tag{3.35}$$

Es decir, la región de convergencia está hacia el interior del polo más interno. Si la secuencia limitada por la derecha tiene valores distintos de cero para valores positivos de n, entonces la región de convergencia

no incluirá al origen, $z = 0$. Como ahora $x[n]$ se extiende hasta $-\infty$ por el eje de n negativa, r debe restringirse de forma que para cada d_k, la secuencia exponencial $(d_k r^{-1})^n$ decrezca hacia cero cuando n *decrezca* hacia $-\infty$.

Para el caso de secuencias limitadas por la izquierda, la región de convergencia viene impuesta por la ponderación exponencial r^{-n} necesaria para que todos los términos decrezcan a cero al incrementar n; Para el caso de secuencias limitadas por la derecha, la ponderación exponencial debe ser tal que todos los términos exponenciales decrezcan a cero al decrecer n. La propiedad 7 se desprende del hecho de que en el caso de secuencias bilaterales, la ponderación exponencial debe equilibrarse, ya que si decrece demasiado rápido al crecer n, puede ser que crezca demasiado rápido al decrecer n y viceversa. Más concretamente, en el caso de secuencias bilaterales, algunos polos contribuyen sólo para $n > 0$ y el resto sólo para $n < 0$. La región de convergencia está limitada en su interior por el polo de mayor módulo que contribuya para $n > 0$ y en su exterior por el polo de menor módulo que contribuya para $n < 0$.

La propiedad 8 se sugiere de forma intuitiva de la discusión realizada sobre las propiedades 4 a 7. Cualquier secuencia bilateral se puede representar como una suma de una parte limitada por la izquierda (por ejemplo, que sea cero para $n \geq 0$), y una parte limitada por la derecha que incluya todo lo que no incorpora la parte limitada por la izquierda. La parte limitada por la izquierda tendrá una región de convergencia dada por la Ecuación (3.33), y la parte limitada por la derecha, por la Ecuación (3.35). La región de convergencia de la secuencia bilateral completa será la intersección de las dos regiones. Por lo tanto, si dicha intersección existe, será siempre una región anular conexa de la forma

$$r_R < |z| < r_L.$$

Existe la posibilidad de que las regiones de convergencia correspondientes a las partes limitada por la izquierda y limitada por la derecha no se solapen. Es decir, que $r_L < r_R$. En tales casos, la transformada Z de la secuencia simplemente no existe.

Ejemplo 3.7 Regiones de convergencia que no solapan

Un ejemplo es la secuencia

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1].$$

Aplicando los casos correspondientes de la Tabla 3.1 separadamente para cada parte llegamos a

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z| > \left\{\frac{1}{2}\right\}} + \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z| < \left\{\frac{1}{3}\right\}}.$$

Como no hay solapamiento entre $|z| > \frac{1}{2}$ y $|z| < \frac{1}{3}$, podemos concluir que $x[n]$ no tiene transformada Z (ni transformada de Fourier).

Como ya indicamos al comparar los Ejemplos 3.1 y 3.2, la expresión algebraica o el diagrama polo–cero no especifican completamente la transformada Z de una secuencia. Es necesario especificar también la región de convergencia. Las propiedades consideradas en esta sección limitan las posibles regiones de convergencia que se pueden asociar a un determinado diagrama polo–cero. Para ilustrar esta idea, consideremos el diagrama polo-cero que se muestra en la Figura 3.8(a). Aplicando las propiedades 1, 3 y 8, sólo existen cuatro posibles alternativas para la región de convergencia, que se indican en las Figuras

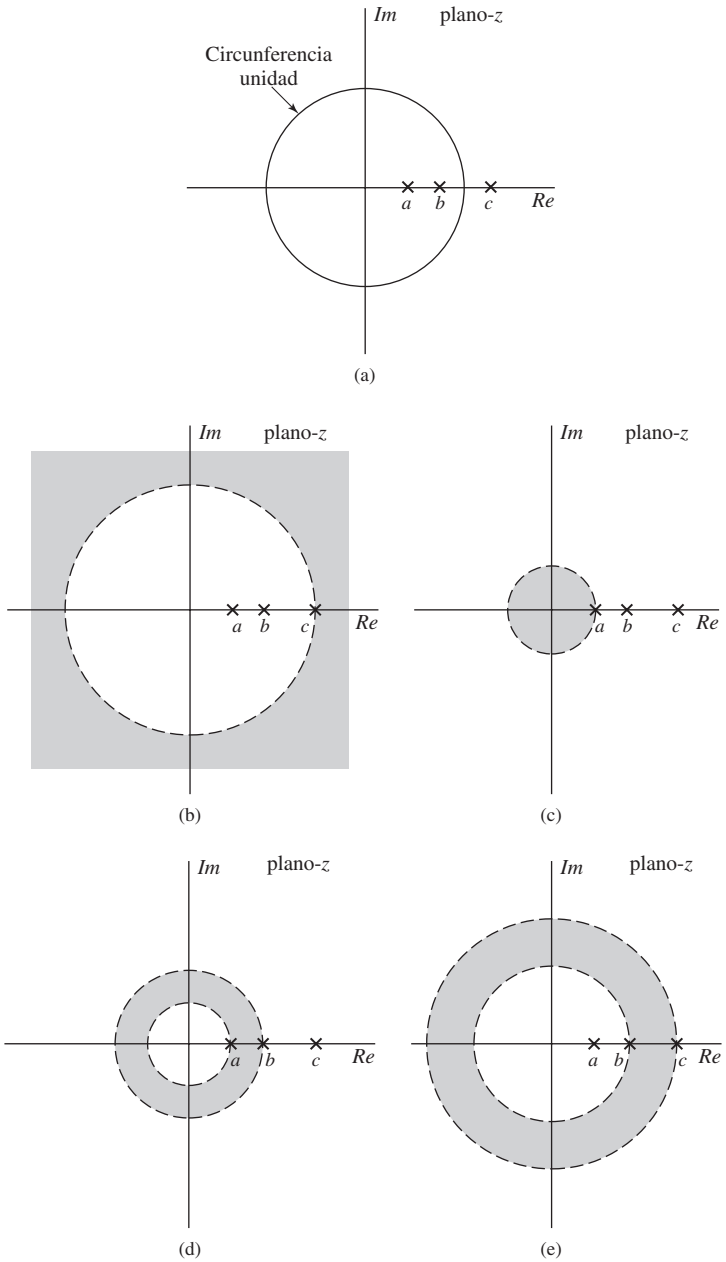


Figura 3.8 Ejemplos de transformadas Z con los mismos diagramas polo-cero que ilustran las diferentes posibilidades de la región de convergencia. Cada región de convergencia corresponde a una secuencia diferente: (b) a una secuencia limitada por la izquierda, (c) a una secuencia limitada por la derecha, (d) a una secuencia bilateral y (e) a una secuencia bilateral.

3.8(b), (c), (d) y (e), cada una de ellas está asociada a una secuencia diferente. Concretamente, la Figura 3.8(b) corresponde a una secuencia limitada por la izquierda, la Figura 3.8(c) a una secuencia limitada por la derecha, y las Figuras 3.8(d) y 3.8(e) a dos secuencias bilaterales diferentes. Si suponemos, como

indica la Figura 3.8(a), que la circunferencia unidad está entre el polo en $z = b$ y el polo en $z = c$, el único caso en el que la transformada de Fourier convergería sería el de la Figura 3.8(e).

Al representar una secuencia mediante su transformada Z, a veces es conveniente especificar implícitamente la región de convergencia mediante una propiedad apropiada de la secuencia en el dominio del tiempo. Esto se ilustra en el Ejemplo 3.8.

Ejemplo 3.8 Estabilidad, causalidad y región de convergencia

Consideremos un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. Comentaremos con más detalle en la Sección 3.5, la transformada Z de $h[n]$ se denomina *función de transferencia* del sistema lineal e invariante con el tiempo. Supongamos que $H(z)$ tiene el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura 3.9. Con este diagrama polo–cero se pueden asociar tres regiones de convergencia consistentes con las propiedades 1-8, concretamente $|z| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$ y $|z| > 2$. Sin embargo, si imponemos la condición adicional de que el sistema sea estable (o lo que es lo mismo, que $h[n]$ sea absolutamente sumable y por tanto que tenga transformada de Fourier), la región de convergencia debe incluir a la circunferencia unidad. Por lo tanto, la estabilidad del sistema y las propiedades 1–8 implican que la región de convergencia debe ser $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Nótese que, como consecuencia, $h[n]$ es bilateral y por lo tanto el sistema no es causal.

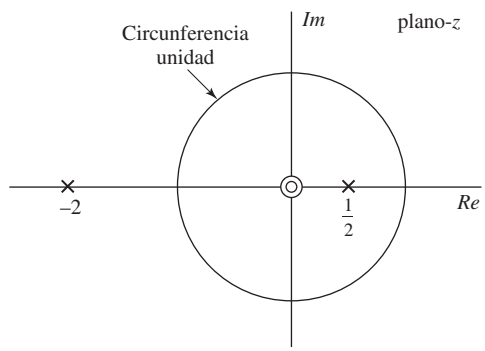


Figura 3.9 Diagrama polo–cero de la función de transferencia del Ejemplo 3.8.

Si imponemos la condición de que el sistema sea causal, $h[n]$ debe ser limitada por la izquierda. Aplicando la propiedad 5, la región de convergencia debe ser $|z| > 2$. En este caso, el sistema no será estable. En consecuencia, dado este diagrama polo cero, no existe una región de convergencia para la que el sistema sea a la vez estable y causal.

3.3. LA TRANSFORMADA Z INVERSA

Al utilizar la transformada Z para el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto, hay que moverse en un sentido y en otro entre las representaciones en el dominio del tiempo y en el dominio Z. Muchas veces, al realizar este análisis, es necesario calcular la transformada Z de las secuencias y, tras realizar diversas modificaciones en las expresiones algebraicas, obtener la transformada Z inversa. La transformada Z inversa se define mediante la siguiente integral compleja de contorno:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \tag{3.36}$$

siendo C un contorno cerrado dentro de la región de convergencia de la transformada Z. Esta expresión se puede obtener utilizando el teorema de la integral de Cauchy, de la teoría de variable compleja (véase

Churchill y Brown, 2007, donde se presentan los aspectos de la series de Laurent y los teoremas de integración compleja, y todo el material relevante para un estudio en profundidad de los fundamentos matemáticos de la transformada Z). Sin embargo, para las clases típicas de secuencias y de transformadas Z que encontraremos en el análisis de sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo, son suficientes y preferibles procedimientos menos formales a las técnicas basadas en la evaluación de la Ecuación (3.36). En las Secciones 3.3.1–3.3.3 presentaremos algunos de estos procedimientos, concretamente el método de inspección, la descomposición en fracciones simples y el desarrollo en serie de potencias.

3.3.1. Método de inspección

El método de inspección consiste simplemente en estar familiarizado con, o reconocer "por simple inspección", ciertas parejas de transformadas. Por ejemplo, en la Sección 3.1 obtuvimos las transformadas Z de secuencias de la forma $x[n] = a^n u[n]$, siendo a un número real o complejo. Las secuencias de esta forma surgen muy frecuentemente y por lo tanto, resulta particularmente útil hacer uso directo de la pareja de transformadas

$$a^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{3.37}$$

Si necesitamos obtener la transformada Z inversa de

$$X(z) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right), \qquad |z| > \frac{1}{2}, \tag{3.38}$$

y observamos la pareja de transformadas Z de la Ecuación (3.37), reconoceremos "por inspección" que la secuencia asociada es $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Si la región de convergencia asociada a $X(z)$ en la Ecuación (3.38) hubiera sido $|z| < \frac{1}{2}$, hubiéramos utilizado la pareja de transformadas 6 de la Tabla 3.1 para obtener, por simple inspección que $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$.

Las tablas de transformadas Z, como la Tabla 3.1, tienen muchísima utilidad para aplicar el método de inspección. Si la tabla es amplia, puede ser factible expresar una determinada transformada Z como suma de términos, y obtenerse la transformada inversa de cada uno de ellos mediante la tabla. Si ello es posible, la transformada inversa (es decir, la correspondiente secuencia), se puede obtener directamente a partir de la tabla.

3.3.2. Descomposición en fracciones simples

Como ya hemos comentado, las transformadas Z inversas se pueden obtener por inspección si la expresión de la transformada Z se reconoce o se puede encontrar en una tabla. Algunas veces, $X(z)$ no se puede encontrar explícitamente utilizando una tabla, pero puede ser posible obtener una expresión alternativa de $X(z)$ como suma de términos más simples, cada uno de los cuales aparece en la tabla. Este es el caso de las funciones racionales, ya que es posible realizar la descomposición en fracciones simples e identificar fácilmente las secuencias correspondientes a cada término.

Para ver cómo se realiza una descomposición en fracciones simples, supongamos que $X(z)$ se expresa como un cociente de polinomios en z^{-1}; es decir,

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{3.39}$$

Este tipo de transformada Z surge frecuentemente en el estudio de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Una expresión equivalente es

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}. \tag{3.40}$$

La Ecuación (3.40) indica explícitamente que, para estas funciones, habrá M ceros y N polos en posiciones del plano complejo distintas del cero, suponiendo que a_0, b_0, a_N y b_M son distintos de cero. Además, habrá $M-N$ polos en $z=0$ si $M>N$ o $N-M$ ceros en $z=0$ si $N>M$. En otras palabras, las transformadas Z de la forma indicada en la Ecuación (3.39) tienen siempre el mismo número de polos y ceros en el plano z finito, y no hay polos ni ceros en $z=\infty$. Para realizar la descomposición en fracciones simples de $X(z)$ expresada según la Ecuación (3.39), es más conveniente advertir que $X(z)$ se puede expresar también de la forma

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}, \tag{3.41}$$

siendo c_ks los ceros distintos de cero de $X(z)$ y d_ks los polos distintos de cero de $X(z)$. Si $M<N$ y los polos son todos de primer orden, entonces $X(z)$ se puede expresar así:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}. \tag{3.42}$$

Obviamente, el denominador común de las fracciones de la Ecuación (3.42) es el mismo que el de la Ecuación (3.41). Multiplicando los dos miembros de la Ecuación (3.42) por $(1-d_k z^{-1})$ y particularizando para $z=d_k$ se pueden obtener los coeficientes, A_k, es decir,

$$A_k = (1-d_k z^{-1}) X(z)\big|_{z=d_k}. \tag{3.43}$$

Ejemplo 3.9 Transformada Z de segundo orden

Consideremos una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > \frac{1}{2}. \tag{3.44}$$

La Figura 3.10 muestra el diagrama polo–cero de $X(z)$. Observando la región de convergencia y teniendo en cuenta la propiedad 5 de la Sección 3.2, vemos que $x[n]$ es una secuencia limitada por la izquierda. Como los dos polos son de primer orden, $X(z)$ se puede expresar como indica la Ecuación (3.42), es decir,

$$X(z) = \frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}.$$

A partir de la Ecuación (3.43),

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) X(z)\Big|_{z=1/4} = \frac{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Bigg|_{z=1/4} = -1,$$

$$A_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) X(z)\Big|_{z=1/2} = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Bigg|_{z=1/2} = 2\,.$$

Nótese que deben cancelarse los factores comunes entre el numerador y el denominador antes de utilizar la expresiones anteriores para calcular A_1 y A_2. Por tanto,

$$X(z) = \frac{-1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\,.$$

Como $x[n]$ es limitada por la izquierda, la región de convergencia de cada término se extiende hacia el exterior del polo más externo. Utilizando la Tabla 3.1 y la propiedad de linealidad de la transformada Z obtenemos que

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\,.$$

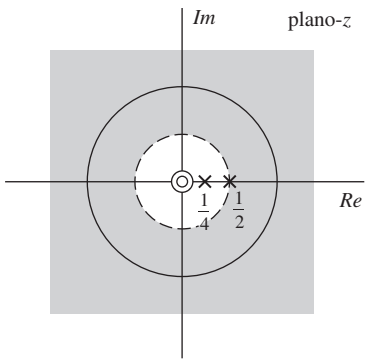


Figura 3.10 Diagrama polo–cero y región de convergencia del Ejemplo 3.9.

Claramente, el numerador que resulta de sumar los términos de la Ecuación (3.42) será como máximo de grado $(N-1)$ en la variable z^{-1}. Si $M \geq N$, se debe sumar un polinomio al miembro derecho de la Ecuación (3.42), cuyo grado será $(M-N)$. Por lo tanto, si $M \geq N$, la descomposición en fracciones simples completa tendrá la forma

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}. \tag{3.45}$$

Si tenemos una función racional de la forma expresada en la Ecuación (3.39), con $M \geq N$, los coeficientes B_r se pueden obtener dividiendo los polinomios del numerador y el denominador, finalizando el proceso de división cuando el resto sea de grado inferior al denominador. Los coeficientes A_k se obtienen utilizando la Ecuación (3.43).

Si $X(z)$ tiene polos de orden múltiple y $M \geq N$, se debe modificar la Ecuación (3.45). En concreto, si $X(z)$ tiene un polo de orden s en $z = d_i$ y todos los demás polos son de primer orden, la Ecuación (3.45) se convierte en

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_m}{(1-d_i z^{-1})^m}. \tag{3.46}$$

Los coeficientes A_k y B_r se obtienen como antes. Los coeficientes C_m se obtienen aplicando la ecuación

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} [(1-d_i w)^s X(w^{-1})] \right\}_{w=d_i^{-1}}. \tag{3.47}$$

La Ecuación (3.46) presenta la forma más general de la descomposición en fracciones simples de una transformada Z racional expresada como una función de z^{-1} para el caso de $M \geq N$ y siendo d_i un polo de orden s. Si existen varios polos de orden múltiple, existirá un término como la tercera suma de la Ecuación (3.46) por cada uno de ellos. Si no hay polos de orden múltiple, la Ecuación (3.46) se reduce a la (3.45). Si el orden del numerador es menor que el orden del denominador (es decir, $M < N$), el término polinómico desaparece de las Ecuaciones (3.45) y (3.46) llegándose a la Ecuación (3.42).

Es interesante mencionar que podríamos haber obtenido los mismos resultados suponiendo que la transformada Z racional se expresa en función de z en lugar de en función de z^{-1}. En este caso, en lugar de factores de la forma $(1-az^{-1})$, podríamos haber considerado factores de la forma $(z-a)$. lo que nos conduciría a un conjunto de ecuaciones similares a las Ecuaciones (3.41)–(3.47), que sería adecuado si utilizáramos una tabla de transformadas Z expresadas en función de z. Como la Tabla 3.1 está expresada en función de z^{-1}, el desarrollo que hemos hecho es más útil.

Para ver cómo obtener la secuencia correspondiente a una determinada transformada Z racional, supongamos que $X(z)$ tiene sólo polos de primer orden, con lo que la Ecuación (3.45) es la forma más general de descomposición en fracciones simples. Para obtener $x[n]$, observamos primero que la operación de transformada Z es lineal, de modo que se puede obtener la transformada inversa de cada término y sumarlas después todas para formar la señal $x[n]$.

Los términos $B_r z^{-r}$ corresponden a secuencias impulso desplazadas y modificadas por un factor de escala, es decir, términos de la forma $B_r \delta[n-r]$. Los términos fraccionarios corresponden a secuencias exponenciales. Para decidir si un término como

$$\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

corresponde a la secuencia $(d_k)^n u[n]$ o a la secuencia $-(d_k)^n u[-n-1]$, debemos utilizar las propiedades de la región de convergencia que presentamos en la Sección 3.2. De lo allí expuesto se desprende que si $X(z)$ tiene sólo polos simples y la región de convergencia es de la forma $r_R < |z| < r_L$, un determinado polo corresponderá a una exponencial limitada por la izquierda, $(d_k)^n u[n]$ si $|d_k| \leq r_R$, y corresponderá a una exponencial limitada por la derecha si $|d_k| \geq r_L$. Por lo tanto, la región de convergencia se puede utilizar para clasificar los polos, ya que si todos los polos están en el interior de la frontera interna r_R las secuencias serán limitadas por la izquierda, y si todos los polos están en el exterior de la frontera externa, las secuencias serán limitadas por la derecha. Los polos de orden múltiple producen también contribuciones limitadas por la izquierda y por la derecha de la misma forma. Los ejemplos que siguen ilustran el uso de la región de convergencia en el cálculo de transformadas Z inversas mediante descomposición en fracciones simples.

Ejemplo 3.10 Inversión mediante descomposición en fracciones simples

Como ilustración de un caso en el que la descomposición en fracciones simples tiene la forma de la Ecuación (3.45), consideremos una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}, \qquad |z| > 1. \tag{3.48}$$

La Figura 3.11 muestra el diagrama polo–cero de $X(z)$. A partir de la región de convergencia y de la propiedad 5 de la Sección 3.2, puede verse claramente que $x[n]$ es una secuencia limitada por la izquierda. Como $M = N = 2$ y los polos son todos de primer orden, $X(z)$ se puede representar así:

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}.$$

La constante B_0 se calcula mediante división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 & z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ & \underline{z^{-2} - 3z^{-1} + 2} \\ & \qquad\quad 5z^{-1} - 1 \end{array}$$

Como el resto tras realizar la primera división es de grado 1 en la variable z^{-1}, no es necesario continuar la división. Por tanto, $X(z)$ se puede expresar así

$$X(z) = 2 + \frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}. \tag{3.49}$$

Ahora se pueden obtener los coeficientes A_1 y A_2 aplicando las Ecuaciones (3.43) a (3.48) o bien la Ecuación (3.49). Si utilizamos la Ecuación (3.49) obtenemos

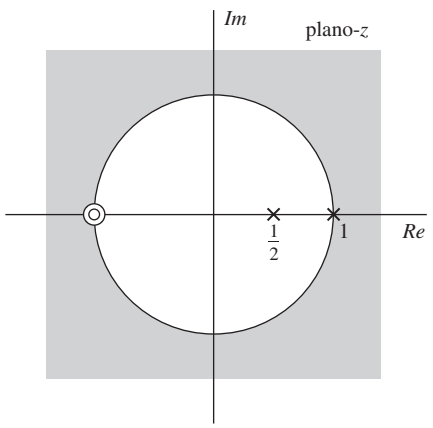


Figura 3.11 Diagrama polo–cero de la transformada Z del Ejemplo 3.10.

$$A_1 = \left[\left(2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right]_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = \left[\left(2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}\right)\left(1-z^{-1}\right)\right]_{z=1} = 8.$$

Por tanto,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}. \tag{3.50}$$

Utilizando la Tabla 3.1, como la región de convergencia es $|z| > 1$,

$$2 \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} 2\delta[n],$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} u[n].$$

Y, finalmente, por la propiedad de linealidad de la transformada Z,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n].$$

En la Sección 3.4 presentaremos e ilustraremos varias propiedades de la transformada Z que, en combinación con la descomposición en fracciones simples, nos proporcionarán medios para determinar la transformada Z inversa a partir de una determinada expresión algebraica racional asociada con una región de convergencia, incluso aunque $X(z)$ no sea exactamente de la forma de la Ecuación (3.41). Los ejemplos de esta sección son lo suficientemente sencillos como para que la descomposición en fracciones simples no sea complicada. Sin embargo, cuando $X(z)$ es una función racional con polinomios de grado alto en el numerador y el denominador, los cálculos necesarios para factorizar el denominador y calcular los coeficientes se hacen mucho más difíciles. En estos casos, herramientas software como MATLAB pueden realizar los cálculos con facilidad.

3.3.3. Desarrollo en serie de potencias

La expresión que define la transformada Z es una serie de Laurent en la que los valores de la secuencia $x[n]$ son los coeficientes de z^{-n}. Por tanto, si la transformada Z se expresa como una serie de potencias de la forma

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \end{aligned} \tag{3.51}$$

podemos determinar cualquier valor de la secuencia sin más que obtener el coeficiente de la potencia apropiada de z^{-1}. Ya hemos utilizado esta idea al calcular la transformada inversa de la parte polinómica

de la descomposición en fracciones simples cuando $M \geq N$. Esta idea es también muy útil en secuencias de longitud finita, en las que $X(z)$ puede no tener una expresión simple en forma de polinomios en z^{-1}.

Ejemplo 3.11 Secuencia de longitud finita

Supongamos que $X(z)$ es de la forma

$$X(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-1})(1-z^{-1}). \tag{3.52}$$

Aunque $X(z)$ es obviamente una función racional, sus únicos polos están en z, por lo que no es apropiado realizar una descomposición en fracciones simples mediante la técnica explicada en la Sección 3.2.2. Sin embargo, si multiplicamos los factores de la Ecuación (3.52), podemos expresar $X(z)$ de otra forma

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

Y, por simple inspección, se ve que $x[n]$ es

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & n = -1, \\ -1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

De forma equivalente,

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

Al calcular transformadas Z de secuencias, buscamos en general sumar la serie de potencias de la Ecuación (3.51) para obtener una expresión matemática más simple, como una función racional. Si deseamos utilizar la serie de potencias para obtener la secuencia que corresponde a una transformada $X(z)$ dada, expresada en forma cerrada, debemos desarrollar de nuevo $X(z)$ en serie de potencias. Existen ya tabuladas muchas series de potencias de funciones trascendentes como log, sen, senh, etc. En algunos casos esas series de potencias tienen una interpretación útil como transformadas Z, como ilustraremos en el Ejemplo 3.12. En el caso de transformadas Z racionales, se puede obtener un desarrollo en serie de potencias realizando la división de polinomios, como se ilustra en el Ejemplo 3.13.

Ejemplo 3.12 Transformada inversa mediante desarrollo en serie de potencias

Consideremos la transformada Z

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|. \tag{3.53}$$

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de $\log(1+x)$ con $|x| < 1$, obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n}.$$

Por tanto,,

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases} \tag{3.54}$$

Cuando $X(z)$ es un cociente de polinomios, algunas veces resulta de utilidad obtener un desarrollo en serie de potencias mediante división de polinomios.

Ejemplo 3.13 Desarrollo en serie de potencias mediante división de polinomios

Consideremos la transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{3.55}$$

Como la región de convergencia es el exterior de una circunferencia, la secuencia está limitada por la izquierda. Además, como $X(z)$ tiende a una constante finita cuando z tiende a infinito, la secuencia es causal. Dividimos los polinomios para obtener un desarrollo en serie de potencias de z^{-1}. Realizando dicha división, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \\ \hline 1-az^{-1} & 1 \\ & \underline{1-az^{-1}} \\ & \quad az^{-1} \\ & \quad \underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} \\ & \qquad a^2z^{-2} \quad \cdots \end{array},$$

o

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots.$$

Por tanto, $x[n] = a^n u[n]$.

Realizando la división de polinomios en z^{-1} del Ejemplo 3.13, se obtiene un desarrollo en serie en potencias de z^{-1}. Otra alternativa sería expresar la función racional como un cociente de polinomios en z y dividir a continuación. Esto conduciría a un desarrollo en serie en potencias de z a partir de l cual se podría determinar la correspondiente secuencia limitada por la derecha.

3.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Muchas propiedades de la transformada Z son particularmente útiles en el estudio de las señales y los sistemas en tiempo discreto. Por ejemplo, estas propiedades se utilizan a menudo en conjunción con las técnicas de cálculo de la transformada Z inversa presentadas en la Sección 3.3 para obtener la transformada inversa de expresiones más complicadas. En la Sección 3.5 y en el Capítulo 5 veremos que las propiedades son también la base para la transformación de ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas en términos de la variable z de la transformada. La solución de la ecuación en diferencias se puede obtener entonces mediante la transformada Z inversa. En esta sección consideraremos algunas de las propiedades que se utilizan más frecuentemente. En la

presentación que sigue, $X(z)$ indica la transformada Z de $x[n]$ y la región de convergencia (RDC) de $X(z)$ se indica como R_x; es decir,

$$x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{RDC} = R_x.$$

Como ya hemos visto, R_x representa el conjunto de valores de z tal que $r_R < |z| < r_L$. Para el caso de propiedades que involucren dos secuencias y sus transformadas Z asociadas, las parejas de transformadas se indicarán así:

$$x_1[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z), \qquad \text{RDC} = R_{x_1},$$

$$x_2[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X_2(z), \qquad \text{RDC} = R_{x_2}.$$

3.4.1. Linealidad

La propiedad de linealidad establece que

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z), \qquad \text{La RDC contiene a } R_{x_1} \quad R_{x_2},$$

y se deduce directamente de la definición de transformada Z de la Ecuación (3.2), es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])z^{-n} = a \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}}_{|z| \in \{R_{x_1}\}} + b \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n}}_{|z| \in \{R_{x_2}\}}.$$

Como se indica, para expresar la transformada Z de la suma como suma de las correspondientes transformadas z, z debe pertenecer a ambas regiones de convergencia. Por tanto, la región de convergencia contiene al menos a la intersección de las dos regiones de convergencia. En el caso de secuencias con transformadas Z racionales, si los polos de $aX_1(z) + bX_2(z)$ suman todos los polos de $X_1(z)$ y $X_2(z)$ (es decir, no hay cancelaciones polo–cero), la región de convergencia será exactamente igual a la intersección de las dos regiones de convergencia. Si la combinación lineal es tal que aparecen algunos ceros que cancelan polos, la región de convergencia puede ser mayor. Un ejemplo simple de este caso aparece cuando $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son de duración infinita, pero la combinación lineal es de duración finita. En este caso la región de convergencia de la combinación lineal es el plano z completo, con las posibles excepciones de $z = 0$ o $z = \infty$. En el Ejemplo 3.6 aparecía este caso; la secuencia $x[n]$ se expresaba como

$$x[n] = a^n (u[n] - u[n-N]) = a^n u[n] - a^n u[n-N].$$

Tanto $a^n u[n]$ como $a^n u[n-N]$ son secuencias limitadas por la izquierda de longitud infinita, y sus transformadas Z tienen un polo en $z = a$. Por consiguiente, ambas regiones de convergencia serán $|z| > |a|$. Sin embargo, como se muestra en el Ejemplo 3.6, el polo en $z = a$ se cancela con un cero en $z = a$, y por lo tanto, la región de convergencia abarca todo el plano z, con la excepción de $z = 0$.

Ya hemos explotado la propiedad de linealidad en nuestra presentación anterior sobre el uso de la descomposición en fracciones simples para el cálculo de la transformada Z inversa. En ese procedimiento, $X(z)$ se descompone en una suma de términos más simples, y mediante la propiedad de linealidad, la transformada Z inversa será la suma de las transformadas Z inversas de cada uno de los términos.

3.4.2. Desplazamiento en el tiempo

La propiedad de desplazamiento en el tiempo indica que

$$x[n-n_0] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z), \qquad \text{RDC} = R_x \text{ (excepto por la posible adición o eliminación de } z=0 \text{ o } z=\infty).$$

donde n_0 es un número entero. Si n_0 es positivo, la secuencia original $x[n]$ se desplaza hacia la derecha, y si n_0 es negativo, $x[n]$ se desplaza hacia la izquierda. Como en el caso de la propiedad de linealidad, la región de convergencia puede cambiar, ya que el factor z^{-n_0} puede alterar el número de polos en $z=0$ o $z=\infty$.

Esta propiedad se deduce directamente de la expresión de la transformada Z de la Ecuación (3.2). Concretamente, si $y[n]=x[n-n_0]$, la correspondiente transformada Z es

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}.$$

Realizando el cambio de variables $m=n-n_0$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m}, \end{aligned}$$

o

$$Y(z) = z^{-n_0}X(z).$$

La propiedad de desplazamiento en el tiempo se utiliza muy frecuentemente, junto con otras propiedades y procedimientos, para obtener la transformada Z inversa. Ilustraremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 3.14 Secuencia exponencial desplazada

Consideremos la transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{4}}, \qquad |z| > \frac{1}{4}.$$

Observando la región de convergencia, podemos ver que la secuencia está limitada por la izquierda. Escribimos la transformada $X(z)$ de otra forma

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{4}. \tag{3.56}$$

La transformada Z es de la forma de la Ecuación (3.41) con $M=N=1$, y su desarrollo en la forma que indica la Ecuación (3.45) es

$$X(z) = -4 + \frac{4}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}. \tag{3.57}$$

Aplicando la Ecuación (3.57), $x[n]$ se puede expresar así:

$$x[n] = -4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \tag{3.58}$$

Se puede obtener de forma más directa una expresión para $x[n]$ si aplicamos la propiedad de desplazamiento en el tiempo. En primer lugar, $X(z)$ se puede escribir así:

$$X(z) = z^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right), \qquad |z| > \frac{1}{4}. \tag{3.59}$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, vemos que el factor z^{-1} de la Ecuación (3.59) se puede asociar a un desplazamiento a la derecha de la secuencia $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$; es decir,

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]. \tag{3.60}$$

Se puede verificar fácilmente que las Ecuaciones (3.58) y (3.60) son las mismas para todos los valores de n. Es decir, representan a la misma secuencia.

3.4.3. Multiplicación por una secuencia exponencial

La propiedad de multiplicación por una secuencia exponencial se expresa como

$$z_0^n x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z/z_0), \qquad \text{RDC} = |z_0|R_x.$$

donde la notación RDC $= |z_0|R_x$ significa que la región de convergencia es R_x multiplicada por un factor de escala de valor $|z_0|$. En otras palabras, si R_x es el conjunto de valores de z tal que $r_R < |z| < r_L$, entonces $|z_0|R_x$ es el conjunto de valores de z tal que $|z_0|r_R < |z| < |z_0|r_L$.

Esta propiedad se puede demostrar de forma muy sencilla, sustituyendo simplemente $z_0^n x[n]$ en la Ecuación (3.2). Como consecuencia de la propiedad de multiplicación por una exponencial, todas las posiciones de los polos y de los ceros quedan afectadas por un factor de escala de z_0, ya que si $X(z)$ tiene un polo (o un cero) en $z = z_1$, $X(z/z_0)$ tendrá un polo (o un cero) en $z = z_0 z_1$. Si z_0 es un número real positivo, el factor de escala se puede interpretar como una compresión o expansión del plano z, ya que las posiciones de los polos y los ceros cambian siguiendo líneas radiales del plano z. Si z_0 es un número complejo de módulo unidad, es decir, $z_0 = e^{j\omega_0}$, el escalado corresponde a una rotación de ángulo ω_0 en el plano z, ya que las localizaciones de los polos y los ceros cambian su posición siguiendo circunferencias centradas en el origen del plano z. Esto se puede interpretar también como un desplazamiento o traslación de la transformada de Fourier en tiempo discreto, asociada a la modulación en el dominio del tiempo con la secuencia exponencial $e^{j\omega_0 n}$. Es decir, si existe la transformada de Fourier, esta propiedad tiene la forma

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)}).$$

Ejemplo 3.15 Multiplicación por una exponencial

Partiendo de la pareja de transformadas

$$u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z| > 1, \tag{3.61}$$

podemos utilizar la propiedad de multiplicación por una exponencial para determinar la transformada Z de la secuencia

$$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n], \qquad r > 0. \tag{3.62}$$

Primero, expresamos $x[n]$ de esta forma:

$$x[n] = \frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^n u[n].$$

Utilizando la Ecuación (3.61) y la propiedad de multiplicación por una exponencial, vemos que

$$\frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z| > r,$$

$$\frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z| > r.$$

Utilizando la propiedad de linealidad, se deduce que

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z| > r \\ &= \frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \qquad |z| > r. \end{aligned} \tag{3.63}$$

3.4.4. Diferenciación de $X(z)$

La propiedad de diferenciación indica que

$$nx[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad \text{RDC} = R_x.$$

Esta propiedad se puede verificar diferenciando la expresión de la transformada Z de la Ecuación (3.2). Es decir, para

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -z\frac{dX(z)}{dz} &= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n)x[n]z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = \mathscr{Z}\{nx[n]\}. \end{aligned}$$

Ilustraremos el uso de la propiedad de diferenciación con dos ejemplos.

Ejemplo 3.16 Inversa de una transformada Z no racional

In this En este ejemplo utilizaremos la propiedad de diferenciación junto con la propiedad de desplazamiento en el tiempo para determinar la transformada Z inversa que consideramos en el Ejemplo 3.12. Si

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|,$$

diferenciaremos en primer lugar para obtener una expresión racional

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}.$$

Utilizando la propiedad de diferenciación

$$nx[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{3.64}$$

La transformada inversa de la Ecuación (3.64) se puede obtener mediante el uso combinado de la pareja de transformadas del Ejemplo 3.1, la propiedad de linealidad y la propiedad de desplazamiento en el tiempo. Concretamente, la secuencia $nx[n]$ se puede expresar

$$nx[n] = a(-a)^{n-1}u[n-1].$$

Y por tanto,

$$x[n] = (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u[n-1] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|.$$

El resultado del Ejemplo 3.16 será de utilidad en la presentación del cepstrum en el Capítulo 13.

Ejemplo 3.17 Polo de segundo orden

Como otro ejemplo del uso de la propiedad de diferenciación, determinemos la transformada Z de la secuencia

$$x[n] = na^n u[n] = n(a^n u[n]).$$

Utilizando la pareja de transformadas del Ejemplo 3.1 y la propiedad de diferenciación, se deduce que

$$\begin{aligned} X(z) &= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right), \qquad |z| > |a| \\ &= \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|. \end{aligned}$$

Y por tanto,

$$na^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|.$$

3.4.5. Conjugación de una secuencia compleja

La propiedad de conjugación se expresa como

$$x^*[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \qquad \text{RDC} = R_x.$$

Esta propiedad se deduce de manera directa de la definición de transformada Z. Los detalles se dejan como ejercicio (véase Problema 3.54).

3.4.6. Inversión temporal

La propiedad de inversión temporal indica que

$$x^*[-n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(1/z^*), \qquad \text{RDC} = \frac{1}{R_x}.$$

donde la notación RDC$=1/R_x$ significa que la región de convergencia está invertida: es decir, si R_x representa al conjunto de valores tales que z tales que $r_R < |z| < r_L$, la región de convergencia de $X^*(1/z^*)$ es el conjunto de valores tales que $1/r_L < |z| < 1/r_R$. Por tanto, si z_0 está en la región de convergencia de la transformada Z de $x[n]$, entonces $1/z_0^*$ estará en la región de convergencia de la transformada Z de $x^*[-n]$. Si la secuencia $x[n]$ es real o no se conjuga la secuencia compleja, el resultado es

$$x[-n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(1/z), \qquad \text{RDC} = \frac{1}{R_x}.$$

Como en el caso de la propiedad de conjugación la propiedad de reflexión temporal se deduce fácilmente a partir de la definición de transformada Z. Los detalles se dejan como ejercicio (véase Problema 3.54).

Nótese que si z_0 es un polo (o un cero) de $X(z)$, entonces $1/z_0$ será un polo (o un cero) de $X(1/z)$. El módulo de $1/z_0$ es simplemente el inverso de del módulo de z_0. Sin embargo, la fase de $1/z_0$ es la de z_0 cambiada de signo. Cuando los polos y ceros de $X(z)$ son todos reales o aparecen en pares complejos conjugados, cosa que debe ocurrir cuando $x[n]$ es real, esta agrupación en pares complejos conjugados debe mantenerse.

Ejemplo 3.18 Inversión temporal de una secuencia exponencial

Como ejemplo del uso de la propiedad de inversión temporal, consideremos la secuencia

$$x[n] = a^{-n}u[-n],$$

que es una versión invertida en el tiempo de la secuencia $a^n u[n]$. Utilizando la propiedad de inversión temporal, se obtiene que

$$X(z) = \frac{1}{1-az} = \frac{-a^{-1}z^{-1}}{1-a^{-1}z^{-1}}, \qquad |z| < |a^{-1}|.$$

Nótese que la transformada Z de $a^n u[n]$ tiene un polo en $z = a$, mientras que $X(z)$ tiene un polo en $1/a$.

3.4.7. Convolución de secuencias

De acuerdo con la propiedad de convolución

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \qquad \text{RDC contiene a } R_{x_1} \quad R_{x_2}.$$

Para obtener formalmente esta propiedad, consideremos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k],$$

de modo que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n}. \end{aligned}$$

Si intercambiamos el orden de la suma (lo que se puede hacer para valores de z en la región de convergencia),

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n}.$$

Cambiando el índice de la suma de n a $m = n-k$, obtenemos

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} \right\} z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, \underbrace{X_2(z)}_{|z|\in R_{x_2}}\, z^{-k} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k} \right) X_2(z) \end{aligned}$$

Por tanto, para valores de z que pertenezcan a la región de convergencia de $X_1(z)$ y $X_2(z)$, podemos escribir

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z),$$

en donde la región de convergencia incluye a la intersección de las regiones de convergencia de $X_1(z)$ y $X_2(z)$. Si un polo en la frontera de la región de convergencia de una de las transformadas Z se cancela con un cero de la otra transformada, la región de convergencia de $Y(z)$ puede ser mayor.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la transformada Z para calcular convoluciones.

Ejemplo 3.19 Convolución de secuencias de longitud finita

Supongamos que

$$x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

es una secuencia de longitud finita que se va a convolucionar con la secuencia $x_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. Las correspondientes transformadas Z son

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

y $X_2(z) = 1 - z^{-1}$. La transformada Z de la convolución $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ es

$$\begin{aligned} Y(z) &= X_1(z)X_2(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 - z^{-1}) \\ &= 1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}. \end{aligned}$$

Como ambas secuencias son de longitud finita, las dos regiones de convergencia son $|z| > 0$ y, por tanto esa es también la región de convergencia de $Y(z)$. Observando $Y(z)$, podemos concluir por simple inspección de los coeficientes del polinomio que

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3].$$

El punto importante de este ejemplo es que la convolución de secuencias de longitud finita es equivalente a la multiplicación de polinomios. Y a la inversa, los coeficientes del producto de dos polinomios se obtienen mediante convolución discreta de los coeficientes del polinomio.

La propiedad de convolución tiene un papel fundamental en el análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, y la desarrollaremos con más detalle en la Sección 3.5 y en el Capítulo 5. En la Sección 3.5 se presenta un ejemplo del uso de la transformada Z para calcular la convolución de dos secuencias de longitud infinita.

3.4.8. Resumen de algunas propiedades de la transformada Z

Hemos presentado y comentado diversos teoremas y propiedades de las transformadas Z, muchos de los cuales son de utilidad para manejar las transformadas Z en el análisis de sistemas en tiempo discreto. Estas propiedades, junto con algunas otras se resumen, para que sirvan de referencia, en la Tabla 3.2.

3.5. TRANSFORMADAS Z Y SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES

Las propiedades presentadas en la Sección 3.4 convierten a la transformada Z en una herramienta muy útil para al análisis de sistemas en tiempo discreto. Como en el Capítulo 5 y posteriores utilizaremos extensamente la transformada Z, merece la pena ilustrar ahora cómo se puede utilizar dicha transformada en la representación y análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

Recordamos de la Sección 2.3 que un sistema lineal e invariante se puede representar mediante la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de la entrada $x[n]$ con $h[n]$, siendo $h[n]$ la respuesta del sistema a la secuencia impulso unidad $\delta[n]$. Utilizando la propiedad de convolución de la Sección 3.4.7, se puede deducir que la transformada Z de $y[n]$ es

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{3.65}$$

siendo $H(z)$ y $X(z)$ las transformadas Z de $h[n]$ y $x[n]$ respectivamente. En este contexto, la transformada Z $H(z)$ se denomina *función de transferencia* del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h[n]$.

El ejemplo que sigue ilustra el cálculo de la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo utilizando la transformada Z.

TABLA 3.2 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Número de propiedad	Referencia de sección	Secuencia	Transformada	RDC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contiene R_{x_1} R_{x_2}
2	3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, excepto por la posible adición o eliminación del origen o del ∞
3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\lvert z_0\rvert R_x$
4	3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x
5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6		$Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contiene R_x
7		$Im\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contiene R_x
8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9	3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contiene R_{x_1} R_{x_2}

Ejemplo 3.20 Convolución de secuencias de longitud infinita

Sean $h[n]=a^n u[n]$ y $x[n]=Au[n]$. Para utilizar la transformada Z en el cálculo de la convolución $y[n]=x[n]*h[n]$, comenzaremos por calcular las correspondientes transformadas Z:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z|>|a|,$$

y

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} Az^{-n}=\frac{A}{1-z^{-1}}, \qquad |z|>1.$$

Por tanto, la transformada Z de la convolución $y[n]=x[n]*h[n]$ es

$$Y(z)=\frac{A}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}=\frac{Az^2}{(z-a)(z-1)}, \qquad |z|>1,$$

donde suponemos que $|a|<1$ de forma que la intersección de las regiones de convergencia es $|z|>1$.

Los polos y los ceros de $Y(z)$ se muestran en la Figura 3.12, donde se pude ver que la región de convergencia es la intersección. La secuencia $y[n]$ se puede obtener determinando la transformada Z inversa. La descomposición en fracciones simples de $Y(z)$ es

$$Y(z)=\frac{A}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{a}{1-az^{-1}}\right) \qquad |z|>1.$$

Y tomando la transformada Z inversa de cada término se llega a

$$y[n] = \frac{A}{1-a}(1-a^{n+1})u[n].$$

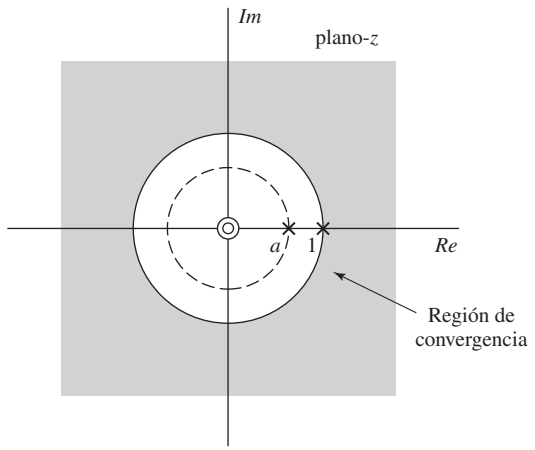


Figura 3.12 Diagrama polo–cero de la transformada Z de la convolución de las secuencias $u[n]$ y $a^n u[n]$ (suponiendo $|a| < 1$).

La transformada Z es particularmente útil en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo definidos por ecuaciones en diferencias. Recordemos que en la Sección 2.5 demostramos que las ecuaciones en diferencias de la forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k}{a_0}\right)y[n-k] + \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k], \tag{3.66}$$

representan sistemas lineales, invariantes con el tiempo y causales cuando la entrada es cero anteriormente al instante $n = 0$ y se imponen condiciones de reposo inicial con anterioridad al instante en el que la entrada se hace distinta de cero, es decir

$$y[-N], y[-N+1], \ldots, y[-1]$$

se suponen todos nulos. La ecuación en diferencias cuando se asume la condición de reposo inicial define un sistema lineal e invariante con el tiempo, pero también resulta de interés conocer la función de transferencia. Si aplicamos la propiedad de linealidad (Sección 3.4.1) y la propiedad de desplazamiento en el tiempo (Sección 3.4.2) a la Ecuación (3.66), obtenemos

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k}{a_0}\right)z^{-k}Y(z) + \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)z^{-k}X(z). \tag{3.67}$$

Despejando $Y(z)$ en función de $X(z)$ y los parámetros de la ecuación en diferentas se llega a

$$Y(z) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \right) X(z), \tag{3.68}$$

y comparando las Ecuaciones (3.65) y (3.68) se deduce que la función de transferencia de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo descritos por la Ecuación (3.66) es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{3.69}$$

Como el sistema definido por la ecuación en diferencias (3.66) es causal, la presentación realizada en la Sección 3.2 permite obtener la conclusión de que la región de convergencia de $H(z)$ de la Ecuación (3.69) debe ser de la forma $|z| > r_R$, y como la región de convergencia no puede tener polos, r_R debe ser igual al módulo de $H(z)$ más alejado del origen. Además, lo expuesto en la Sección 3.2 confirma que, si $r_R < 1$, es decir, todos los polos están en el interior de la circunferencia unidad, entonces el sistema es estable y su respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo $z = e^{j\omega}$ en la Ecuación (3.69).

Nótese que si la Ecuación (3.66) se expresa en la forma equivalente

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{3.70}$$

entonces la Ecuación (3.69), que expresa la función de transferencia (y la respuesta en frecuencia de sistemas estables) como un cociente de polinomios en la variable z^{-1}, se puede escribir directamente observando que el numerador es la transformada Z de los coeficientes y términos de retardo de la entrada, mientras que el denominador es la transformada Z de los coeficientes y términos de retardo de la salida. Análogamente dada una función de transferencia en forma de cociente de polinomios en z^{-1} como en la Ecuación (3.69), es inmediato escribir la ecuación en diferencias en la forma de (3.70), y a continuación expresarla en la forma de (3.66) para su implementación recursiva.

Ejemplo 3.21 Sistema de primer orden

Supongamos que un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal está descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \tag{3.71}$$

Por simple inspección, se deduce que la función de transferencia de este sistema es

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \tag{3.72}$$

con región de convergencia $|z| > |a|$. Observando la fila 5 de la Tabla 3.1, se deduce que la respuesta al impulso del sistema es

$$h[n] = a^n u[n]. \tag{3.73}$$

Finalmente, si $x[n]$ es una secuencia con transformada Z racional como $x[n] = Au[n]$, podemos obtener la salida del sistema de tres formas distintas: (1) Realizar la iteración que indica la ecuación en diferencias (3.71). En general, esta forma se puede utilizar con cualquier entrada y, normalmente, sería la forma de implementar el sistema, pero no lleva directamente a una expresión cerrada de la solución válida para todo n caso de que dicha expresión exista. (2) Podemos calcular explícitamente la convolución de $x[n]$ con $h[n]$ utilizando las técnicas que se ilustran en la Sección 2.3. (3) Como las transformadas Z de $x[n]$ y $h[n]$ son funciones racionales de z, podemos utilizar el método de descomposición en fracciones simples de la Sección 3.3.2 para obtener una expresión cerrada de la salida válida para todo n. Esto es, de hecho, lo que hemos hecho en el Ejemplo 3.20.

En el Capítulo 5 y siguientes haremos mucho más uso de la transformada Z. Por ejemplo, en la Sección 5.2.3 obtendremos expresiones generales de la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo, y demostraremos cómo se relaciona la respuesta en frecuencia del sistema con las posiciones de los polos y los ceros de $H(z)$.

3.6. LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL

La transformada Z, definida en la Ecuación (3.2), tal como se ha considerado hasta ahora en este capítulo, se denomina más explícitamente transformada Z bilateral. Por el contrario, la *transformada Z unilateral* se define como

$$\mathscr{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \tag{3.74}$$

La transformada Z-unilateral se diferencia de la bilateral en que el límite inferior de la suma siempre es cero, independientemente de los valores de $x[n]$ para $n < 0$. Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, las transformadas Z unilateral y bilateral son idénticas, mientras que si $x[n]$ no es cero para todo $n < 0$, serán diferentes. Un simple ejemplo ilustrará esta idea.

Ejemplo 3.22 Transformada unilateral de un impulso

Supongamos que $x_1[n] = \delta[n]$. Entonces, partir de la Ecuación (3.74), resulta claro que $\mathscr{X}_1(z) = 1$, idéntica a la transformada Z bilateral del impulso. Consideremos, sin embargo, $x_2[n] = \delta[n+1] = x_1[n+1]$. Esta vez, utilizando la Ecuación (3.74), obtenemos que $\mathscr{X}_2(z) = 0$, mientras que la transformada bilateral sería $X_2(z) = zX_1(z) = z$.

Como la transformada Z unilateral ignora en efecto cualquier parte izquierda de la señal, las propiedades de la región de convergencia de la transformada Z unilateral serán las mismas que las de la transformada Z bilateral de una secuencia limitada por la izquierda que se obtendría suponiendo que los valores de la secuencia de partida son cero para $n < 0$. Es decir, la región de convergencia de todas las transformadas Z unilaterales será de la forma $|z| > r_R$, y en el caso de transformadas Z unilaterales racionales, la frontera de la región de convergencia estará definida por el polo más lejano al origen del plano z.

En aplicaciones de tratamiento digital de señales, las ecuaciones en diferencias de la forma (3.66) se emplean generalmente con condiciones de reposo inicial. Sin embargo, en algunas situaciones, pueden aparecer condiciones distintas a las de reposo inicial. En estos casos, las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo de la transformada Z unilateral son herramientas particularmente útiles. La propiedad de linealidad es idéntica a la de la transformada Z bilateral (propiedad 1 de la Tabla 3.2). La propiedad de desplazamiento temporal es diferente en el caso unilateral ya que el límite inferior en la definición de esta transformada es siempre cero. Para ilustrar cómo se obtiene esta propiedad,

consideremos una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z unilateral es $\mathscr{X}(z)$ y sea $y[n] = x[n-1]$. Entonces, por definición

$$\mathscr{Y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n}.$$

Realizando el cambio de variable $m = n-1$, $\mathscr{Y}(z)$ se puede expresar como

$$\mathscr{Y}(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)} = x[-1] + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m},$$

de forma que

$$\mathscr{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\mathscr{X}(z). \tag{3.75}$$

Por tanto, para determinar la transformada Z unilateral de una secuencia retardada, hay que proporcionar los valores de dicha secuencia que fueron ignorados al calcular $\mathscr{X}(z)$. Un análisis similar permite demostrar que si $y[n] = x[n-k]$, siendo $k > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}(z) &= x[-k] + x[-k+1]z^{-1} + \ldots + x[-1]z^{-k+1} + z^{-k}\mathscr{X}(z)\\ &= \sum_{m=1}^{k} x[m-k-1]z^{-m+1} + z^{-k}\mathscr{X}(z).\end{aligned} \tag{3.76}$$

El uso de la transformada Z unilateral para obtener la salida de una ecuación en diferencias con condiciones distintas a las de reposo inicial se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.23 Efecto de condiciones iniciales distintas de cero

Consideremos un sistema descrito por la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \tag{3.77}$$

que es el mismo sistema de los Ejemplos 3.20 y 3.21. Supongamos que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y que la condición inicial en $n = -1$ se denomina $y[-1]$. Aplicando la transformada Z unilateral a la Ecuación (3.77) y utilizando la propiedad de linealidad junto con la propiedad de desplazamiento temporal de la Ecuación (3.75) tenemos

$$\mathscr{Y}(z) - ay[-1] - az^{-1}\mathscr{Y}(z) = \mathscr{X}(z).$$

Despejando $\mathscr{Y}(z)$ se obtiene

$$\mathscr{Y}(z) = \frac{ay[-1]}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}\mathscr{X}(z). \tag{3.78}$$

Observe que si $y[-1] = 0$ el primer término desaparece y el resultado es $\mathscr{Y}(z) = H(z)\mathscr{X}(z)$, siendo

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

la función de transferencia del sistema lineal e invariante con el tiempo correspondiente a la ecuación en diferencias (3.77) cuando se resuelve por iteración con condiciones de reposo inicial. Esto confirma que las condiciones de reposo inicial son necesarias para que la ecuación en diferencias represente a

un sistema lineal e invariante con el tiempo. Nótese además que si $x[n] = 0$ para todo n, la salida será igual a

$$y[n] = y[-1]a^{n+1} \qquad n \geq -1.$$

Esto demuestra que si $y[-1] \neq 0$, el sistema no se comporta linealmente, ya que la propiedad de cambio de escala de los sistemas lineales (Ecuación (2.23b)) obliga a que cuando la entrada es cero para todo n, la salida sea cero para todo n.

Para ser más concretos, supongamos que $x[n] = Au[n]$ como en el Ejemplo 3.20. Podemos determinar la ecuación de $y[n]$ para $n \geq -1$ si tenemos en cuenta que la transformada Z unilateral de $x[n] = Au[n]$ es

$$\mathscr{X}(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

de forma que la Ecuación (3.78) se convierte en

$$\mathscr{Y}(z) = \frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}} + \frac{A}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})}. \tag{3.79}$$

Aplicando la técnica de descomposición en fracciones simples a la Ecuación (3.79) resulta

$$\mathscr{Y}(z) = \frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}} + \frac{\dfrac{A}{1-a}}{1 - z^{-1}} + \frac{-\dfrac{aA}{1-a}}{1 - az^{-1}},$$

de donde se deduce que la solución completa es

$$y[n] = \begin{cases} y[-1] & n = -1 \\ \underbrace{y[-1]a^{n+1}}_{\text{RCI}} + \underbrace{\dfrac{A}{1-a}\left(1 - a^{n+1}\right)}_{\text{RCIC}} & n \geq 0 \end{cases} \tag{3.80}$$

La Ecuación (3.80) indica que la respuesta del sistema está formada por dos partes. La respuesta cero al impulso (RCI) es la respuesta cuando la entrada es cero (en este caso cuando $A = 0$). La respuesta a condiciones iniciales cero (RCIC) es la parte que es directamente proporcional a la entrada (requerido para la linealidad). Esta parte se conserva cuando $y[-1] = 0$. En el Problema 3.49, se demuestra que esta descomposición en componentes RCI y RCIC se conserva para cualquier ecuación en diferencias de la forma de la Ecuación (3.66).

3.7. RESUMEN

En este capítulo hemos definido la transformada Z de una secuencia y hemos demostrado que es una generalización de la transformada de Fourier. La presentación se ha centrado en las propiedades de la transformada Z y en las técnicas para obtener la transformada Z de una secuencia y su inversa. Concretamente, hemos demostrado que la definición de transformada Z mediante una serie de potencias puede converger en casos en los que la transformada de Fourier no converge. Exploramos con detalle la dependencia de la forma de la región de convergencia con las propiedades de la secuencia. Para utilizar adecuadamente la transformada Z es esencial comprender con detalle las propiedades de la región de convergencia. Esto es particularmente cierto al desarrollar técnicas para obtener la secuencia que corresponde a una transformada Z dada, es decir, al calcular transformadas Z inversas. Una buena parte de la presentación se centra en las transformadas Z que son funciones racionales en su región

de convergencia. Para estas funciones, definimos una técnica de transformación inversa basada en la descomposición en fracciones simples de $X(z)$. Hemos presentado también otras técnicas para obtener la transformada inversa, como el uso de desarrollos en series de potencia tabulados y la división de polinomios.

Una parte importante del capítulo se centra en la presentación de algunas propiedades de la transformada Z que la convierten en una herramienta de utilidad en el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto. Se presentan diversos ejemplos que ilustran el uso de esas propiedades para calcular transformadas Z directas e inversas.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

3.1. Determine la transformada Z, incluyendo su región de convergencia, de las siguientes secuencias::

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
(b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$
(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$
(d) $\delta[n]$
(e) $\delta[n-1]$
(f) $\delta[n+1]$
(g) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n]-u[n-10])$.

3.2. Determine la transformada Z de la secuencia

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le N-1, \\ N, & N \le n. \end{cases}$$

3.3. Determine la transformada Z de las siguientes secuencias. Incluya en las respuestas la región de convergencia en el plano Z, y dibuje el diagrama polo–cero. Exprese todas las sumas en forma cerrada; α puede ser complejo.

(a) $x_a[n] = \alpha^{|n|}, \qquad 0 < |\alpha| < 1.$

(b) $x_b[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$

(c) $x_c[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \le n \le N-1, \\ 2N-1-n, & N \le n \le 2(N-1), \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$

Sugerencia: Nótese que $x_b[n]$ es una secuencia rectangular y que $x_c[n]$ es una secuencia triangular. Exprese primero $x_c[n]$ en función de $x_b[n]$.

3.4. Considere la transformada $X(z)$ cuyo diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P3.4.

(a) Determine la región de convergencia de $X(z)$ si se sabe que existe su transformada de Fourier. Determine en este caso si la correspondiente secuencia $x[n]$ es limitada por la izquierda, limitada por la derecha o bilateral.
(b) ¿Cuántas secuencias bilaterales posibles tienen el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P3.4?
(c) ¿Es posible asociar el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P3.4 con una secuencia que sea estable y causal? Si es así, indique la región de convergencia apropiada.

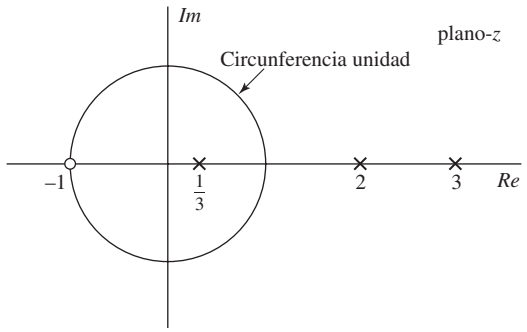


Figura P3.4

3.5. Determine la secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = (1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1}).$$

3.6. A continuación se presentan varias transformadas Z. Para cada una de ellas, determine la transformada inversa utilizando los métodos de descomposición en fracciones simples y de desarrollo en serie de potencias presentados en la Sección 3.3. Además, indique en cada caso si existe la transformada de Fourier.

(a) $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \dfrac{1}{2}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| < \dfrac{1}{2}$

(c) $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}, \qquad |z| > \dfrac{1}{2}$

(d) $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \qquad |z| > \dfrac{1}{2}$

(e) $X(z) = \dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}, \qquad |z| > |1/a|$

3.7. La entrada de un sistema causal e invariante con el tiempo es

$$x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

La transformada Z de la salida del sistema es

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}.$$

(a) Determine $H(z)$, la transformada Z de la respuesta al impulso del sistema. Asegúrese de especificar su región de convergencia.

(b) (b) ¿Cuál es la región de convergencia de $Y(z)$?

(c) Determine $y[n]$.

3.8. La función de transferencia de un sistema causal e invariante con el tiempo es

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}.$$

La entrada al sistema es

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + u[-n-1].$$

(a) Calcule la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$.
(b) Calcule la salida $y[n]$.
(c) ¿Es estable el sistema? ¿Es $h[n]$ absolutamente sumable?

3.9. Un sistema LTI causal tiene como respuesta al impulso $h[n]$. Su transformada Z es

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}.$$

(a) ¿Cuál es la región de convergencia de $H(z)$?
(b) ¿Es estable el sistema? Explique su respuesta.
(c) Obtenga la transformada Z, $X(z)$, de la entrada $x[n]$ que produce la salida

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1].$$

(d) (d) Obtenga la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

3.10. Sin calcular explícitamente $X(z)$, obtenga la región de convergencia de la transformada Z de las siguientes secuencias, y determine si su transformada de Fourier converge:

(a) $x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n-10]$

(b) $x[n] = \begin{cases} 1, & -10 \le n \le 10, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$

(c) $x[n] = 2^n u[-n]$

(d) $x[n] = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+4} - (e^{j\pi/3})^n\right] u[n-1]$

(e) $x[n] = u[n+10] - u[n+5]$

(f) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n] + (2+3j)^{n-2} u[-n-1]$.

3.11. A continuación se presentan cuatro transformadas Z. Determine cuáles *podrían* ser la transformada de una secuencia *causal*. No calcule la transformada inversa. Puede obtener la respuesta por simple inspección. Explique claramente el razonamiento seguido en cada caso.

(a) $\dfrac{(1-z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$

(b) $\dfrac{(z-1)^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

(c) $\dfrac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}$

(d) $\dfrac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$

3.12. Dibuje el diagrama polo-cero de cada una de las siguientes transformadas Z y sombree la región de convergencia:

(a) $X_1(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}}, \qquad \text{RDC: } |z| < 2$

(b) $X_2(z) = \dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}, \qquad x_2[n]$ causal

(c) $X_3(z) = \dfrac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{13}{6}z^{-1}+z^{-2}}, \qquad x_3[n]$ absolutamente sumable.

3.13. Una secuencia causal $g[n]$ tiene como transformada Z

$$G(z) = \operatorname{sen}(z^{-1})(1+3z^{-2}+2z^{-4}).$$

Calcule $g[11]$.

3.14. Si $H(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$ y $h[n] = A_1\alpha_1^n u[n] + A_2\alpha_2^n u[n]$, determine los valores de A_1, A_2, α_1 y α_2.

3.15. Si $H(z) = \dfrac{1-\frac{1}{1024}z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ para $|z| > 0$. ¿Es causal el correspondiente sistema lineal e invariante con el tiempo? Justifique la respuesta.

3.16. Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n-1],$$

La salida correspondiente es

$$y[n] = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n].$$

(a) Obtenga la función de transferencia $H(z)$. Dibuje sus polos y ceros e indique la región de convergencia.
(b) Obtenga la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
(c) Escriba una ecuación en diferencias que sea verificada por las señales de entrada y de salida.
(d) ¿Es el sistema estable? ¿Es causal?

3.17. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ satisfacen la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1].$$

Determine todos los posibles valores de la respuesta al impulso del sistema $h[n]$ en $n = 0$.

3.18. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene como función de transferencia

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}.$$

(a) Obtenga la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$.
(b) Obtenga la salida del sistema, $y[n]$, cuando la entrada es

$$x[n] = 2^n.$$

3.19. Para cada una de las siguientes parejas de transformadas Z de señales de entrada, $X(z)$ y funciones de transferencia, $H(z)$, determine la región de convergencia de la transformada Z de la salida, $Y(z)$:

(a)

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{4}$$

(b)

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \qquad |z| < 2$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

(c)

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1+3z^{-1}\right)}, \qquad \frac{1}{5} < |z| < 3$$

$$H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

3.20. 3.20. Para cada una de las siguientes parejas de transformadas Z de entrada y salida, $X(z)$ e $Y(z)$, determine la región de convergencia de la función de transferencia $H(z)$:

(a)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{2}{3}$$

(b)

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \qquad \frac{1}{6} < |z| < \frac{1}{3}$$

Problemas básicos

3.21. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{4+0{,}25z^{-1}-0{,}5z^{-2}}{(1-0{,}25z^{-1})(1+0{,}5z^{-1})}$$

(a) ¿Cuál es la región de convergencia de $H(z)$?
(b) Determine si el sistema es estable o no.

(c) Determine la ecuación en diferencias que verifican la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$.
(d) Utilice descomposición en fracciones simples para obtener la respuesta al impulso $h[n]$.
(e) Calcule $Y(z)$, la transformada Z de la salida, cuando la entrada es $x[n] = u[-n-1]$. Asegúrese de especificar la región de convergencia de $Y(z)$.
(f) Calcule la secuencia de salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n] = u[-n-1]$.

3.22. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1-4z^{-2}}{1+0{,}5z^{-1}}.$$

La entrada al sistema es

$$x[n] = u[n] + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \qquad -\infty < n < \infty,$$

Determine la salida $y[n]$ para valores de n grandes y positivos. Es decir, calcule una expresión para $y[n]$ que sea asintóticamente correcta para n grande. (*Por supuesto una forma posible de resolverlo es calcular una expresión de $y[n]$ válida para todo n, pero hay una forma más fácil.*)

3.23. Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

y cuya entrada es

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq (N-1), \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(a) Determine la salida $y[n]$ calculando explícitamente la convolución discreta de las señales $x[n]$ y $h[n]$.
(b) Determine la salida $y[n]$ calculando la transformada inversa del producto de las transformadas Z de las señales $x[n]$ y $h[n]$.

3.24. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo que es estable y para el que $H(z)$, la transformada Z de la respuesta al impulso, es by

$$H(z) = \frac{3}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Suponga que $x[n]$, la entrada del sistema, es la secuencia escalón unidad.
(a) Determine la salida $y[n]$ calculando la convolución discreta de las señales $x[n]$ y $h[n]$.
(b) Determine la salida $y[n]$ calculando la transformada Z inversa de $Y(z)$.

3.25. Dibuje las secuencias siguientes y determine sus transformadas Z, incluyendo su región de convergencia:

(a) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$

(b) $\displaystyle\frac{1}{2}\left[e^{j\pi n} + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right] u[n]$

3.26. Considere la secuencia $x[n]$ limitada por la izquierda cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}.$$

En la Sección 3.3 hemos considerado la determinación de $x[n]$ mediante la técnica de descomposición en fracciones simples, considerando $X(z)$ como un cociente de polinomios en z^{-1}. Realice la descomposición en fracciones simples de $X(z)$, considerada como un cociente de polinomios en z, y determine $x[n]$ a partir de esta descomposición.

3.27. Determine la transformada Z unilateral, incluyendo su región de convergencia, de las siguientes secuencias:

(a) $\delta[n]$
(b) $\delta[n-1]$
(c) $\delta[n+1]$
(d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
(e) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$
(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$
(g) $\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\}u[n]$
(h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

3.28. Si $\mathscr{X}(z)$ indica la transformada Z unilateral de $x[n]$, determine, en función de $\mathscr{X}(z)$, la transformada Z unilateral de las siguientes secuencias:

(a) $x[n-2]$
(b) $x[n+1]$
(c) $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

3.29. Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias, junto con sus entradas y condiciones iniciales asociadas, determine la respuesta $y[n]$ para $n \geq 0$ utilizando la transformada Z unilateral.

(a)
$$\begin{aligned} y[n]+3y[n-1] &= x[n] \\ x[n] &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \\ y[-1] &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} y[n]-\tfrac{1}{2}y[n-1] &= x[n]-\tfrac{1}{2}x[n-1] \\ x[n] &= u[n] \\ y[-1] &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} y[n]-\tfrac{1}{2}y[n-1] &= x[n]-\tfrac{1}{2}x[n-1] \\ x[n] &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \\ y[-1] &= 1 \end{aligned}$$

Problemas avanzados

3.30. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene como función de transferencia

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0{,}25z^{-2}} = \frac{1-z^{-1}}{(1-0{,}5z^{-1})(1+0{,}5z^{-1})}.$$

(a) Determine la salida del sistema cuando la entrada es $x[n] = u[n]$.
(b) Determine la entrada $x[n]$ de forma que la correspondiente salida del sistema anterior sea $y[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.
(c) Determine la salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n] = \cos(0{,}5\pi n)$ para $-\infty < n < \infty$. Exprese su respuesta en la forma que le parezca más adecuada.

3.31. Determine la transformada Z inversa en los siguientes casos. En los apartados (a)–(c), utilice los métodos especificados. En el apartado (d), utilice el método que prefiera.

(a) División de polinomios:

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad x[n] \text{ una secuencia limitada por la izquierda}$$

(b) Descomposición en fracciones simples:

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, \qquad x[n] \text{ estable}$$

(c) Desarrollo en serie de potencias:

$$X(z) = \ln(1-4z), \qquad |z| < \frac{1}{4}$$

(d) $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-3}}, \qquad |z| > (3)^{-1/3}$

3.32. Utilizando cualquier método, determine la transformada Z inversa en los siguientes casos:

(a) $X(z) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}, \qquad (x[n] \text{ es una secuencia estable})$

(b) $X(z) = e^{z^{-1}}$

(c) $X(z) = \dfrac{z^3 - 2z}{z-2}, \qquad (x[n] \text{ es una secuencia limitada por la derecha})$

3.33. Determine la transformada Z inversa en cada uno de los siguientes casos. Las propiedades presentadas en la Sección 3.4 pueden resultar de utilidad.

(a) $X(z) = \dfrac{3z^{-3}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}, \qquad x[n]$ limitada por la derecha

(b) $X(z) = \operatorname{sen}(z), \qquad$ la RDC incluye a $|z| = 1$

(c) $X(z) = \dfrac{z^7 - 2}{1 - z^{-7}}, \qquad |z| > 1$

3.34. Determine una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z sea $X(z) = e^z + e^{1/z}$, $z \neq 0$.

3.35. Determine la transformada Z inversa de

$$X(z) = \log(1-2z), \qquad |z| < \frac{1}{2},$$

mediante

(a) Uso del desarrollo en serie de potencias

$$\log(1-x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}, \qquad |x| < 1;$$

(b) Diferenciación previa de $X(z)$ y utilización de la derivada para obtener $x[n]$.

3.36. Para cada una de las secuencias siguientes, determine la transformada Z y la región de convergencia, y dibuje el diagrama polo–cero:

(a) $x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1], \qquad |a| < |b| < |c|$

(b) $x[n] = n^2 a^n u[n]$

(c) $x[n] = e^{n^4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)\right] u[n] - e^{n^4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)\right] u[n-1]$

3.37. El diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P3.37 corresponde a la transformada Z, $X(z)$ de una secuencia causal $x[n]$. Dibuje el diagrama polo–cero de $Y(z)$, siendo $y[n] = x[-n+3]$. Especifique también la región de convergencia de $Y(z)$.

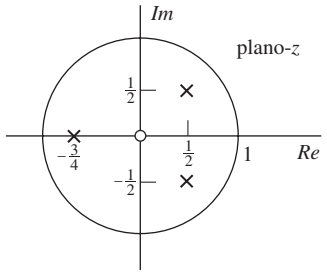


Figura P3.37

3.38. Sea $x[n]$ una secuencia cuyo diagrama polo–cero se muestra en la Figura P3.38. Dibuje el diagrama polo–cero de:

(a) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n]$

(b) $w[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) x[n]$

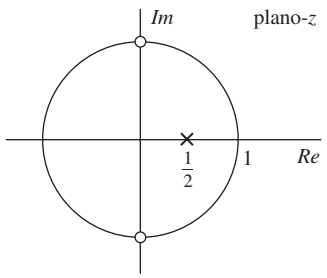


Figura P3.38

3.39. Determine la respuesta al escalón unidad de un sistema causal para el que la transformada Z de la respuesta al impulso es

$$H(z) = \frac{1 - z^3}{1 - z^4}.$$

3.40. Si la entrada $x[n]$ de un sistema lineal e invariante con el tiempo es $x[n] = u[n]$, la salida es

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1].$$

(a) Calcule $H(z)$, la transformada Z de la respuesta al impulso del sistema, y dibuje su diagrama polo–cero.
(b) Obtenga la respuesta al impulso $h[n]$.
(c) ¿Es el sistema estable?
(d) ¿Es el sistema causal?

3.41. Considere una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}$$

y tal que la región de convergencia incluye a la circunferencia unidad. Determine $x[0]$ utilizando el teorema del valor inicial (véase el Problema 3.57).

3.42. En la Figura P3.42, $H(z)$ es la función de transferencia de un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal.

(a) Utilizando la transformada Z de las señales que se muestran en la figura, obtenga una expresión de $W(z)$ que tenga la forma

$$W(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z),$$

donde tanto $H_1(z)$ como $H_2(z)$ se expresan en función de $H(z)$.

(b) Para el caso especial de $H(z) = z^{-1}/(1-z^{-1})$, determine $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

(c) ¿Es estable el sistema $H(z)$? ¿Son estables los sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$?

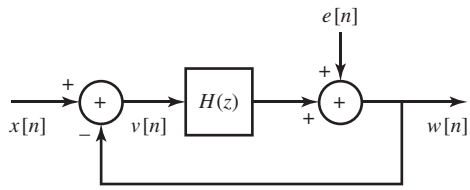


Figura P3.42

3.43. En la Figura P3.43, $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema lineal e invariante con el tiempo del interior de la caja. La entrada al sistema $h[n]$ es $v[n]$, y la salida es $w[n]$. La transformada Z de $h[n]$, $H(z)$, existe en la siguiente región de convergencia:

$$0 < r_{\text{mín}} < |z| < r_{\text{máx}} < \infty.$$

(a) ¿Puede ser estable en sentido BIBO el sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso es $h[n]$? Si es así, determine restricciones de tipo desigualdad sobre $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ de forma que el sistema sea estable. Si no es así, explique brevemente por qué.

(b) ¿Es el sistema completo (encerrado en la caja, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$) lineal e invariante con el tiempo? Si es así, obtenga su respuesta al impulso $g[n]$. Si no es así, explique brevemente por qué.

(c) ¿Puede ser estable en sentido BIBO el sistema completo? Si es así, determine restricciones de tipo desigualdad sobre α, $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ de forma que el sistema sea estable. Si no es así, explique brevemente por qué.

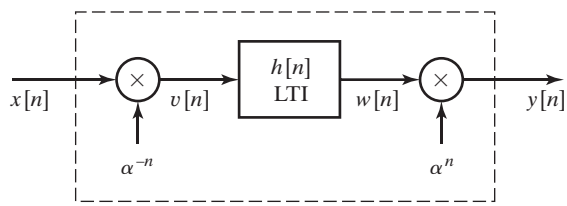


Figura P3.43

3.44. 3.44. Un sistema lineal, invariante con el tiempo, causal y estable $\mathscr{S}$ tiene como entrada $x[n]$ y como salida $y[n]$ relacionadas por la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes

$$y[n] + \sum_{k=1}^{10} \alpha_k y[n-k] = x[n] + \beta x[n-1].$$

Sea $h[n]$ la respuesta al impulso del sistema $\mathscr{S}$.

(a) Demuestre que $h[0]$ debe ser distinta de cero.

(b) Demuestre que α_1 se puede determinar conociendo β, $h[0]$ y $h[1]$.

(c) Si $h[n] = (0{,}9)^n \cos(\pi n/4)$ para $0 \le n \le 10$, dibuje el diagrama polo-cero de la función de transferencia de $\mathscr{S}$, e indique la región de convergencia.

3.45. Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1],$$

la salida es

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n].$$

(a) Calcule la función de transferencia del sistema, $H(z)$. Dibuje sus polos y ceros e indique su región de convergencia.
(b) Obtenga la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.
(c) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza el sistema.
(d) ¿Es el sistema estable? ¿Es causal?

3.46. Se conoce la siguiente información de un sistema lineal e invariante con el tiempo:

(i) El sistema es causal.
(ii) Cuando la entrada es

$$x[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1],$$

la transformada Z de la salida es

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

(a) Calcule la transformada Z de $x[n]$.
(b) ¿Cuáles son las posibilidades para la región de convergencia de $Y(z)$?
(c) ¿Cuáles son las posibles ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes que pueden describir a este sistema?
(d) ¿Cuáles son las posibles respuestas al impulso del sistema?

3.47. Sea $x[n]$ una señal en tiempo discreto con $x[n] = 0$ para $n \leq 0$ y cuya transformada Z es $X(z)$. Además, dada la señal $x[n]$, se define la señal $y[n]$

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{n}x[n], & n > 0, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(a) Calcule $Y(z)$ en función de $X(z)$.
(b) Utilizando el resultado del apartado (a), calcule la transformada Z de

$$w[n] = \frac{1}{n + \delta[n]} u[n-1].$$

3.48. La señal $y[n]$ es la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$ cuando la entrada es $x[n]$. En todo el problema, suponga que $y[n]$ es estable y que su transformada Z, $Y(z)$ tiene el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P3.48-1. La señal $x[n]$ es estable y tiene el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P3.48-2.

(a) ¿Cuál es la región de convergencia de $Y(z)$?
(b) ¿Es $y[n]$ limitada por la derecha, limitada por la izquierda o bilateral?
(c) ¿Cuál es la región de convergencia de $X(z)$?
(d) ¿Es $x[n]$ una secuencia causal? Es decir, ¿es $x[n] = 0$ para $n < 0$?

(e) ¿Qué es $x[0]$?

(f) Dibuje el diagrama polo–cero de $H(z)$ y especifique su región de convergencia.

(g) ¿Es $h[n]$ anticausal? Es decir, ¿es $h[n] = 0$ para $n > 0$?

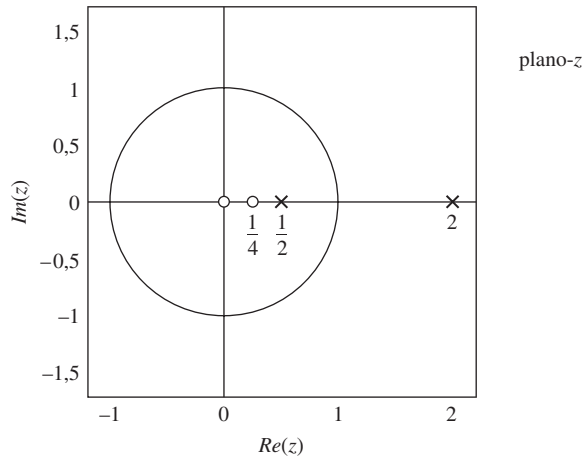


Figura P3.48-1

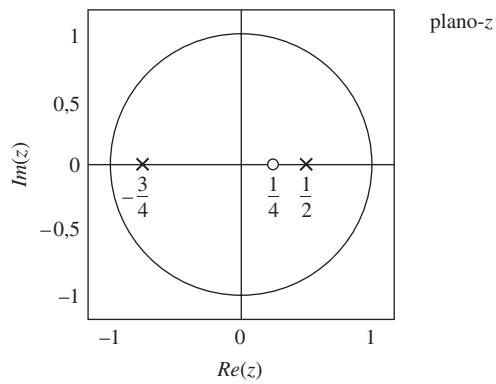


Figura P3.48-2

3.49. Considere la ecuación en diferencias (3.66)

(a) Demuestre que con condiciones iniciales distintas de cero la transformada Z unilateral de la salida de la ecuación en diferencias es

$$\mathscr{Y}(z) = -\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\sum_{m=1}^{k} y[m-k-1] z^{-m+1} \right)}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} + \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \mathscr{X}(z).$$

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para demostrar que la salida tiene la forma

$$y[n] = y_{\mathrm{RCI}}[n] + y_{\mathrm{RCIC}}[n]$$

siendo $y_{\mathrm{RCI}}[n]$ la salida cuando la entrada es cero para todo n e $y_{\mathrm{RCIC}}[n]$ la salida cuando las condiciones iniciales son todas cero.

(c) Demuestre que cuando las condiciones iniciales son todas cero, el resultado se reduce al que se obtendría con la transformada Z bilateral.

Problemas de ampliación

3.50. Sea $x[n]$ una secuencia causal, es decir, $x[n] = 0$, para $n < 0$. Suponga además que $x[0] \neq 0$ y que la transformada Z es una función racional.

(a) Demuestre que no hay polos ni ceros de $X(z)$ en $z = \infty$. Es decir, que $\lim_{z\to\infty} X(z)$ es distinto de cero y finito.

(b) Demuestre que el número de polos en el plano z finito es igual al número de ceros en el plano z finito (el plano z finito excluye a $z = \infty$.)

3.51. 3.51. Considere una secuencia cuya transformada Z es $X(z) = P(z)/Q(z)$, siendo $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios en z. Si la secuencia es absolutamente sumable y si todas las raíces de $Q(z)$ están dentro de la circunferencia unidad, ¿es necesariamente causal la secuencia? Si la respuesta es afirmativa, explique claramente por qué. Si la respuesta es negativa, proporcione un contraejemplo.

3.52. Sea $x[n]$ una secuencia causal estable cuya transformada Z es $X(z)$. El *cepstrum complejo* $\hat{x}[n]$ se define como la transformada inversa del logaritmo de $X(z)$. Es decir,

$$\hat{X}(z) = \log X(z) \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \hat{x}[n],$$

donde la región de convergencia de $\hat{X}(z)$ incluye a la circunferencia unidad (estrictamente hablando, tomar el logaritmo de un número complejo requiere proceder con cuidado. Además, el logaritmo de una transformada Z válida puede no ser una transformada Z válida. Supondremos por ahora que esta operación es válida).

Determine el cepstrum complejo de la secuencia

$$x[n] = \delta[n] + a\delta[n-N], \qquad \text{siendo } |a| < 1.$$

3.53. Suponga que $x[n]$ es una secuencia real y par, es decir, $x[n] = x[-n]$. Suponga también que z_0 es un cero de $X(z)$; es decir, $X(z_0) = 0$.

(a) Demuestre que $1/z_0$ es también un cero de $X(z)$.

(b) ¿Están determinados los otros ceros de $X(z)$ por la información suministrada?

3.54. 3.54. Utilizando la definición de transformada Z dada en la Ecuación (3.2), demuestre que si $X(z)$ es la transformada Z de $x[n] = x_R[n] + jx_I[n]$, entonces

(a) $x^*[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*)$

(b) $x[-n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(1/z)$

(c) $x_R[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$

(d) $x_I[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$.

3.55. 3.55. Considere una secuencia *real* $x[n]$ con todos los polos y ceros de su transformada Z en el interior de la circunferencia unidad. Determine, en función de $x[n]$, una secuencia *real* $x_1[n]$ distinta de $x[n]$, que cumpla que $x_1[0] = x[0]$, $|x_1[n]| = |x[n]|$, y la transformada Z de $x_1[n]$ tenga todos sus polos y ceros en el interior de la circunferencia unidad.

3.56. Una secuencia real de duración finita que no tenga ceros en parejas inversas conjugadas ni ceros en la circunferencia unidad está determinada de forma única, salvo un factor de escala, por la fase de su transformada de Fourier (Hayes et al., 1980).

Un ejemplo de ceros en parejas inversas conjugadas es $z = a$ y $(a^*)^{-1}$. Incluso aunque pueden generarse secuencias que no satisfagan el conjunto de condiciones precedente, casi cualquier secuencia de interés práctico las satisface, y por tanto está determinada de forma única salvo un factor de escala positivo por la fase de su transformada de Fourier.

Considere una secuencia $x[n]$ real que es cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$, y cuya transformada Z no tiene ceros en parejas inversas conjugadas ni ceros en la circunferencia unidad. Se desea desarrollar un

algoritmo que reconstruya $cx[n]$ a partir de $\angle X(e^{j\omega})$, la fase de la transformada de Fourier de $x[n]$, siendo c un factor de escala positivo.

(a) Especifique un sistema de $(N-1)$ ecuaciones lineales, cuya solución permita recuperar $x[n]$ salvo un factor de escala positivo o negativo a partir de $\tan\{\angle X(e^{j\omega})\}$. No es necesario demostrar que el sistema de $(N-1)$ ecuaciones tiene solución única. Demuestre además que si se conoce $\angle X(e^{j\omega})$ en vez de $\tan\{\angle X(e^{j\omega})\}$, se puede determinar también el signo del factor de escala.

(b) Suponga

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 3, & n = 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

Utilizando el procedimiento desarrollado en el apartado (a), demuestre que $cx[n]$ se puede determinar a partir de $\angle X(e^{j\omega})$, siendo c un factor de escala positivo.

3.57. Dada una secuencia $x[n]$ que es cero para $n < 0$, utilice la Ecuación (3.2) para demostrar que

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0].$$

Este resultado se denomina *teorema del valor inicial*. ¿Cómo se expresa el correspondiente teorema si la secuencia es cero para $n > 0$?

3.58. 3.58. La función de autocorrelación no periódica de una secuencia real y estable $x[n]$ se define como

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k].$$

(a) Demuestre que la transformada Z de $c_{xx}[n]$ es

$$C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}).$$

Determine la región de convergencia de $C_{xx}(z)$.

(b) Suponga que $x[n] = a^n u[n]$. Dibuje el diagrama polo–cero de $C_{xx}(z)$, incluyendo la región de convergencia. Calcule $c_{xx}[n]$ mediante la transformada Z inversa de $C_{xx}(z)$.

(c) Especifique otra secuencia, $x_1[n]$, que no sea igual a la secuencia $x[n]$ del apartado (b), pero que tenga la misma función de autocorrelación, $c_{xx}[n]$.

(d) Especifique una tercera secuencia, $x_2[n]$, que no sea igual a $x[n]$ ni a $x_1[n]$, pero que tenga la misma función de autocorrelación que $x[n]$.

3.59. Determine si la función $X(z) = z^*$ puede corresponderse con la transformada Z de una secuencia. Explique claramente su razonamiento.

3.60. Sea $X(z)$ puede ser o no la transformada Z de una secuencia. Explique claramente el razonamiento seguido.

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

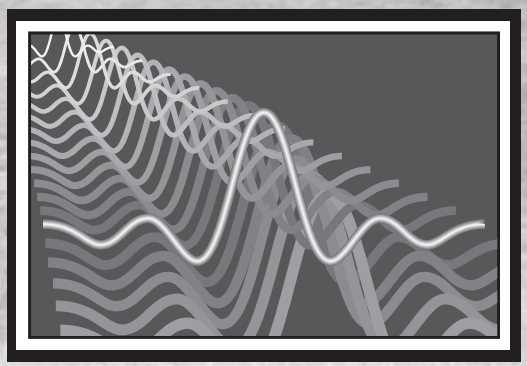
Demuestre que si $X(z)$ tiene un polo de primer orden en $z = z_0$, entonces el residuo de $X(z)$ en $z = z_0$ es igual a

$$\frac{B(z_0)}{A'(z_0)},$$

siendo $A'(z_0)$ la derivada de $A(z)$ evaluada en $z = z_0$.

4

Muestreo de señales en tiempo continuo



4.0. INTRODUCCIÓN

Las señales en tiempo discreto pueden aparecer de muchas formas, pero la más común es como consecuencia del muestreo de señales en tiempo continuo. Aunque el muestreo resultará sin duda familiar a muchos lectores, revisaremos muchos de sus aspectos básicos como el fenómeno del solapamiento y el hecho de que se puede realizar el procesado de las señales en tiempo continuo mediante un proceso de muestreo, un tratamiento de las señales muestreadas en tiempo discreto y una reconstrucción posterior de la señal resultado en tiempo continuo. Tras un estudio riguroso de esos temas, presentaremos el tratamiento de señales multitasa, la conversión A/D y el uso de sobremuestreo en la conversión A/D.

4.1. MUESTREO PERIÓDICO

Las representaciones discretas de las señales pueden tomar muchas formas, incluyendo desarrollos de diversos tipos con respecto a una base, modelos paramétricos para modelado de señales (Capítulo 11) y muestreo no uniforme (véase por ejemplo Yen (1956), Yao y Thomas (1967) y Eldar y Oppenheim (2000)). Estas representaciones se basan frecuentemente en un conocimiento previo de las propiedades de la señal que pueden ser explotadas para obtener representaciones más eficientes. Sin embargo, incluso esas representaciones alternativas parten en general de una representación en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo, obtenida mediante muestreo periódico. Es decir, a partir de una señal continua $x_c(t)$ se obtiene una secuencia de muestras $x[n]$ mediante la relación

$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < \infty. \tag{4.1}$$

En la Ecuación (4.1), T es el *periodo de muestreo* y su inverso, $f_s = 1/T$, se denomina *frecuencia de muestreo* en unidades de muestras por segundo. Expresaremos también la frecuencia de muestreo como $\Omega_s = 2\pi/T$ cuando deseemos utilizar las unidades de radianes por segundo. Como estas representaciones de muestreo se basan sólo en el supuesto de que la transformada de Fourier de la señal es de banda limitada, son aplicables a un gran conjunto de señales que surgen en muchas aplicaciones prácticas.

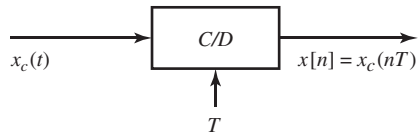


Figura 4.1 Diagrama de bloques de un conversor ideal de tiempo continuo a tiempo discreto (C/D).

Un sistema que realiza la operación definida en la Ecuación (4.1) se denomina *conversor ideal de tiempo continuo a tiempo discreto (C/D)*. Su diagrama de bloques se muestra en la Figura 4.1. Como ejemplo de la relación existente entre $x_c(t)$ y $x[n]$, en la Figura 2.2 presentamos una señal de voz en tiempo continuo y la correspondiente secuencia de muestras.

En la práctica, la operación de muestreo se realiza mediante un conversor analógico–digital (A/D). Este tipo de sistemas se pueden ver como aproximaciones al conversor C/D ideal. Entre las consideraciones importantes a tener en cuenta en la implementación o selección de un conversor A/D están la cuantificación de las muestras de salida, la linealidad de los pasos de cuantificación, la necesidad de circuitos de muestreo y retención, y las limitaciones de la velocidad de muestreo. Los efectos de la cuantificación se estudian en las Secciones 4.8.2 y 4.8.3. Otros aspectos prácticos de la conversión A/D están relacionados con los circuitos electrónicos y se salen de los objetivos de este texto.

La operación de muestreo es, en general, no invertible. Es decir, dada la salida $x[n]$ no suele ser posible reconstruir $x_c(t)$, la entrada al sistema de muestreo, ya que existen muchas señales en tiempo continuo que pueden producir la misma secuencia de muestras de salida. Esta ambigüedad inherente al proceso de muestreo es un aspecto fundamental en el tratamiento de señales. Afortunadamente, es posible eliminar esta ambigüedad restringiendo el contenido en frecuencia de las señales de entrada que se van a aplicar al sistema de muestreo.

Es conveniente representar matemáticamente el proceso de muestreo dividiéndolo en las dos etapas que se indican en la Figura 4.2(a). Las etapas consisten en un modulador con un tren de impulsos seguido por una conversión del tren de impulsos en una secuencia.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{4.2}$$

donde $\delta(t)$ es la función impulso unidad o delta de Dirac. El producto de $s(t)$ y $x_c(t)$ es por tanto

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Utilizando la propiedad de la función impulso en tiempo continuo $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$, denominada a veces "propiedad de selección" de la función impulso (véase, por ejemplo, Oppenheim y Willsky, 1997), $x_s(t)$ se puede expresar como

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT), \tag{4.4}$$

Es decir, el tamaño (área) del impulso en el instante de muestreo nT es igual al valor de la señal en tiempo continuo en ese instante. En este sentido, la modulación del tren de impulsos que representa la Ecuación (4.3) es una representación matemática del muestreo.

La Figura 4.2(b) muestra una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ y el resultado de muestrearla con un tren de impulsos para dos frecuencias de muestreo diferentes. Nótese que los impulsos $x_c(nT)\delta(t - nT)$

se representan mediante flechas de longitud proporcional al área del impulso. La Figura 4.2(c) muestra las correspondientes secuencias de salida. La diferencia fundamental entre $x_s(t)$ y $x[n]$ es que $x_s(t)$ es una señal en tiempo continuo (concretamente un tren de impulsos) que es cero excepto en múltiplos enteros de T. Por el contrario, la secuencia $x[n]$ está indexada con la variable entera n, lo que introduce una normalización en el tiempo. Es decir, la secuencia de números $x[n]$ no contiene información explícita sobre la frecuencia de muestreo. Además, las muestras de $x_c(t)$ se representan en $x[n]$ mediante números finitos, mientras que en $x_s(t)$ son las áreas de los impulsos.

Es importante resaltar que la Figura 4.2(a) es estrictamente una representación matemática adecuada para explicar el muestreo en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. No es una representación de los circuitos ni de sistemas físicos diseñados para realizar la operación de muestreo. La existencia de hardware específico que realice de forma aproximada las operaciones del diagrama de bloques de la Figura 4.2(a) es un aspecto secundario en este momento. Hemos presentado esta representación de la operación de muestreo porque nos permitirá una deducción sencilla del resultado clave y además, porque permite presentar aspectos importantes que son más difíciles de obtener si se parte de una presentación más formal basada en el manejo de las fórmulas de la transformada de Fourier.

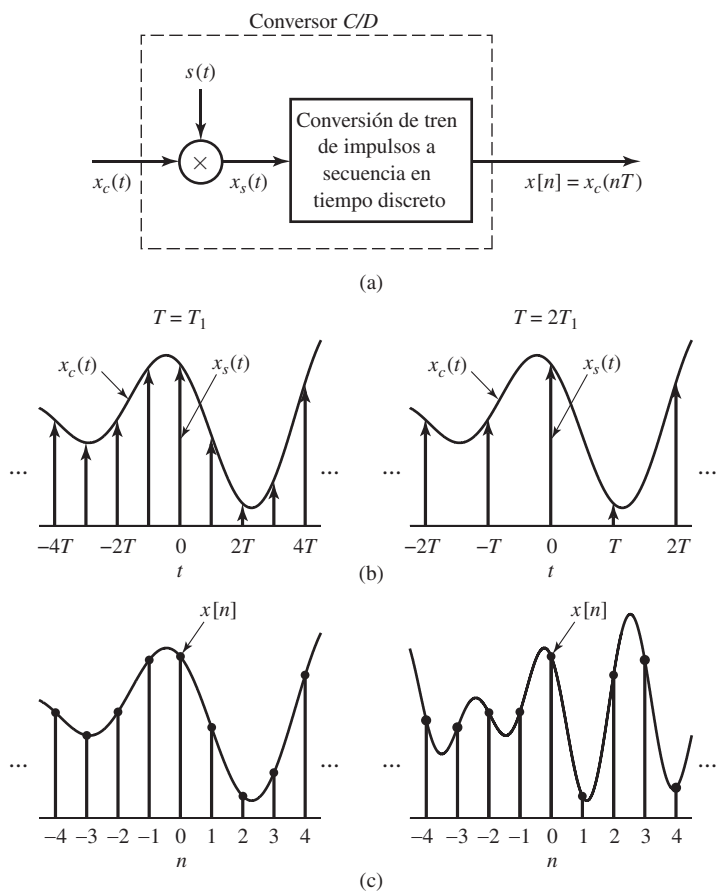


Figura 4.2 Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido de la conversión a una secuencia en tiempo discreto. (a) Sistema completo. (b) $x_s(t)$ para dos frecuencias de muestreo. (c) La secuencia de salida para las dos frecuencias de muestreo.

4.2. REPRESENTACIÓN DEL MUESTREO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Para obtener la relación entre la entrada y la salida de un conversor C/D ideal en el dominio de la frecuencia, consideremos la transformada de Fourier de $x_s(t)$. En la Ecuación (4.3), vemos que $x_s(t)$ es el producto de $x_c(t)$ y $s(t)$. Por tanto, la transformada de Fourier de $x_s(t)$ será la convolución de las transformadas de Fourier $X_c(j\Omega)$ y $S(j\Omega)$ multiplicada por el factor $\frac{1}{2\pi}$. La transformada de Fourier de un tren de impulsos periódico es el tren de impulsos periódico

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \tag{4.5}$$

siendo $\Omega_s = 2\pi/T$ la frecuencia de muestreo en radianes (véase Oppenheimy Willsky, 1997, o McClellan, Schafer y Yoder, 2003). Como

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega),$$

donde $*$ indica la operación de convolución de variables continuas, se deduce que

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)). \tag{4.6}$$

La Ecuación (4.6) proporciona la relación entre las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del modulador con un tren de impulsos de la Figura 4.2(a). Observando la Ecuación (4.6) vemos que la transformada de Fourier de $x_s(t)$ consiste en copias repetidas periódicamente de la transformada de Fourier de $x_c(t)$. Las copias de $X_c(j\Omega)$ están desplazadas múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo y se superponen para producir la transformada de Fourier periódica del tren de impulsos de las muestras. La Figura 4.3 muestra la representación en el dominio de la frecuencia del muestreo mediante un tren de impulsos. La Figura 4.3(a) representa una transformada de Fourier de banda limitada que cumple que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$. La Figura 4.3(b) muestra el tren de impulsos periódico $S(j\Omega)$, y la Figura 4.3(c) muestra $X_s(j\Omega)$, resultado de convolucionar $X_c(j\Omega)$ con $S(j\Omega)$ y aplicar al resultado el factor de escala $\frac{1}{2\pi}$. Es evidente que cuando

$$\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N \quad \text{o} \quad \Omega_s \geq 2\Omega_N, \tag{4.7}$$

Como se puede ver en la Figura 4.3(c), las réplicas de $X_c(j\Omega)$ no se solaparán, y por tanto, cuando se sumen juntas como indica la Ecuación (4.6), quedará una réplica de $X_c(j\Omega)$ en cada múltiplo entero de Ω_s (excepto por un factor de escala de $1/T$). Por tanto, $x_c(t)$ se podrá recuperar a partir de $x_s(t)$ con un filtro paso bajo ideal, como ilustra la Figura 4.4(a), que muestra el tren de impulsos modulador seguido por un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia $H_r(j\Omega)$. Dado un $X_c(j\Omega)$ como se muestra en la Figura 4.4(b), $X_s(j\Omega)$ sería como se muestra en la Figura 4.4(c), donde se supone que $\Omega_s > 2\Omega_N$. Como

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X_s(j\Omega), \tag{4.8}$$

se deduce que si $H_r(j\Omega)$ es un filtro paso bajo ideal de ganancia T y frecuencia de corte Ω_c tal que

$$\Omega_N \leq \Omega_c \leq (\Omega_s - \Omega_N), \tag{4.9}$$

entonces

$$X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega), \tag{4.10}$$

como se muestra en la Figura 4.4(e), y por tanto $x_r(t) = x_c(t)$.

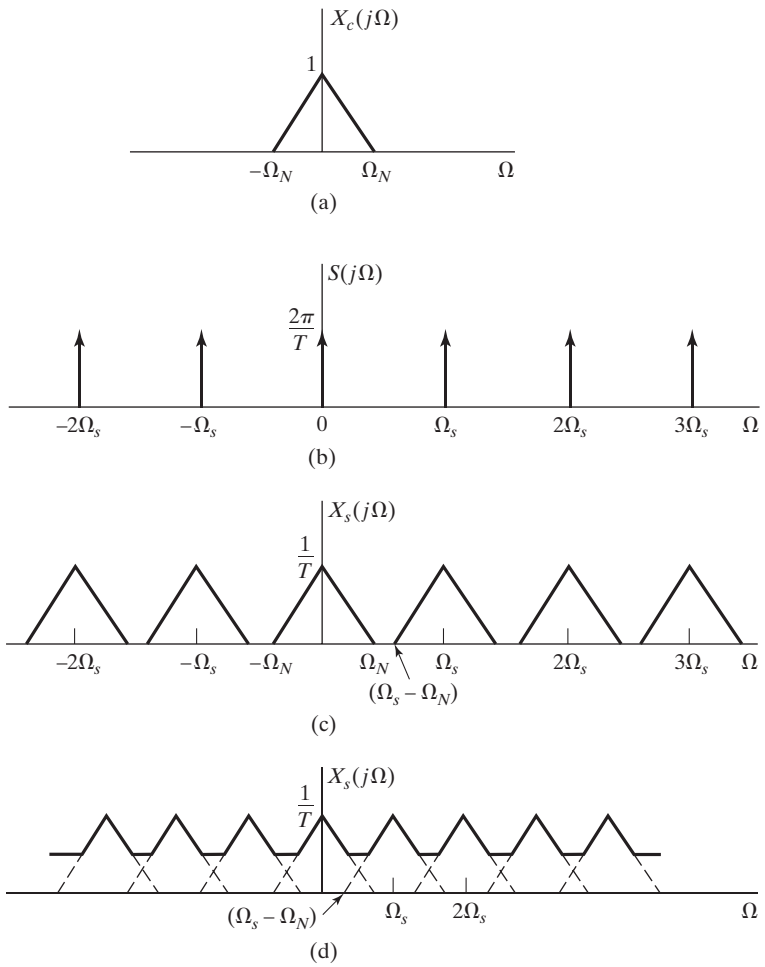


Figura 4.3 Representación en el dominio de la frecuencia del muestreo en el dominio del tiempo. (a) Espectro de la señal original. (b) Transformada de Fourier de la función de muestreo. (c) Transformada de Fourier de la señal muestreada con $\Omega_s > 2\Omega_N$. (d) Transformada de Fourier de la señal muestreada con $\Omega_s < 2\Omega_N$.

Si la desigualdad de la Ecuación (4.7) no se cumple, es decir, si $\Omega_s < 2\Omega_N$, las copias de $X_c(j\Omega)$ se solapan, de modo que cuando se sumen todas, ya no será posible recuperar $X_c(j\Omega)$ mediante un filtrado paso bajo. Este efecto se ilustra en la Figura 4.3(d). En este caso, la salida reconstruida $x_r(t)$ que se muestra en la Figura 4.4(a) es una versión distorsionada de la señal original en tiempo continuo. Esta distorsión se denomina *distorsión de solapamiento,* o simplemente *solapamiento*. La Figura 4.5 ilustra el solapamiento en el dominio de la frecuencia para el caso simple de una señal coseno de la forma

$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t, \tag{4.11a}$$

cuya transformada de Fourier es

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0) \tag{4.11b}$$

como se muestra en la Figura 4.5(a). Nótese que el impulso en $-\Omega_0$ se representa con línea discontinua. Es útil tener esto en cuenta al observar las figuras posteriores. La Figura 4.5(b) muestra la transformada

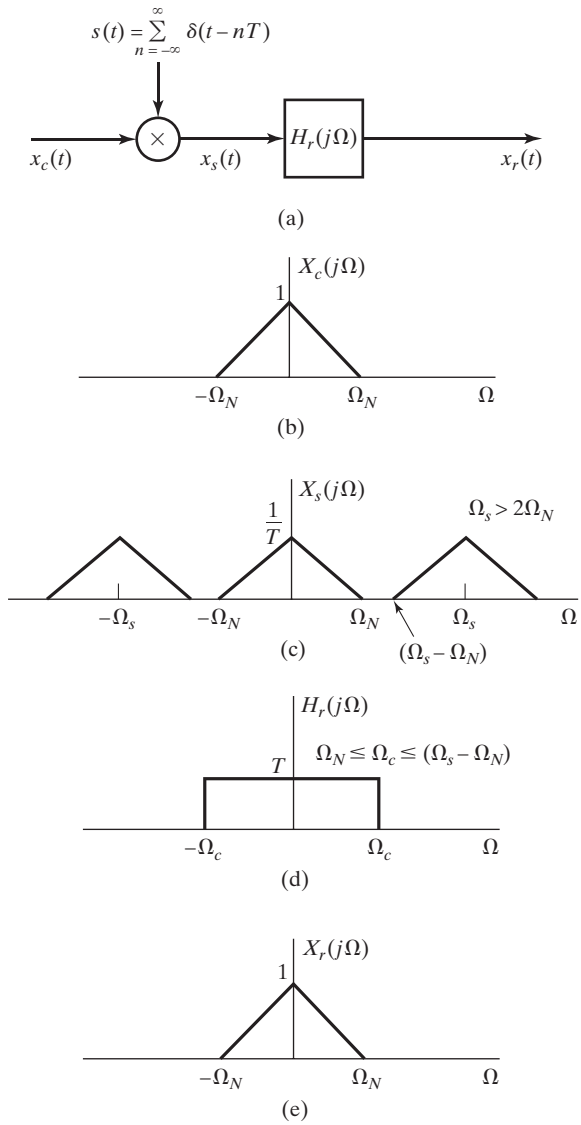


Figura 4.4 Recuperación exacta de una señal en tiempo continuo a partir de sus muestras utilizando un filtro paso bajo ideal.

de Fourier de $x_s(t)$ cuando $\Omega_0 < \Omega_s/2$, y la Figura 4.5(c) muestra la transformada de Fourier de $x_s(t)$ cuando $\Omega_s/2 < \Omega_0 < \Omega_s$. Las Figuras 4.5(d) y (e) corresponden a la transformada de Fourier de la salida del filtro paso bajo para $\Omega_0 < \Omega_s/2 = \pi/T$ y $\Omega_s/2 < \Omega_0 < \Omega_s$, respectivamente, siendo $\Omega_c = \Omega_s/2$. Las Figuras 4.5(c) y (e) corresponden al caso de existencia de solapamiento. Si no hay solapamiento [Figuras 4.5(b) y (d)], la salida reconstruida es

$$x_r(t) = \cos \Omega_0 t. \tag{4.12}$$

Cuando hay solapamiento, la salida reconstruida es

$$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t; \tag{4.13}$$

es decir, como consecuencia del proceso de muestreo y reconstrucción, la señal de alta frecuencia $\cos \Omega_0 t$ ha tomado la identidad (alias) de la señal de baja frecuencia $\cos(\Omega_s - \Omega_0)t$. Esta presenta-

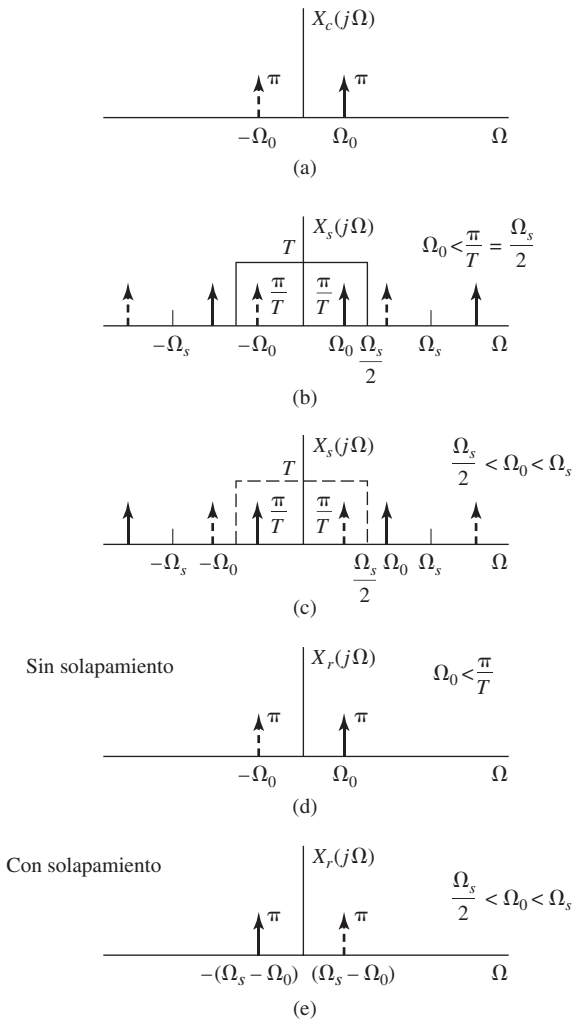


Figura 4.5 Efecto del solapamiento en el muestreo de una señal coseno.

ción es la base del teorema de muestreo de Nyquist (Nyquist 1928; Shannon 1949), que se enuncia a continuación:

Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon: Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada que cumple que

$$X_c(j\Omega) = 0 \qquad \text{para } |\Omega| \geq \Omega_N. \tag{4.14a}$$

Entonces $x_c(t)$ estará determinada de forma única por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si se cumple que

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N. \tag{4.14b}$$

La frecuencia $2\Omega_N$, que debe ser menor que la frecuencia de muestreo, se denomina, generalmente, *frecuencia de Nyquist*.

Hasta el momento, sólo hemos considerado el tren de impulsos modulador que se muestra en la Figura 4.2(a). Nuestro objetivo ahora será expresar $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $x[n]$, en función de $X_s(j\Omega)$ y de $X_c(j\Omega)$. Para ello, consideremos una expresión

alternativa de $X_s(j\Omega)$. Aplicando la transformada de Fourier en tiempo continuo a la Ecuación (4.4) obtenemos

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega Tn}. \tag{4.15}$$

Como

$$x[n] = x_c(nT) \tag{4.16}$$

y

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \tag{4.17}$$

se deduce que

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}). \tag{4.18}$$

En consecuencia, aplicando las Ecuaciones (4.6) y (4.18),

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)), \tag{4.19}$$

o, de forma equivalente,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]. \tag{4.20}$$

A partir de las Ecuaciones (4.18)–(4.20), podemos ver que $X(e^{j\omega})$ es simplemente una versión escalada en frecuencia de $X_s(j\Omega)$. El factor de escala en frecuencia está definido por $\omega = \Omega T$. Este escalado se puede ver alternativamente como una normalización del eje de frecuencias, de forma que la frecuencia $\Omega = \Omega_s$ en $X_s(j\Omega)$ se convierte en la frecuencia $\omega = 2\pi$ en $X(e^{j\omega})$. El hecho de que existe un escalado o normalización en frecuencia en la transformación de $X_s(j\Omega)$ en $X(e^{j\omega})$ se puede asociar directamente con el hecho de que existe una normalización en el tiempo en la transformación de $x_s(t)$ en $x[n]$. Concretamente, como podemos ver en la Figura 4.2, $x_s(t)$ conserva un espaciado entre las muestras igual al periodo de muestreo T. Por el contrario, el "espaciado" entre los valores de la secuencia $x[n]$ es siempre la unidad. Es decir, que el eje temporal ha sido normalizado por un factor de T. En consecuencia, en el dominio de la frecuencia el eje de frecuencias resulta normalizado por un factor de $f_s = 1/T$.

Para una sinusoide de la forma $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$, la frecuencia más alta (y la única) es Ω_0. Dado que la señal está descrita mediante una ecuación simple, es fácil calcular las muestras de la señal. En los dos ejemplos siguientes se utilizan señales sinusoidales para ilustrar algunos puntos importantes del muestreo.

Ejemplo 4.1 Muestreo y reconstrucción de una señal sinusoidal

Si muestreamos la señal continua $x_c(t) = \cos(4000\pi t)$ con periodo de muestreo $T = 1/6000$, obtenemos la señal $x[n] = x_c(nT) = \cos(4000\pi Tn) = \cos(\omega_0 n)$, siendo $\omega_0 = 4000\pi T = 2\pi/3$. En este caso, $\Omega_s = 2\pi/T = 12000\pi$, y la frecuencia más alta de la señal es $\Omega_0 = 4000\pi$, con lo que se satisfacen las condiciones del teorema de muestreo de Nyquist y no hay solapamiento. La transformada de Fourier de $x_c(t)$ es

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi).$$

y la Figura 4.6(a) muestra

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j(\Omega - k\,\Omega_s)\right] \tag{4.21}$$

para $\Omega_s = 12000\pi$. Nótese que $X_c(j\Omega)$ es una pareja de impulsos situados en $\Omega = \pm 4000\pi$, y que aparecen copias de esta transformada de Fourier centradas en $\pm\Omega_s, \pm 2\Omega_s$, etc. La Figura 4.6(b) muestra $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ en función de la frecuencia normalizada $\omega = \Omega T$. Hemos usado el hecho de que al escalar la variable independiente de una función impulso su área queda afectada por el mismo factor de escala. Es decir, $\delta(\omega/T) = T\delta(\omega)$ (Oppenheim y Willsky, 1997). Nótese también que la frecuencia original $\Omega_0 = 4000\pi$ corresponde a la frecuencia normalizada $\omega_0 = 4000\pi T = 2\pi/3$, que satisface la relación $\omega_0 < \pi$, equivalente a la relación $\Omega_0 = 4000\pi < \pi/T = 6000\pi$. La Figura 4.6(a) muestra también la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal $H_r(j\Omega)$ para la frecuencia de muestreo dada $\Omega_s = 12000\pi$. Al observar esta figura resulta claro que la señal que se reconstruiría tendría una frecuencia de $\Omega_0 = 4000\pi$, que es la frecuencia de la señal original $x_c(t)$.

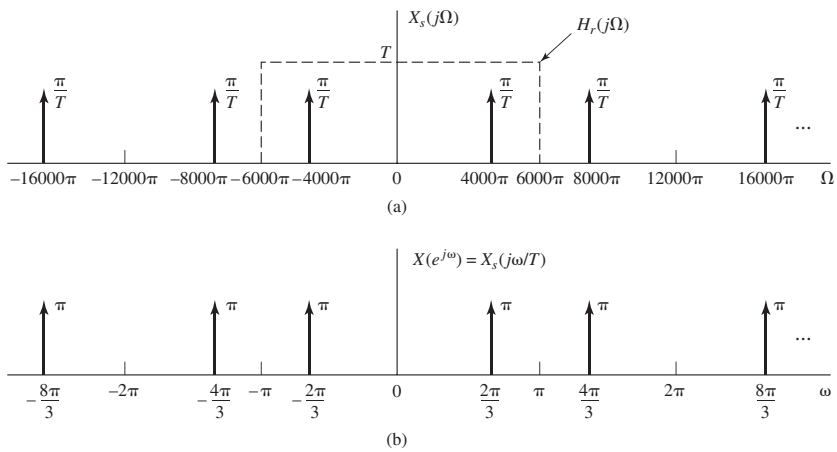


Figura 4.6 (a) Transformada de Fourier en tiempo continuo y (b) transformada de Fourier en tiempo discreto para el muestreo de la señal coseno de frecuencia. $\Omega_0 = 4000\pi$ con periodo de muestreo $T = 1/6000$

Ejemplo 4.2 Solapamiento en la reconstrucción de una señal sinusoidal

Supongamos ahora que la señal en tiempo continuo es $x_c(t) = \cos(16000\pi t)$, pero que el periodo de muestreo sigue siendo $T = 1/6000$, como en el Ejemplo 4.1. Este periodo de muestreo no satisface el criterio de Nyquist, ya que $\Omega_s = 2\pi/T = 12000\pi < 2\Omega_0 = 32000\pi$. Por tanto, se va a producir solapamiento. Veremos un resultado interesante. La transformada de Fourier $X_s(j\Omega)$ en este caso es idéntica a la que aparece en la Figura 4.6(a). Sin embargo, ahora el impulso localizado en $\Omega = -4000\pi$ procede del término $X_c[j(\Omega - \Omega_s)]$ de la Ecuación (4.21), en lugar de proceder de $X_c(j\Omega,)$ y el impulso en $\Omega = 4000\pi$ procede de $X_c[j(\Omega + \Omega_s)]$. Es decir, las frecuencias $\pm 4000\pi$ están solapadas. Si dibujamos $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ en función de ω obtenemos la misma gráfica de la Figura 4.6(b), ya que estamos normalizando por el mismo periodo de muestreo. La razón fundamental de este resultado es que la secuencia de muestras es la misma en los dos casos. Es decir,

$$\cos(16000\pi n/6000) = \cos(2\pi n + 4000\pi n/6000) = \cos(2\pi n/3).$$

(Recuerde que podemos añadir cualquier múltiplo entero de 2π al argumento del coseno sin modificar su valor). Por tanto, hemos obtenido la misma secuencia de muestras, $x[n] = \cos(2\pi n/3)$, muestreando con

la misma frecuencia de muestreo dos señales en tiempo continuo diferentes. En un caso la frecuencia de muestreo satisface el criterio de Nyquist y en el otro no. Como en el ejemplo anterior, la Figura 4.6(a) muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal $H_r(j\Omega)$ para la frecuencia de muestreo dada $\Omega_s = 12000\pi$. Observando la figura resulta claro que la señal se reconstruiría con frecuencia $\Omega_0 = 4000\pi$, que es la frecuencia solapada de la original de con respecto a la frecuencia de muestreo $\Omega_s = 12000\pi$.

Los Ejemplos 4.1 y 4.2 utilizan señales sinusoidales para ilustrar algunas ambigüedades inherentes a la operación de muestreo. En el Ejemplo 4.1 se verifica que si se cumplen las condiciones del teorema de muestreo, se puede reconstruir la señal original a partir de las muestras. En el Ejemplo 4.2 se ilustra que si la frecuencia de muestreo viola el teorema de muestreo, no es posible reconstruir la señal original mediante un filtro paso bajo ideal de reconstrucción con frecuencia de corte igual a la mitad de la frecuencia de muestreo. La señal reconstruida en este caso es una de las frecuencias solapadas de la señal original con respecto a la frecuencia de muestreo utilizada al muestrear la señal original en tiempo continuo. En ambos ejemplos, la secuencia de muestras es $x[n] = \cos(2\pi n/3)$, pero la señal original en tiempo continuo es diferente. Como sugieren los dos ejemplos, hay infinitas formas de obtener este mismo conjunto de muestras mediante el muestreo periódico de una señal sinusoidal en tiempo continuo. Toda la ambigüedad desaparece, sin embargo, si elegimos $\Omega_s > 2\Omega_0$.

4.3. RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE BANDA LIMITADA A PARTIR DE SUS MUESTRAS

De acuerdo con el teorema de muestreo, las muestras de una señal de banda limitada en tiempo continuo son suficientes para representar exactamente a la señal si dichas muestras se toman con la suficiente frecuencia. Esto quiere decir que la señal original se puede recuperar a partir de las muestras si se conoce el periodo de muestreo. La modulación mediante un tren de impulsos nos permite formalizar adecuadamente el proceso de reconstrucción de una señal de banda limitada en tiempo continuo a partir de sus muestras.

En la Sección 4.2 hemos visto que si se cumplen las condiciones del teorema de muestreo y el tren de impulsos modulados se filtra utilizando el filtro paso bajo apropiado, la transformada de Fourier de la salida del filtro coincidirá con la transformada de Fourier de la señal original en tiempo continuo, $x_c(t)$. Es decir, la salida de dicho filtro será la señal $x_c(t)$. Si tenemos una secuencia de muestras, $x[n]$, se puede formar el tren de impulsos $x_s(t)$ en el que cada impulso tiene un área igual al valor de la correspondiente muestra. Es decir,

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT). \tag{4.22}$$

La n-ésima muestra se asocia al impulso situado en $t = nT$, siendo T el periodo de muestreo asociado con la secuencia $x[n]$. Si este tren de impulsos es la entrada a un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia es $H_r(j\Omega)$ y cuya respuesta al impulso es $h_r(t)$, la salida del filtro será

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT). \tag{4.23}$$

La Figura 4.7(a) muestra el diagrama de bloques de este proceso de reconstrucción de la señal. Debe resaltarse que el filtro de reconstrucción ideal tiene una ganancia de T [para compensar el factor $1/T$ en las Ecuaciones (4.19) o (4.20)] y una frecuencia de corte Ω_c, cuyo valor está comprendido entre Ω_N y $\Omega_s - \Omega_N$. Una forma conveniente de elegir la frecuencia de corte que se utiliza muy frecuentemente es

hacer $\Omega_c = \Omega_s/2 = \pi/T$. Esta selección es apropiada para cualquier relación existente entre Ω_s y Ω_N tal que no haya solapamiento (es decir, siempre que se cumpla que $\Omega_s \geq 2\Omega_N$). La Figura 4.7(b) muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal. La correspondiente respuesta al impulso, $h_r(t)$, se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier de $H_r(j\Omega)$. Para una frecuencia de corte de π/T su expresión es

$$h_r(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T}. \tag{4.24}$$

La Figura 4.7(c) muestra esta respuesta al impulso. Sustituyendo la Ecuación (4.24) en la (4.23) obtenemos que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \tag{4.25}$$

Las Ecuaciones (4.23) y (4.25) expresan la señal en tiempo continuo en función de la combinación lineal de las funciones de la base $h_r(t-nT)$ siendo las muestras $x[n]$ los coeficientes. Se pueden usar otras bases de funciones con sus correspondientes coeficientes para representar otras clases de funciones en tiempo continuo [véase, por ejemplo, Unser (2000)]. Sin embargo, las funciones de la Ecuación (4.24)

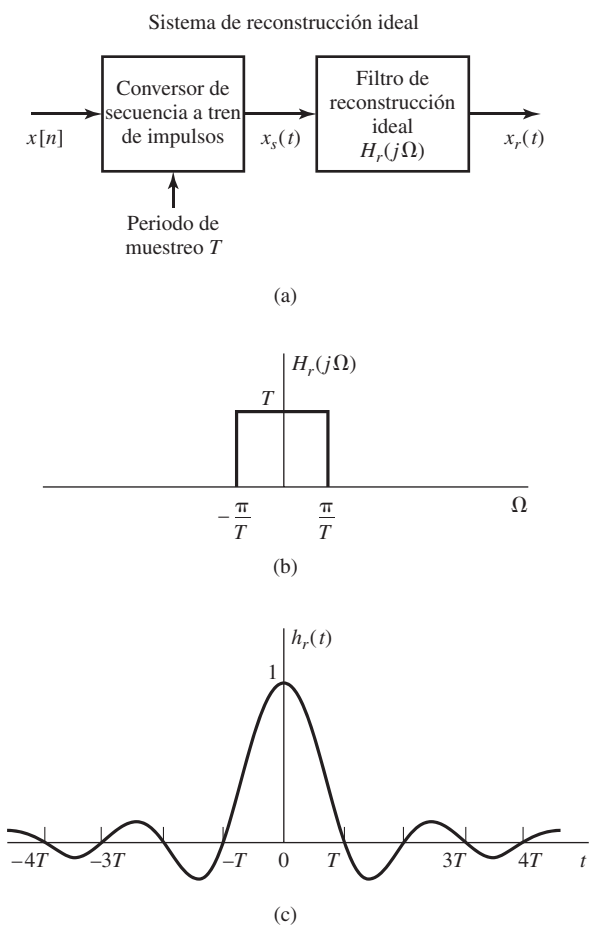


Figura 4.7 (a) Diagrama de bloques de un sistema de reconstrucción ideal de una señal de banda limitada. (b) Respuesta en frecuencia de un filtro de reconstrucción ideal. (c) Respuesta al impulso de un filtro de reconstrucción ideal.

y las muestras $x[n]$ son la base y los coeficientes naturales para representar señales en tiempo continuo de banda limitada.

En la argumentación en el dominio de la frecuencia de la Sección 4.2 vimos que si $x[n] = x_c(nT)$, siendo $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, entonces $x_r(t) = x_c(t)$. Esto no resulta ni mucho menos inmediatamente obvio si sólo nos fijamos en la Ecuación (4.25). Sin embargo, merece la pena prestar atención a dicha ecuación. Consideremos primero la función $h_r(t)$ dada en la Ecuación (4.24). Vemos que

$$h_r(0) = 1. \tag{4.26a}$$

Esto se obtiene aplicando la regla de l'Hôpital o la aproximación a la función seno para ángulos pequeños. Además,

$$h_r(nT) = 0 \qquad \text{para } n = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.26b}$$

Aplicando las Ecuaciones (4.26a), (4.26b) y (4.23) se sigue que $x[n] = x_c(nT)$. Entonces,

$$x_r(mT) = x_c(mT) \tag{4.27}$$

para cualquier valor entero de m. Es decir, la señal que se reconstruye utilizando la Ecuación (4.25) tiene los mismos valores en los instantes de muestreo que la señal en tiempo continuo original, independientemente del periodo de muestreo T.

En la Figura 4.8 se muestra una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ y el correspondiente tren de impulsos modulados. En la Figura 4.8(c) se muestran algunos términos de la forma

$$x[n]\frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

y la señal reconstruida $x_r(t)$ resultante. Como sugiere esta figura, el filtro paso bajo ideal *interpola* entre los impulsos $x_s(t)$ para construir una señal en tiempo continuo $x_r(t)$. Utilizando la Ecuación (4.27) se puede ver que la señal resultante es una reconstrucción exacta de $x_c(t)$ en los instantes de muestreo. El hecho de que, si no hay solapamiento, el filtro paso bajo interpole la reconstrucción correcta entre las muestras se deduce del análisis en el dominio de la frecuencia del proceso de muestreo y reconstrucción.

Es útil formalizar la presentación anterior definiendo un sistema ideal que permita reconstruir una señal de banda limitada a partir de una secuencia de muestras. Denominaremos a este sistema *conversor ideal de tiempo discreto a tiempo continuo (D/C).* El sistema deseado se muestra en la Figura 4.10. Como ya hemos visto, el proceso de reconstrucción ideal se puede representar como la conversión de una secuencia en un tren de impulsos, como se indica en la Ecuación (4.22), seguido por un filtrado con un filtro paso bajo ideal, resultando la salida que se indica en la Ecuación (4.25). El paso intermedio de conversión a un tren de impulsos es por motivos de conveniencia matemática para obtener la Ecuación (4.25) y para entender el proceso de reconstrucción de señales. Sin embargo, una vez que estemos familiarizados con el proceso, será más útil definir una representación más compacta, como se indica en la Figura 4.9(b), donde la entrada es la secuencia $x[n]$ y la salida es la señal en tiempo continuo $x_r(t)$ dada en la Ecuación (4.25).

Las propiedades del conversor D/C ideal se ven más fácilmente en el dominio de la frecuencia. Para obtener la relación entrada–salida en este dominio, consideremos la transformada de Fourier de la Ecuación (4.23) o de la Ecuación (4.25) que es

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_r(j\Omega)e^{-j\Omega Tn}.$$

Sacando $H_r(j\Omega)$ factor común fuera del sumatorio podemos escribir

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X\left(e^{j\Omega T}\right). \tag{4.28}$$

La Ecuación (4.28) proporciona una descripción en el dominio de la frecuencia del conversor D/C ideal. De acuerdo con dicha ecuación vemos que $X(e^{j\omega})$ resulta escalada en frecuencia (es decir, el efecto de transformar la secuencia en un tren de impulsos es que ω se sustituye por ΩT). El filtro paso bajo ideal $H_r(j\Omega)$ selecciona el periodo básico de la transformada de Fourier periódica resultante y compensa el factor resultante del proceso de muestreo. Por tanto, si la secuencia $x[n]$ es el resultado de muestrear una señal de banda limitada a la frecuencia de Nyquist o superior, la señal reconstruida $x_r(t)$ será igual

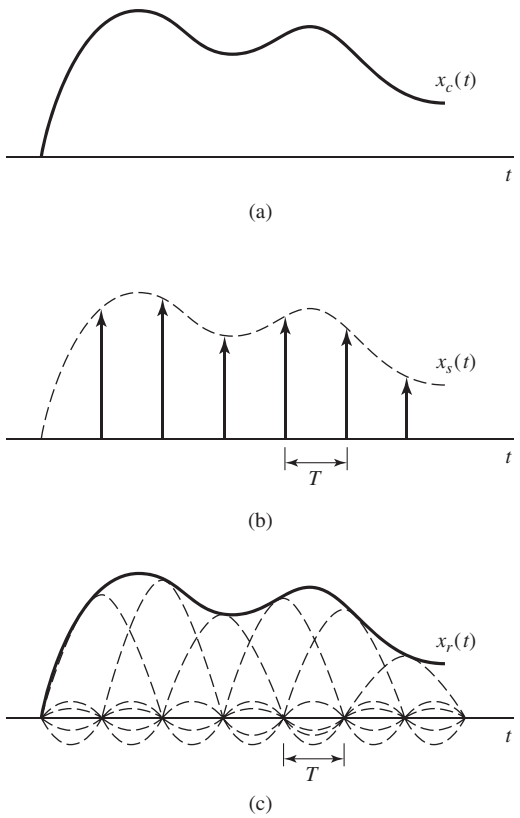


Figura 4.8 Interpolación ideal de banda limitada.

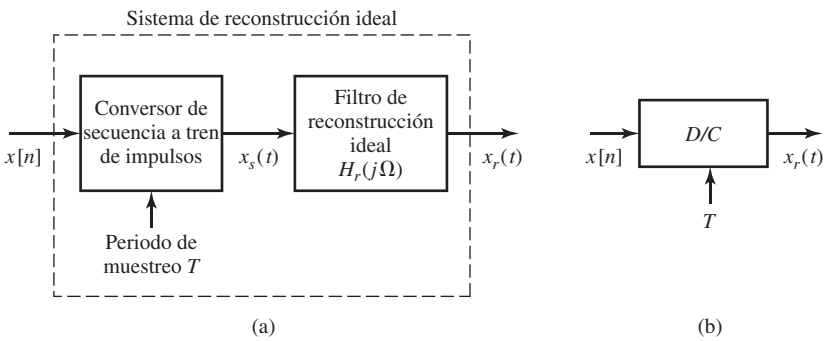


Figura 4.9 (a) Reconstrucción ideal de una señal de banda limitada. (b) Representación equivalente como un conversor D/C ideal.

a la señal de banda limitada original. En cualquier caso, observando la Ecuación (4.28), resulta claro también que la salida del conversor D/C ideal es siempre de banda limitada como máximo a la frecuencia de corte del filtro paso bajo, que generalmente se toma como la mitad de la frecuencia de muestreo.

4.4. PROCESADO EN TIEMPO DISCRETO DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO

Una aplicación importante de los sistemas en tiempo discreto es en el procesado de señales en tiempo continuo. La estructura general de un sistema que realiza este tipo de procesado se muestra en la Figura 4.10. El sistema es una interconexión en cascada de un conversor C/D, un sistema en tiempo discreto y un conversor D/C. Nótese que el sistema completo es equivalente a un sistema en tiempo continuo, ya que transforma la señal de entrada en tiempo continuo $x_c(t)$ en una señal de salida en tiempo continuo $y_r(t)$. Las propiedades del sistema completo dependen de la selección que se haga del sistema en tiempo discreto y de la frecuencia de muestreo. En la Figura 4.10 suponemos que los conversores C/D y D/C tienen la misma frecuencia de muestreo. Sin embargo, esto no es esencial y en secciones posteriores de este capítulo y en algunos problemas al final del mismo consideraremos sistemas en los que la frecuencia de muestreo a la entrada y a la salida no es la misma.

Las secciones previas de este capítulo se han dedicado a la presentación de las operaciones de los bloques C/D y D/C de la Figura 4.10. Por conveniencia, y como un primer paso en la comprensión del sistema completo de la Figura 4.10, resumiremos las representaciones matemáticas de estas operaciones.

El conversor C/D produce una señal en tiempo discreto

$$x[n] = x_c(nT), \tag{4.29}$$

es decir, una secuencia de muestras de la señal en tiempo continuo $x_c(t)$. La transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia está relacionada con la transformada de Fourier en tiempo continuo de la señal de entrada en tiempo continuo,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]. \tag{4.30}$$

El conversor D/C crea una señal de salida en tiempo continuo de la forma

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}, \tag{4.31}$$

siendo $y[n]$ la secuencia de salida del sistema en tiempo discreto cuando su entrada es $x[n]$. Aplicando la Ecuación (4.28) podemos ver que $Y_r(j\Omega)$, la transformada de Fourier en tiempo continuo de $y_r(t)$ e $Y(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $y[n]$, están relacionadas así:

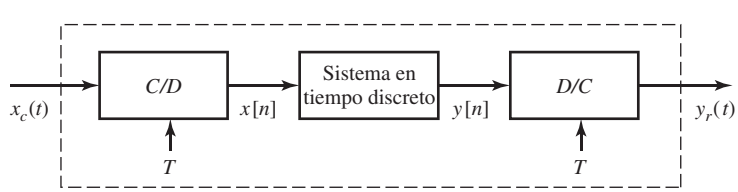


Figura 4.10 Procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo.

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{4.32}$$

A continuación, relacionaremos la secuencia de salida $y[n]$ con la secuencia de entrada $x[n]$, o lo que es lo mismo, $Y(e^{j\omega})$ con $X(e^{j\omega})$. Un ejemplo simple es el sistema identidad, $y[n] = x[n]$. Este caso es, en efecto, el que ya hemos estudiado en detalle. Sabemos que si $x_c(t)$ tiene una transformada de Fourier de banda limitada tal que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$ y el sistema en tiempo discreto de la Figura 4.10 es el sistema identidad, tal que $y[n] = x[n] = x_c(nT)$, la salida será $y_r(t) = x_c(t)$. No olvidemos que al demostrar este resultado, utilizamos la representación en el dominio de la frecuencia de las señales en tiempo continuo y en tiempo discreto, ya que el concepto clave del solapamiento se entiende mejor en el dominio de la frecuencia. Asimismo, al tratar con sistemas más complejos que el sistema identidad, realizaremos generalmente el análisis en el dominio de la frecuencia. Si el sistema en tiempo discreto es no lineal o variante con el tiempo, es difícil obtener una relación entre las transformadas de Fourier de su entrada y su salida (en el Problema 4.51 consideramos un ejemplo del sistema de la Figura 4.10 en el que el sistema en tiempo discreto es no lineal). Sin embargo, el caso de sistemas lineales e invariantes con el tiempo conduce a resultados simples y, en general, de utilidad.

4.4.1. Procesado de señales en tiempo continuo mediante sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo

Si el sistema en tiempo discreto de la Figura 4.10 es lineal e invariante con el tiempo, tenemos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \tag{4.33}$$

siendo $H(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia del sistema o, lo que es lo mismo, la transformada de Fourier de su respuesta al impulso unidad. $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de la entrada y de la salida, respectivamente. Combinando las Ecuaciones (4.32) y (4.33) tenemos

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}). \tag{4.34}$$

A continuación, utilizando la Ecuación (4.30) con $\omega = \Omega T$, tenemos

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]. \tag{4.35}$$

Si $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, el filtro de reconstrucción paso bajo ideal $H_r(j\Omega)$ cancela el factor $1/T$ y selecciona el término correspondiente a $k = 0$ en la Ecuación (4.35). Es decir,

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \tag{4.36}$$

Por tanto, si $X_c(j\Omega)$ es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es superior a la frecuencia de Nyquist, la salida se relaciona con la entrada mediante una ecuación de esta forma:

$$Y_r(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)X_c(j\Omega), \tag{4.37}$$

siendo

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \tag{4.38}$$

Es decir, el sistema en tiempo continuo completo es equivalente a un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia *efectiva* está dada por la Ecuación (4.38).

Es importante resaltar que el comportamiento lineal e invariante con el tiempo del sistema de la Figura 4.10 depende de dos factores. En primer lugar, el sistema en tiempo discreto debe ser lineal e invariante con el tiempo. En segundo lugar, la señal de entrada debe ser de banda limitada, y la frecuencia de muestreo debe ser lo suficientemente alta como para que réplicas de solapamiento sean eliminadas por el sistema en tiempo discreto. Como un ejemplo de violación de la segunda condición, consideremos el caso en el que $x_c(t)$ es un único pulso de amplitud unidad de duración menor que el periodo de muestreo. Si el pulso vale la unidad en $t = 0$, entonces $x[n] = \delta[n]$. Sin embargo, claramente es posible desplazar el pulso de forma que no esté alineado con los instantes de muestreo. En ese caso, $x[n] = 0$ para todo n. Obviamente el pulso, señal limitada en el tiempo, no es de banda limitada, por lo que no es posible cumplir las condiciones del teorema de muestreo. Incluso aunque el sistema en tiempo discreto sea el sistema identidad, con $y[n] = x[n]$, si se produce solapamiento al muestrear la entrada, el sistema completo no es invariante con el tiempo. En general, si el sistema discreto de la Figura 4.10 es lineal e invariante con el tiempo, y la frecuencia de muestreo es o está por encima de la frecuencia de Nyquist asociada con el ancho de banda de la entrada $x_c(t)$, el sistema completo será equivalente a un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia efectiva vendrá dada por la Ecuación (4.38). Es más, la Ecuación (4.38) es válida aunque se produzca algo de solapamiento en el conversor C/D, siempre que $H(e^{j\omega})$ elimine las componentes solapadas. El Ejemplo 4.3 ilustra esta idea.

Ejemplo 4.3 Filtrado paso bajo ideal en tiempo continuo utilizando un filtro paso bajo en tiempo discreto

Consideremos la Figura 4.10 en la que el sistema en tiempo discreto es lineal e invariante con el tiempo, y su respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \tag{4.39}$$

Esta respuesta en frecuencia es, por supuesto, periódica de periodo 2π, como se muestra en la Figura 4.11(a). Para señales de banda limitada muestreadas por encima de la frecuencia de Nyquist, se deduce de la Ecuación (4.38) que el sistema completo de la Figura 4.10 se comporta como un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega T| < \omega_c \text{ o } |\Omega| < \omega_c/T, \\ 0, & |\Omega T| \geq \omega_c \text{ o } |\Omega| \geq \omega_c/T. \end{cases} \tag{4.40}$$

Esta respuesta en frecuencia efectiva es la de un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T$, como se muestra en la Figura 4.11(b).

La representación gráfica de la Figura 4.12 proporciona la interpretación de cómo se obtiene esta respuesta efectiva. La Figura 4.12(a) muestra la transformada de Fourier de una señal de banda limitada. La Figura 4.12(b) ilustra la transformada de Fourier del tren de pulsos modulados intermedio, que coincide con $X(e^{j\Omega T})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de muestras evaluada en $\omega = \Omega T$. La Figura 4.12(c) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia

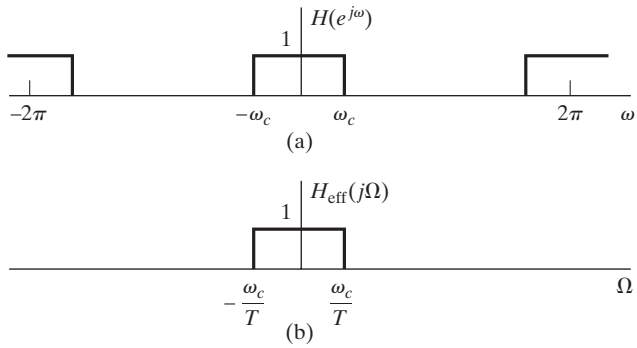


Figura 4.11 (a) Respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto de la Figura 4.10. (b) La correspondiente respuesta en frecuencia efectiva en tiempo continuo para entradas de banda limitada.

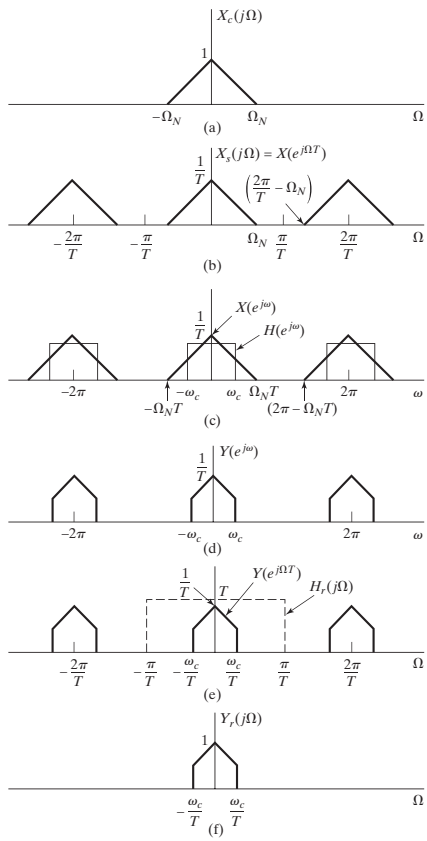


Figura 4.12 (a) Transformada de Fourier de una señal de entrada de banda limitada. (b) Transformada de Fourier de la entrada muestreada en función de la frecuencia en tiempo continuo Ω. (c) Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la secuencia de muestras y respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema en tiempo discreto, en función de ω. (d) Transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto. (e) Transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto y respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal en función de Ω. (f) Transformada de Fourier de la salida.

de muestras y la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto en función de la variable de frecuencia normalizada en tiempo discreto ω. La Figura 4.12(d) muestra $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$, es decir, la transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto. La Figura 4.12(e) ilustra la transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto en función de la variable de frecuencia en tiempo continuo Ω, junto con la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal del conversor D/C, $H_r(j\Omega)$. Finalmente, la Figura 4.12(f) muestra la transformada de Fourier resultante a la salida del conversor D/C. Comparando las Figuras 4.12(a) y 4.12(f) vemos que el sistema se comporta como un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia está dada por la Ecuación (4.40) y se muestra en la Figura 4.11(b).

El Ejemplo 4.3 permite ilustrar varios puntos importantes. En primer lugar, nótese que el filtro paso bajo ideal en tiempo discreto cuya frecuencia de corte es ω_c tiene el efecto de un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T$ cuando se utiliza en la configuración mostrada en la Figura 4.10. Esta frecuencia de corte depende de ω_c y de T. En particular, si se utiliza un filtro paso bajo fijo en tiempo discreto pero se varía el periodo de muestreo T, se consigue un filtro equivalente en tiempo continuo cuya frecuencia de corte es variable. Por ejemplo, si T se escoge de forma que cumpla $\Omega_N T < \omega_c$, la salida del sistema de la Figura 4.10 sería $y_r(t) = x_c(t)$. Además, como se ilustra en el Problema 4.31, la Ecuación (4.40) sigue siendo válida incluso si existe algo de solapamiento en las Figuras 4.12(b) y (c), siempre que las componentes distorsionadas (solapadas) sean eliminadas por el filtro. Concretamente, observando la Figura 4.12(c), vemos que para que la salida esté libre de solapamiento es necesario que

$$(2\pi - \Omega_N T) \geq \omega_c, \tag{4.41}$$

que podemos comparar con la condición de Nyquist

$$(2\pi - \Omega_N T) \geq \Omega_N T. \tag{4.42}$$

Como otro ejemplo de procesado en tiempo continuo utilizando un sistema en tiempo discreto, consideremos la realización de un diferenciador ideal para señales de banda limitada.

Ejemplo 4.4 Realización en tiempo discreto de un diferenciador ideal para señales en tiempo continuo de banda limitada

El sistema diferenciador ideal en tiempo continuo se define así:

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)], \tag{4.43}$$

y su correspondiente respuesta en frecuencia es

$$H_c(j\Omega) = j\Omega. \tag{4.44}$$

Como estamos considerando una realización con la estructura de la Figura 4.10, las entradas deben ser de banda limitada. Para procesar señales de banda limitada, es suficiente que

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T, \end{cases} \tag{4.45}$$

como muestra la Figura 4.13(a). El correspondiente sistema en tiempo discreto tiene como respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \qquad |\omega| < \pi, \tag{4.46}$$

que es periódica de periodo 2π. Esta respuesta en frecuencia se muestra en la Figura 4.13(b). Se puede demostrar que la correspondiente respuesta al impulso es

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{j\omega}{T}\right)e^{j\omega n}d\omega = \frac{\pi n\cos\pi n - \operatorname{sen}\pi n}{\pi n^2 T}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

o, de otra forma,

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \dfrac{\cos\pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases} \tag{4.47}$$

Por tanto, si se utiliza un sistema con esta respuesta al impulso en la configuración de la Figura 4.10, la salida para cualquier entrada de banda limitada será la derivada de la entrada. El Problema 4.22 verifica este hecho para una señal de entrada sinusoidal.

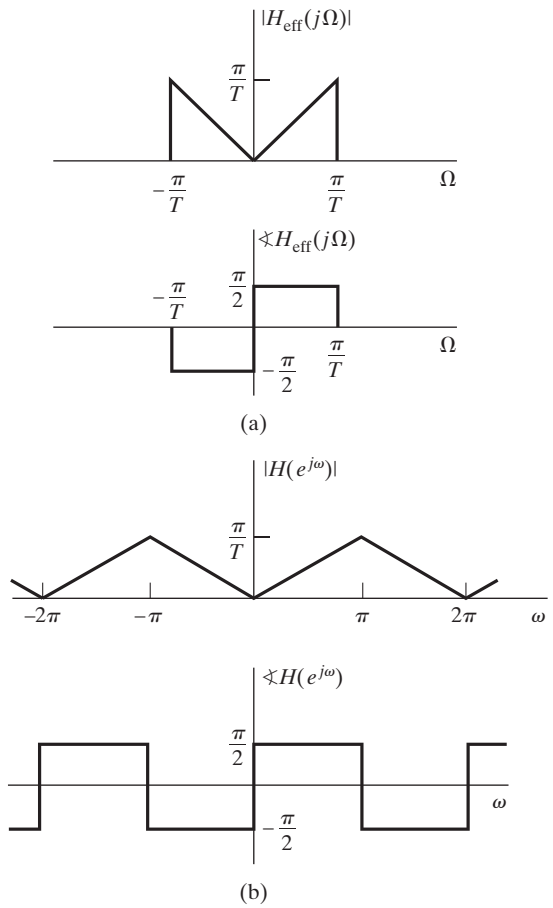


Figura 4.13 (a) Respuesta en frecuencia de un diferenciador ideal en tiempo continuo de banda limitada, $H_c(j\Omega) = j\Omega$, $|\Omega| < \pi/T$. (b) Respuesta en frecuencia de un filtro en tiempo discreto que realiza las funciones del diferenciador de banda limitada en tiempo continuo.

4.4.2. Invarianza al impulso

Hemos demostrado que el sistema en cascada de la Figura 4.10 puede ser equivalente a un sistema lineal e invariante con el tiempo para entradas de banda limitada. Supongamos ahora que, como se muestra en la Figura 4.14, se desea realizar un sistema en tiempo continuo utilizando la estructura de la Figura 4.10. Si $H_c(j\Omega)$ es de banda limitada, la Ecuación (4.38) especifica cómo escoger $H(e^{j\omega})$ para que se cumpla que $H_{\text{eff}}(j\Omega) = H_c(j\Omega)$. Concretamente,

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T), \qquad |\omega| < \pi, \tag{4.48}$$

con el requerimiento adicional de que T debe elegirse de forma que se cumpla

$$H_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq \pi/T. \tag{4.49}$$

Bajo las restricciones de las Ecuaciones (4.48) y (4.49), existe también una relación directa y útil entre la respuesta al impulso en tiempo continuo $h_c(t)$ y la respuesta al impulso en tiempo discreto $h[n]$. En concreto, como verificaremos enseguida,

$$h[n] = Th_c(nT); \tag{4.50}$$

es decir, la respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto es una versión escalada y muestreada de $h_c(t)$. Cuando $h[n]$ y $h_c(t)$ se relacionan mediante la Ecuación (4.51), se dice que el sistema en tiempo discreto es una versión *invariante al impulso* del sistema en tiempo continuo.

La Ecuación (4.50) es una consecuencia directa de las ideas presentadas en la Sección 4.2. Concretamente, si en la Ecuación (4.16) sustituimos $x[n]$ y $x_c(t)$ por $h[n]$ y $h_c(t)$, respectivamente; es decir,

$$h[n] = h_c(nT), \tag{4.51}$$

la Ecuación (4.20) se convierte en

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right), \tag{4.52}$$

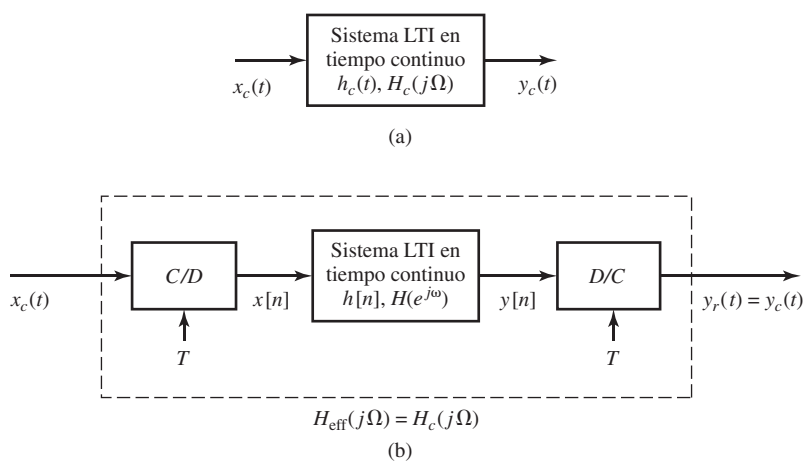


Figura 4.14 (a) Sistema LTI en tiempo continuo. (b) Sistema equivalente para entradas de banda limitada.

o, si se cumple la Ecuación (4.49),

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.53}$$

Modificando las Ecuaciones (4.51) y (4.53) para tener en cuenta el factor de escala en T de la Ecuación (4.50), tenemos

$$h[n] = T h_c(nT), \tag{4.54}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.55}$$

Ejemplo 4.5 Obtención de un filtro paso bajo en tiempo discreto mediante la técnica de invarianza al impulso

Supongamos que deseamos obtener un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto cuya frecuencia de corte es $\omega_c < \pi$. Podemos realizarlo muestreando un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo con frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T < \pi/T$ definido así:

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases}$$

La respuesta al impulso de este sistema en tiempo continuo es

$$h_c(t) = \frac{\operatorname{sen}(\Omega_c t)}{\pi t},$$

de forma que podemos definir la respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto como

$$h[n] = T h_c(nT) = T\frac{\operatorname{sen}(\Omega_c nT)}{\pi nT} = \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{\pi n},$$

siendo $\omega_c = \Omega_c T$. Ya hemos demostrado que esta secuencia tiene como transformada de Fourier en tiempo discreto

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

que es idéntica a $H_c(j\omega/T)$, como ya predecía la Ecuación (4.55).

Ejemplo 4.6 Método de invarianza al impulso aplicado a sistemas en tiempo continuo con función de transferencia racional

Muchos sistemas en tiempo continuo tienen respuestas al impulso con la forma de una suma de secuencias exponenciales como

$$h_c(t) = A\, e^{s_0 t} u(t).$$

Estas funciones temporales tienen como transformada de Laplace

$$H_c(s) = \frac{A}{s - s_0} \qquad Re(s) > Re(s_0).$$

Si aplicamos el concepto de invarianza del impulso a un sistema en tiempo continuo de este tipo, obtenemos la respuesta al impulso

$$h[n] = T h_c(nT) = A T e^{s_0 T n} u[n],$$

cuya transformada Z es la función de transferencia

$$H(z) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T} z^{-1}} \qquad |z| > |e^{s_0 T}|$$

y, suponiendo que $Re(s_0) < 0$, con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T} e^{-j\omega}}.$$

En este caso, la Ecuación (4.55) no se cumple exactamente, ya que el sistema original en tiempo continuo no tiene una respuesta en frecuencia estrictamente de banda limitada. Por lo tanto, la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto resultante es una versión *solapada* de $H_c(j\Omega)$. Incluso aunque en este caso se produce solapamiento, el efecto puede ser pequeño. Los sistemas de orden alto cuya respuesta en frecuencia es una suma de exponenciales pueden de hecho tener respuestas en frecuencia que caigan rápidamente a altas frecuencias, con lo que el solapamiento será mínimo si la frecuencia de muestreo es lo suficientemente elevada. Por tanto, una forma de realizar la simulación en tiempo discreto de sistemas en tiempo continuo y también de realizar filtros digitales es muestreando la respuesta al impulso del correspondiente filtro analógico.

4.5. PROCESADO EN TIEMPO CONTINUO DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

En la Sección 4.4 hemos presentado y analizado el uso de sistemas en tiempo discreto para procesar señales en tiempo continuo utilizando la configuración presentada en la Figura 4.10. En esta sección consideraremos la situación complementaria, que se muestra en la Figura 4.15. Se trata del procesado en tiempo continuo de señales en tiempo discreto. Aunque la estructura que se muestra en la Figura 4.15 no se suele utilizar para realizar sistemas en tiempo discreto, proporciona una interpretación de utilidad de ciertos sistemas en tiempo discreto, cuya interpretación no es simple en el dominio discreto.

Utilizando la definición de conversor D/C ideal, $X_c(j\Omega)$ y por lo tanto $Y_c(j\Omega)$, serán necesariamente cero para $|\Omega| \geq \pi/T$. De este modo, el conversor C/D muestreará la señal $y_c(t)$ sin solapamiento, y podremos expresar $x_c(t)$ e $y_c(t)$ de la siguiente forma.

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \tag{4.56}$$

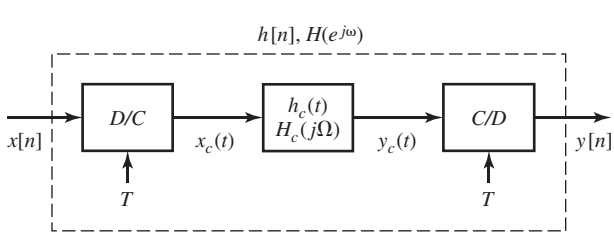


Figura 4.15 Procesado en tiempo continuo de señales en tiempo discreto.

e

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}, \tag{4.57}$$

siendo $x[n] = x_c(nT)$ e $y[n] = y_c(nT)$. Las relaciones en el dominio de la frecuencia para la Figura 4.15 son

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \qquad |\Omega| < \pi/T, \tag{4.58a}$$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega)X_c(j\Omega), \tag{4.58b}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} Y_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.58c}$$

Por tanto, sustituyendo las Ecuaciones (4.58a) y (4.58b) en la ecuación (4.58c), obtenemos que el sistema completo se comporta como un sistema en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi, \tag{4.59}$$

o, equivalentemente, la respuesta total del sistema de la Figura 4.15 será igual a una $H(e^{j\omega})$ dada si la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo continuo es

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \qquad |\Omega| < \pi/T. \tag{4.60}$$

Como $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, $H_c(j\Omega)$ puede tomar cualquier valor por encima de π/T. Una elección adecuada, aunque arbitraria, es $H_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$.

Utilizando esta representación de un sistema en tiempo discreto, podemos centrarnos en el efecto de un sistema en tiempo continuo sobre la señal en tiempo continuo de banda limitada $x_c(t)$. Los Ejemplos 4.7 y 4.8 ilustran esta idea.

Ejemplo 4.7 Retardo no entero

Consideremos un sistema en tiempo discreto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\Delta}, \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.61}$$

Cuando Δ es entero, el sistema tiene una interpretación directa como un retardo de Δ. Es decir,

$$y[n] = x[n-\Delta]. \tag{4.62}$$

Cuando Δ no es entero, la Ecuación (4.62) no tiene un significado formal, ya que no es posible desplazar una secuencia un número no entero de muestras. Sin embargo, utilizando el sistema de la Figura 4.15, se puede dar una interpretación útil en el dominio del tiempo al sistema especificado en la Ecuación (4.61). Escojamos $H_c(j\Omega)$ en la Figura 4.15 del siguiente modo:

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega T\Delta}. \tag{4.63}$$

De esta forma, utilizando la Ecuación (4.59), vemos que el sistema completo en tiempo discreto de la Figura 4.15 tiene una respuesta al impulso determinada por la Ecuación (4.61), sea Δ entero o no entero. Para interpretar el sistema de la Ecuación (4.61) es necesario tener en cuenta que la Ecuación (4.63) representa un retardo de $T\Delta$ segundos. Por tanto,

$$y_c(t) = x_c(t - T\Delta). \tag{4.64}$$

Además, $x_c(t)$ corresponde a la interpretación de banda limitada de $x[n]$, e $y[n]$ se obtiene muestreando $y_c(t)$. Por ejemplo, si $\Delta = \frac{1}{2}$, $y[n]$ tendrá los valores correspondientes a la interpolación de banda limitada en los puntos intermedios de los valores de la secuencia de entrada. Esto se ilustra en la Figura 4.16. Es posible además obtener una representación directa en forma de convolución del sistema definido en la Ecuación (4.61). Aplicando las Ecuaciones (4.64) y (4.56) obtenemos

$$\begin{aligned} y[n] &= y_c(nT) = x_c(nT - T\Delta) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left. \frac{\operatorname{sen}[\pi(t - T\Delta - kT)/T]}{\pi(t - T\Delta - kT)/T} \right|_{t=nT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\operatorname{sen} \pi(n - k - \Delta)}{\pi(n - k - \Delta)}, \end{aligned} \tag{4.65}$$

que es, por definición, la convolución de $x[n]$ con

$$h[n] = \frac{\operatorname{sen} \pi(n - \Delta)}{\pi(n - \Delta)}, \qquad -\infty < n < \infty.$$

Cuando Δ no es entero, $h[n]$ tiene una extensión infinita. Sin embargo, si $\Delta = n_0$ un valor entero, se puede demostrar fácilmente que $h[n] = \delta[n - n_0]$, que es la respuesta al impulso del sistema de retardo entero ideal.

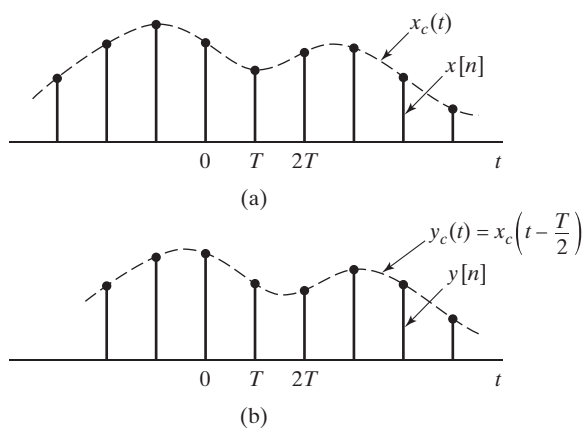


Figura 4.16 El procesado en tiempo continuo de la secuencia en tiempo discreto de la parte (a) puede producir una nueva secuencia con un retardo de "media muestra", como muestra la parte (b).

El retardo no entero representado en la Ecuación (4.65) tiene un significado práctico considerable, ya que muchas veces aparece un factor de este tipo en la representación de sistemas en el dominio de la frecuencia. Cuando aparece este término en la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto causal, se puede interpretar a la luz de este ejemplo. Esta interpretación se ilustra en el Ejemplo 4.8.

Ejemplo 4.8 Sistema de promediado móvil con retardo no entero

En el Ejemplo 2.16 consideramos el sistema de promediado móvil general y obtuvimos su respuesta en frecuencia. Para el caso del sistema de promediado móvil causal de $(M+1)$ puntos, $M_1 = 0$ y $M_2 = M$, y la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.66}$$

Esta representación de la respuesta en frecuencia nos sugiere la interpretación del sistema de promediado móvil de $(M+1)$ puntos como una cascada de dos sistemas, como se indica en la Figura 4.17. El primer sistema impone una ponderación de la amplitud en el dominio de la frecuencia. El segundo sistema representa el término de fase lineal de Ecuación (4.66). Si M es un número entero par (lo que significa que el promediado móvil es de un número impar de muestras), el término de fase lineal corresponde a un retardo entero, es decir,

$$y[n] = w[n - M/2]. \tag{4.67}$$

Sin embargo, si M es impar, el término de fase lineal corresponde a un retardo no entero, concretamente, a un intervalo entero de media muestra mas uno. Este retardo no entero se puede interpretar teniendo en cuenta la presentación del Ejemplo 4.7. Es decir, $y[n]$ será equivalente a la interpolación de banda limitada de $w[n]$, seguida por un retardo en tiempo continuo de $MT/2$ (siendo T el periodo de muestreo arbitrario asumido en la interpolación D/C de $w[n]$), seguida por una conversión C/D de nuevo con periodo de muestreo T. La Figura 4.18 ilustra este retardo fraccionario. En la Figura 4.18(a) se muestra la secuencia en tiempo discreto $x[n] = \cos(0{,}25\pi n)$. Esta secuencia es la entrada de un filtro de promediado móvil de seis puntos ($M = 5$). En este ejemplo, la entrada se "activa" lo suficientemente lejos en el pasado como para que la salida en el intervalo de tiempo considerado sólo conste de la respuesta en estado estacionario. La Figura 4.18(b) muestra la correspondiente secuencia de salida, dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j0{,}25\pi})\frac{1}{2}e^{j0{,}25\pi n} + H(e^{-j0{,}25\pi})\frac{1}{2}e^{-j0{,}25\pi n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}[3(0{,}25\pi)]}{6\operatorname{sen}(0{,}125\pi)}e^{-j(0{,}25\pi)5/2}e^{j0{,}25\pi n} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}[3(-0{,}25\pi)]}{6\operatorname{sen}(-0{,}125\pi)}e^{j(0{,}25\pi)5/2}e^{-j0{,}25\pi n} \\ &= 0{,}308\cos[0{,}25\pi(n-2{,}5)]. \end{aligned}$$

Por tanto, el filtro de promediado móvil de seis puntos reduce la amplitud de la señal coseno e introduce un desplazamiento de fase que corresponde a 2,5 muestras de retardo. Esto se puede ver fácilmente en la Figura 4.18, donde hemos dibujado los cosenos en tiempo continuo que serían el resultado de la interpolación realizada por el conversor D/C tanto para la señal de entrada como para la de salida. Observe en la Figura 4.18(b) que el filtro de promediado móvil de seis puntos produce una señal coseno muestreada de forma que los puntos de las muestras se han desplazado 2,5 muestras con respecto a los puntos de las muestras de la entrada. Esto se puede apreciar en la Figura 4.18 comparando el pico

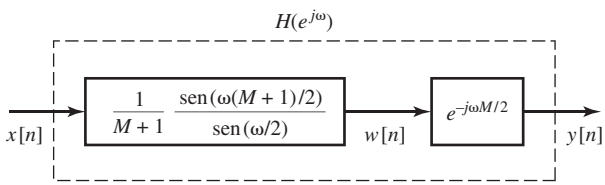


Figura 4.17 El sistema de promediado móvil como una cascada de dos sistemas.

positivo en 8 del coseno interpolado de la entrada con el pico positivo en 10,5 del coseno interpolado de la salida. Por tanto, vemos que el filtro de promediado móvil de seis puntos tiene un retardo de $5/2 = 2{,}5$ muestras.

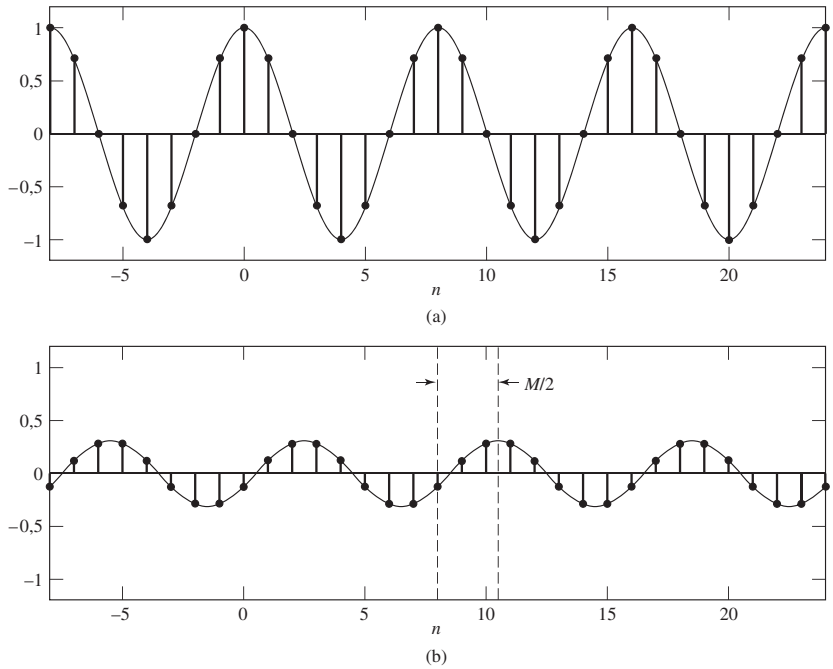


Figura 4.18 Ilustración del filtro de promediado móvil. (a) Señal de entrada $x[n] = \cos(0{,}25n)$. (b) Salida correspondiente al filtro de promediado móvil de seis puntos.

4.6. CAMBIO DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO UTILIZANDO PROCESADO EN TIEMPO DISCRETO

Ya hemos visto que una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ se puede representar mediante una señal en tiempo discreto consistente en la secuencia de muestras

$$x[n] = x_c(nT). \tag{4.68}$$

Adicionalmente, en nuestra presentación anterior hemos demostrado que, aunque $x[n]$ no se obtenga mediante un proceso de muestreo, siempre se puede utilizar la fórmula de interpolación de banda limitada de la Ecuación (4.25) para obtener una señal de banda limitada $x_r(t)$ cuyas muestras sean $x[n] = x_r(nT) = x_c(nT)$, es decir, las muestras de $x_c(t)$ y $x_r(t)$ son idénticas en los instantes de muestreo incluso cuando $x_r(t) \neq x_c(t)$.

Muchas veces es necesario cambiar la frecuencia de muestreo de una señal en tiempo discreto. Por ejemplo, para obtener una nueva representación en tiempo discreto de la señal en tiempo continuo subyacente de la forma

$$x_1[n] = x_c(nT_1), \tag{4.69}$$

siendo $T_1 \neq T$. Esta operación se denomina *remuestreo*. Conceptualmente, $x_1[n]$ se puede obtener a partir de $x[n]$ reconstruyendo $x_c(t)$ a partir de $x[n]$ utilizando la Ecuación (4.25), y muestreando seguidamente la señal $x_c(t)$ con periodo de muestreo T_1 para obtener la nueva señal $x_1[n]$. Sin embargo, muchas veces esta solución no es práctica, debido a la presencia del filtro de reconstrucción analógico no ideal, del conversor A/D y del conversor D/A, elementos necesarios en una implementación real. Por tanto, resulta de interés considerar métodos para cambiar la frecuencia de muestreo que utilicen sólo operaciones en tiempo discreto.

4.6.1. Reducción de la frecuencia de muestreo por un factor entero

La frecuencia de muestreo de una secuencia se puede reducir "muestreándola". Es decir, definiendo una nueva secuencia

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT). \tag{4.70}$$

La Ecuación (4.70) define el sistema que se muestra en la Figura 4.19, que se denomina *compresor de la frecuencia de muestreo* (véase Crochiere y Rabiner, 1983 y Vaidyanathan, 1993) o simplemente *compresor*. A partir de la Ecuación (4.70) se puede ver claramente que $x_d[n]$ es idéntica a la secuencia que se obtendría muestreando $x_c(t)$ con periodo $T_d = MT$. Además, si $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$, $x_d[n]$ será una representación exacta de $x_c(t)$ si $\pi/T_d = \pi/(MT) \geq \Omega_N$. Es decir, que la frecuencia de muestreo se puede reducir por un factor a π/M sin que se produzca solapamiento si la frecuencia de muestreo original era al menos M veces la frecuencia de Nyquist original, o si el ancho de banda de la secuencia se reduce previamente por un factor de M mediante filtrado en tiempo discreto. En general, la operación de reducir la frecuencia de muestreo (incluyendo el posible filtrado previo) se denomina *diezmado*.

Como en el caso del muestreo de una señal en tiempo continuo, es útil obtener una relación en el dominio de la frecuencia entre la entrada y la salida del compresor. Sin embargo, esta vez será una relación entre transformadas de Fourier en tiempo discreto. Aunque existen varios métodos para obtener el resultado deseado, nos basaremos en los resultados ya obtenidos para el muestreo de señales en tiempo continuo. Recordemos en primer lugar que la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n] = x_c(nT)$ es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]. \tag{4.71}$$

Análogamente, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x_d[n] = x[nM] = x_c(nT_d)$ con $T_d = MT$ es

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_d}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{T_d} - \frac{2\pi r}{T_d}\right)\right]. \tag{4.72}$$

Aplicando que $T_d = MT$, podemos escribir la Ecuación (4.72) como

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right]. \tag{4.73}$$

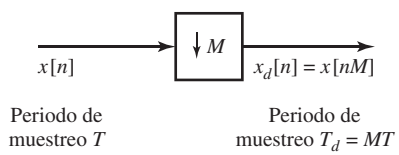


Figura 4.19 Representación de un compresor o sistema de muestreo en tiempo discreto.

Para ver la relación existente entre las Ecuaciones (4.73) y (4.71), nótese que el índice r de la suma en la Ecuación (4.73) se puede expresar como

$$r = i + kM, \tag{4.74}$$

siendo k e i enteros con $-\infty < k < \infty$ y $0 \leq i \leq M-1$. Claramente, r sigue siendo un entero comprendido entre $-\infty$ e ∞, pero ahora la Ecuación (4.73) se puede expresar de la forma:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT}\right)\right]\right\}. \tag{4.75}$$

El término incluido dentro de los corchetes en la Ecuación (4.75) es, aplicando la Ecuación (4.71),

$$X\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]. \tag{4.76}$$

Con lo que la Ecuación (4.75) se puede expresar como

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}\right). \tag{4.77}$$

Hay una fuerte analogía entre las Ecuaciones (4.71) y (4.77). La Ecuación (4.71) expresa la transformada de Fourier de una secuencia de muestras $x[n]$ (tomadas con periodo T), en función de la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo $x_c(t)$. Por otra parte, la Ecuación (4.77) expresa la transformada de Fourier de una secuencia muestreada en tiempo discreto $x_d[n]$ (con periodo de muestreo MT), en función de la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$. Si comparamos las Ecuaciones (4.72) y (4.77), $X_d(e^{j\omega})$ se puede considerar compuesta, bien como la superposición de una serie infinita de copias escaladas en amplitud de $X_c(j\Omega)$, escaladas a su vez en frecuencia mediante la relación $\omega = \Omega T_d$ y desplazadas múltiplos enteros de 2π [Ecuación (4.72)], o bien como M copias escaladas en amplitud de la transformada de Fourier periódica $X\left(e^{j\omega}\right)$, escaladas a su vez en frecuencia por M y desplazadas múltiplos enteros de 2π [Ecuación (4.77)]. Cualquier interpretación deja claro que $X_d(e^{j\omega})$ es periódica de periodo 2π (como cualquier transformada de Fourier en tiempo discreto), y que se puede evitar el solapamiento si $X\left(e^{j\omega}\right)$ es de banda limitada. Es decir, si se cumple que

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 0, \qquad \omega_N \leq |\omega| \leq \pi, \tag{4.78}$$

y $2\pi/M \geq 2\omega_N$.

La Figura 4.20 ilustra el diezmado para $M = 2$. En la Figura 4.20(a) vemos la transformada de Fourier de una señal continua de banda limitada, y en la Figura 4.20(b), la transformada de Fourier del tren de impulsos con las muestras cuando el periodo de muestreo es T. La Figura 4.20(c) muestra $X\left(e^{j\omega}\right)$ y está relacionado con la Figura 4.20(b) mediante la Ecuación (4.18). Como ya hemos visto, las Figuras 4.20(b) y (c) difieren sólo en el escalado de la variable de frecuencia. La Figura 4.20(d) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia diezmada cuando $M = 2$. Hemos dibujado esta transformada de Fourier en función de la frecuencia normalizada $\omega = \Omega T_d$. Finalmente, la Figura 4.20(e) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia diezmada en función de la variable de frecuencia en tiempo continuo Ω. La Figura 4.20(e) es idéntica a la Figura 4.20(d), excepto por el factor de escala en el eje de frecuencias de $\Omega = \omega/T_d$.

En este ejemplo, $2\pi/T = 4\Omega_N$. Es decir, la frecuencia de muestreo original es exactamente dos veces la frecuencia mínima necesaria para evitar el solapamiento. Por tanto, cuando se diezma la secuencia

original con un factor de $M = 2$, no se produce solapamiento. Si el factor de diezmado fuera superior a 2 habría solapamiento, como se ilustra en la Figura 4.21.

La Figura 4.21(a) muestra la transformada de Fourier en tiempo continuo de $x_c(t)$, y la Figura 4.21(b) la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $x[n] = x_c(nT)$, siendo $2\pi/T = 4\Omega_N$. Entonces, $\omega_N = \Omega_N T = \pi/2$. Si diezmamos ahora con un factor de $M = 3$, obtenemos la secuencia $x_d[n] = x[3n] = x_c(n3T)$ cuya transformada de Fourier en tiempo discreto se muestra en la Figura 4.21(c) en función de la frecuencia normalizada $\omega = \Omega T_d$. Nótese que como $M\omega_N = 3\pi/2$, que es mayor que π, hay solapamiento. En general, para evitar el solapamiento cuando se diezma con un factor de M es necesario que

$$\omega_N M \leq \pi \qquad \text{o} \qquad \omega_N \leq \pi/M. \tag{4.79}$$

Si no se cumple esta condición, aparecerá solapamiento, pero éste puede ser tolerable en algunas aplicaciones. En otros casos, se puede realizar el diezmado sin solapamiento si se puede reducir el ancho de banda de la señal $x[n]$ antes de diezmar. Es decir, si se filtra $x[n]$ con un filtro paso bajo ideal cuya frecuencia de corte sea π/M, la salida $\tilde{x}[n]$ se puede diezmar sin solapamiento, como se ilustra en las Figuras 4.21(d), (e) y (f). Nótese que la secuencia $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}[nM]$ ya no representa más la señal en tiempo continuo subyacente $x_c(t)$. Lo que ocurre es que $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}_c(nT_d)$, siendo $T_d = MT$, y donde $\tilde{x}_c(t)$ se obtiene a partir de $x_c(t)$ mediante filtrado paso bajo con frecuencia de corte $\Omega_c = \pi/T_d = \pi/(MT)$.

Como conclusión de la presentación anterior, vemos que el sistema general para realizar el diezmado por un factor de M tiene la estructura que se muestra en la Figura 4.22. Este sistema se denomina *diezmador*, y la operación que realiza mediante filtrado paso bajo previo seguido por una compresión se denomina *diezmado* (Crochiere y Rabiner, 1983 y Vaidyanathan, 1993).

4.6.2. Incremento de la frecuencia de muestreo por un factor entero

Ya hemos visto que la reducción en un factor entero de la frecuencia de muestreo de una señal discreta involucra el muestreo de dicha secuencia de forma análoga a como se muestrea una señal en tiempo continuo. No es sorprendente entonces que el incremento de la frecuencia de muestreo involucre operaciones análogas a la conversión D/C. Para verlo, consideremos una señal $x[n]$ cuya frecuencia de muestreo deseamos incrementar por un factor de L. Si consideramos la señal en tiempo continuo subyacente $x_c(t)$, el objetivo es obtener muestras

$$x_i[n] = x_c(nT_i), \tag{4.80}$$

siendo $T_i = T/L$, partiendo de la secuencia de muestras

$$x[n] = x_c(nT). \tag{4.81}$$

Denominaremos *interpolación* a la operación de aumentar la frecuencia de muestreo. Utilizando las Ecuaciones (4.80) y (4.81) obtenemos que

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L), \qquad n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots. \tag{4.82}$$

La Figura 4.23 muestra el sistema necesario para obtener $x_i[n]$ a partir de $x[n]$ empleando sólo procesado en tiempo discreto. El sistema de la izquierda se denomina *expansor de la frecuencia de muestreo* (véase Crochiere y Rabiner, 1983 y Vaidyanathan, 1993) o simplemente *expansor*. Su salida es

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{4.83}$$

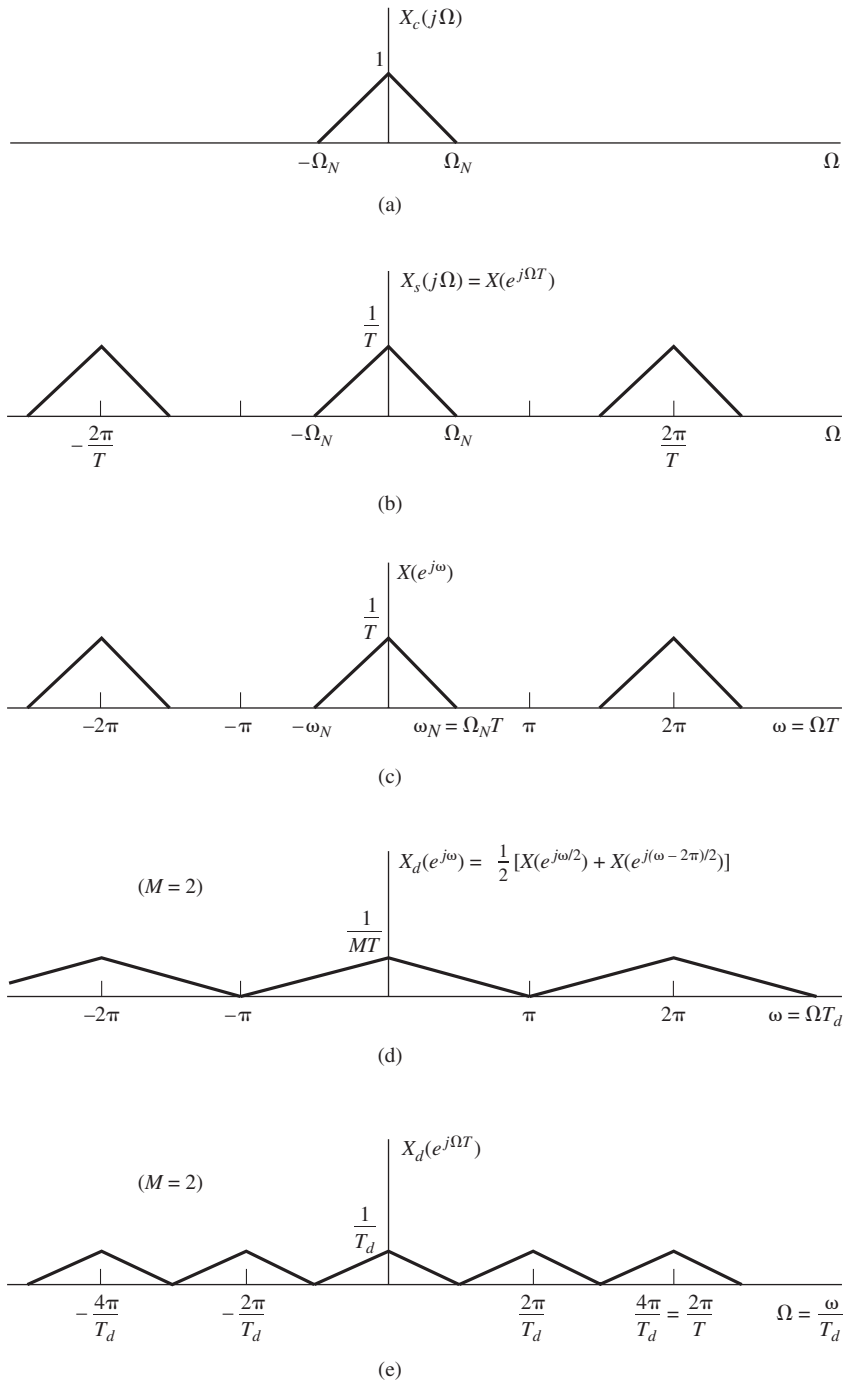


Figura 4.20 Ilustración del diezmado en el dominio de la frecuencia.

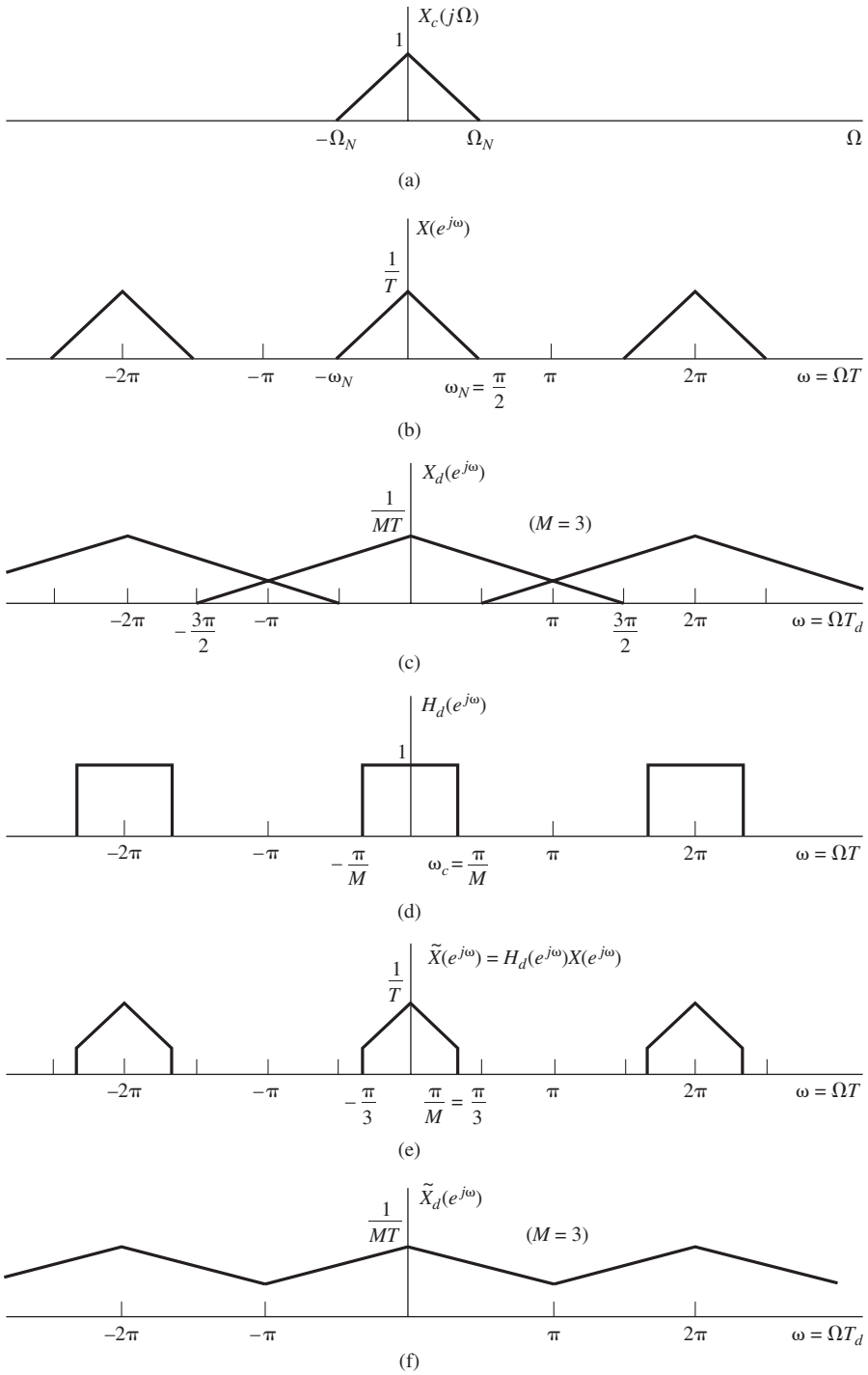


Figura 4.21 (a)–(c) Diezmado con solapamiento. (d)–(f) Diezmado con filtrado previo para evitar el solapamiento.

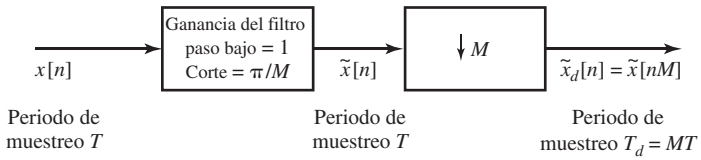


Figura 4.22 Sistema general para reducir la frecuencia de muestreo en un factor de M.

o equivalentemente,

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]. \tag{4.84}$$

El sistema de la derecha es un filtro paso bajo en tiempo discreto con frecuencia de corte de π/L y ganancia L. Este sistema tiene un papel similar al del conversor D/C ideal de la Figura 4.9(b). En primer lugar, creamos un tren de impulsos en tiempo discreto $x_e[n]$, y después utilizamos un filtro paso bajo para reconstruir la secuencia.

La operación del sistema de la Figura 4.23 se entiende de forma más sencilla en el dominio de la frecuencia. La transformada de Fourier de $x_e[n]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]\right)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega Lk} = X\left(e^{j\omega L}\right). \end{aligned} \tag{4.85}$$

Por tanto, la transformada de Fourier de la salida del expansor es una versión escalada en frecuencia de la transformada de Fourier de la entrada. Es decir, ω se sustituye por ωL de forma que ω queda ahora normalizada por

$$\omega = \Omega T_i. \tag{4.86}$$

La Figura 4.24 ilustra este efecto. En la Figura 4.24(a) se muestra la transformada de Fourier en tiempo continuo de una señal de banda limitada, y en la Figura 4.24(b), la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $x[n] = x_c(nT)$, siendo $\pi/T = \Omega_N$. La Figura 4.24(c) muestra $X_e(e^{j\omega})$ de acuerdo a la Ecuación (4.85) con $L = 2$, y la Figura 4.24(e) muestra la transformada de Fourier de la señal deseada $x_i[n]$. Vemos que $X_i(e^{j\omega})$ se puede obtener a partir de $X_e(e^{j\omega})$ modificando el factor de escala de la amplitud de $1/T$ a $1/T_i$ y eliminando todas las réplicas escaladas en frecuencia de $X_c(j\Omega)$ que no estén situadas en múltiplos enteros de 2π. Para el caso que se muestra en la Figura 4.24, esto requiere utilizar un filtro paso bajo con una ganancia de 2 y una frecuencia de corte de $\pi/2$, como se muestra en la Figura 4.24(d). En general, la ganancia necesaria será de L, ya que $L(1/T) = [1/(T/L)] = 1/T_i$, y la frecuencia de corte será de π/L.

Este ejemplo muestra que el sistema de la Figura 4.23 produce de hecho una salida que cumple la Ecuación (4.80) siempre que la secuencia de entrada $x[n] = x_c(nT)$ provenga de un proceso de muestreo

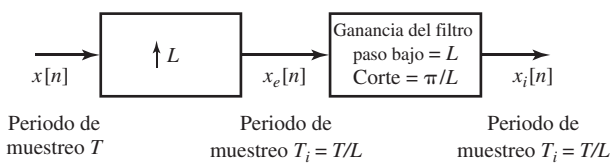


Figura 4.23 Sistema general para incrementar la frecuencia de muestreo por un factor de L.

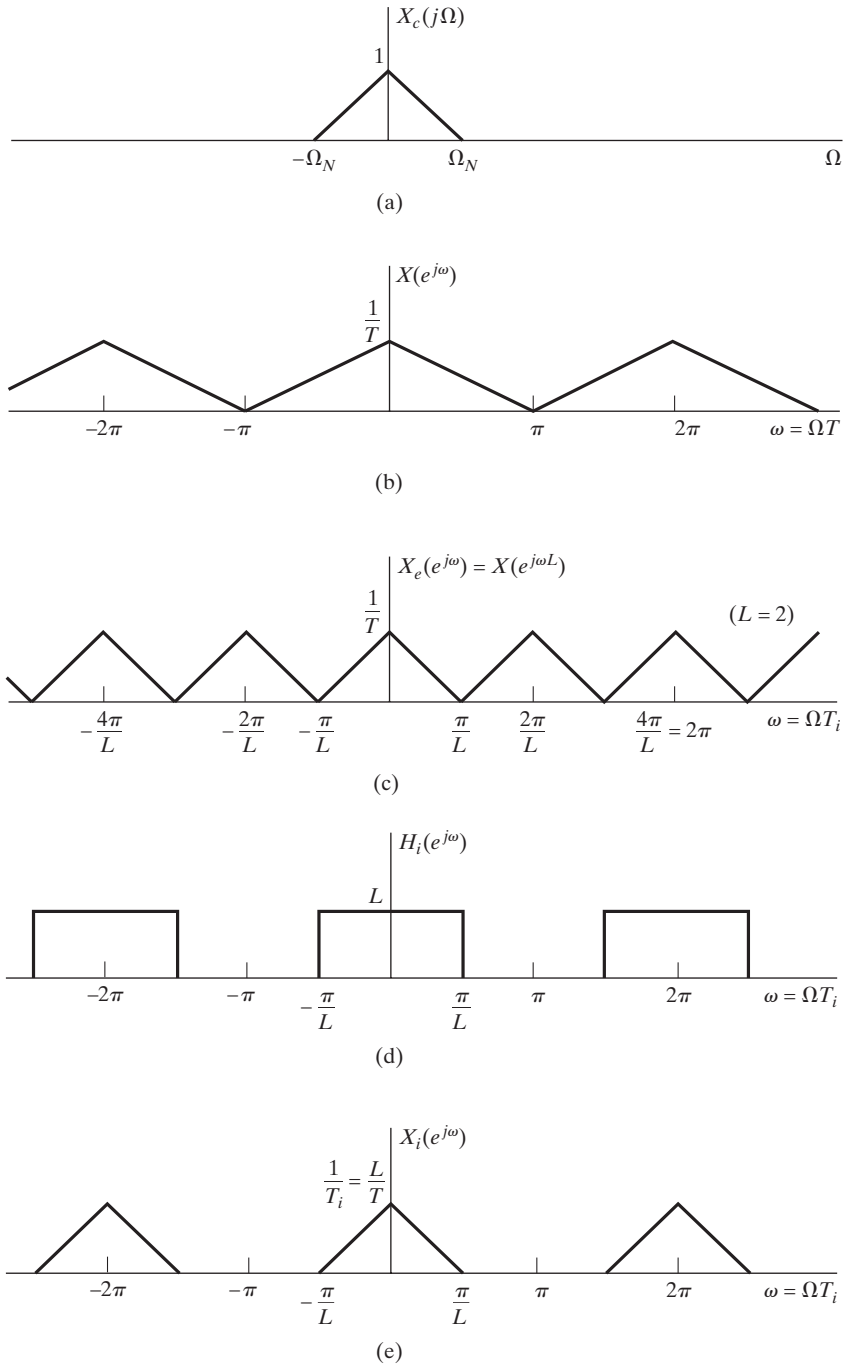


Figura 4.24 Ilustración de la interpolación en el dominio de la frecuencia.

sin solapamiento. El sistema es por tanto un *interpolador*, ya que rellena las muestras perdidas, y por ello la operación de sobremuestreo se considera sinónima de *interpolación*.

Como en el caso del conversor D/C, es posible obtener una fórmula de interpolación para $x_i[n]$ en función de $x[n]$. Nótese en primer lugar que la respuesta al impulso del filtro paso bajo de la Figura 4.23 es

$$h_i[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/L)}{\pi n/L}. \tag{4.87}$$

Utilizando la Ecuación (4.84), obtenemos

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\operatorname{sen}[\pi(n-kL)/L]}{\pi(n-kL)/L}. \tag{4.88}$$

La respuesta al impulso $h_i[n]$ tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} h_i[0] &= 1, \\ h_i[n] &= 0, \qquad n = \pm L, \pm 2L, \ldots. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Por tanto, para el filtro de interpolación paso bajo ideal tenemos que

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L) = x_c(nT_i), \qquad n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots, \tag{4.90}$$

como se deseaba. El hecho de que $x_i[n] = x_c(nT_i)$ para todo n se deduce de nuestro razonamiento en el dominio de la frecuencia.

4.6.3. Filtros de interpolación simples y prácticos

En la práctica, los filtros paso bajo ideales no se pueden realizar de forma exacta, pero veremos en el Capítulo 7 que se pueden obtener muy buenas aproximaciones. Sin embargo, en algunos casos pueden resultar adecuados procedimientos de interpolación muy simples, o bien pueden ser necesarios por limitaciones computacionales. Como la interpolación lineal se utiliza a menudo (aunque frecuentemente no es muy precisa), merece la pena examinar el proceso de interpolación lineal dentro del marco general que acabamos de desarrollar.

La interpolación lineal corresponde al proceso de interpolación en el que las muestras entre dos muestras originales están en la línea recta que une los dos valores de las muestras originales. El proceso de interpolación lineal se puede realizar mediante el sistema de la Figura 4.23 si la respuesta al impulso del filtro es

$$h_{\text{lin}}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \le L, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{4.91}$$

como muestra la Figura 4.25 para $L = 5$. Con este filtro, la salida interpolada será

$$x_{\text{lin}}[n] = \sum_{k=n-L+1}^{n+L-1} x_e[k] h_{\text{lin}}[n-k]. \tag{4.92}$$

La Figura 4.26(a) muestra $x_e[k]$ (la envolvente de $h_{\text{lin}}[n-k]$ se muestra en línea discontinua para el caso particular de $n = 18$) y la correspondiente salida $x_{\text{lin}}[n]$ para el caso de $L = 5$. En este caso, $x_{\text{lin}}[n]$ para $n = 18$ sólo depende de las muestras originales $x[3]$ y $x[4]$. Observando la figura, podemos ver que $x_{\text{lin}}[n]$ es idéntica a la secuencia que se obtendría uniendo las dos muestras originales en cada lado de n por

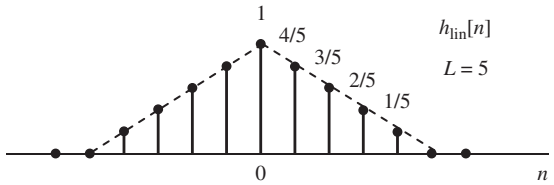


Figura 4.25 Respuesta al impulso de la interpolación lineal.

una recta, y remuestreando después en los $L-1$ deseados situados en medio. Nótese también que los valores originales de las muestras no se pierden, ya que $h_{\text{lin}}[0] = 1$ y $h_{\text{lin}}[n] = 0$ para $|n| \geq L$.

La naturaleza de la distorsión de las muestras intermedias se puede entender mejor comparando la respuesta en frecuencia del interpolador lineal con la del interpolador paso bajo ideal para un factor de interpolación de L. Se puede demostrar (véase el Problema 4.56) que

$$H_{\text{lin}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\left[\frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)}\right]^2. \tag{4.93}$$

La Figura 4.26(b) muestra esta función para $L = 5$, junto con la respuesta del filtro de interpolación paso bajo ideal. Observando la figura se puede ver que si la señal original se muestrea a la frecuencia de Nyquist, es decir, no se sobremuestrea, la interpolación lineal no será muy exacta, ya que la salida del filtro tendrá una energía considerable en la banda $\pi/L < |\omega| \leq \pi$ debido a las réplicas escaladas en frecuencia de $X_c(j\Omega)$ en los múltiplos de $2\pi/L$ que no son eliminadas por el filtro de interpolación lineal. Sin embargo, si la frecuencia de muestreo original es muy superior a la de Nyquist, el interpolador lineal

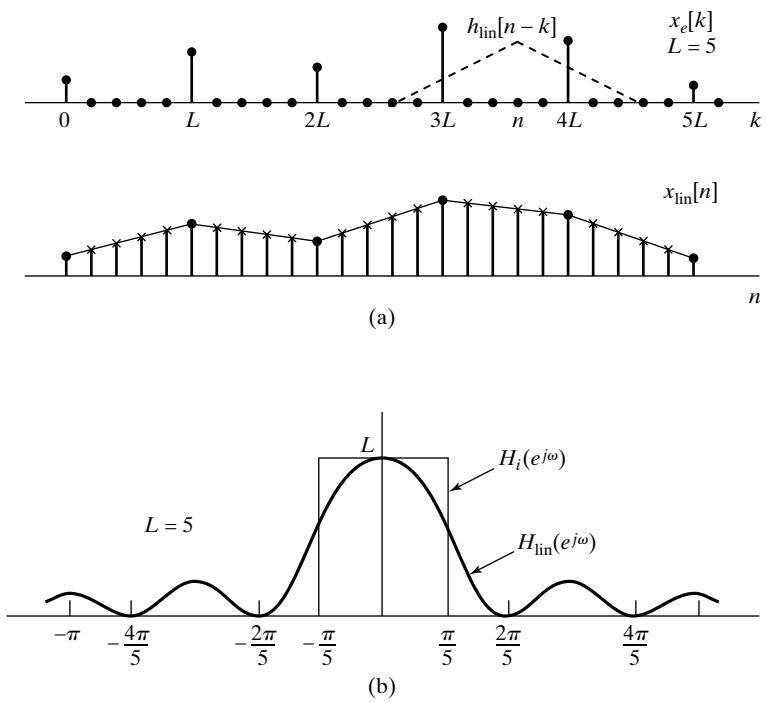


Figura 4.26 (a) Ilustración de la interpolación lineal mediante filtrado. (b) Respuesta en frecuencia de un interpolador lineal comparada con la del filtro paso bajo ideal.

tendrá más éxito al eliminar esas réplicas debido a que $H_{\text{lin}}(e^{j\omega})$ es pequeña en una región estrecha alrededor de esas frecuencias normalizadas y a frecuencias de muestreo mayores el aumento del escalado en frecuencia hace que las copias desplazadas de $X_c(j\Omega)$ estén más localizadas en los múltiplos de $2\pi/L$. Esto es intuitivamente razonable también desde una perspectiva en el dominio del tiempo, ya que si la frecuencia de muestreo original es muy superior a la de Nyquist, la señal no variará significativamente entre muestras consecutivas, y por lo tanto, la interpolación lineal debe resultar más exacta.

Debido a su respuesta al impulso bilateral de longitud infinita, en el interpolador ideal de banda limitada intervienen *todas* las muestras originales en el cálculo de cada muestra interpolada. Por el contrario, en la interpolación lineal sólo intervienen *dos* de las muestras originales al calcular la muestra interpolada. Para aproximarse mejor a la interpolación ideal de banda limitada es necesario utilizar filtros con respuesta al impulso más larga. En esta aplicación, los filtros FIR tienen muchas ventajas. La respuesta al impulso $\tilde{h}_i[n]$ de un filtro FIR que realiza la interpolación por un factor L se diseña generalmente con las siguientes propiedades:

$$\tilde{h}_i[n] = 0 \qquad |n| \geq KL \tag{4.94a}$$

$$\tilde{h}_i[n] = \tilde{h}_i[-n] \qquad |n| \leq KL \tag{4.94b}$$

$$\tilde{h}_i[0] = 1 \qquad n = 0 \tag{4.94c}$$

$$\tilde{h}_i[n] = 0 \qquad n = \pm L, \pm 2L, \ldots, \pm KL. \tag{4.94d}$$

La salida interpolada será por tanto

$$\tilde{x}_i[n] = \sum_{k=n-KL+1}^{n+KL-1} x_e[k]\tilde{h}_i[n-k]. \tag{4.95}$$

Nótese que la respuesta al impulso de la interpolación lineal cumple las Ecuaciones (4.94a)–(4.94d) con $K = 1$.

Es importante entender la motivación de las restricciones de las Ecuaciones (4.94a)–(4.94d). La Ecuación (4.94a) indica que la longitud del filtro FIR es de $2KL-1$ muestras. Además, esta restricción asegura que sólo $2K$ muestras originales intervienen en el cálculo de cada muestra de $\tilde{x}_i[n]$. Esto es porque, aunque $\tilde{h}_i[n]$ tiene $2KL-1$ muestras distintas de cero, la entrada $x_e[k]$ sólo tiene $2K$ muestras distintas de cero en la región de soporte de $\tilde{h}_i[n-k]$ para cualquier valor de n entre dos de las muestras originales. La Ecuación (4.94b) asegura que el filtro no producirá ningún desplazamiento de fase en las muestras interpoladas, ya que la respuesta en frecuencia correspondiente es una función real de ω. El sistema podría hacerse causal introduciendo un retardo de al menos $KL-1$ muestras. De hecho, la respuesta al impulso $\tilde{h}_i[n-KL]$ produciría una salida interpolada retardada KL muestras, lo que correspondería a un retardo de K muestras a la frecuencia de muestreo original. Podríamos desear insertar otros valores de retardo, por ejemplo, para igualar el retardo entre partes de un gran sistema compuesto por subsistemas operando a diferentes velocidades de muestreo. Finalmente, las Ecuaciones (4.94c) y (4.94d) garantizan que las muestras originales de la señal se mantendrán a la salida. Es decir,

$$\tilde{x}_i[n] = x[n/L] \quad \text{at} \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots. \tag{4.96}$$

Por tanto, si la velocidad de muestreo de $\tilde{x}_i[n]$ se reduce posteriormente a la velocidad original (sin que haya retardo o con un retardo de un múltiplo de L muestras), entonces $\tilde{x}_i[nL] = x[n]$. Es decir, se recupera exactamente la señal original. Si no se desea esta consistencia, las condiciones de las Ecuaciones (4.94c) y (4.94d) se pueden relajar en el diseño de $\tilde{h}_i[n]$.

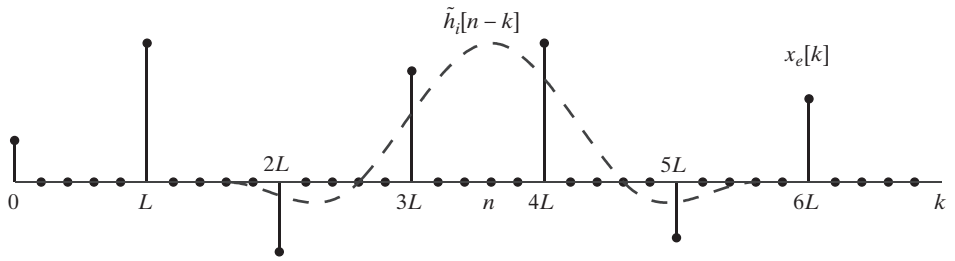


Figura 4.27 Ilustración de la interpolación con $2K = 4$ cuando $L = 5$.

La Figura 4.27 muestra $x_e[k]$ y $\tilde{h}_i[n-k]$ con $K = 2$. En la figura se puede ver que cada valor interpolado depende de $2K = 4$ muestras de la señal original de entrada. Observe también que el cálculo de cada muestra interpolada requiere sólo $2K$ multiplicaciones y $2K - 1$ sumas, ya que siempre hay $L - 1$ muestras de $x_e[k]$ que valen cero entre cada pareja de muestras originales contiguas.

La interpolación es un problema muy estudiado en análisis numérico. Una gran parte del desarrollo en este campo se basa en fórmulas de interpolación que interpolan de forma exacta polinomios de un cierto grado. Por ejemplo, el interpolador lineal proporciona resultados exactos para una señal constante y para una señal cuyas muestras varíen según una línea recta. Al igual que en el caso de la interpolación lineal, las fórmulas de interpolación de orden superior de Lagrange (Schafer y Rabiner, 1973) y las fórmulas de interpolación basadas en splines cúbicos (Keys, 1981 y Unser, 2000) se pueden utilizar en nuestro modelo de filtrado lineal para proporcionar filtros de interpolación de superior longitud. Por ejemplo, la ecuación

$$\tilde{h}_i[n] = \begin{cases} (a+2)|n/L|^3 - (a+3)|n/L|^2 + 1 & 0 \le n \le L \\ a|n/L|^3 - 5|n/L|^2 + 8a|n/L| - 4a & L \le n \le 2L \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \tag{4.97}$$

define una familia interesante de respuestas al impulso de filtros de interpolación en los que intervienen cuatro ($K = 2$) muestras originales en el cómputo de cada muestra interpolada. La Figura 4.28(a) muestra la respuesta al impulso de un filtro cúbico para $a = -0{,}5$ y $L = 5$ junto con el filtro (triángulo en línea discontinua) para interpolación lineal ($K = 1$). Las respuestas en frecuencia correspondientes se muestran en la Figura 4.28(b) en una escala de amplitud logarítmica (dB). Fíjese en que el filtro cúbico presenta regiones mucho más anchas alrededor de las frecuencias $2\pi/L$ y $4\pi/L$ ($0{,}4\pi$ y $0{,}8\pi$ en este caso), pero con lóbulos laterales más bajos que los del interpolador lineal, que se muestra en la línea de puntos.

4.6.4. Cambio de la frecuencia de muestreo por un factor no entero

Ya hemos visto la forma de aumentar o disminuir la frecuencia de muestreo de una secuencia por un factor entero. Combinando el diezmado y la interpolación es posible cambiar la frecuencia de muestreo por un factor no entero. Concretamente, consideremos la Figura 4.29(a), que muestra un interpolador que reduce el periodo de muestreo de T a T/L, seguido por un diezmador que incrementa el periodo de muestreo por un factor de M. Se produce así una secuencia de salida $\tilde{x}_d[n]$ cuyo periodo de muestreo efectivo es (TM/L). Escogiendo adecuadamente M y L, se puede aproximar arbitrariamente cualquier razón deseada de periodos de muestreo. Por ejemplo, si $L = 100$ y $M = 101$, entonces el periodo efectivo de muestreo es $1{,}01T$.

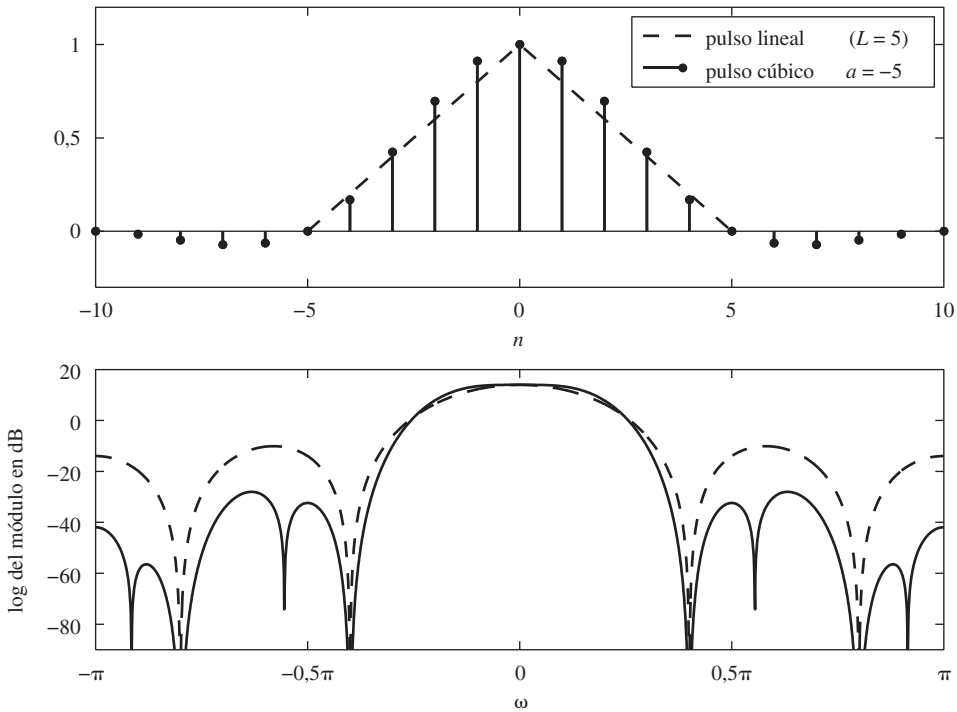


Figura 4.28 Respuestas al impulso y respuestas en frecuencia para interpolación lineal y cúbica.

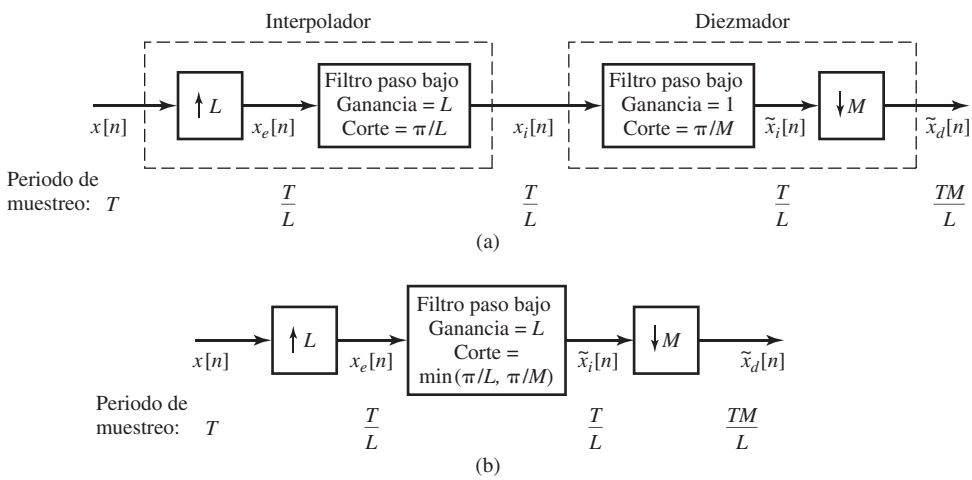


Figura 4.29 (a) Sistema para cambiar la frecuencia de muestreo por un factor no entero. (b) Versión simplificada en la que se han combinado los filtros de diezmado e interpolación.

Si $M > L$, hay un incremento neto en el periodo de muestreo (una disminución de la frecuencia de muestreo) y si $M < L$, se produce lo contrario. Como los filtros de diezmado e interpolación de la Figura 4.29(a) están en cascada, se pueden combinar como indica la Figura 4.29(b) en un único filtro paso bajo de ganancia L y frecuencia de corte igual al mínimo de π/L y π/M. Si $M > L$, la frecuencia de corte dominante es π/M, y se produce una reducción neta de la frecuencia de muestreo. Como se ha indicado en la Sección 4.6.1, si $x[n]$ se obtiene muestreando a la frecuencia de Nyquist, la secuencia $\tilde{x}_d[n]$ será una versión filtrada paso bajo de la señal de banda limitada subyacente, si deseamos evitar el solapamiento. Por el contrario, si $M < L$, la frecuencia de corte dominante es π/L y no habrá necesidad de limitar el ancho de banda de la señal por debajo de la frecuencia de Nyquist original.

Ejemplo 4.9 Conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional no entero

La Figura 4.30 ilustra el proceso de conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional. Supongamos que una señal de banda limitada cuyo espectro $X_c(j\Omega)$ se muestra en la Figura 4.30(a) se muestrea a la frecuencia de Nyquist, es decir, $2\pi/T = 2\Omega_N$. La transformada de Fourier en tiempo discreto resultante

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

se muestra en la Figura 4.30(b). Si deseamos cambiar el periodo de muestreo a $(3/2)T$, debemos interpolar primero por un factor de $L = 2$ y diezmar posteriormente con un factor de $M = 3$. Como esto implica una reducción neta de la frecuencia de muestreo y la señal original estaba muestreada a la frecuencia de Nyquist, debemos realizar un filtrado paso bajo adicional para evitar el solapamiento.

La Figura 4.30(c) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la salida del sistema de interpolación con $L = 2$. Si sólo estuviéramos interesados en interpolar con un factor de 2, podríamos escoger el filtro paso bajo con una frecuencia de corte de $\omega_c = \pi/2$ y una ganancia de $L = 2$. Sin embargo, como la salida del filtro será diezmada por un factor de $M = 3$, debemos usar una frecuencia de corte de $\omega_c = \pi/3$, pero la ganancia del filtro deberá seguir siendo de 2, como muestra la Figura 4.30(d). La transformada de Fourier $\tilde{X}_i(e^{j\omega})$ de la salida del filtro paso bajo se muestra en la Figura 4.30(e). Las regiones sombreadas indican la parte del espectro de la señal que se elimina debido a la inferior frecuencia de corte del filtro de interpolación. Finalmente, la Figura 4.30(f) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la salida del sistema de diezmado para $M = 3$. Nótese que las regiones sombreadas indican el solapamiento que se habría producido si la frecuencia de corte del filtro de interpolación hubiera sido de $\pi/2$ en lugar de $\pi/3$.

4.7. TRATAMIENTO MULTITASA DE SEÑALES

Como ya hemos visto, es posible cambiar la frecuencia de muestreo de una señal en tiempo discreto mediante una combinación de interpolación y diezmado. Por ejemplo, si deseamos que el nuevo periodo de muestreo sea de $1{,}01T$, podemos interpolar en primer lugar con un factor de $L = 100$ utilizando un filtro paso bajo con frecuencia de corte de $\omega_c = \pi/101$ y diezmar seguidamente con un factor de $M = 101$. Estos grandes cambios intermedios en la frecuencia de muestreo requerirían una carga computacional elevada para calcular cada muestra de la salida si realizáramos el filtrado de forma directa a la elevada frecuencia de muestreo intermedia. Afortunadamente, es posible reducir mucho la carga computacional si se aprovechan algunas técnicas básicas en el área de *tratamiento de señales multitasa*. Este tipo de técnicas, en general, hacen referencia al uso de interpolación, diezmado, compresores y expansores

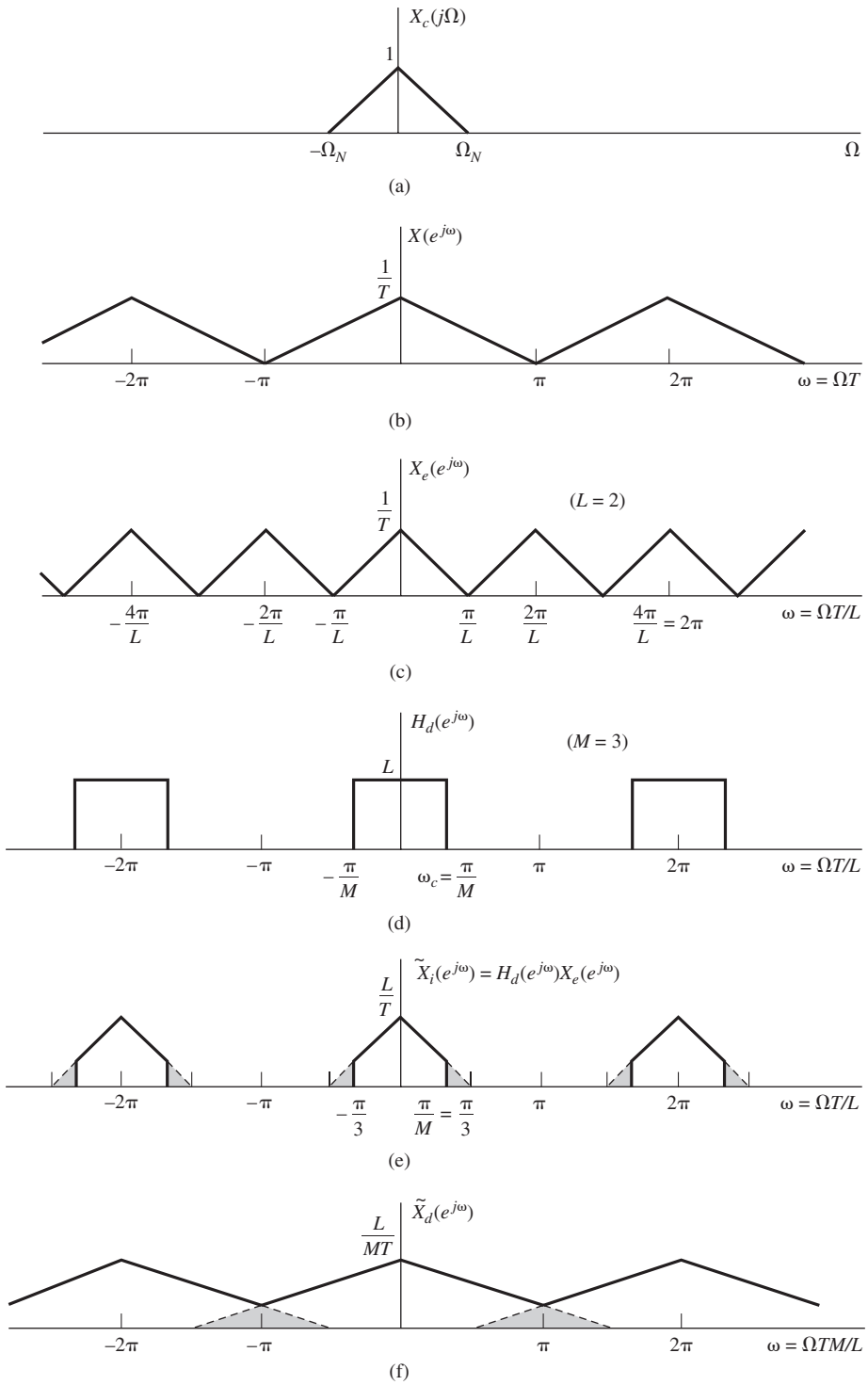


Figura 4.30 Ilustración del cambio de la frecuencia de muestreo por un factor no entero.

de diversas formas con el objeto de incrementar la eficiencia de los sistemas de tratamiento de señales. Además de su uso en la conversión de la frecuencia de muestreo, estas técnicas son muy útiles en los sistemas A/D y D/A que explotan el sobremuestreo y la conformación del ruido. Otra clase importante de algoritmos de procesado de señal que se basan en las técnicas de tratamiento de señales multitasa son los bancos de filtros para el análisis y/o tratamiento de señales.

Debido a sus amplias posibilidades de aplicación, existe un amplio cuerpo de resultados sobre las técnicas de tratamiento de señales multitasa. En esta sección, nos centraremos en dos resultados básicos y demostraremos cómo una combinación de esos resultados puede mejorar mucho la eficacia de los procedimientos de conversión de la frecuencia de muestreo. El primer resultado está relacionado con el intercambio de las operaciones de filtrado y de diezmado o interpolación. El segundo es la descomposición polifásica. Presentaremos también dos ejemplos para ilustrar la forma de utilización de las técnicas multitasa.

4.7.1. Intercambio de filtrado y compresor/expansor

Obtendremos primero dos igualdades que servirán de ayuda para manejar y entender el funcionamiento de los sistemas multitasa. Es inmediato demostrar que los dos sistemas de la Figura 4.31 son equivalentes. Para ver esta equivalencia, nótese que en la Figura 4.31(b),

$$X_b(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega M})X(e^{j\omega}), \tag{4.98}$$

y aplicando la Ecuación (4.77),

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X_b(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)}). \tag{4.99}$$

Sustituyendo la Ecuación (4.98) en la Ecuación (4.99) resulta

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)})H(e^{j(\omega-2\pi i)}). \tag{4.100}$$

Como $H(e^{j(\omega-2\pi i)}) = H(e^{j\omega})$, la Ecuación (4.100) se reduce a

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)}) \\ &= H(e^{j\omega})X_a(e^{j\omega}), \end{aligned} \tag{4.101}$$

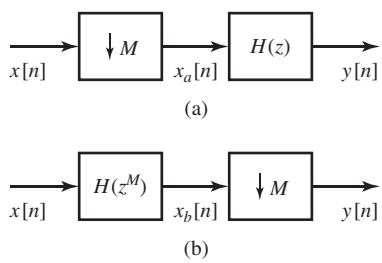


Figura 4.31 Dos sistemas equivalentes basados en las igualdades del submuestreo.

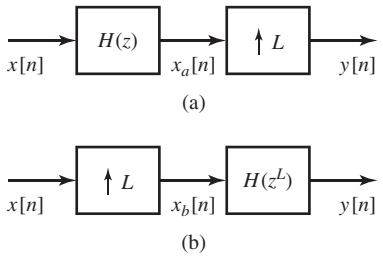


Figura 4.32 Dos sistemas equivalentes basados en las igualdades del sobremuestreo.

que corresponde a la Figura 4.31(a). Por tanto, los sistemas de las Figuras 4.31(a) y 4.31(b) son completamente equivalentes.

Se puede obtener una igualdad similar para el sobremuestreo. Concretamente, utilizando la Ecuación (4.85) de la Sección 4.6.2, es también inmediato demostrar la equivalencia de los dos sistemas de la Figura 4.32. A partir de la Ecuación (4.85) y la Figura 4.32(a),

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X_a(e^{j\omega L}) \\ &= X(e^{j\omega L})H(e^{j\omega L}). \end{aligned} \tag{4.102}$$

Como, aplicando la Ecuación (4.85),

$$X_b(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}),$$

se deduce que la Ecuación (4.102) se puede expresar de forma equivalente

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega L})X_b(e^{j\omega}),$$

que corresponde a la Figura 4.32(b).

En resumen, hemos demostrado que las operaciones de filtrado lineal y submuestreo o sobremuestreo se pueden intercambiar si modificamos el filtro lineal.

4.7.2. Diezmado e interpolación multietapa

Cuando los factores de diezmado o interpolación son grandes, es necesario utilizar filtros con respuesta al impulso muy larga para obtener aproximaciones adecuadas a los filtros paso bajo necesarios. En estos casos, puede conseguirse una reducción significativa en el coste computacional mediante el uso del diezmado o interpolación multietapa. La Figura 4.33(a) muestra un sistema de diezmado en dos etapas, en el que el factor de diezmado total es $M = M_1M_2$. En este caso, se requieren dos filtros paso bajo: $H_1(z)$ corresponde a un filtro paso bajo con frecuencia nominal de corte π/M_1 y asimismo, $H_2(z)$ tiene como frecuencia nominal de corte π/M_2. Nótese que en el caso del diezmado de una sola etapa, la frecuencia de corte nominal requerida sería $\pi/M = \pi/(M_1M_2)$, mucho menor que la de cada uno de los dos filtros. En el Capítulo 7 veremos que los filtros de banda estrecha requieren en general funciones de transferencia de orden superior para obtener aproximaciones al corte abrupto que caracteriza sus funciones de filtrado selectivo en frecuencia. Debido a este efecto, la estructura multietapa suele ser mucho más eficiente que la implementación en una sola etapa.

El sistema de una sola etapa equivalente al de la Figura 4.33(a) se puede obtener utilizando la igualdad del submuestreo de la Figura 4.31. La Figura 4.33(b) muestra el resultado de sustituir el sistema

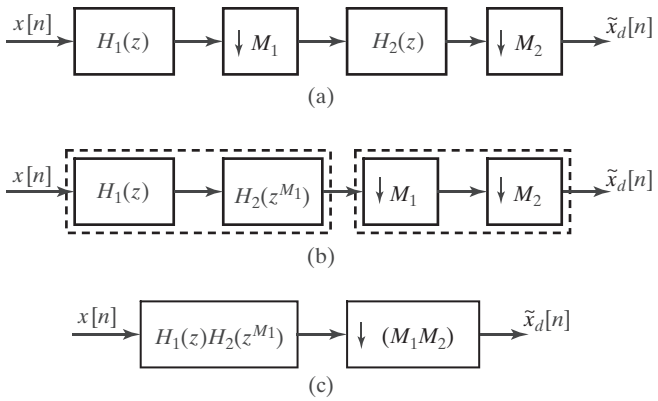


Figura 4.33 Diezmado multietapa: (a) Sistema de diezmado multietapa. (b) Modificación de (a) utilizando la igualdad del submuestreo de la Figura 4.31. (c) Diezmado monoetapa equivalente.

$H_2(z)$ y el submuestreador (con factor M_1) precedente por el sistema $H_2(z^{M_1})$ seguido por un submuestreo con factor M_1. La Figura 4.33(c) muestra el resultado de combinar la cascada de sistemas lineales y la cascada de submuestreadores en sendos sistemas monoetapa. Teniendo esto en cuenta, podemos ver que la función de transferencia del filtro paso bajo monoetapa equivalente es el producto

$$H(z) = H_1(z)H_2(z^{M_1}). \tag{4.103}$$

Esta ecuación, que se puede generalizar a cualquier número de etapas si M se puede descomponer en muchos factores, es una representación útil de la respuesta al impulso efectiva global del sistema de diezmado de dos etapas. Puesto que muestra explícitamente los efectos de los dos filtros, se puede utilizar como ayuda en el diseño de sistemas de diezmado multietapa efectivos que minimicen el coste computacional (véase Crochiere y Rabiner, 1983, Vaidyanathan, 1993 y Bellanger, 2000). La factorización de la Ecuación (4.103) se ha utilizado también directamente para el diseño de filtros paso bajo (Neuvo et al., 1984). En este contexto, el filtro con esta función de transferencia representada en la Ecuación (4.103) se denomina *filtro FIR interpolado*. Esto es debido a que la correspondiente respuesta al impulso se puede ver como la convolución de $h_1[n]$ con la segunda respuesta al impulso expandida con un factor M_1; es decir,

$$h[n] = h_1[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]\delta[n-kM_1]. \tag{4.104}$$

Se pueden aplicar los mismos principios multietapa a la interpolación, donde, en este caso, se utiliza la igualdad del sobremuestreo de la Figura 4.32 para relacionar el interpolador de dos etapas con un sistema monoetapa equivalente. Esto se ilustra en la Figura 4.34.

4.7.3. Descomposiciones polifásicas

Las descomposiciones polifásicas de una secuencia se obtienen representándola como una superposición de M subsecuencias. Cada subsecuencia está formada por la M-ésima muestra de versiones retrasadas sucesivamente de la secuencia original. Cuando esta descomposición se aplica a la respuesta al impulso de un filtro, puede conducir a estructuras de implementación de filtros lineales muy eficientes en diversos contextos. Concretamente, consideremos una respuesta al impulso $h[n]$ que se puede descomponer en M subsecuencias $h_k[n]$ con $k = 0, 1, \ldots, M-1$, como se indica a continuación

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n+k], & n = \text{entero múltiplo de } M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{4.105}$$

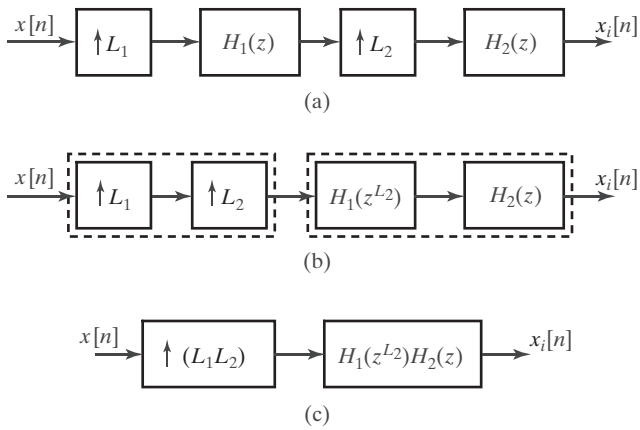


Figura 4.34 Interpolación multietapa: (a) Sistema de interpolación multietapa. (b) Modificación de (a) utilizando la igualdad del sobremuestreo de la Figura 4.31. (c) Interpolación monoetapa equivalente.

Retrasando sucesivamente esas subsecuencias, se puede reconstruir la respuesta al impulso original $h[n]$. Es decir,

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k]. \tag{4.106}$$

Esta descomposición se puede representar mediante el diagrama de bloques de la Figura 4.35. Si creamos una cadena de elementos de adelanto a la entrada y una cadena de elementos de retardo a la salida, se puede ver que el diagrama de bloques de la Figura 4.36 es equivalente al de la Figura 4.35. En la descomposición de las Figuras 4.35 y 4.36, las secuencias $e_k[n]$ son

$$e_k[n] = h[nM+k] = h_k[nM] \tag{4.107}$$

y generalmente se denominan componentes polifásicas de $h[n]$. Existen otras formas de obtener las componentes polifásicas, y otras formas de indexarlas por conveniencia notacional (Bellanger, 2000 y Vaidyanathan, 1993), pero la definición presentada en la Ecuación (4.107) es la adecuada para nuestros propósitos en esta sección.

Las Figuras 4.35 y 4.36 no son realizaciones del filtro, sino que muestran cómo se puede descomponer dicho filtro en M filtros paralelos. Podemos verlo observando que las Figuras 4.35 y 4.36 ilustran

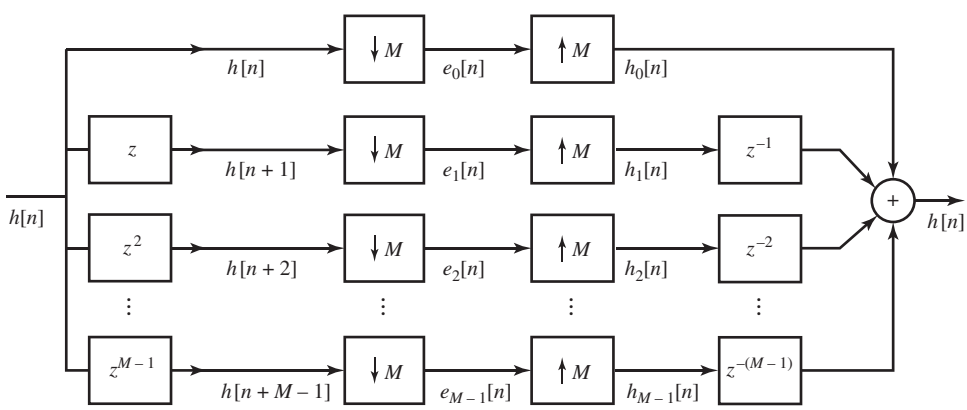


Figura 4.35 Descomposición polifásica del filtro $h[n]$ utilizando las componentes $e_k[n]$.

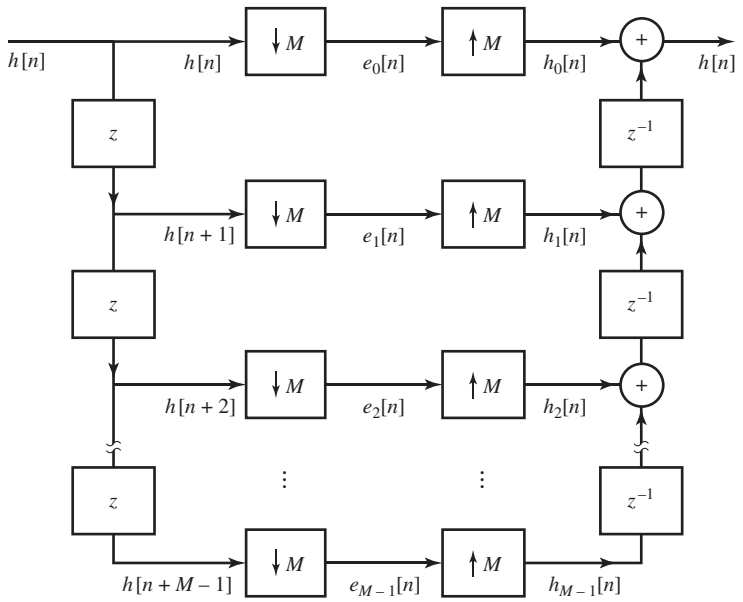


Figura 4.36 Descomposición polifásica del filtro $h[n]$ utilizando las componentes $e_k[n]$ con una cadena de retardos.

que, en el dominio de la frecuencia o de la transformada Z, la representación polifásica correspondería a expresar $H(z)$ como

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}. \tag{4.108}$$

La Ecuación (4.108) expresa la función de transferencia $H(z)$ como una suma de los filtros polifásicos retrasados. Por ejemplo, a partir de la Ecuación (4.108) se puede obtener la estructura de filtro que se muestra en la Figura 4.37.

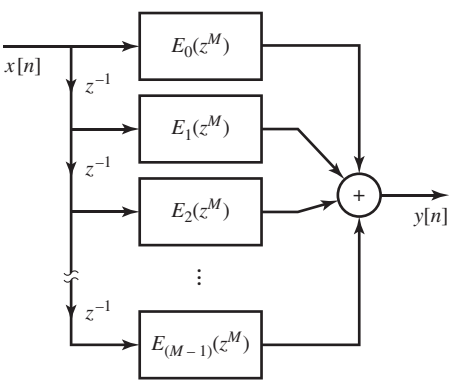


Figura 4.37 Estructura de realización basada en la descomposición polifásica de $h[n]$.

4.7.4. Interpretación polifásica de filtros de diezmado

Una de las aplicaciones importantes de la descomposición polifásica es la realización de filtros cuya salida se diezma posteriormente, como indica la Figura 4.38.

En la implementación más directa de la Figura 4.38, el filtro calcula una muestra de la salida para cada valor de n, pero en la salida sólo se retiene una de cada M muestras. Intuitivamente, podríamos esperar que fuera posible obtener una realización más eficiente en la que no se calculen las muestras que no se utilizan.

Para obtener una implementación más eficiente, podemos explotar una descomposición polifásica del filtro. Concretamente, supongamos que expresamos $h[n]$ de forma polifásica con las siguientes componentes

$$e_k[n] = h[nM + k]. \tag{4.109}$$

Utilizando la Ecuación (4.108),

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k}. \tag{4.110}$$

Teniendo en cuenta esta descomposición y el hecho de que el submuestreo y la adición son operaciones conmutativas, la Figura 4.38 se puede expresar como ilustra la Figura 4.39. Aplicando la igualdad de la Figura 4.31 al sistema de la Figura 4.39, vemos que se transforma en el sistema de la Figura 4.40.

Para ilustrar la ventaja de la Figura 4.40 en comparación con la Figura 4.38, supongamos que la temporización de la salida es de una muestra por unidad de tiempo, y que $H(z)$ es un filtro FIR de N puntos. En la realización directa de la Figura 4.38 son necesarias N multiplicaciones y $(N-1)$ sumas por unidad de tiempo. En el sistema de la Figura 4.40, cada uno de los filtros $E_k(z)$ tiene una longitud de N/M, y su salida se produce a razón de 1 muestra cada M unidades de tiempo. En consecuencia, cada filtro requiere $\frac{1}{M}\left(\frac{N}{M}\right)$ multiplicaciones por unidad de tiempo y $\frac{1}{M}\left(\frac{N}{M}-1\right)$ sumas por unidad de tiempo, y el sistema completo requiere (N/M) multiplicaciones y $\left(\frac{N}{M}-1\right)+(M-1)$ sumas por unidad de tiempo. Por tanto, podemos conseguir ahorros significativos para algunos valores de M y N.

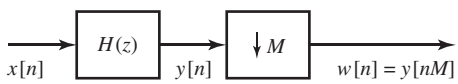


Figura 4.38 Sistema de diezmado.

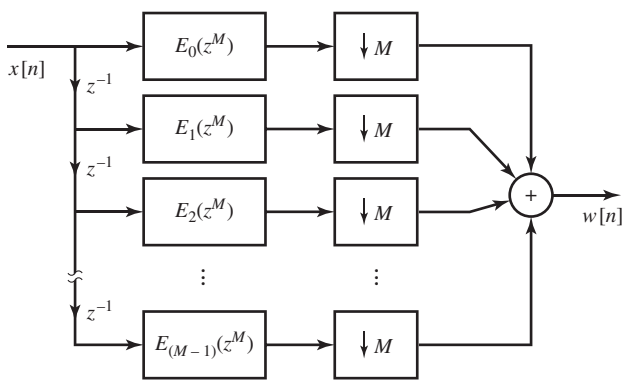


Figura 4.39 Implementación de un filtro de diezmado utilizando descomposición polifásica.

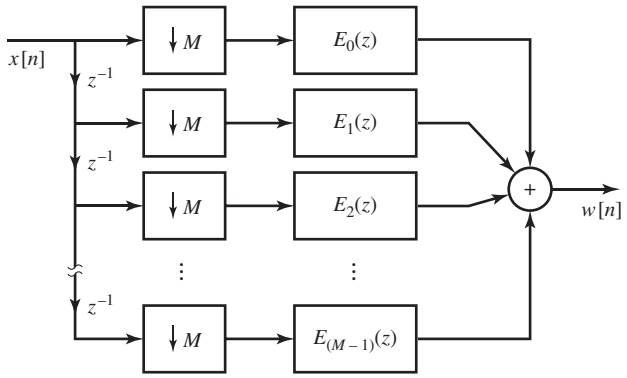


Figura 4.40 Implementación de un filtro de diezmado tras aplicar la igualdad del submuestreo a la descomposición polifásica.

4.7.5. Implementación polifásica de filtros de interpolación

Se puede conseguir un ahorro similar al conseguido para el caso del diezmado aplicando la descomposición polifásica a sistemas en los que un sobremuestreo precede a un filtro, como muestra la Figura 4.41. Como sólo es distinta de cero una muestra de cada L en $w[n]$, la implementación directa de la Figura 4.41 implicaría aplicar los coeficientes de los filtros a valores de la secuencia que se sabe que son cero. Podemos ver intuitivamente que se podría llegar a una realización más eficiente.

Para realizar el sistema de la Figura 4.41 de forma más eficiente, utilizaremos de nuevo la descomposición polifásica de $H(z)$. Por ejemplo, podemos expresar $H(z)$ como indica la Ecuación (4.110) y representar la Figura 4.41 como se muestra en la Figura 4.42. Aplicando la igualdad de la Figura 4.32, podemos convertir la Figura 4.42 en la Figura 4.43.

Para ilustrar la ventaja de la Figura 4.43 en comparación con la Figura 4.41, fíjese en que en la Figura 4.41, si la temporización de $x[n]$ es de una muestra por unidad de tiempo, la temporización de $w[n]$ es de L muestras por unidad de tiempo. Si $H(z)$ es un filtro FIR de longitud N, serán necesarias NL multiplicaciones y $(NL-1)$ sumas por unidad de tiempo. Por el contrario, la Figura 4.43 requiere, para la obtención de $y[n]$, $L(N/L)$ multiplicaciones y $L\left(\frac{N}{L}-1\right)$ sumas por unidad de tiempo para el conjunto

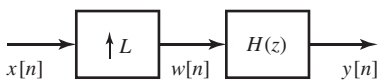


Figura 4.41 Sistema de interpolación.

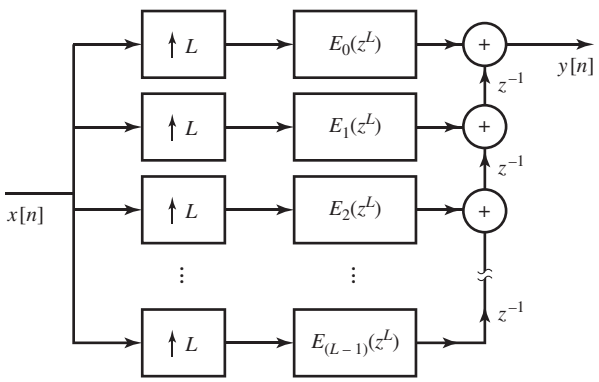


Figura 4.42 Realización de un filtro de interpolación utilizando descomposición polifásica.

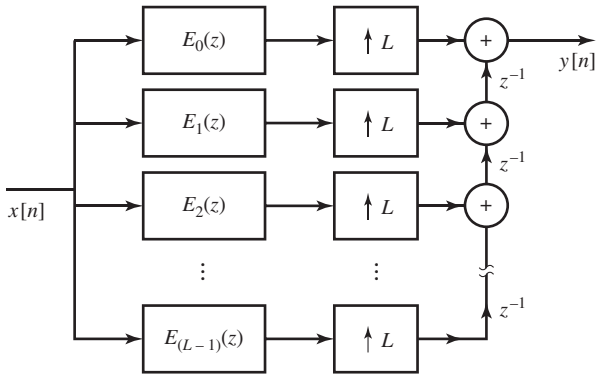


Figura 4.43 Realización de un filtro de interpolación tras aplicar la igualdad del sobremuestreo a la descomposición polifásica.

de filtros polifásicos, más $(L-1)$. Por tanto, tenemos la posibilidad de lograr un ahorro considerable en el coste computacional para algunos valores de L y N.

Tanto para el diezmado como para la interpolación, es posible ganar en eficiencia computacional reordenando las operaciones de modo que el filtrado se realice con la frecuencia de muestreo baja. En las combinaciones del diezmado y la interpolación para obtener cambios no enteros en la frecuencia de muestreo se pueden lograr ahorros significativos cuando se requieren frecuencias intermedias altas.

4.7.6. Bancos de filtros multitasa

Las estructuras polifásicas de diezmado e interpolación se utilizan ampliamente en bancos de filtros para el análisis y síntesis de señales de voz y de audio. Por ejemplo, la Figura 4.44 muestra el diagrama de bloques de un banco de filtros de análisis y síntesis de dos canales que habitualmente se emplea en aplicaciones de codificación de voz. El objetivo de la parte de análisis del sistema es dividir el espectro de frecuencias de la entrada $x[n]$ en una banda paso bajo representada por la señal submuestreada $v_0[n]$ y una banda paso alto representada por $v_1[n]$. En aplicaciones de codificación de voz y de audio las señales de los canales se cuantifican para su transmisión o su almacenamiento. Como la banda original se ha dividido nominalmente en dos partes iguales con una anchura de $\pi/2$ radianes, las velocidades de muestreo de las salidas de los filtros pueden ser 1/2 de las de la entrada, de forma que el número total de muestras por segundo no cambia.[1] Nótese que el submuestreo de la salida del filtro paso bajo expande la banda de bajas frecuencias hasta el total del intervalo $|\omega| < \pi$. Por otra parte, el submuestreo de la salida del filtro paso alto desplaza hacia abajo la banda de altas frecuencias y la expande hasta ocupar el intervalo completo $|\omega| < \pi$.

La descomposición requiere que $h_0[n]$ y $h_1[n]$ sean respectivamente respuestas al impulso de filtros paso bajo y paso alto. Una forma habitual es obtener el filtro paso alto a partir del filtro paso bajo aplicando $h_1[n] = e^{j\pi n}h_0[n]$. Esto implica que $H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\pi)})$ de modo que si $H_0(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo de banda de paso nominal $0 \leq |\omega| \leq \pi/2$, entonces $H_1(e^{j\omega})$ será un filtro paso alto con banda de paso nominal $\pi/2 < |\omega| \leq \pi$. El propósito de la parte derecha (síntesis) de la Figura 4.44 es reconstruir una aproximación a $x[n]$ a partir de las señales de los dos canales $v_0[n]$ y $v_1[n]$. Esto se realiza sobremuestreando ambas señales y pasándolas respectivamente por un filtro paso bajo $g_0[n]$ y por un filtro paso alto $g_1[n]$. Las señales interpoladas resultantes se suman para producir la salida de banda completa $y[n]$ muestreada a la frecuencia de muestreo de la entrada.

[1]Los bancos de filtros que conservan el número total de muestras por segundo se denominan bancos de filtros de *diezmado máximo*.

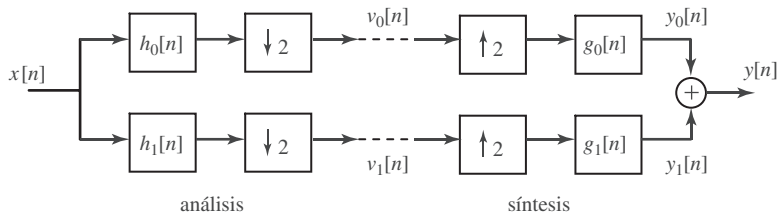


Figura 4.44 Banco de filtros de análisis y síntesis de dos canales.

Aplicando los resultados en el dominio de la frecuencia para el submuestreo y el sobremuestreo al sistema de la Figura 4.44 se llega al siguiente resultado

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j\omega}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})\right]X(e^{j\omega}) \tag{4.111a}$$

$$+\frac{1}{2}\Big[G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$+G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j(\omega-\pi)})\Big]X(e^{j(\omega-\pi)}). \tag{4.111b}$$

Si los filtros de análisis y síntesis son ideales, de modo que dividan exactamente la banda de frecuencias $0 \leq |\omega| \leq \pi$ en dos segmentos iguales sin solapamiento, entonces resulta inmediato verificar que $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$. Es decir, el banco de filtros de síntesis reconstruye exactamente la señal de entrada. Sin embargo, se puede obtener una reconstrucción perfecta o casi perfecta utilizando filtros no ideales en los que se produce solapamiento en las operaciones de submuestreo del banco de filtros de análisis. Para ver cómo es posible, nótese que el segundo término de la expresión de $Y(e^{j\omega})$ [etiquetada como Ecuación (4.111b)], que representa la potencial distorsión por solapamiento en la operación de submuestreo, se puede eliminar seleccionando los filtros de manera que

$$G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j(\omega-\pi)}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j(\omega-\pi)}) = 0. \tag{4.112}$$

Esta condición se denomina *condición de cancelación del solapamiento*. Un conjunto de condiciones que satisface la Ecuación (4.112) son

$$h_1[n] = e^{j\pi n}h_0[n] \Longleftrightarrow H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{4.113a}$$

$$g_0[n] = 2h_0[n] \Longleftrightarrow G_0(e^{j\omega}) = 2H_0(e^{j\omega}) \tag{4.113b}$$

$$g_1[n] = -2h_1[n] \Longleftrightarrow G_1(e^{j\omega}) = -2H_0(e^{j(\omega-\pi)}). \tag{4.113c}$$

Los filtros $h_0[n]$ y $h_1[n]$ se denominan *filtros especulares en cuadratura*, ya que la Ecuación (4.113a) impone simetría especular respecto a $\omega = \pi/2$. Sustituyendo estas relaciones en la Ecuación (4.111a) se llega a la relación

$$Y(e^{j\omega}) = \left[H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega-\pi)})\right]X(e^{j\omega}), \tag{4.114}$$

de donde se sigue que la reconstrucción perfecta (con un posible retardo de M muestras) requiere

$$H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega-\pi)}) = e^{-j\omega M}. \tag{4.115}$$

Se puede demostrar (Vaidyanathan, 1993) que los únicos filtros computacionalmente realizables que cumplen exactamente la Ecuación (4.115) son sistemas con respuestas al impulso de la forma $h_0[n] = c_0\delta[n-2n_0] + c_1\delta[n-2n_1-1]$, siendo n_0 y n_1 enteros elegidos arbitrariamente y $c_0c_1 = \frac{1}{4}$. Estos sistemas no pueden proporcionar las propiedades de selección abrupta en frecuencia necesarias en codificación de voz y de audio, pero para ilustrar que pueden conseguir una reconstrucción exacta, consideremos el filtro paso bajo simple de promediado móvil de dos puntos

$$h_0[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1]), \tag{4.116a}$$

cuya respuesta en frecuencia es

$$H_0(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2)e^{-j\omega/2}. \tag{4.116b}$$

Para este filtro, $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$, como se puede verificar sustituyendo la Ecuación (4.166b) en la Ecuación (4.114).

Se pueden usar tanto los filtros FIR como los IIR en el sistema de análisis/síntesis de la Figura 4.44, cumpliendo los filtros las relaciones de las Ecuaciones (4.113a)–(4.113c) para conseguir una reconstrucción casi perfecta. El diseño de esos filtros se basa en obtener un diseño de $H_0(e^{j\omega})$ que sea una aproximación paso bajo aceptable y cumpla la Ecuación (4.115) dentro de un margen aceptable de error de aproximación. En Johnston (1980) se proporciona un conjunto de filtros de ese tipo junto con un algoritmo para su diseño. Smith y Barnwell (1984) y Mintzer (1985) han demostrado que es posible una reconstrucción perfecta en el caso del banco de filtros de dos canales de la Figura 4.44, aun cuando los filtros tengan una relación entre sí diferente a la especificada por las Ecuaciones (4.113a)–(4.113c). Esta relación diferente resulta en filtros que se denominan filtros en cuadratura conjugados (CQF–*Conjugate quadrature filters*).

Las técnicas polifásicas se pueden emplear para ahorrar carga computacional en la implementación del sistema de análisis/síntesis de la Figura 4.44. Aplicando el resultado del submuestreo polifásico que se muestra en la Figura 4.40 a los dos canales, se llega al diagrama de bloques de la Figura 4.45(a), donde

$$e_{00}[n] = h_0[2n] \tag{4.117a}$$

$$e_{01}[n] = h_0[2n+1] \tag{4.117b}$$

$$e_{10}[n] = h_1[2n] = e^{j2\pi n}h_0[2n] = e_{00}[n] \tag{4.117c}$$

$$e_{11}[n] = h_1[2n+1] = e^{j2\pi n}e^{j\pi}h_0[2n+1] = -e_{01}[n]. \tag{4.117d}$$

Las Ecuaciones (4.117c) y (4.117d) demuestran que los filtros polifásicos para $h_1[n]$ son los mismos (excepto por un signo) que los de $h_0[n]$. Por tanto, sólo es necesario realizar una parte, $e_{00}[n]$ y $e_{01}[n]$. La Figura 4.45(b) muestra cómo se pueden formar $v_0[n]$ y $v_1[n]$ a partir de las salidas de los dos filtros polifásicos. Esta estructura equivalente, que sólo requiere la mitad de coste computacional que la de la Figura 4.45(a) se debe completamente, por supuesto, a la relación simple que existe entre los dos filtros.

La técnica polifásica se puede aplicar asimismo al banco de filtros de síntesis, teniendo en cuenta que los dos interpoladores se pueden sustituir por sus implementaciones polifásicas, y después combinarse dichas estructuras polifásicas, ya que $g_1[n] = -e^{j\pi n}g_0[n] = -e^{j\pi n}2h_0[n]$. La síntesis polifásica resultante se puede representar en función de los filtros polifásicos $f_{00}[n] = 2e_{00}[n]$ y $f_{01}[n] = 2e_{01}[n]$, como se ilustra en la Figura 4.46. Como en el caso del banco de filtros de análisis, los filtros polifásicos de síntesis se pueden compartir entre los dos canales, reduciéndose así el coste computacional a la mitad.

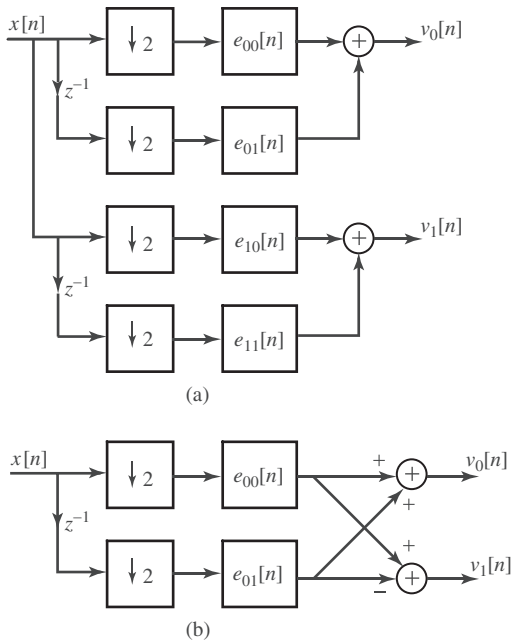


Figura 4.45 Representación polifásica del filtro de análisis de dos canales de la Figura 4.44.

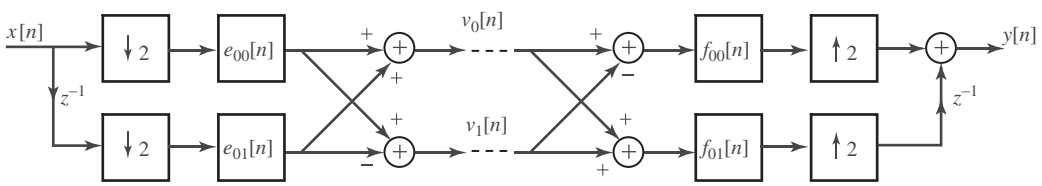


Figura 4.46 Representación polifásica del filtro de análisis y síntesis de dos canales de la Figura 4.44.

Este sistema de análisis/síntesis de dos bandas se puede generalizar a N canales de la misma anchura para obtener una descomposición más fina del espectro. Sistemas de este tipo se utilizan en codificación de audio, donde facilitan la explotación de las características de la percepción auditiva humana en la compresión de la velocidad de la información digital (véanse los estándares de codificación de audio MPEG y Spanias, Painter y Atti, 2007). Además, el sistema de dos canales se puede incorporar a una estructura en árbol para obtener un sistema de análisis/síntesis con canales espaciados uniformemente o no uniformemente. Si se utilizan los filtros en cuadratura conjugados de Barnwell y Mintzer, se puede conseguir una reconstrucción exacta, y el sistema de análisis/síntesis resultante es en esencia la transformada *wavelet*[2] discreta (véanse Vaidyanathan, 1993 y Burrus, Gopinath y Guo, 1997).

[2] *N. del T.*: se ha optado por mantener el término *wavelet* por ser de uso habitual.

4.8. PROCESADO DIGITAL DE SEÑALES ANALÓGICAS

Hasta el momento, nuestras presentaciones sobre la representación de señales en tiempo continuo mediante señales en tiempo discreto se han centrado en los modelos idealizados del muestreo periódico y en la interpolación de banda limitada. Hemos formalizado nuestra presentación en términos de un sistema idealizado de muestreo que hemos denominado *conversor ideal continuo-discreto* (C/D) y de un sistema interpolador idealizado de banda limitada que hemos denominado *conversor ideal discreto-continuo* (D/C). Estos sistemas idealizados de conversión nos permiten concentrarnos en los detalles matemáticos esenciales de las relaciones entre las señales de banda limitada y sus muestras. Por ejemplo, en la Sección 4.4 utilizamos los sistemas idealizados de conversión C/D y D/C para demostrar que los sistemas discretos lineales e invariantes con el tiempo se pueden utilizar en una configuración como la que se muestra en la Figura 4.47(a), con el fin de realizar sistemas continuos lineales e invariantes con el tiempo si la entrada es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es superior a la frecuencia de Nyquist. En términos prácticos, las señales en tiempo continuo no son precisamente de banda limitada, los filtros ideales no se pueden realizar y los conversores ideales C/D y D/C sólo se pueden aproximar mediante dispositivos que se denominan conversores analógico-digital (A/D) y digital-analógico (D/A), respectivamente. El diagrama de bloques de la Figura 4.47(b) muestra un modelo más realista para realizar el procesado digital de señales en tiempo continuo (analógicas). En esta sección examinaremos algunos de los efectos que introducen cada uno de los componentes del sistema mostrado en dicha figura.

4.8.1. Filtrado previo para evitar el solapamiento

Al procesar señales analógicas utilizando sistemas en tiempo discreto, generalmente es deseable minimizar la velocidad de muestreo. El motivo es que la cantidad de cálculo aritmético necesario para implementar el sistema es proporcional al número de muestras que hay que procesar. Si la entrada no es de banda limitada o la frecuencia de Nyquist de la entrada es demasiado alta, puede ser necesario realizar un filtrado previo. Un ejemplo de esta situación se produce en el tratamiento de señales de voz, donde a menudo sólo es necesario conservar la banda baja (hasta unos 3-4 kHz) para preservar la inteligibilidad, aún cuando la señal de voz puede tener un contenido en frecuencia significativo en la banda de 4 kHz a 20 kHz. Otras veces, aunque la señal sea ya de banda limitada, puede estar contaminada por

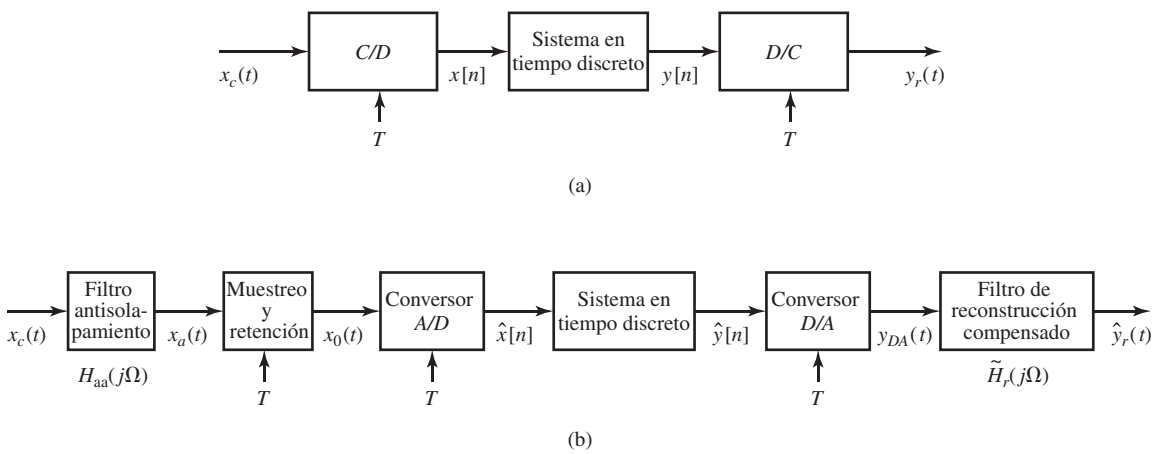


Figura 4.47 (a) Filtrado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo. (b) Procesado digital de señales analógicas.

ruido aditivo de banda ancha que puede ocupar la banda de frecuencias altas. Como resultado del proceso de muestreo, las componentes solapadas de ese ruido ocuparían las componentes de baja frecuencia. Si deseamos evitar el solapamiento, hay que forzar que la señal de entrada sea de banda limitada a las frecuencias por debajo de la mitad de la frecuencia de muestreo deseada. Esto se puede realizar mediante un filtrado paso bajo de la señal en tiempo continuo previo a la conversión C/D, como se muestra en la Figura 4.48. En este contexto, el filtro paso bajo que precede al conversor C/D se denomina *filtro antisolapamiento*. Idealmente, la respuesta en frecuencia del filtro antisolapamiento debería ser

$$H_{\text{aa}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \leq \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases} \tag{4.118}$$

Recordando la presentación de la Sección 4.4.1, se puede ver que el sistema completo desde la entrada del filtro antisolapamiento $x_a(t)$ hasta la salida $y_r(t)$, se comportará siempre como un sistema lineal e invariante con el tiempo, ya que la entrada al conversor C/D, $x_a(t)$, está limitada por el filtro antisolapamiento a la banda de frecuencias por debajo de π/T radianes/s. Por tanto la respuesta en frecuencia efectiva global del sistema de la Figura 4.48 será el producto de $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ por la respuesta en frecuencia efectiva desde $x_a(t)$ hasta $y_r(t)$. Combinando las Ecuaciones (4.118) y (4.38) obtenemos

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c. \end{cases} \tag{4.119}$$

Por tanto, para un filtro paso bajo antisolapamiento ideal, el sistema de la Figura 4.48 se comporta como un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia determinada por la Ecuación (4.119), incluso aunque $X_c(j\Omega)$ no sea de banda limitada. En la práctica, la respuesta en frecuencia $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ no puede ser idealmente de banda limitada, pero $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ puede ser pequeña para $|\Omega| > \pi/T$, con lo que el solapamiento se minimiza. En este caso, la respuesta en frecuencia global del sistema de la Figura 4.48 sería aproximadamente

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) \approx H_{\text{aa}}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}). \tag{4.120}$$

Para conseguir que la respuesta en frecuencia sea suficientemente pequeña por encima de π/T, sería necesario que $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ comience decaer, es decir, a introducir atenuación en frecuencias superiores a π/T. La Ecuación (4.120) sugiere que la atenuación no ideal del filtro antisolapamiento (así como otras distorsiones lineales e invariantes con el tiempo que se presentarán posteriormente) podría ser compensada al menos parcialmente si la tenemos en cuenta en el diseño del sistema en tiempo discreto. El Problema 4.62 ilustra esta idea.

La presentación anterior supone filtros antisolapamiento de caída brusca en la frecuencia de corte. Este tipo de filtros se puede realizar utilizando redes con componentes activos y circuitos integrados. Sin embargo, en las aplicaciones que incorporan procesadores digitales potentes y baratos, estos filtros en tiempo continuo se pueden llevar buena parte del coste del sistema completo para realizar el procesado

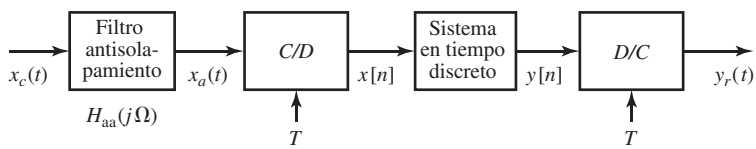


Figura 4.48 Uso de filtrado previo para evitar el solapamiento.

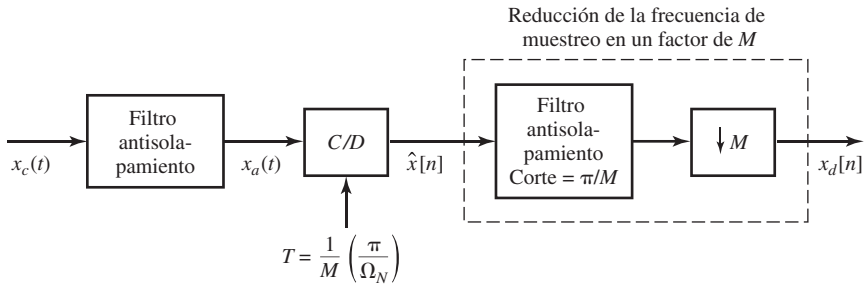


Figura 4.49 Uso de conversión A/D con sobremuestreo para simplificar un filtro antisolapamiento en tiempo continuo.

en tiempo discreto de señales analógicas. Los filtros con caídas bruscas en la frecuencia de corte son difíciles de realizar y caros, y si el sistema va a utilizar una frecuencia de muestreo variable, serían necesarios filtros ajustables. Además, los filtros con caídas bruscas en la frecuencia de corte tienen en general una respuesta de fase altamente no lineal, en particular en el borde de la banda de paso. Por tanto, hay varias razones que hacen deseable eliminar los filtros en tiempo continuo o simplificar sus requerimientos de diseño.

La Figura 4.49 muestra una solución. Ω_N indica la componente de frecuencia más alta que se va a retener después de realizar el filtrado antisolapamiento. Aplicamos primero un filtro antisolapamiento muy simple con una banda de transición gradual y con una atenuación importante en $M\Omega_N$. Realizamos seguidamente la conversión C/D a una frecuencia de muestreo mucho mayor que $2\Omega_N$, por ejemplo a $2M\Omega_N$. Después se realiza una reducción de la frecuencia de muestreo por un factor de M que incluye un filtrado antisolapamiento con caída abrupta en la frecuencia de corte. Este filtrado se realiza en el dominio de tiempo discreto. El tratamiento en tiempo discreto posterior se puede realizar a frecuencia de muestreo baja, con lo que se reduce el coste computacional.

La Figura 4.50 muestra el uso del sobremuestreo seguido de la conversión de la frecuencia de muestreo. En la Figura 4.50(a) se muestra la transformada de Fourier de una señal que ocupa la banda $|\Omega| < \Omega_N$, junto con la transformada de Fourier de lo que podría ser "ruido" o componentes no deseadas de alta frecuencia que deseamos eliminar con el filtro antisolapamiento. La línea de puntos muestra también la respuesta en frecuencia de un filtro antisolapamiento cuyo corte no es abrupto, sino que tiende a cero gradualmente a partir de la frecuencia Ω_N. La Figura 4.50(b) muestra la transformada de Fourier de la salida de este filtro. Si la señal $x_a(t)$ se muestrea con un periodo T tal que $(2\pi/T - \Omega_c) \geq \Omega_N$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $\hat{x}[n]$ será como se indica en la Figura 4.50(c). Nótese que el "ruido" tendrá solapamiento, pero que éste no afectará a la banda ocupada por la señal $|\omega| < \omega_N = \Omega_N T$. Si T y T_d se seleccionan de modo que $T_d = MT$ y $\pi/T_d = \Omega_N$, la señal $\hat{x}[n]$ se puede filtrar con un filtro en tiempo discreto de corte abrupto (que se muestra idealizadamente en la Figura 4.50(c)), de ganancia unidad y frecuencia de corte π/M. La salida del filtro en tiempo discreto se puede submuestrear por un factor de M y obtener la secuencia muestreada $x_d[n]$ cuya transformada de Fourier se muestra en la Figura 4.50(d). De este modo, el filtrado con un filtro de corte abrupto se ha realizado en tiempo discreto, y sólo se requiere un filtrado nominal en tiempo continuo. Como los filtros FIR en tiempo discreto pueden ser de fase exactamente lineal, es posible utilizar esta solución basada en sobremuestreo para realizar el filtrado antisolapamiento prácticamente sin distorsión de fase. Esta solución puede tener ventajas importantes en situaciones donde sea crítico preservar no sólo el espectro de frecuencias, sino también la forma de onda.

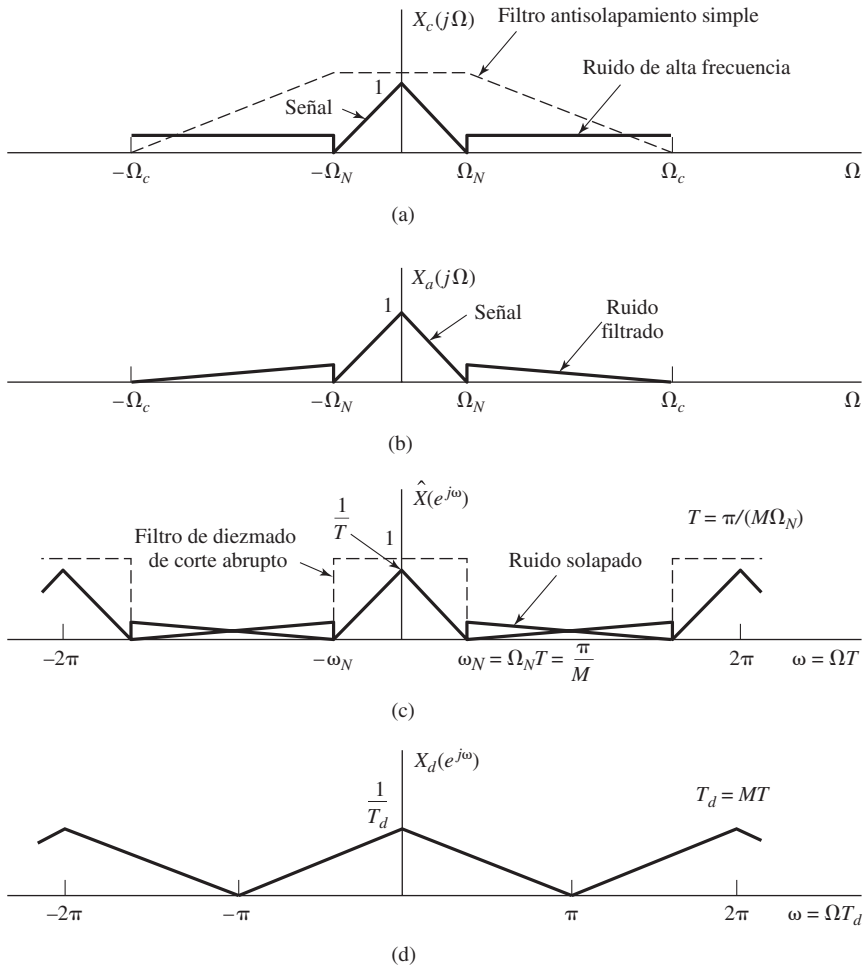


Figura 4.50 Uso de sobremuestreo seguido por diezmado en la conversión C/D.

4.8.2. Conversión A/D

Un conversor C/D ideal convierte una señal en tiempo continuo en una señal en tiempo discreto. Se supone que cada muestra se conoce con precisión infinita. El sistema de la Figura 4.51 es una aproximación a esa idea. Convierte una señal en tiempo continuo (analógica) en una señal digital, es decir, una secuencia de muestras de precisión finita o cuantificadas. Los dos sistemas que se ilustran en la Figura 4.51 son realizables con dispositivos físicos. El conversor A/D es un dispositivo físico que convierte una amplitud de tensión o corriente a su entrada en un código binario que representa la amplitud cuantificada más cercana a la amplitud de la entrada. Bajo el control de un reloj externo, el conversor A/D puede

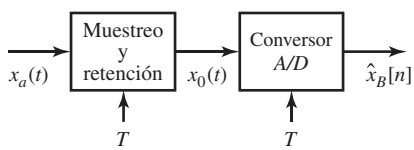


Figura 4.51 Configuración física de la conversión A/D.

iniciar y completar una conversión A/D cada T segundos. Sin embargo, la conversión no es instantánea, y por este motivo los sistemas A/D de altas prestaciones incluyen generalmente un sistema de muestreo y retención, como el que se muestra en la Figura 4.51. El sistema de muestreo y retención ideal tiene como salida

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT), \tag{4.121}$$

donde $x[n] = x_a(nT)$ son las muestras ideales de $x_a(t)$ y $h_0(t)$ es la respuesta al impulso del sistema de retención de orden cero, es decir,

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{4.122}$$

Si tenemos en cuenta que la Ecuación (4.121) puede tomar la forma equivalente

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT), \tag{4.123}$$

vemos que el sistema de muestreo y retención es equivalente a una modulación de un tren de impulsos seguido de un filtrado lineal con el sistema de retención de orden cero, como se muestra en la Figura 4.52(a). La relación entre la transformada de Fourier de $x_0(t)$ y la transformada de Fourier de $x_a(t)$ se puede obtener con el mismo estilo de razonamiento que utilizamos en la Sección 4.2. Realizaremos un análisis similar cuando presentemos el conversor D/A. Sin embargo, este análisis no es necesario en este momento, ya que todo lo que necesitamos saber sobre el comportamiento del sistema se puede obtener a partir de la expresión en el dominio del tiempo. Concretamente, la salida del sistema de retención de orden cero tiene forma de escalera. Los valores de las muestras se mantienen constantes durante el

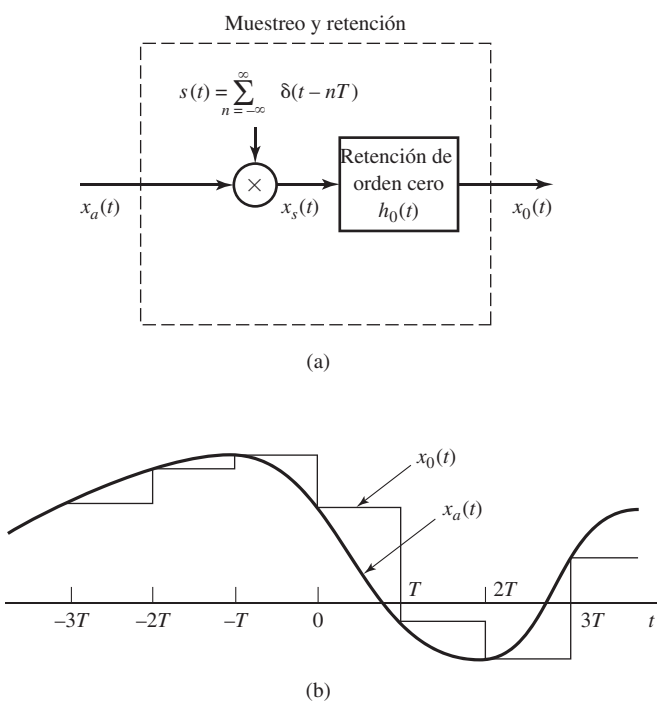


Figura 4.52 (a) Representación de un sistema ideal de muestreo y retención. (b) Señales de entrada y salida representativas en un sistema de muestreo y retención.

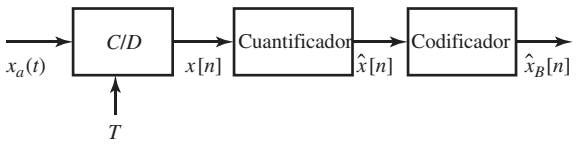


Figura 4.53 Representación conceptual del sistema de la Figura 4.51.

periodo de muestreo de T segundos. Esto se ilustra en la Figura 4.52(b). Los circuitos físicos de muestreo y retención se diseñan de forma que muestrean la señal $x_a(t)$ lo más instantáneamente posible y mantienen el valor de la muestra tan cercano a una constante como sea posible hasta que se toma la muestra siguiente. El propósito de esto es proporcionar la tensión (o corriente) constantes requeridos a la entrada del conversor A/D. Los detalles sobre la amplia variedad existente en los procesos de conversión A/D, así como sobre las implementaciones en circuitos de los sistemas de muestreo y retención y conversores A/D están fuera de los objetivos de este libro. Hay muchos aspectos prácticos a tener en cuenta al diseñar circuitos de muestreo y retención que muestreen rápidamente y mantengan constante el valor de la muestra, sin decaimiento ni picos. Asimismo, hay muchos aspectos prácticos relacionados con la velocidad y la precisión de los circuitos de conversión A/D. Todos ellos se consideran en Hnatek (1988) y Schmid (1976). Los detalles sobre las prestaciones de productos concretos se pueden encontrar en las especificaciones de los diversos fabricantes. Nuestro objetivo en esta sección es el análisis de los efectos de la cuantificación en la conversión A/D.

Como el propósito del sistema de muestreo y retención que se muestra en la Figura 4.51 es realizar el muestreo ideal y mantener el valor de la muestra para su cuantificación por el conversor A/D, podemos representar el sistema de la Figura 4.51 mediante el sistema de la Figura 4.53, en el que el conversor C/D ideal representa el muestreo realizado por el sistema de muestreo y retención y, como veremos posteriormente, el cuantificador y codificador representarán la operación del conversor A/D.

El cuantificador es un sistema no lineal cuyo propósito es transformar la muestra de entrada $x[n]$ en un valor de un conjunto finito de valores preestablecidos. Representaremos esta operación como

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \tag{4.124}$$

y llamaremos a $\hat{x}[n]$ muestra cuantificada. Los cuantificadores se pueden definir con niveles de cuantificación uniformes o no uniformes. Sin embargo, cuando se van a realizar operaciones numéricas con las muestras los pasos de cuantificación suelen ser uniformes. La Figura 4.54 muestra la característica de transferencia de un cuantificador uniforme típico[3] en el que los valores de las muestras se *redondean* hasta el nivel de cuantificación más próximo.

Conviene resaltar algunos aspectos de la Figura 4.54. En primer lugar, este cuantificador resulta apropiado para una señal cuyos valores sean positivos y negativos (señal bipolar). Si se sabe que las muestras de entrada son siempre positivas (o negativas), sería mas apropiada una distribución diferente de los niveles de cuantificación. En segundo lugar, obsérvese que el cuantificador que se muestra en la Figura 4.54 tiene un número par de niveles de cuantificación. Con un número par de niveles no es posible tener un nivel de cuantificación en la amplitud cero y tener a la vez igual número de niveles de cuantificación positivos y negativos. Generalmente el número de niveles de cuantificación será una potencia de 2, pero será bastante mayor que 8, con lo que el efecto de esta diferencia habitualmente será irrelevante.

[3]Estos cuantificadores se denominan cuantificadores *lineales* debido a la progresión lineal de los pasos de cuantificación.

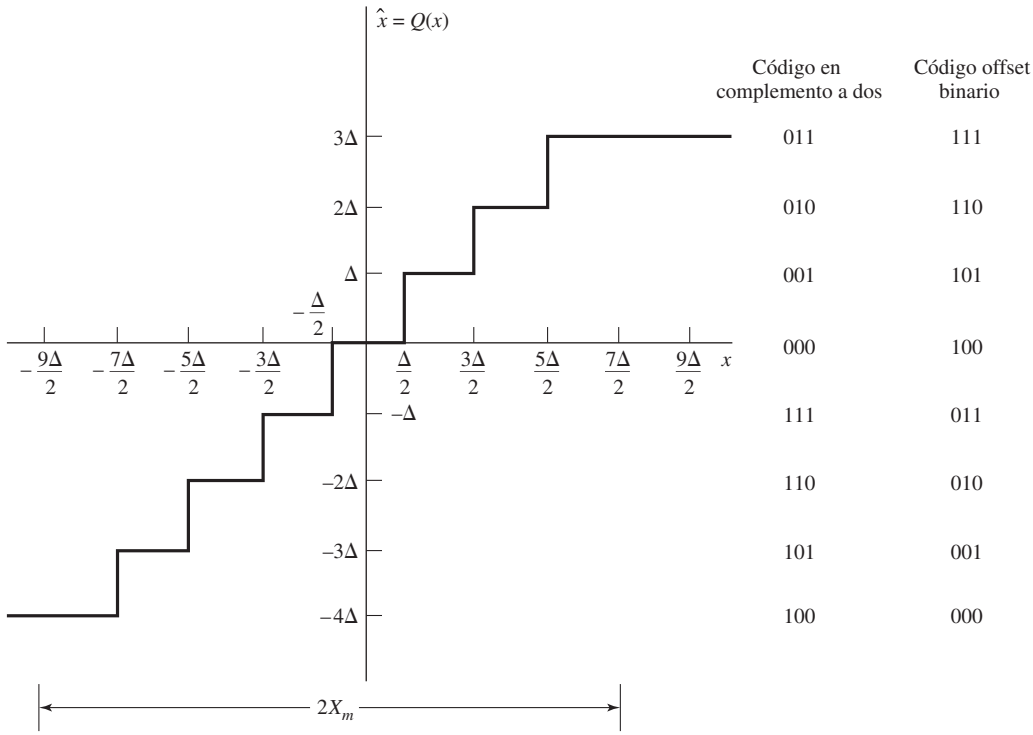


Figura 4.54 Cuantificador típico para conversión A/D.

La Figura 4.54 muestra también la codificación de los niveles de cuantificación. Como hay ocho niveles, podemos etiquetarlos utilizando un código binario de tres bits (en general, 2^{B+1} niveles se pueden codificar mediante un código binario de $(B+1)$ bits). En principio, se puede utilizar cualquier asignación de símbolos, por lo que existen múltiples esquemas de codificación binaria, cada uno con sus propias ventajas e inconvenientes en función de la aplicación. Por ejemplo, la columna de números binarios a la derecha en la Figura 4.54 muestra el esquema de codificación denominado de *offset binario* que se caracteriza porque los números binarios se van asignando en orden numérico, empezando por el nivel de cuantificación más negativo. Sin embargo, en tratamiento digital de señales, desearemos generalmente utilizar un código binario que permita realizar directamente operaciones aritméticas utilizando las palabras del código como representaciones escaladas de las muestras cuantificadas.

La columna de la izquierda de la Figura 4.54 muestra una asignación utilizando un sistema de numeración binario en complemento a dos. Este sistema de representación de números con signo es el utilizado por la mayoría de los ordenadores y microprocesadores, por lo que es quizá la forma más conveniente de etiquetar los niveles de cuantificación. Observe que el sistema de offset binario se puede convertir en un código de complemento a dos sin más que invertir el bit más significativo.

En el sistema en complemento a dos el bit situado más a la izquierda, o bit más significativo se considera como bit de signo, y los restantes bits representan enteros o fracciones en binario. Supondremos esto último, es decir, que hay un punto decimal entre los dos bits más significativos. Entonces, utilizando complemento a dos, los símbolos binarios tienen el siguiente significado para $B = 2$:

Símbolo binario	Valor numérico, $\hat{x}_B$
$0_\diamond 1\ 1$	$3/4$
$0_\diamond 1\ 0$	$1/2$
$0_\diamond 0\ 1$	$1/4$
$0_\diamond 0\ 0$	0
$1_\diamond 1\ 1$	$-1/4$
$1_\diamond 1\ 0$	$-1/2$
$1_\diamond 0\ 1$	$-3/4$
$1_\diamond 0\ 0$	-1

En general, si tenemos una fracción binaria en complemento a dos representada con $(B+1)$ bits de la forma

$$a_{0\diamond}a_1a_2\ldots a_B,$$

su valor es

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}.$$

Observe que el símbolo $\diamond$ indica el "punto decimal" del número. La relación entre las palabras del código y los niveles de la señal cuantificada dependen del parámetro X_m en la Figura 4.54. Este parámetro determina el nivel de escala máximo del conversor A/D. En la Figura 4.54 podemos ver que en general el tamaño del paso del cuantificador será

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}. \tag{4.125}$$

Los niveles de cuantificación más pequeños $(\pm\Delta)$ corresponden al bit menos significativo de la palabra del código binario. Además, la relación numérica entre las palabras del código y las muestras cuantificadas es

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n], \tag{4.126}$$

ya que estamos suponiendo que $\hat{x}_B[n]$ es un número binario tal que $-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$ (en complemento a dos). En este esquema, las muestras codificadas en binario $\hat{x}_B[n]$ son directamente proporcionales a las muestras cuantificadas (en código binario de complemento a dos) y, por tanto, se pueden usar como una representación numérica de las amplitudes de las muestras. De hecho, en general resulta apropiado suponer que la señal de entrada está normalizada, de forma que los valores numéricos de $\hat{x}[n]$ y $\hat{x}_B[n]$ son idénticos y no hay necesidad de distinguir entre las muestras cuantificadas y las muestras codificadas en binario.

La Figura 4.55 muestra un ejemplo simple de cuantificación y codificación de las muestras de una onda sinusoidal utilizando un cuantificador de tres bits. Las muestras sin cuantificar $x[n]$ se indican con puntos rellenos y las muestras cuantificadas $\hat{x}[n]$ con círculos abiertos. Se muestra también la salida de un sistema ideal de muestreo y retención. Las líneas de puntos etiquetadas como "salida del conversor D/A" se discutirán posteriormente. Además, la Figura 4.55 muestra las palabras del código de 3 bits que se usan para representar cada muestra. Nótese que como la entrada analógica $x_a(t)$ sobrepasa el margen dinámico del cuantificador, algunas muestras positivas resultan "truncadas".

Aunque una buena parte de la exposición anterior se centra en la codificación de los niveles de cuantificación utilizando complemento a dos, los principios básicos de la cuantificación y de la codificación en la conversión A/D son los mismos independientemente del código binario utilizado para representar las muestras. En textos de aritmética de computadores se puede encontrar una presentación más detallada de los sistemas de aritmética binaria que se emplean en computación digital (véase por

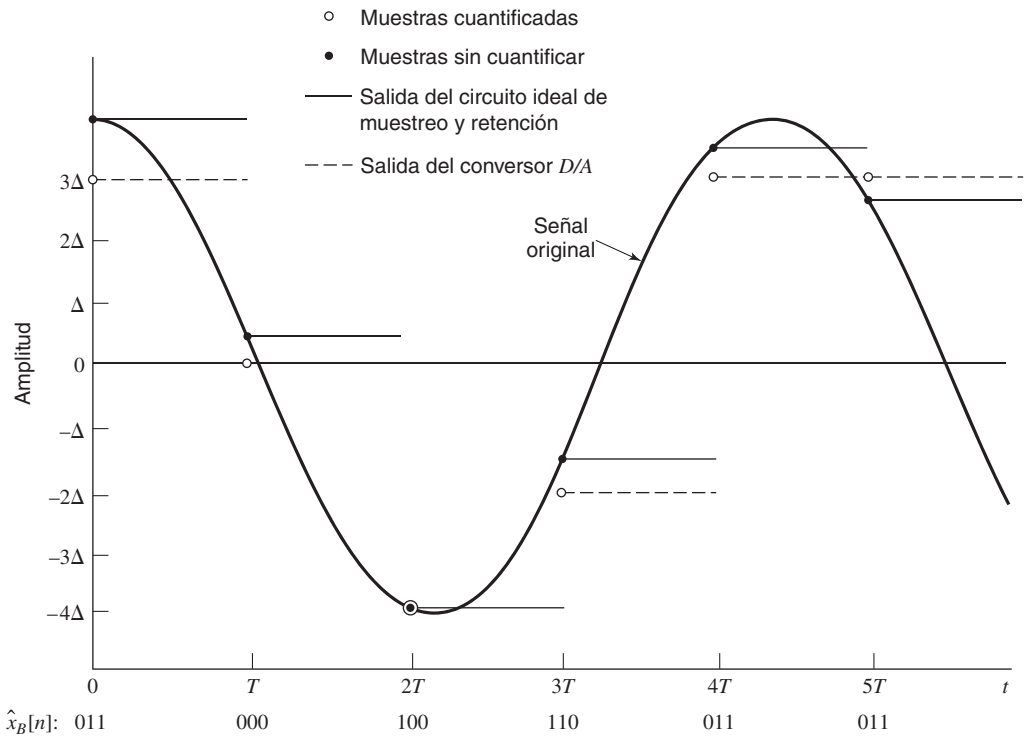


Figura 4.55 Muestreo, cuantificación, codificación y conversión D/A con un cuantificador de 3 bits.

ejemplo Knuth, 1997). Nos centraremos a continuación en el análisis de los efectos de la cuantificación. Como este análisis no depende de la asignación de las palabras del código binario, nos permitirá extraer conclusiones generales.

4.8.3. Análisis de los errores de cuantificación

Observando las Figuras 4.54 y 4.55 vemos que la muestra cuantificada $\hat{x}[n]$ será en general diferente del verdadero valor de la muestra $x[n]$. La diferencia entre ambas se denomina *error de cuantificación,* y se define como

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]. \tag{4.127}$$

Por ejemplo, para el cuantificador de 3 bits de la Figura 4.54, si $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$, entonces $\hat{x}[n] = \Delta$, y se cumplirá que

$$-\Delta/2 \leq e[n] < \Delta/2. \tag{4.128}$$

En el caso de la Figura 4.54, la Ecuación (4.128) se cumplirá siempre que

$$-9\Delta/2 < x[n] \leq 7\Delta/2. \tag{4.129}$$

En el caso general de un cuantificador de $(B+1)$ bits con Δ dado por la Ecuación (4.125), el error de cuantificación satisface la Ecuación (4.128) siempre que

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m - \Delta/2). \tag{4.130}$$

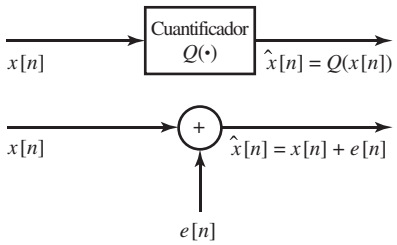


Figura 4.56 Modelo de ruido aditivo del cuantificador.

Si $x[n]$ está fuera de este intervalo, como ocurre en la muestra en $t = 0$ de la Figura 4.55, el error de cuantificación es de módulo superior a $\Delta/2$, y se dice que esas muestras están *truncadas*, y que el cuantificador está *saturado*.

La Figura 4.56 muestra un modelo del cuantificador simplificado pero útil. En este modelo, las muestras del error de cuantificación se consideran como una señal de ruido aditivo. El modelo es exactamente equivalente al cuantificador si conocemos $e[n]$. Sin embargo, en la mayoría de los casos $e[n]$ no es conocida. En esos casos, resulta útil un modelo estadístico basado en la Figura 4.56 para representar los efectos de la cuantificación. Utilizaremos un modelo de este tipo en los Capítulos 6 y 9 para describir los efectos de la cuantificación en los algoritmos de tratamiento de señales. La representación estadística de los errores de cuantificación se basa en los siguientes supuestos:

1. La secuencia de error $e[n]$ es una muestra de un proceso aleatorio estacionario.
2. La secuencia de error está incorrelada con la secuencia $x[n]$.[4]
3. Las variables aleatorias del proceso de error están incorreladas. Es decir, el error es un proceso de ruido blanco.
4. La distribución de probabilidad del proceso de error es uniforme en el intervalo del error de cuantificación.

Como veremos posteriormente, los anteriores supuestos nos conducen a un análisis sencillo pero efectivo de los efectos de la cuantificación que puede producir predicciones útiles de las prestaciones del sistema. Es fácil encontrar situaciones en las que esos supuestos no son válidos. Por ejemplo, si $x_a(t)$ es una función escalón, las suposiciones anteriores no se justifican. Sin embargo, cuando la señal es complicada, como la voz o la música, y fluctúa rápidamente de una forma impredecible, los supuestos son más realistas. Diversos análisis teóricos y medidas experimentales realizados para señales de entrada aleatorias han mostrado que si la señal se vería de forma cada vez más más complicada, la correlación medida entre la señal y el error de cuantificación disminuye, y el error se va haciendo más incorrelado, y las muestras de error se van haciendo a su vez más incorreladas (véanse Benett, 1948; Widrow, 1956, 1961; Sripad y Snyder, 1977 y Widrow y Kollár, 2008). En un sentido heurístico, los supuestos del modelo estadístico parecen ser válidos si la señal es lo suficientemente compleja y los pasos de cuantificación suficientemente pequeños, de forma que sea verosímil suponer que la señal atraviesa muchos pasos de cuantificación entre una muestra y la siguiente.

[4]Por supuesto, esto no implica independencia estadística, ya que el error está directamente determinado por la señal de entrada.

Ejemplo 4.10 Error de cuantificación para una señal sinusoidal

Como ejemplo, la Figura 4.57(a) muestra la secuencia de muestras no cuantificadas de la señal tipo coseno $x[n] = 0{,}99\cos(n/10)$. La Figura 4.57(b) muestra la secuencia de muestras cuantificadas $\hat{x}[n] = Q\{x[n]\}$ para un cuantificador de 3 bits ($B+1=3$), suponiendo que $X_m = 1$. Las líneas de puntos en esta figura muestran los ocho posibles niveles de cuantificación. Las Figuras 4.57(c) y 4.57(d) muestran el error de cuantificación $e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$ para una cuantificación de 3 bits y de 8 bits, respectivamente. En cada caso, la escala del error de cuantificación se ajusta de forma que el intervalo $\pm\Delta/2$ es el indicado por las líneas de puntos.

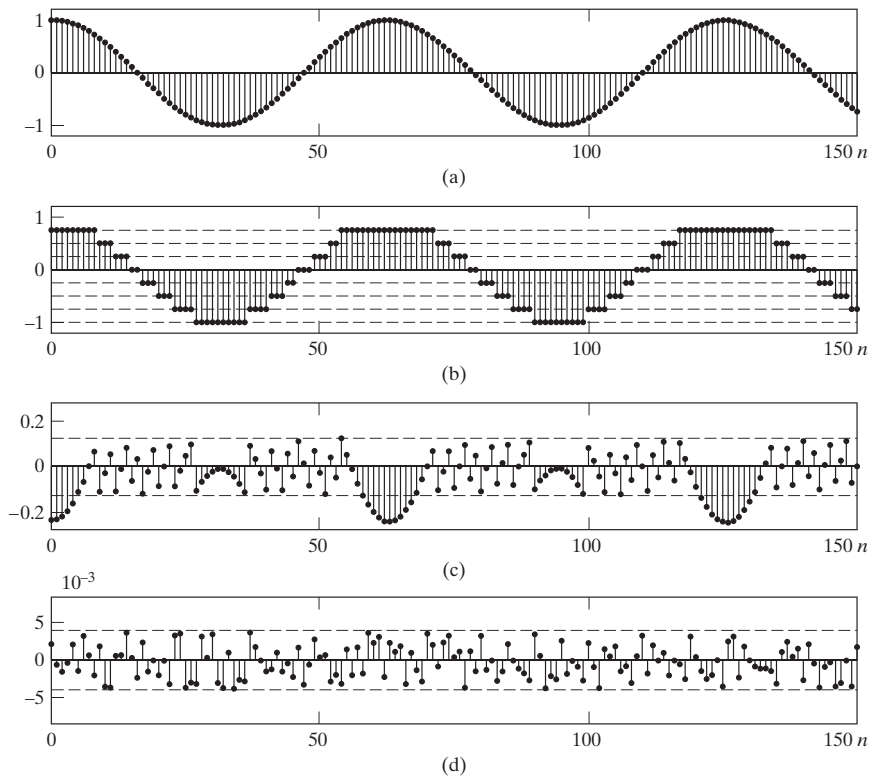


Figura 4.57 Ejemplo de ruido de cuantificación. (a) Muestras sin cuantificar de la señal $x[n] = 0{,}99\cos(n/10)$. (b) Muestras cuantificadas del coseno del apartado (a) utilizando un cuantificador de 3 bits. (c) Secuencia de error de cuantificación para la cuantificación con 3 bits de la señal de (a). (d) Secuencia de error de cuantificación para la cuantificación con 8 bits de la señal de (a).

Nótese que en el caso de 3 bits, la señal de error está altamente correlada con la señal sin cuantificar. Por ejemplo, alrededor de los picos positivos y negativos del coseno, la señal cuantificada permanece constante durante muchas muestras consecutivas, con lo que el error tiene la forma de la secuencia de entrada durante esos intervalos. Observe también que durante los intervalos alrededor de los picos positivos, el error es de módulo superior a $\Delta/2$, ya que el nivel de la señal es demasiado grande para la selección de parámetros del cuantificador. Por otra parte, el error de cuantificación con 8 bits no

presenta patrones específicos[5]. Una inspección visual de estas figuras permite confirmar las afirmaciones anteriores sobre las propiedades del ruido de cuantificación para el caso de cuantificación fina (8 bits). Es decir, las muestras del error parecen variar de forma aleatoria, sin correlación aparente con la señal sin cuantificar, y su intervalo de variación está entre $-\Delta/2$ y $+\Delta/2$.

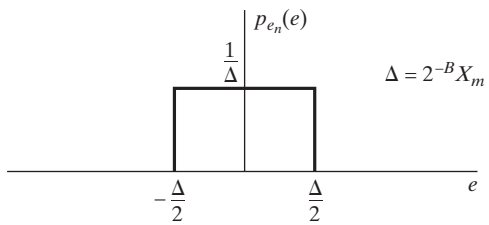


Figura 4.58 Función densidad de probabilidad del error de cuantificación para un cuantificador de redondeo como el que se muestra en la Figura 4.54.

Para el caso de cuantificadores que redondean el valor de la muestra al nivel de cuantificación más cercano, como el que se muestra en la Figura 4.54, la amplitud del ruido de cuantificación está en el intervalo

$$-\Delta/2 \leq e[n] < \Delta/2. \tag{4.131}$$

Para Δ pequeño, es razonable suponer que $e[n]$ es una variable aleatoria con distribución uniforme entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$. Por tanto, la función densidad de probabilidad de primer orden del ruido de cuantificación tiene el aspecto que se muestra en la Figura 4.58. Si en lugar de redondeo se utiliza truncamiento, el error siempre será negativo, y asumiríamos una distribución uniforme entre $-\Delta$ y 0. Para completar el modelo estadístico del ruido de cuantificación, supondremos que las sucesivas muestras del ruido están incorreladas entre sí, y que $e[n]$ está incorrelada con $x[n]$. Por tanto, supondremos que $e[n]$ es una secuencia de ruido blanco con distribución uniforme. El valor medio de $e[n]$ es cero, y su varianza es

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}. \tag{4.132}$$

Para un cuantificador de $(B+1)$ bits con margen dinámico X_m, la varianza o potencia del ruido es

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}. \tag{4.133}$$

La Ecuación (4.133) completa el modelo de ruido blanco para el ruido de cuantificación, ya que la función de autocorrelación sería $\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m]$ y correspondiente densidad espectral de potencia sería

$$P_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12} \qquad |\omega| \leq \pi. \tag{4.134}$$

[5]Para señales periódicas como el coseno, el error de cuantificación sería también por supuesto periódico. Por tanto, su espectro de potencia estaría concentrado en múltiplos de la frecuencia de la señal de entrada. En este ejemplo utilizamos la frecuencia $\omega_0 = 1/10$ para evitar que aparezca este efecto.

Ejemplo 4.11 Medidas de ruido de cuantificación

Para confirmar e ilustrar la validez del modelo de ruido de cuantificación, consideremos de nuevo la cuantificación de la señal $x[n] = 0{,}99\cos(n/10)$ que se puede realizar con precisiones de 64 bits en coma flotante (a todos los efectos, sin cuantificar), y cuantificarse después con $B+1$ bits. Se puede calcular también la secuencia de ruido de cuantificación, ya que conocemos tanto la entrada como la salida del cuantificador. Es habitual utilizar un histograma de amplitudes, que proporciona la cuenta del número de muestras contenidas en cada intervalo de un conjunto de amplitudes contiguas, para estimar la distribución de probabilidad de una señal aleatoria. La Figura 4.59 muestra histogramas del ruido de cuantificación para los casos de cuantificación con 16 y 8 bits y $X_m = 1$. Como el número total de muestras es de 101000 y el número de intervalos del histograma es de 101, es razonable suponer aproximadamente 1000 muestras en cada intervalo si la distribución del ruido es uniforme. Además, el intervalo total de muestras debería ser $\pm 1/2^{16} = 1{,}53 \times 10^{-5}$ para la cuantificación con 16 bits y $\pm 1/2^{8} = 3{,}9 \times 10^{-3}$ para la cuantificación con 8 bits. Los histogramas de la Figura 4.59 son consistentes con esos valores, aunque en el caso de 8 bits aparece alguna obvia desviación de la distribución uniforme.

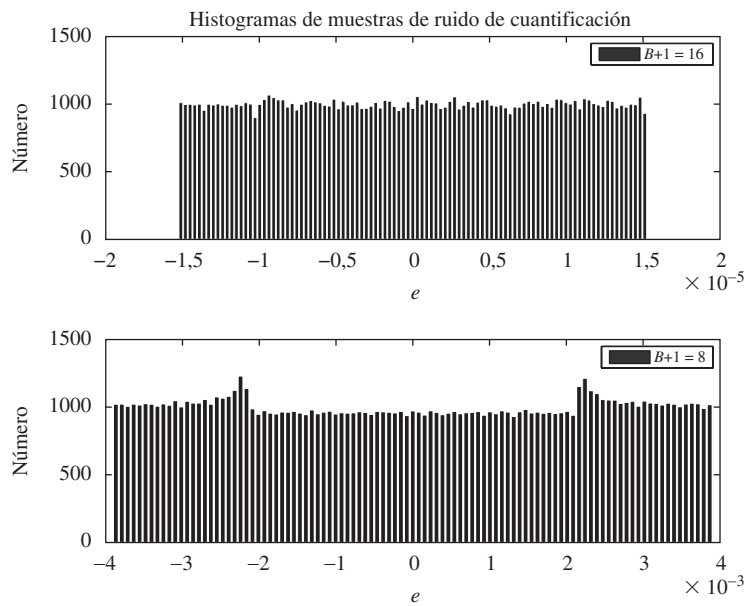


Figura 4.59 Histogramas del ruido de cuantificación para (a) $B+1 = 16$ y (b) $B+1 = 8$.

En el Capítulo 10 veremos cómo calcular estimaciones de la densidad espectral de potencia. La Figura 4.60 muestra estas estimaciones para las señales de ruido de cuantificación con $B+1 = 16, 12, 8$ y 4 bits. Observe que, en este ejemplo, cuando el número de bits es 8 o mayor, el espectro es bastante plano en el intervalo completo de frecuencia $0 \leq \omega \leq \pi$, y el nivel del espectro (en dB) es muy cercano al valor

$$10\log_{10}(P_{ee}(e^{j\omega})) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{12(2^{2B})}\right) = -(10{,}79 + 6{,}02B),$$

el cual ha sido predicho por el modelo de ruido blanco con distribución uniforme. Nótese que las curvas para $B = 7, 11,$ y 15 difieren aproximadamente 24 dB en todas las frecuencias. Sin embargo, fíjese en que cuando $B+1 = 4$, el modelo falla al predecir la forma del espectro de potencia del ruido.

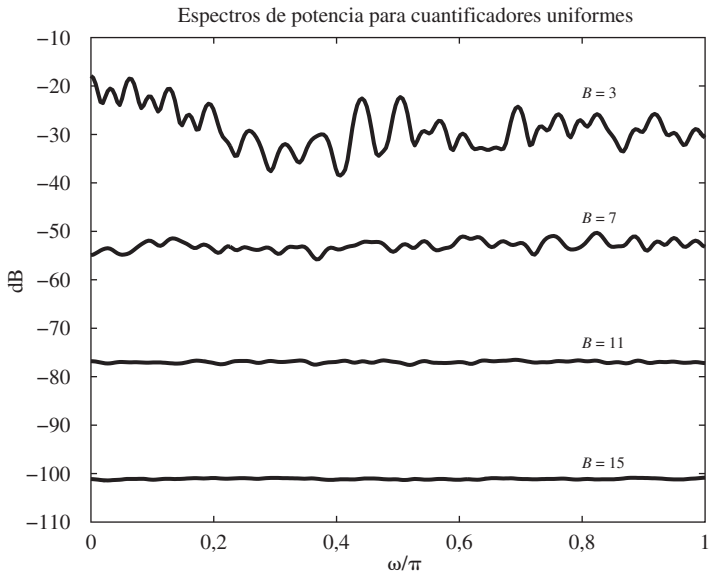


Figura 4.60 Espectros del ruido de cuantificación para varios valores de B.

Este ejemplo demuestra que el modelo del ruido de cuantificación asumido es útil en la predicción de las prestaciones de los cuantificadores uniformes. Una medida común de la cantidad de degradación de una señal en ruido aditivo en general y en ruido de cuantificación en particular es la relación señal-ruido (SNR–*Signal-to-Noise Ratio*), que se define como la razón entre la varianza (potencia) de la señal y la varianza del ruido. Expresada en dB, la relación señal a ruido de cuantificación de un cuantificador uniforme de $(B+1)$ bits es

$$\begin{aligned}\mathrm{SNR}_Q &= 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{12\cdot 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}\right)\\ &= 6{,}02B + 10{,}8 - 20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right).\end{aligned} \tag{4.135}$$

A partir de la Ecuación (4.135) podemos ver que la relación señal-ruido se incrementa aproximadamente 6 dB por cada bit que se añade a la longitud de palabra de las muestras cuantificadas, es decir, al doblar el número de niveles de cuantificación. Es importante considerar el término

$$-20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) \tag{4.136}$$

de la Ecuación (4.135). Recordemos en primer lugar que X_m es un parámetro del cuantificador, y tendrá habitualmente un valor fijo en un sistema real concreto. σ_x es el valor rms de la amplitud de la señal, necesariamente inferior a la amplitud de pico de la misma. Por ejemplo, si $x_a(t)$ es una onda sinusoidal de amplitud de pico X_p, entonces $\sigma_x = X_p/\sqrt{2}$. Si σ_x es demasiado grande, la amplitud de pico de la señal será mayor que la amplitud de escala completa X_m del conversor A/D. En este caso la Ecuación (4.135) no será válida, y se producirá una distorsión severa. Por el contrario, si σ_x es demasiado pequeño,

el término correspondiente a la Ecuación (4.136) se hace grande y negativo, con lo que la relación señal-ruido de la Ecuación (4.135) disminuye. De hecho, se ve fácilmente que cuando σ_x se reduce a la mitad, la relación señal-ruido disminuye en 6 dB. Por tanto, es muy importante que la amplitud de la señal se ajuste cuidadosamente al margen dinámico del conversor A/D.

Ejemplo 4.12 SNR para una señal sinusoidal

Utilizando la señal $x[n] = A\cos(n/10)$, se puede calcular el error de cuantificación para diferentes valores de $B+1$ con $X_m = 1$ y para diferentes valores de A. La Figura 4.61 muestra la SNR estimada en función de X_m/σ_x obtenida calculando la potencia media a partir de muchas muestras de la señal y dividiéndola por la correspondiente estimación de la potencia media del ruido. Es decir,

$$\mathrm{SNR}_Q = 10\log_{10}\left(\frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(e[n])^2}\right),$$

donde, en el caso de la Figura 4.61, $N = 101000$.

Observe que las curvas de la Figura 4.61 cumplen muy bien la Ecuación (4.135) en un amplio margen de valores de B. En particular, las curvas son líneas rectas en función de $\log(X_m/\sigma_x)$, y están desplazadas entre sí 12 dB ya que los valores de B varían de dos en dos. La SNR crece a medida que X_m/σ_x decrece, ya que al aumentar σ_x con X_m fijo la señal utiliza más niveles de cuantificación disponibles. Nótese sin embargo la caída abrupta de las curvas cuando $X_m/\sigma_x \to 1$. Como $\sigma_x = 0{,}707A$ en una onda sinusoidal, la amplitud A se hace mayor que $X_m = 1$ y aparece un truncamiento severo. Por tanto, la SNR disminuye rápidamente cuando la amplitud sobrepasa el valor de X_m.

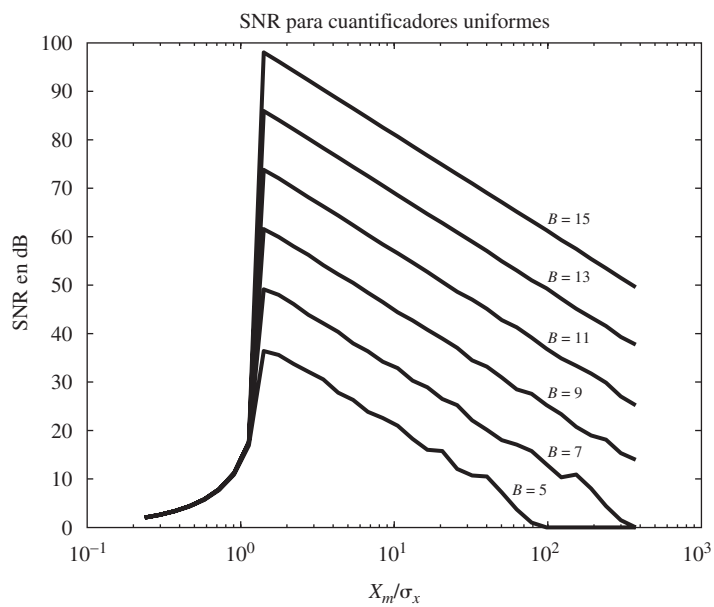


Figura 4.61 Relación señal a ruido de cuantificación en función de $X_m/_x$ para varios valores de B.

Para el caso de señales analógicas como voz o música, la distribución de las amplitudes tiende a concentrarse alrededor de cero y cae rápidamente al aumentar la amplitud. En estos casos, la probabilidad de que el módulo de una muestra sea mayor que tres o cuatro veces el valor rms es muy baja. Por ejemplo, si la amplitud de la señal tuviera una distribución gaussiana, sólo el 0,064 por ciento de las muestras tendrían una amplitud mayor que $4\sigma_x$. Por tanto, para evitar que se recorten los picos de la señal, y de acuerdo con nuestro modelo estadístico, se deben establecer las ganancias de los filtros y amplificadores que preceden al conversor A/D de forma que $\sigma_x = X_m/4$. Utilizando este valor de σ_x en la Ecuación (4.135) obtenemos

$$\mathrm{SNR}_Q \approx 6B - 1{,}25 \text{ dB}. \tag{4.137}$$

Por ejemplo, para obtener una relación señal–ruido del orden de 90-96 dB, necesaria en la grabación y reproducción musical de alta calidad, se requiere una cuantificación con 16 bits. Pero no debe olvidarse que estas prestaciones sólo se obtendrán si la señal de entrada se ajusta cuidadosamente al margen dinámico del conversor A/D.

Este compromiso existente entre la amplitud de pico de la señal y el tamaño absoluto del ruido de cuantificación es fundamental en cualquier proceso de cuantificación. En el Capítulo 6 veremos de nuevo su importancia cuando hablemos del ruido de redondeo al implementar sistemas lineales en tiempo discreto.

4.8.4. Conversión D/A

En la Sección 4.3 presentamos la forma en la que se puede reconstruir una señal de banda limitada a partir de una secuencia de muestras utilizando un filtro paso bajo ideal. En términos de transformadas de Fourier, la reconstrucción se representa como

$$X_r(j\Omega) = X\left(e^{j\Omega T}\right)H_r(j\Omega), \tag{4.138}$$

siendo $X\left(e^{j\omega}\right)$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de muestras y $X_r(j\Omega)$ la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo reconstruida. El filtro de reconstrucción ideal es

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \tag{4.139}$$

Para esta selección de $H_r(j\Omega)$, la relación correspondiente entre $x_r(t)$ y $x[n]$ es

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}. \tag{4.140}$$

El sistema que toma la secuencia $x[n]$ como entrada y produce $x_r(t)$ como salida se denomina *conversor D/C ideal*. La contrapartida realizable del conversor D/C ideal es el *conversor digital-analógico* (conversor D/A), seguido de un filtro paso bajo analógico. Como muestra la Figura 4.62, un conversor D/A toma una secuencia de palabras en código binario a su entrada, $\hat{x}_B[n]$ y produce a su salida una señal en tiempo continuo de la forma

$$\begin{aligned} x_{DA}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t-nT), \end{aligned} \tag{4.141}$$

Figura 4.62 Diagrama de bloques de un conversor D/A.

siendo $h_0(t)$ la respuesta al impulso de un filtro de retención de orden cero, dada en la Ecuación (4.122). Las líneas de puntos de la Figura 4.55 muestran la salida de un conversor D/A para las muestras cuantificadas de la onda sinusoidal. Nótese que el conversor D/A mantiene el valor de la muestra cuantificada durante un periodo de una muestra de la misma forma que el sistema de muestreo y retención mantiene el valor no cuantificado de la muestra de entrada. Si utilizamos el modelo de ruido aditivo para representar los efectos de la cuantificación, la Ecuación (4.141) se convierte en

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t-nT). \tag{4.142}$$

Para simplificar nuestro planteamiento, definamos

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT), \tag{4.143}$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t-nT), \tag{4.144}$$

De esta forma, la Ecuación (4.142) se puede escribir como

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t). \tag{4.145}$$

La componente de señal $x_0(t)$ está relacionada con la señal de entrada $x_a(t)$, ya que $x[n] = x_a(nT)$. La señal de ruido $e_0(t)$ depende de las muestras del ruido de cuantificación $e[n]$ de la misma forma que $x_0(t)$ depende de las muestras sin cuantificar de la señal. La transformada de Fourier de la Ecuación (4.143) es

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn}\right) H_0(j\Omega) \\ &= X\left(e^{j\Omega T}\right)H_0(j\Omega). \end{aligned} \tag{4.146}$$

Como

$$X\left(e^{j\Omega T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right), \tag{4.147}$$

se deduce que

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)\right] H_0(j\Omega). \tag{4.148}$$

Si $X_a(j\Omega)$ es de banda limitada a frecuencias por debajo de π/T, las copias desplazadas de $X_a(j\Omega)$ no producirán solapamiento en la Ecuación (4.148). Definiendo un filtro de reconstrucción compensado

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}, \tag{4.149}$$

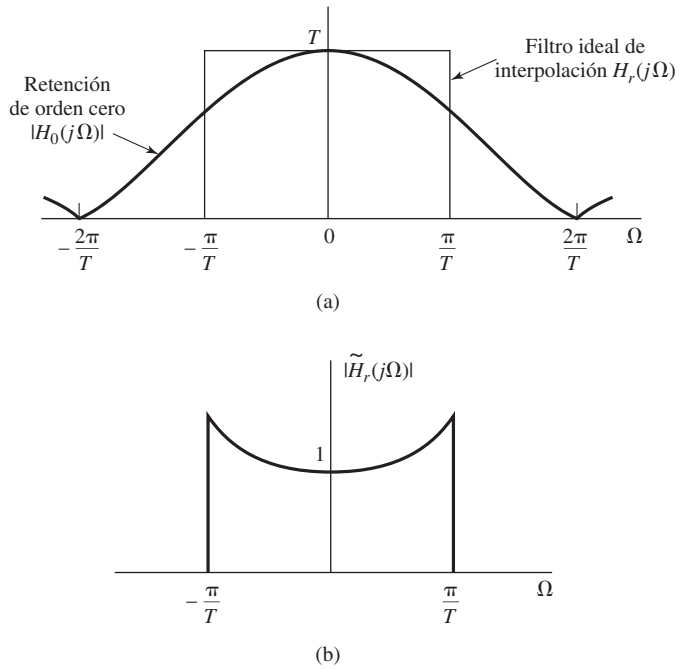


Figura 4.63 (a) Respuesta en frecuencia de un filtro de retención de orden cero comparada con la del filtro de interpolación ideal. (b) Filtro de reconstrucción ideal compensado para ser utilizado a la salida de un filtro de retención de orden cero.

la salida del filtro será $x_a(t)$ cuando la entrada sea $x_0(t)$. Se puede demostrar fácilmente que la respuesta en frecuencia del filtro de retención de orden cero es

$$H_0(j\Omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}. \tag{4.150}$$

Por tanto, el filtro de reconstrucción compensado es

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \dfrac{\Omega T/2}{\mathrm{sen}(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \tag{4.151}$$

La Figura 4.63(a) muestra $|H_0(j\Omega)|$ de acuerdo a la Ecuación (4.150), comparándola con el módulo del filtro de interpolación ideal $|H_r(j\Omega)|$ dado en la Ecuación (4.139). Ambos filtros tienen una ganancia de T en $\Omega = 0$, pero el filtro de retención de orden cero, aunque es de naturaleza paso bajo, no presenta un corte abrupto en $\Omega = \pi/T$. La Figura 4.63(b) muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal compensado que se utiliza después de un sistema de reconstrucción basado en un filtro de retención de orden cero, como el del conversor D/A. La respuesta de fase se correspondería idealmente con un avance en el tiempo de $T/2$ segundos, para compensar el retardo introducido por el filtro de retención de orden cero. Como un avance en el tiempo no se puede realizar en una aproximación práctica en tiempo real al filtro ideal de reconstrucción compensado, normalmente sólo se compensa el módulo de la respuesta en frecuencia. Incluso a veces, tampoco se realiza esa compensación ya que la ganancia del filtro de retención de orden cero sólo baja a $2/\pi$ (o -4 dB) en $\Omega = \pi/T$.

La Figura 4.64 muestra un conversor D/A seguido por un filtro de reconstrucción ideal compensado. De acuerdo con lo que acabamos de decir, como el filtro de reconstrucción compensado sigue al

conversor D/A, la señal reconstruida será

$$\begin{aligned}\hat{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}.\end{aligned} \tag{4.152}$$

En otras palabras, la salida será

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t), \tag{4.153}$$

siendo $e_a(t)$ una señal de ruido blanco de banda limitada.

Reconsiderando la Figura 4.47(b), estamos ya en posición de entender el comportamiento de los sistemas para realizar el tratamiento digital de señales analógicas. Si suponemos que la salida del filtro antisolapamiento es de banda limitada a frecuencias inferiores a π/T, que $\tilde{H}_r(j\Omega)$ es de banda limitada de forma similar y que el sistema en tiempo discreto es lineal e invariante, la salida del sistema completo será de la forma

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t), \tag{4.154}$$

siendo

$$TY_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{\text{aa}}(j\Omega)X_c(j\Omega), \tag{4.155}$$

y donde $H_{\text{aa}}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ y $\tilde{H}_r(j\Omega)$ son las respuestas en frecuencia del filtro antisolapamiento, el filtro de retención de orden cero del conversor A/D y del filtro paso bajo de reconstrucción, respectivamente. $H(e^{j\Omega T})$ es la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto. Similarmente, suponiendo que el ruido de cuantificación introducido por el conversor A/D es ruido blanco de varianza $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, se puede demostrar que el espectro de potencia del ruido de salida es

$$P_{e_a}(j\Omega) = |\tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})|^2\sigma_e^2, \tag{4.156}$$

es decir, el ruido de cuantificación a la entrada es modificado por las sucesivas etapas de filtrado en tiempo continuo y en tiempo discreto. De la Ecuación (4.155) se deduce que, asumiendo el modelo del ruido de cuantificación y bajo la hipótesis de solapamiento despreciable, la respuesta en frecuencia global desde $x_c(t)$ a $\hat{y}_r(t)$ es

$$TH_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{\text{aa}}(j\Omega). \tag{4.157}$$

Si el filtro antisolapamiento es ideal, como en la Ecuación (4.118), y la compensación del filtro de reconstrucción es ideal, como en la Ecuación (4.151), la respuesta efectiva en frecuencia será la expresada en la Ecuación (4.119). En otro caso, la Ecuación (4.157) nos proporciona un modelo razonable para la respuesta efectiva. Nótese que la Ecuación (4.157) sugiere que la compensación de imperfecciones en cualquiera de los cuatro términos podría, en principio, ser incluida en cualquiera de los otros términos. Es decir, el sistema en tiempo discreto puede incluir una compensación apropiada del filtro antisolapamiento, del filtro de retención de orden cero, del filtro de reconstrucción o de todos ellos.

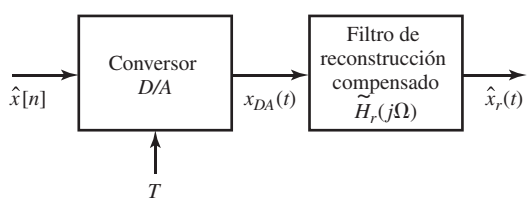


Figura 4.64 Configuración física de la conversión digital-analógica.

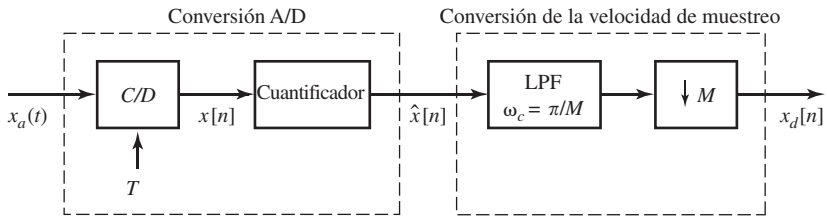


Figura 4.65 Conversión A/D sobremuestreada con cuantificación simple y diezmado.

Además del filtrado que indica la Ecuación (4.157), la Ecuación (4.154) nos recuerda que la salida estará también contaminada por el ruido de cuantificación filtrado. En el Capítulo 6 veremos que también se puede introducir ruido en la realización del sistema lineal en tiempo discreto. Este ruido interno será, en general, filtrado por partes de la implementación del sistema en tiempo discreto, por el sistema de retención de orden cero del conversor D/A y por el filtro de reconstrucción.

4.9. SOBREMUESTREO Y CONFORMACIÓN DE RUIDO EN LA CONVERSIÓN A/D Y D/A

En la Sección 4.8.1 demostramos que con sobremuestreo puede ser posible realizar un filtro antisolapamiento de corte abrupto mediante la incorporación de filtrado digital y diezmado. Como veremos en la Sección 4.9.1, mediante sobremuestreo, filtrado posterior en tiempo discreto y diezmado se puede permitir también un incremento del tamaño del paso del cuantificador Δ o, equivalentemente, una reducción del número de bits necesarios en la conversión analógico-digital. En la Sección 4.9.2 veremos cómo se puede reducir aún más el tamaño del paso utilizando sobremuestreo junto con realimentación del ruido de cuantificación, y en la Sección 4.9.3 veremos cómo se puede aplicar el principio de sobremuestreo en la conversión D/A.

4.9.1. Conversión A/D sobremuestreada con cuantificación directa

Para explorar la relación entre el sobremuestreo y el tamaño del paso de cuantificación, consideremos el sistema que se muestra en la Figura 4.65. Para analizar el efecto del sobremuestreo en este sistema, consideremos que $x_a(t)$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio, de media cero, con densidad espectral de potencia $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ y función de autocorrelación $\phi_{x_a x_a}(\tau)$. Para simplificar nuestra presentación, supondremos inicialmente que $x_a(t)$ es de banda limitada a Ω_N, es decir,

$$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq \Omega_N, \tag{4.158}$$

y supondremos también que $2\pi/T = 2M\Omega_N$. La constante M, que se supone entera, se denomina *razón de sobremuestreo*. Utilizando el modelo de ruido aditivo presentado en detalle en la Sección 4.8.3 podemos sustituir la Figura 4.65 por la Figura 4.66. El filtro de diezmado de la Figura 4.66 es un filtro paso bajo ideal de ganancia unidad y frecuencia de corte $\omega_c = \pi/M$. Como el sistema completo de la Figura 4.66 es lineal, la salida $x_d[n]$ tiene dos componentes, una debida a la señal de entrada $x_a(t)$ y otra debida al ruido de cuantificación de entrada $e[n]$. Denominaremos a esas componentes $x_{da}[n]$ y $x_{de}[n]$, respectivamente.

Nuestro objetivo es determinar el cociente entre la potencia de señal $\mathscr{E}\{x_{da}^2[n]\}$ y la potencia de ruido de cuantificación $\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\}$ en la señal de salida $x_d[n]$ en función del tamaño del paso del cuantificador y la razón de sobremuestreo M. Como el sistema de la Figura 4.66 es lineal y el ruido se supone incorrelado con la señal, podemos tratar las dos fuentes de forma separada para calcular las respectivas potencias de las componentes de la señal y del ruido a la salida.

Consideremos en primer lugar la componente de señal a la salida. Comencemos por relacionar la densidad espectral de potencia, la función de autocorrelación y la potencia de señal de la señal muestreada $x[n]$ con las correspondientes funciones de la señal analógica en tiempo continuo $x_a(t)$. Sean $\phi_{xx}[m]$ y $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $x[n]$, respectivamente. Por definición, $\phi_{xx}[m] = \mathscr{E}\{x[n+m]x[n]\}$, y como $x[n] = x_a(nT)$ y $x[n+m] = x_a(nT+mT)$,

$$\mathscr{E}\{x[n+m]x[n]\} = \mathscr{E}\{x_a((n+m)T)x_a(nT)\}. \tag{4.159}$$

Por tanto,

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{x_a x_a}(mT); \tag{4.160}$$

es decir, la función de autocorrelación de la secuencia de muestras es una versión muestreada de la función de autocorrelación de la correspondiente señal en tiempo continuo. En particular, la hipótesis de estacionariedad en sentido amplio implican que $\mathscr{E}\{x_a^2(t)\}$ es una constante independiente de t. Por tanto se deduce que

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\} = \mathscr{E}\{x_a^2(nT)\} = \mathscr{E}\{x_a^2(t)\} \qquad \text{para todo } n \text{ o } t. \tag{4.161}$$

Como las densidades espectrales de potencia son las transformadas de Fourier de las funciones de autocorrelación, como consecuencia de la Ecuación (4.160),

$$\Phi_{xx}(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{x_a x_a}\left[j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]. \tag{4.162}$$

Suponiendo que la entrada es de banda limitada como indica la Ecuación (4.158), y suponiendo sobremuestreo por un factor de M tal que $2\pi/T = 2M\Omega_N$, obtenemos, sustituyendo $\Omega = \omega/T$ en la Ecuación (4.162),

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\Phi_{x_a x_a}\left(j\dfrac{\omega}{T}\right), & |\omega| < \pi/M, \\ 0, & \pi/M < \omega \le \pi. \end{cases} \tag{4.163}$$

Por ejemplo, si $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ es como se muestra en la Figura 4.67(a), y escogemos la frecuencia de muestreo como $2\pi/T = 2M\Omega_N$, entonces $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ será como se indica en la Figura 4.67(b).

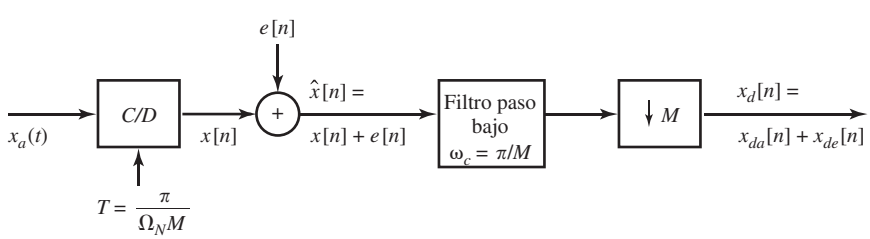


Figura 4.66 Sistema de la Figura 4.65 con el cuantificador sustituido por un modelo de ruido lineal.

Es instructivo demostrar que la Ecuación (4.161) es cierta utilizando la densidad espectral de potencia. La potencia total de la señal analógica original es

$$\mathscr{E}\{x_a^2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega)d\Omega.$$

Utilizando la Ecuación (4.163), la potencia total de la señal muestreada es

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega \tag{4.164}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{1}{T}\Phi_{x_a x_a}\left(j\frac{\omega}{T}\right)d\omega. \tag{4.165}$$

Utilizando el hecho de que $\Omega_N T = \pi/M$ y realizando el cambio $\Omega = \omega/T$ en la Ecuación (4.165) se obtiene

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega)d\Omega = \mathscr{E}\{x_a^2(t)\}.$$

Por tanto, la potencia total de la señal muestreada y la potencia total de la señal analógica original tienen exactamente el mismo valor. Como el filtro de diezmado es un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/M$, la señal $x[n]$ pasa sin alteración por el filtro. Entonces, la componente a la salida de la señal diezmada, $x_{da}[n] = x[nM] = x_a(nMT)$, tiene también la misma potencia total. Esto se puede ver a partir de la densidad espectral de potencia teniendo en cuenta que, como $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ es de banda limitada a $|\omega| < \pi/M$,

$$\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \Phi_{xx}(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$$

$$= \frac{1}{M}\Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.166}$$

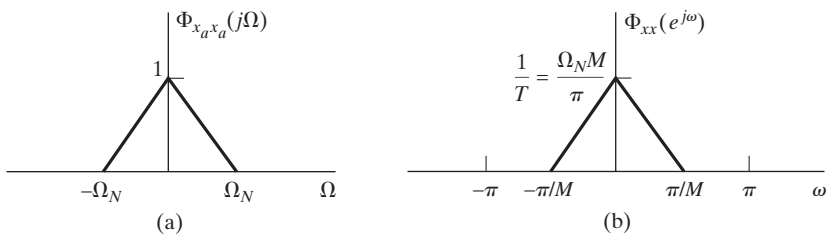


Figura 4.67 Ilustración del escalado en amplitud y frecuencia entre $\Phi_{x_a x_a}(j)$ y $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$.

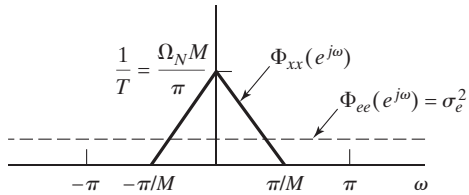


Figura 4.68 Densidad espectral de potencia de la señal y del ruido de cuantificación con un factor de sobremuestreo de M.

Utilizando la Ecuación (4.166) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\{x_{da}^2[n]\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{M}\Phi_{xx}(e^{j\omega/M})d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M}\Phi_{xx}(e^{j\omega})\,d\omega = \mathscr{E}\{x^2[n]\},
\end{aligned}$$

que demuestra que la potencia de la componente de señal no se altera al atravesar el sistema completo desde la entrada $x_a(t)$ hasta la correspondiente componente a la salida $x_{da}[n]$. En términos de densidad espectral de potencia, esto ocurre porque para cada escalado del eje de frecuencia que se produce como resultado del muestreo, aparece un escalado en la amplitud que lo compensa, de forma que el área encerrada bajo la densidad espectral de potencia no varía al ir pasando mediante el muestreo desde $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ a $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ y finalmente a $\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})$.

Consideremos ahora la componente de ruido generada por el proceso de cuantificación. De acuerdo con el modelo de la Sección 4.8.3, supongamos que $e[n]$ es un proceso aleatorio de ruido blanco estacionario en sentido amplio, con media cero y varianza[6]

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}.$$

En consecuencia, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $e[n]$ son, respectivamente,

$$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2\delta[m] \tag{4.167}$$

y

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \qquad |\omega| < \pi. \tag{4.168}$$

En la Figura 4.68, se muestra la densidad espectral de potencia de $e[n]$ y de $x[n]$. La densidad espectral de potencia de la señal cuantificada $\hat{x}[n]$ es la suma de ambas, ya que nuestro modelo supone independientes las muestras de señal y de ruido de cuantificación.

Aunque ya hemos demostrado que las potencias de $x[n]$ y de $e[n]$ no dependen de M, vemos que a medida que la razón de sobremuestreo M aumenta, menos espectro del ruido de cuantificación se solapa con el espectro de la señal. Este efecto del sobremuestreo es el que nos permite mejorar la relación señal-ruido de cuantificación reduciendo la frecuencia de muestreo. Concretamente, el filtro paso bajo

[6]Como el proceso aleatorio tiene media cero, la potencia media y la varianza tienen el mismo valor.

ideal elimina el ruido de cuantificación en la banda $\pi/M < |\omega| \leq \pi$, y deja inalteradas las componentes de la señal. La potencia de ruido a la salida del filtro paso bajo ideal es

$$\mathscr{E}\{e^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sigma_e^2 d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M}.$$

A continuación se diezma la salida del filtro paso bajo y, como hemos visto, la potencia de señal en la salida diezmada permanece constante. La Figura 4.69 muestra la densidad espectral de potencia resultante tanto para $x_{da}[n]$ como para $x_{de}[n]$. Comparando las Figuras 4.68 y 4.69 vemos que el área encerrada bajo la densidad espectral de potencia de la señal no ha cambiado, debido al escalado inverso de los ejes de frecuencia y amplitud. Pero, por otra parte, la potencia de ruido de la salida diezmada es la misma que en la salida del filtro paso bajo, es decir,

$$\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_e^2}{M} d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{\Delta^2}{12M}. \tag{4.169}$$

Por tanto, la potencia de ruido de cuantificación $\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\}$ se ha reducido por un factor de M a través del filtrado y el diezmado, mientras que la potencia de señal permanece constante.

A partir de la Ecuación (4.169) se puede ver que, dada una determinada potencia de ruido de cuantificación, hay un compromiso entre el factor de sobremuestreo M y el tamaño del paso Δ del cuantificador. La Ecuación (4.125) indica que para un cuantificador con $(B+1)$ bits y un nivel de señal máximo entre $\pm X_m$, el tamaño del paso es

$$\Delta = X_m/2^B,$$

y por tanto,

$$\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\} = \frac{1}{12M}\left(\frac{X_m}{2^B}\right)^2. \tag{4.170}$$

La Ecuación (4.170) demuestra que para un cuantificador fijo, la potencia de ruido se puede reducir aumentando la razón de sobremuestreo M. Como la potencia de señal es independiente de M, al aumentar M aumentará la relación señal-ruido de cuantificación. Alternativamente, dada una potencia fija de ruido de cuantificación, $P_{de} = \mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\}$, el valor de B es

$$B = -\frac{1}{2}\log_2 M - \frac{1}{2}\log_2 12 - \frac{1}{2}\log_2 P_{de} + \log_2 X_m. \tag{4.171}$$

La Ecuación (4.170) indica que cada vez que se dobla la razón de sobremuestreo M, se necesita $1/2$ bit menos para mantener una determinada relación señal-ruido de cuantificación. En otras palabras, si sobremuestreamos con un factor de $M = 4$, será necesario un bit menos para representar la señal con la exactitud deseada.

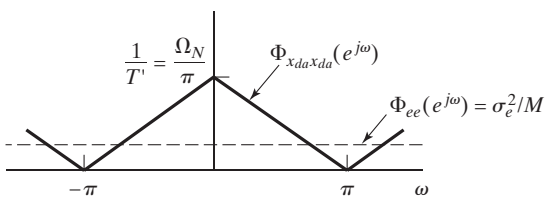


Figura 4.69 Densidad espectral de potencia de la señal y el ruido de cuantificación tras el submuestreo.

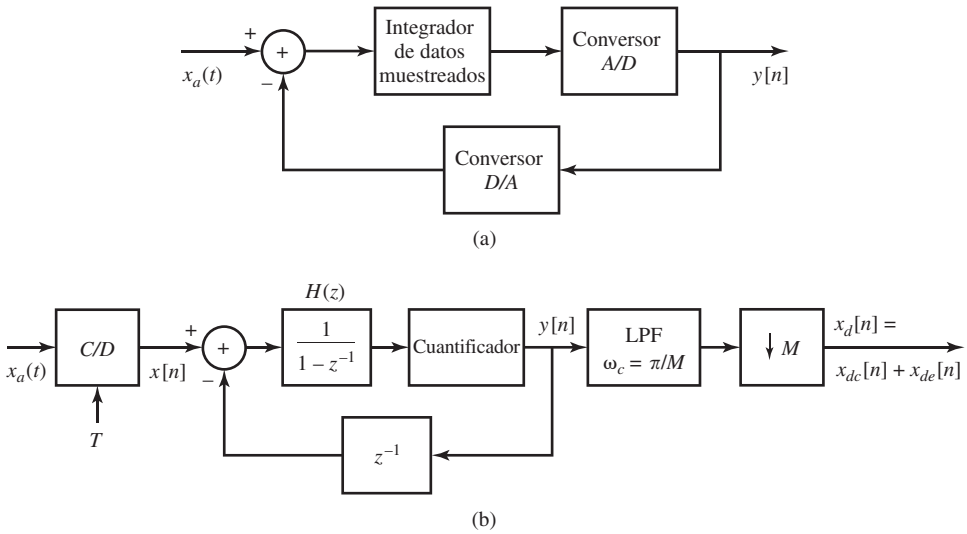


Figura 4.70 Cuantificador sobremuestreado con conformación de ruido.

4.9.2. Conversión A/D sobremuestreada con conformación de ruido

En la sección anterior hemos demostrado que el uso del sobremuestreo y el diezmado pueden mejorar la relación señal-ruido de cuantificación. Merece la pena subrayar este resultado. Implica que, en principio, podemos utilizar una cuantificación muy cruda en nuestro muestreo inicial de la señal y, si la relación de sobremuestreo es suficientemente elevada, podemos obtener todavía una representación precisa de las muestras originales realizando procesado digital de las muestras con ruido. El problema de lo que hemos visto hasta ahora es que, para conseguir una reducción significativa del número de bits necesario, hacen falta razones de sobremuestreo muy elevadas. Por ejemplo, para reducir el número de bits de 16 a 12 sería necesario un valor de $M = 4^4 = 256$. Parece que el coste es alto. Sin embargo, el principio básico del sobremuestreo puede producir ganancias mucho mayores si lo combinamos con el concepto de conformación del espectro del ruido mediante realimentación.

Como se indica en la Figura 4.68, utilizando cuantificación directa la densidad espectral de potencia de ruido de cuantificación es constante en toda la banda de frecuencias. El concepto de conformación de ruido se basa en modificar el procedimiento de conversión A/D de forma que la densidad espectral de potencia de ruido de cuantificación no sea uniforme, sino que su forma sea tal que la mayoría de la potencia de ruido esté fuera de la banda $|\omega| < \pi/M$. De esa forma, el proceso subsiguiente de filtrado y submuestreo eliminará más potencia de ruido de cuantificación.

El cuantificador con conformación de ruido, denominado generalmente modulador Delta-Sigma de datos muestreados, se ilustra en la Figura 4.70 (véanse Candy y Temes, 1992 y Schreier y Themes, 2005). La Figura 4.70(a) muestra el diagrama de bloques de la realización del sistema con circuitos integrados. El integrador se realiza en tiempo discreto mediante condensadores conmutados. El conversor A/D se puede realizar de muchas formas, pero generalmente es un cuantificador de 1 bit o comparador. El conversor D/A toma la salida digital y la transforma de nuevo en un pulso analógico que se resta de la señal a la entrada del integrador. Este sistema se puede representar mediante el equivalente en tiempo discreto que se muestra en la Figura 4.70(b). El integrador realizado mediante condensadores conmutados toma la forma de un sistema acumulador, y el retardo en la vía de realimentación representa el retardo que introduce el conversor D/A.

Como hicimos antes, modelaremos el error de cuantificación como una fuente de ruido aditivo, con lo que el sistema de la Figura 4.70 se puede sustituir por el modelo lineal de la Figura 4.71. En este sistema, la salida $y[n]$ es la suma de dos componentes: $y_x[n]$ debida únicamente a la entrada $x[n]$ y $\hat{e}[n]$ debida únicamente al ruido $e[n]$.

Llamaremos $H_x(z)$ a la función de transferencia de $x[n]$ a $y[n]$, y $H_e(z)$ a la función de transferencia de $e[n]$ a $y[n]$. Estas funciones de transferencia se pueden calcular directamente y son

$$H_x(z) = 1, \tag{4.172a}$$

$$H_e(z) = (1 - z^{-1}). \tag{4.172b}$$

Por consiguiente,

$$y_x[n] = x[n], \tag{4.173a}$$

y

$$\hat{e}[n] = e[n] - e[n-1]. \tag{4.173b}$$

Por tanto, la salida $y[n]$ se puede representar de forma equivalente como $y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$, donde vemos que $x[n]$ aparece sin modificar a la salida y que el ruido de cuantificación $e[n]$ aparece modificado por el operador de primera diferencia $H_e(z)$. Esto se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 4.72. Teniendo en cuenta la densidad espectral de potencia de $e[n]$ dada en la Ecuación (4.168), la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación $\hat{e}[n]$ presente en la señal $y[n]$ es

$$\begin{aligned} \Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) &= \sigma_e^2 |H_e(e^{j\omega})|^2 \\ &= \sigma_e^2 [2\,\mathrm{sen}(\omega/2)]^2. \end{aligned} \tag{4.174}$$

En la Figura 4.73 se muestra la densidad espectral de potencia de $\hat{e}[n]$, la densidad espectral de potencia de $e[n]$, y el mismo espectro de potencia de señal mostrado en las Figuras 4.67(b) y 4.68. Es interesante observar que la potencia *total* de ruido se incrementa desde un valor de $\mathscr{E}\{e^2[n]\} = \sigma_e^2$ en el cuantificador hasta un valor de $\mathscr{E}\{\hat{e}^2[n]\} = 2\sigma_e^2$ a la salida del sistema de conformación de ruido. Observe sin embargo que en comparación con la Figura 4.68, el espectro del ruido de cuantificación ha cambiado de forma y ahora la mayor parte de la potencia de ruido está fuera de la banda de señal $|\omega| < \pi/M$ a diferencia del caso de sobremuestreo directo, en el que el espectro del ruido era plano.

En el sistema de la Figura 4.70, la potencia de ruido fuera de banda es eliminada por el filtro paso bajo. Concretamente, en la Figura 4.74 se muestra la densidad espectral de potencia $\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})$ junto

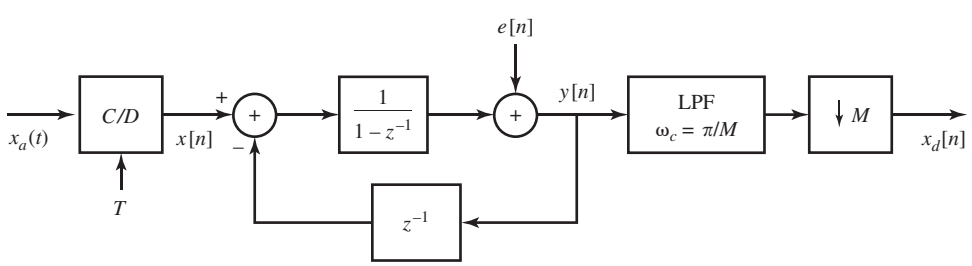


Figura 4.71 Sistema de la Figura 4.70 desde $x_a(t)$ hasta $x_d[n]$ en el que el cuantificador se ha sustituido por un modelo de ruido lineal.

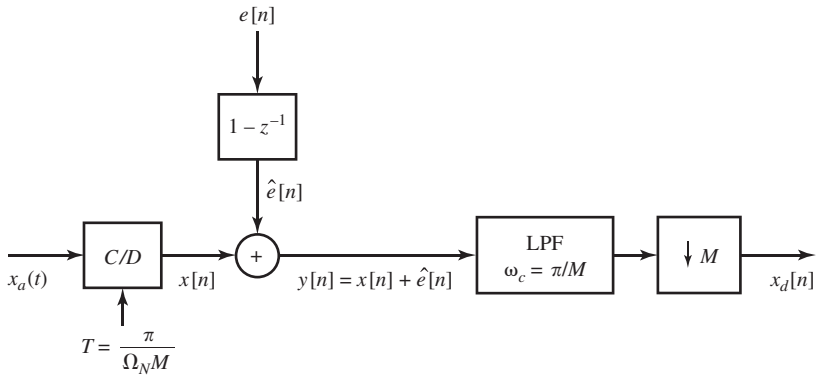


Figura 4.72 Representación equivalente de la Figura 4.71.

con la densidad espectral de potencia $\Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega})$. Como el sistema de submuestreo no elimina potencia de señal, la potencia de la señal $x_{da}[n]$ es

$$P_{da} = \mathscr{E}\{x_{da}^2[n]\} = \mathscr{E}\{x^2[n]\} = \mathscr{E}\{x_a^2(t)\}.$$

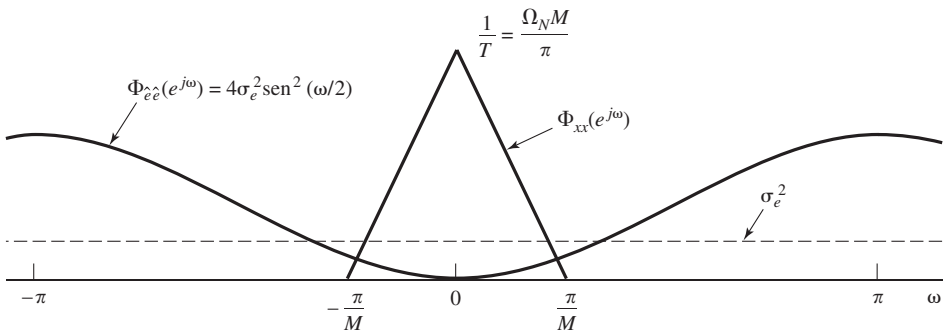


Figura 4.73 Densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación y de la señal.

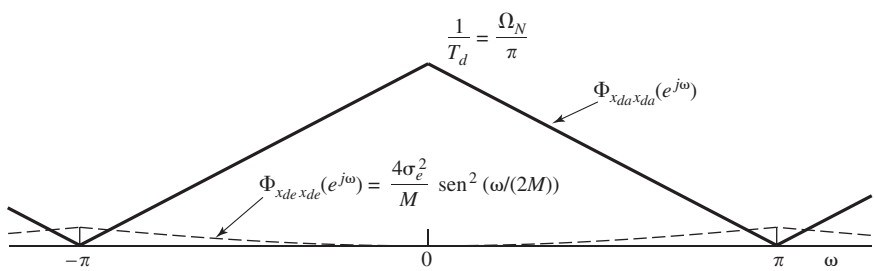


Figura 4.74 Densidad espectral de potencia de la señal y ruido de cuantificación después del submuestreo.

La potencia de ruido de cuantificación de la salida final es

$$P_{de} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta^2}{12M}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2M}\right)\right)^2 d\omega. \tag{4.175}$$

Para comparar aproximadamente este resultado con el obtenido en la Sección 4.9.1, supondremos que M es suficientemente grande como para que se cumpla

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2M}\right) \approx \frac{\omega}{2M}.$$

Teniendo en cuenta esa aproximación, se puede evaluar fácilmente la Ecuación (4.175) y se obtiene

$$P_{de} = \frac{1}{36}\frac{\Delta^2\pi^2}{M^3}. \tag{4.176}$$

Observando la Ecuación (4.176) vemos de nuevo el compromiso entre la razón de sobremuestreo M y el tamaño del paso de cuantificación Δ. Para un cuantificador de $(B+1)$ bits y un nivel máximo de la señal de entrada entre X_m, $\Delta = X_m/2^B$. Por tanto, para obtener una determinada potencia de ruido de cuantificación P_{de}, debe cumplirse

$$B = -\frac{3}{2}\log_2 M + \log_2(\pi/6) - \frac{1}{2}\log_2 P_{de} + \log_2 X_m. \tag{4.177}$$

Comparando la Ecuación (4.177) con la Ecuación (4.171) podemos ver que, mientras que con cuantificación directa al doblar la razón de sobremuestreo M se gana 1/2 bit en la cuantificación, con el uso de conformación de ruido se ganan 1,5 bits.

La Tabla 4.1 muestra los ahorros equivalentes en bits del cuantificador con respecto al caso de cuantificación directa sin sobremuestreo ($M = 1$) para (a) cuantificación directa con sobremuestreo, tal como se ha presentado en la Sección 4.9.1 y (b) sobremuestreo con conformación de ruido, tal como se presenta en esta sección.

TABLA 4.1 AHORROS EQUIVALENTES EN BITS DEL CUANTIFICADOR RELATIVOS AL CASO DE $M = 1$ PARA LOS CASOS DE CUANTIFICACIÓN DIRECTA Y CONFORMACIÓN DE RUIDO DE PRIMER ORDEN.

M	Cuantificación directa	Conformación de ruido
4	1	2.2
8	1.5	3.7
16	2	5.1
32	2.5	6.6
64	3	8.1

La estrategia de conformación de ruido de la Figura 4.70 se puede ampliar incorporando una segunda etapa de acumulación como se muestra en la Figura 4.75. En este caso, si modelamos de nuevo el cuantificador como una fuente de ruido aditivo $e[n]$, se puede demostrar que

$$y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$$

TABLA 4.2 REDUCCIÓN DE BITS DEL CUANTIFICADOR EN FUNCIÓN DEL ORDEN p DEL CONFORMADOR DE RUIDO.

Orden del cuantificador p	Factor de sobremuestreo M				
	4	8	16	32	64
0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	2.2	3.7	5.1	6.6	8.1
2	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9
3	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
4	4.1	8.5	13.0	17.5	22.0
5	4.6	10.0	15.5	21.0	26.5

teniendo en cuenta que en el caso de dos etapas, $\hat{e}[n]$ es el resultado de procesar el ruido de cuantificación $e[n]$ con la función de transferencia

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})^2. \tag{4.178}$$

La correspondiente densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación presente ahora en $y[n]$ es

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2[2\,\mathrm{sen}(\omega/2)]^4, \tag{4.179}$$

con el resultado de que, aunque la potencia total de ruido a la salida del sistema de conformación de ruido de dos etapas es mayor que en el caso de una etapa, ahora hay más ruido en fuera de la banda de señal. De forma general, se pueden usar p etapas de acumulación y realimentación y la correspondiente conformación de ruido está dada entonces por

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2[2\,\mathrm{sen}(\omega/2)]^{2p}. \tag{4.180}$$

La Tabla 4.2 muestra la reducción equivalente de bits del cuantificador en función del orden p del conformador de ruido y de la razón de sobremuestreo M. Nótese que con $p = 2$ y $M = 64$, se obtienen casi 13 bits de incremento de precisión, lo que sugiere que un cuantificador de 1 bit conseguiría una precisión de aproximadamente 14 bits a la salida del sistema de diezmado.

Aunque el empleo de múltiples bucles de realimentación como muestra la Figura 4.75 parece que permite incrementar mucho la reducción de ruido, no está exento de problemas. Concretamente, para valores grandes de p, aumenta la posibilidad de que aparezcan inestabilidades y oscilaciones. En el Problema 4.68 se considera una estructura alternativa conocida como conformación multietapa de ruido (MASH - *Multistage noise shaping*).

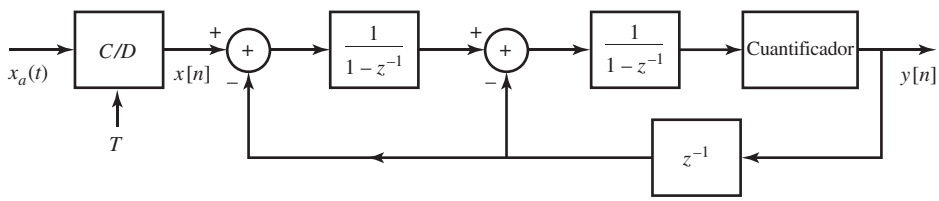


Figura 4.75 Cuantificador sobremuestreado con conformación de ruido de segundo orden.

4.9.3. Sobremuestreo y conformación de ruido en la conversión D/A

En las Secciones 4.9.1 y 4.9.2 presentamos el uso del sobremuestreo para simplificar el proceso de conversión analógico-digital. Como hemos mencionado, la señal se sobremuestrea inicialmente para simplificar el filtrado antisolapamiento y mejorar la precisión, pero la salida final del conversor A/D, $x_d[n]$ se muestrea a la frecuencia de Nyquist de $x_a(t)$. Trabajar con la mínima frecuencia de muestreo es, por supuesto, algo altamente deseable para tratamiento digital de señales o simplemente para representar la señal analógica en forma digital, como por ejemplo en un sistema de grabación de audio en CD. Es natural aplicar los mismos principios a la inversa para conseguir mejoras en el proceso de conversión D/A.

El sistema básico, contrapartida del que se muestra en la Figura 4.65, aparece en la Figura 4.76. La secuencia $y_d[n]$, que se va a convertir en una señal en tiempo continuo, se sobremuestrea en primer lugar, produciéndose la secuencia $\hat{y}[n]$, que se vuelve a cuantificar antes de enviarla al conversor D/A. Este conversor admite muestras binarias con el número de bits producido por el proceso de recuantificación. Podemos utilizar un conversor D/A más simple, con menos bits, si aseguramos que el ruido de cuantificación no ocupa la banda de la señal. En ese caso, el ruido se puede eliminar con un filtrado analógico poco costoso.

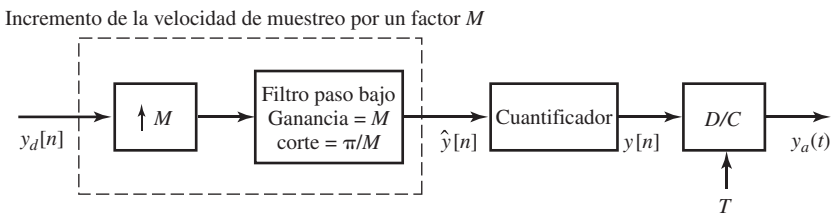


Figura 4.76 Conversión D/A sobremuestreada.

En la Figura 4.77 se muestra una estructura de cuantificador que conforma el ruido de cuantificación de forma similar al sistema de primer orden que se muestra en la Figura 4.70. En nuestro análisis suponemos que $y_d[n]$ está sin cuantificar o cuantificado tan finamente con respecto a $y[n]$ que la fuente principal del error del cuantificador es el cuantificador de la Figura 4.76. Para analizar el sistema de las Figuras 4.76 y 4.77, sustituiremos el cuantificador de la Figura 4.77 por una fuente aditiva de ruido blanco $e[n]$, de forma que la Figura 4.77 se puede sustituir por la Figura 4.78. La función de transferencia desde $\hat{y}[n]$ a $y[n]$ es la unidad. Es decir, la señal sobremuestreada $\hat{y}[n]$ aparece inalterada a la salida. La función de transferencia $H_e(z)$ desde $e[n]$ hasta $y[n]$ es

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}.$$

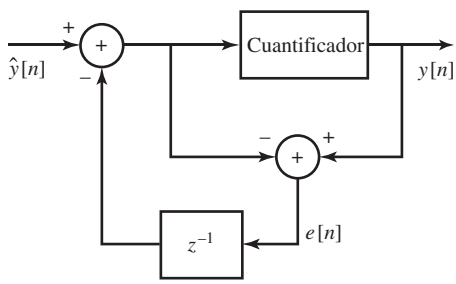


Figura 4.77 Sistema de conformación de ruido de primer orden para la cuantificación D/A sobremuestreada.

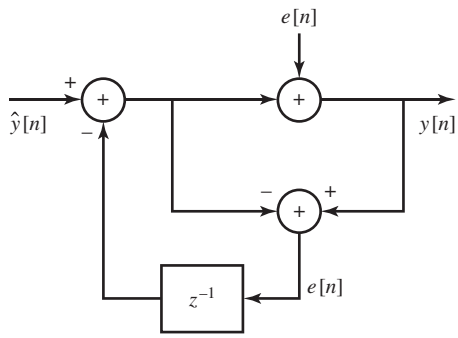


Figura 4.78 El sistema de la Figura 4.77 con el cuantificador sustituido por un modelo de ruido lineal.

Por tanto, la componente de ruido de cuantificación $\hat{e}[n]$ que aparece a la salida del sistema de conformación de ruido de la Figura 4.78 tiene como densidad espectral de potencia

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 (2 \operatorname{sen} \omega/2)^2, \tag{4.181}$$

donde, de nuevo, $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$.

La Figura 4.79 muestra una ilustración del proceso de conversión D/A. En la Figura 4.79(a) se muestra el espectro de potencia $\Phi_{y_d y_d}(e^{j\omega})$ de la entrada $y_d[n]$ de la Figura 4.76. Nótese que suponemos que la señal $y_d[n]$ está muestreada a la frecuencia de Nyquist. La Figura 4.79(b) muestra el correspondiente espectro de potencia de la salida del sistema de sobremuestreo (con un factor de M), y en la Figura 4.79(c) se muestra el espectro de ruido de cuantificación a la salida del cuantificador/conformador de ruido. Finalmente, la Figura 4.79(d) muestra el espectro de potencia de la componente de señal junto con el espectro de potencia de la componente de ruido en la salida analógica del conversor D/C de la Figura 4.76. En este caso, suponemos que el conversor D/C tiene un filtro de reconstrucción ideal con frecuencia de corte $\pi/(MT)$, que eliminará tanto ruido de cuantificación como sea posible.

En un aspecto práctico, desearíamos evitar filtros de reconstrucción con caídas abruptas en la frecuencia de corte. Observando la Figura 4.79(d), resulta claro que si podemos tolerar algo más de ruido de cuantificación, el filtro de reconstrucción D/C no necesita tener una caída tan abrupta. Además, si utilizamos técnicas multietapa en la conformación de ruido, se puede obtener un espectro de ruido de salida de la forma

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 (2 \operatorname{sen} \omega/2)^{2p},$$

que colocaría más ruido en las altas frecuencias. En este caso, las especificaciones del filtro de reconstrucción analógico podrían relajarse aún más.

4.10. RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado y explorado las relaciones entre las señales en tiempo continuo y las secuencias en tiempo discreto que se obtienen mediante muestreo periódico. El teorema fundamental que permite representar la señal en tiempo continuo mediante una secuencia de muestras es el teorema de Nyquist-Shannon. Dicho teorema establece que para una señal de banda limitada, las muestras periódicas constituyen una representación suficiente siempre que la frecuencia de muestreo sea suficientemente alta con respecto a la máxima frecuencia de la señal en tiempo continuo. Bajo esta condición, la señal en tiempo continuo se puede reconstruir a partir de las muestras mediante filtrado paso bajo, a partir únicamente del conocimiento del ancho de banda original, la velocidad de muestreo

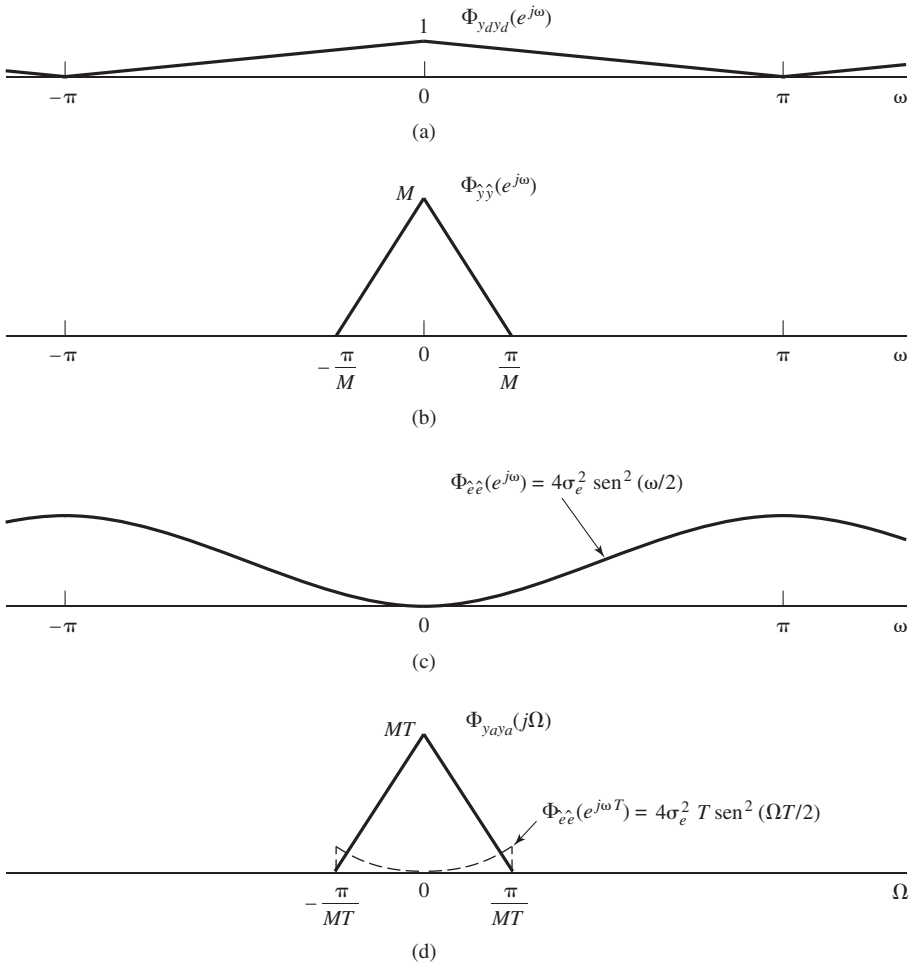


Figura 4.79 (a) Densidad espectral de potencia de la señal $y_d[n]$. (b) Densidad espectral de potencia de la señal $\hat{y}[n]$. (c) Densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación. (d) Densidad espectral de potencia de la señal en tiempo continuo y el ruido de cuantificación.

y las muestras. Esto corresponde a una interpolación de banda limitada. Si la frecuencia de muestreo es demasiado baja respecto al ancho de banda de la señal, se produce distorsión de solapamiento y la señal original no se puede reconstruir mediante la interpolación de banda limitada.

La posibilidad de representar señales mediante muestreo permite el procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo. Esto se realiza mediante un muestreo inicial, seguido por una aplicación de un procesado en tiempo discreto y, finalmente, por la reconstrucción de una señal continua a partir del resultado del procesado anterior. Se presentan ejemplos de filtrado paso bajo y diferenciación.

Una clase particularmente importante de procesado es la correspondiente al cambio de la frecuencia de muestreo. El submuestreo de una señal en tiempo discreto corresponde en el dominio de la frecuencia a una replicación del espectro en tiempo discreto con un cambio de escala del eje de frecuencias, que puede requerir una limitación adicional de la banda para evitar el solapamiento. El sobremuestreo corresponde a aumentar de forma efectiva la frecuencia de muestreo y se representa también en el dominio de la frecuencia por un cambio de escala del eje de frecuencias. Combinando el sobremuestreo

y el submuestreo en cantidades enteras, se pueden conseguir cambios en la frecuencia de muestreo por factores no enteros. Hemos presentado la forma eficiente de conseguirlo utilizando técnicas multitasa.

En las secciones finales del capítulo, exploramos diversas consideraciones prácticas asociadas al procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo, incluyendo el uso de filtrado previo para evitar solapamiento, errores de cuantificación en la conversión A/D y algunos aspectos relacionados con el filtrado utilizado en el muestreo y la reconstrucción de señales en tiempo continuo. Finalmente, demostramos cómo el diezmado y la interpolación en tiempo discreto, y la conformación de ruido se pueden utilizar para simplificar la parte analógica en la conversión A/D y D/A.

El núcleo de este capítulo ha sido el muestreo periódico como un proceso para obtener una representación discreta de una señal en tiempo continuo. Aunque estas representaciones son con mucho las más comunes y constituyen la base de casi todos los temas que se presentarán en el resto del libro, existen otros enfoques para obtener representaciones discretas que pueden llevar a representaciones más compactas para el caso de señales donde se conoce otra información (además del ancho de banda). En Unser (2000) se pueden encontrar algunos ejemplos.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

4.1. La señal

$$x_c(t) = \operatorname{sen}(2\pi(100)t)$$

se muestrea con un periodo de muestreo de $T = 1/400$ segundos y se obtiene una señal en tiempo discreto $x[n]$. ¿Cuál es la señal resultante $x[n]$?

4.2. La secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \qquad -\infty < n < \infty,$$

se obtiene muestreando la señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \qquad -\infty < t < \infty,$$

con una frecuencia de 1000 muestras/s. Indique dos posibles valores de Ω_0 que podrían producir la secuencia $x[n]$.

4.3. La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

se muestrea con periodo T y se obtiene la señal en tiempo discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

(a) Determine un valor de T que sea consistente con esta información.

(b) ¿Es único el valor de T obtenido en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de T que sea consistente con la información dada.

4.4. La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \operatorname{sen}(20\pi t) + \cos(40\pi t)$$

se muestrea con periodo de muestreo T y se obtiene la señal en tiempo discreto

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right).$$

(a) Determine un valor de T que sea consistente con esta información.
(b) ¿Es único el valor de T obtenido en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de T que sea consistente con la información dada.

4.5. Considere el sistema de la Figura 4.10, en el que el sistema en tiempo discreto es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\pi/8$ radianes/s.

(a) Si $x_c(t)$ es de banda limitada a 5 kHz, ¿cuál es el máximo valor de T para que se evite el solapamiento en el conversor C/D?
(b) Si $1/T = 10$ kHz, ¿cuál será la frecuencia de corte del filtro efectivo en tiempo continuo?
(c) Repita el apartado (b) para $1/T = 20$ kHz.

4.6. Sea $h_c(t)$ la respuesta al impulso de un filtro en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo y $h_d[n]$ la respuesta al impulso de un filtro en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo

(a) Si

$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

siendo a una constante real positiva, determine la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo continuo y dibuje su módulo.
(b) Si $h_d[n] = Th_c(nT)$ siendo $h_c(t)$ la del apartado (a), determine la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto y dibuje su módulo.
(c) Dado un valor de a, determine, en función de T, el mínimo valor del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto.

4.7. La Figura P4.7-1 muestra un modelo simple de canal de comunicaciones multitrayecto. Suponga que $s_c(t)$ es de banda limitada, es decir, que $S_c(j\Omega) = 0$ vale cero para $|\Omega| \geq \pi/T$ y que $x_c(t)$ se muestrea con periodo de muestreo T obteniéndose la secuencia

$$x[n] = x_c(nT).$$

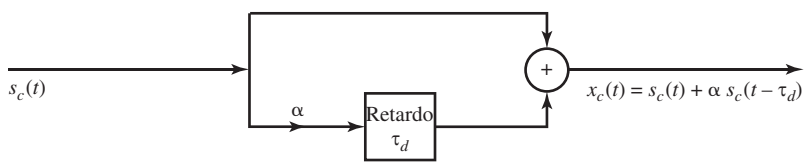


Figura P4.7-1

(a) Determine la transformada de Fourier de $x_c(t)$ y la transformada de Fourier de $x[n]$ en función de $S_c(j\Omega)$.
(b) Se desea simular el sistema multitrayecto mediante un sistema en tiempo discreto escogiendo $H(e^{j\omega})$ en la Figura P4.7-2 de forma que la salida sea $r[n] = x_c(nT)$ cuando la entrada sea $s[n] = s_c(nT)$. Determine $H(e^{j\omega})$ en función de T y τ_d.
(c) Determine la respuesta al impulso $h[n]$ en la Figura P4.7-2 cuando (i) $\tau_d = T$ y (ii) $\tau_d = T/2$.

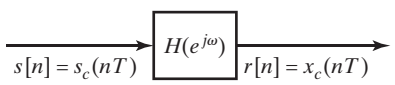


Figura P4.7-2

4.8. Considere el sistema de la Figura P4.8 con las siguientes relaciones:

$$X_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq 2\pi \times 10^4,$$
$$x[n] = x_c(nT),$$
$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k].$$

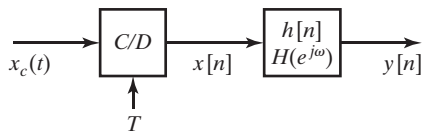


Figura P4.8

(a) Para este sistema, indique cuál es el máximo valor que puede tener T para evitar el solapamiento, es decir, para que $x_c(t)$ se pueda recuperar a partir de $x[n]$.
(b) Determine $h[n]$.
(c) En términos de $X(e^{j\omega})$, ¿cuánto vale $y[n]$ para $n \to \infty$?
(d) (d) Determine si existe algún valor de T para el que

$$y[n]\Big|_{n=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)dt. \tag{P4.8-1}$$

Si existen valores de T, determine el máximo. Si no, explique y especifique cómo se podría escoger T para aproximar lo mejor posible la igualdad de la Ecuación (P4.8-1).

4.9. Considere una señal estable en tiempo discreto $x[n]$ cuya transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ satisface la ecuación

$$X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

y tiene simetría par, es decir, $x[n] = x[-n]$.

(a) Demuestre que $X(e^{j\omega})$ es periódica de periodo π.
(b) Calcule el valor de $x[3]$. (*Sugerencia*: obtenga los valores para todos los puntos de índice impar.)
(c) Sea $y[n]$ una versión diezmada de $x[n]$, es decir, $y[n] = x[2n]$. ¿Se puede reconstruir $x[n]$ a partir de $y[n]$ para todo n. Si es así ¿cómo? Si no es así, justifique su respuesta.

4.10. Las siguientes señales en tiempo continuo se utilizan como entrada $x_c(t)$ a un conversor C/D ideal como el que se muestra en la Figura 4.1, con el periodo de muestreo T especificado. Obtenga en cada caso la señal resultante $x[n]$ en tiempo discreto.

(a) $x_c(t) = \cos(2\pi(1000)t), \quad T = (1/3000)$ sg
(b) $x_c(t) = \operatorname{sen}(2\pi(1000)t), \quad T = (1/1500)$ sg
(c) $x_c(t) = \operatorname{sen}(2\pi(1000)t)/(\pi t), \quad T = (1/5000)$ sg

4.11. Un conversor C/D ideal como el de la Figura 4.1 tiene las siguientes señales de entrada en tiempo continuo $x_c(t)$ y produce las correspondientes señales de salida en tiempo discreto $x[n]$. Especifique un valor del periodo de muestreo T que sea consistente con cada pareja de $x_c(t)$ y $x[n]$. Además, indique si el valor de T es único. Si no es así, especifique un segundo valor de T que sea consistente con la información suministrada.

(a) $x_c(t) = \operatorname{sen}(10\pi t), \quad x[n] = \operatorname{sen}(\pi n/4)$
(b) $x_c(t) = \operatorname{sen}(10\pi t)/(10\pi t), \quad x[n] = \operatorname{sen}(\pi n/2)/(\pi n/2)$.

4.12. En el sistema de la Figura 4.10, suponga que

$$H(e^{j\omega}) = j\omega/T, \quad -\pi \leq \omega < \pi,$$

y que $T = 1/10$ segundos.

(a) Para cada una de las siguientes entradas $x_c(t)$, obtenga la correspondiente salida $y_c(t)$.

(I) $x_c(t) = \cos(6\pi t)$.
(II) $x_c(t) = \cos(14\pi t)$.

(b) ¿Corresponden las salidas $y_c(t)$ a lo que podría esperarse de un diferenciador?

4.13. En el sistema que se muestra en la Figura 4.15, $h_c(t) = \delta(t - T/2)$.

(a) Suponga que la entrada $x[n] = \text{sen}(\pi n/2)$ y $T = 10$. Obtenga $y[n]$.
(b) Suponga que se utiliza la misma señal $x[n]$ que en el apartado (a), pero que T se reduce a la mitad, 5. Obtenga la señal $y[n]$ resultante.
(c) En general, ¿cómo limita el sistema lineal e invariante con el tiempo en tiempo continuo $h_c(t)$ al intervalo de valores posibles del periodo de muestreo T que se pueden utilizar sin que se cambie $y[n]$?

4.14. ¿Cuál de las siguientes señales se puede diezmar por un factor de 2 utilizando el sistema de la Figura 4.19 sin que se pierda información?

(a) $x[n] = \delta[n - n_0]$, para n_0 un entero desconocido
(b) $x[n] = \cos(\pi n/4)$
(c) $x[n] = \cos(\pi n/4) + \cos(3\pi n/4)$
(d) $x[n] = \text{sen}(\pi n/3)/(\pi n/3)$
(e) $x[n] = (-1)^n \,\text{sen}(\pi n/3)/(\pi n/3)$.

4.15. Considere el sistema que se muestra en la Figura P4.15. Para cada una de las siguientes señales de entrada $x[n]$, indique si la salida $x_r[n] = x[n]$.

(a) $x[n] = \cos(\pi n/4)$
(b) $x[n] = \cos(\pi n/2)$
(c)

$$x[n] = \left[\frac{\text{sen}(\pi n/8)}{\pi n}\right]^2$$

Sugerencia: utilice la propiedad de modulación de la transformada de Fourier para obtener $X(e^{j\omega})$.

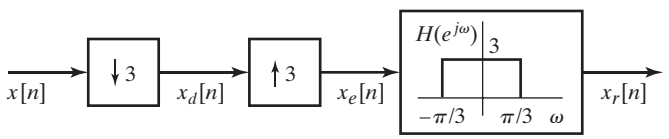


Figura P4.15

4.16. Considere el sistema de la Figura 4.29. La entrada $x[n]$ y la correspondiente salida $\tilde{x}_d[n]$ se indican a continuación para dos valores concretos de M/L. Determine un valor de M/L basándose en la información suministrada, y especifique si su selección es única.

(a) $x[n] = \text{sen}(\pi n/3)/(\pi n/3)$, $\tilde{x}_d[n] = \text{sen}(5\pi n/6)/(5\pi n/6)$
(b) $x[n] = \cos(3\pi n/4)$, $\tilde{x}_d[n] = \cos(\pi n/2)$.

4.17. Cada uno de los apartados que siguen indica una señal $x[n]$ y los correspondientes factores de interpolación y diezmado L y M para el sistema de la Figura 4.29. Determine la correspondiente salida $\tilde{x}_d[n]$.

(a) $x[n] = \text{sen}(2\pi n/3)/\pi n$, $L = 4$, $M = 3$
(b) $x[n] = \text{sen}(3\pi n/4)$, $L = 6$, $M = 7$.

4.18. Sea el sistema de la Figura 4.29. $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de la señal de entrada $x[n]$, se muestra en la Figura P4.18. Para cada uno de los siguientes conjuntos de valores de L y M, especifique el máximo valor posible de ω_0 de forma que $\tilde{X}_d(e^{j\omega}) = aX(e^{jM\omega/L})$ para algún valor de la constante a.

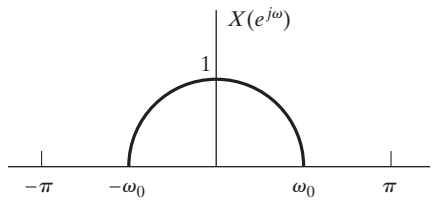


Figura P4.18

(a) $M = 3,\ L = 2$
(b) $M = 5,\ L = 3$
(c) $M = 2,\ L = 3.$

4.19. La señal en tiempo continuo $x_c(t)$ cuya transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.19-1 se pasa por el sistema que se muestra en la Figura P4.19-2. Determine el intervalo de valores de T para el que $x_r(t) = x_c(t)$.

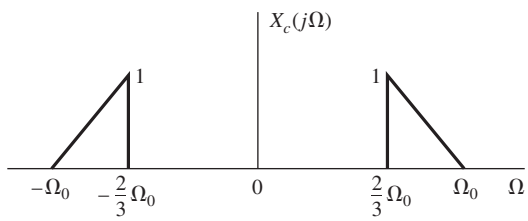


Figura P4.19-1

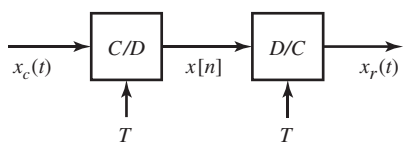


Figura P4.19-2

4.20. Considere el sistema de la Figura 4.10. La transformada de Fourier de la señal de entrada $x_c(t)$ se muestra en la Figura P4.20 con $\Omega_0 = 2\pi(1000)$ radianes/segundo. El sistema en tiempo discreto es un filtro paso bajo ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

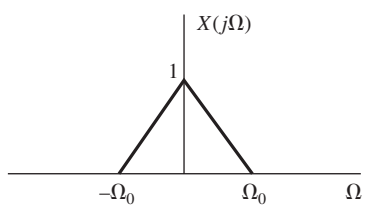


Figura P4.20

(a) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo $F_s = 1/T$ para que al muestrear la entrada no se produzca solapamiento?

(b) Si $\omega_c = \pi/2$, ¿cuál es la mínima frecuencia de muestreo que asegura que $y_r(t) = x_c(t)$?

Problemas básicos

4.21. Una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ cuya transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.21-1,

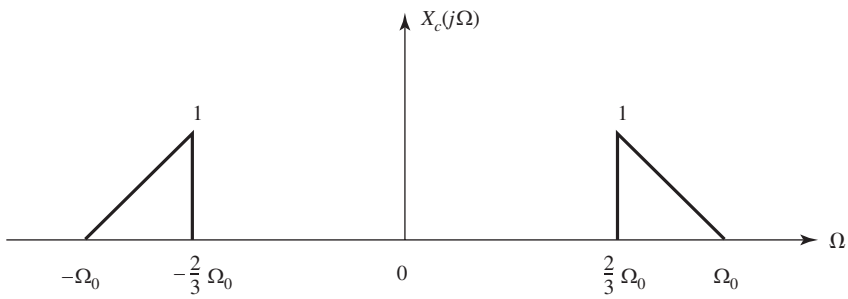


Figura P4.21-1 Transformada de Fourier $X_c(j)$

(a) Se obtiene una señal en tiempo continuo $x_r(t)$ mediante el proceso que se muestra en la Figura P4.21-2. En primer lugar, $x_c(t)$ se multiplica por un tren de impulsos de periodo T_1 para producir la señal $x_s(t)$, es decir,

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT_1).$$

A continuación, $x_s(t)$ se pasa por un filtro paso bajo de respuesta en frecuencia $H_r(j\Omega)$. $H_r(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.21-3.
Determine el intervalo de valores de T_1 para que $x_r(t) = x_c(t)$.

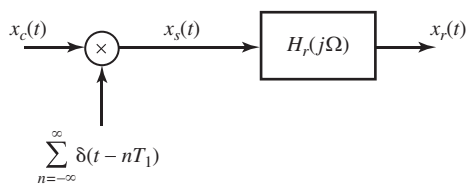


Figura P4.21-2 Sistema de conversión para el apartado (a).

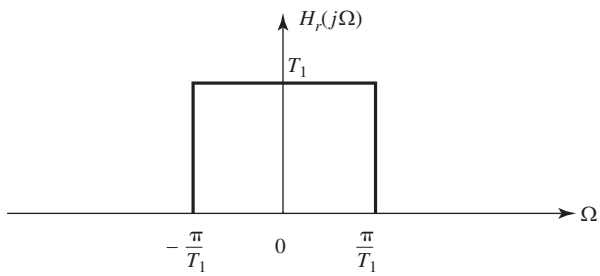


Figura P4.21-3 Respuesta en frecuencia $H_r(j\Omega)$.

(b) Considere el sistema de la Figura P4.21-4. El sistema en este caso es el mismo que el del apartado (a), excepto porque ahora el periodo de muestreo es T_2. El sistema $H_s(j\Omega)$ es un filtro ideal en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo. Se desea que $x_o(t)$ sea igual a $x_c(t)$ para todo t, es decir, $x_o(t) = x_c(t)$ para alguna posible selección de $H_s(j\Omega)$. Obtenga todos los valores de T_2 para los sea posible que $x_o(t) = x_c(t)$. Para el máximo valor de T_2 que ha determinado que todavía permitiría recuperar $x_c(t)$, escoja $H_s(j\Omega)$ de forma que $x_o(t) = x_c(t)$. Dibuje $H_s(j\Omega)$.

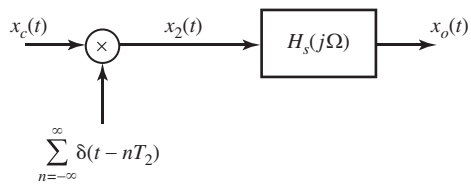


Figura P4.21-4 Sistema de conversión para el apartado (b).

4.22. Supongamos que el diferenciador de banda limitada del Ejemplo 4.4 tiene como entrada $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$ con $\Omega_0 < \pi/T$. En este problema se desea verificar que la señal en tiempo continuo reconstruida a partir de la salida del diferenciador de banda limitada es de hecho la derivada de $x_c(t)$.

(a) La entrada muestreada será $x[n] = \cos(\omega_0 n)$, siendo $\omega_0 = \Omega_0 T < \pi$. Determine una expresión de $X(e^{j\omega})$ que sea válida en $|\omega| \leq \pi$.

(b) Utilice ahora la Ecuación (4.46) para determinar la transformada de Fourier en tiempo discreto de $Y(e^{j\omega})$, la salida del sistema en tiempo discreto.

(c) A partir de la Ecuación (4.32), determine $Y_r(j\Omega)$, la transformada de Fourier en tiempo continuo de la salida del conversor D/C.

(d) Utilice el resultado de (c) para demostrar que

$$y_r(t) = -\Omega_0 \operatorname{sen}(\Omega_0 t) = \frac{d}{dt}\left[x_c(t)\right].$$

4.23. La Figura P4.23-1 muestra un filtro en tiempo continuo que se implemente utilizando un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia en el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

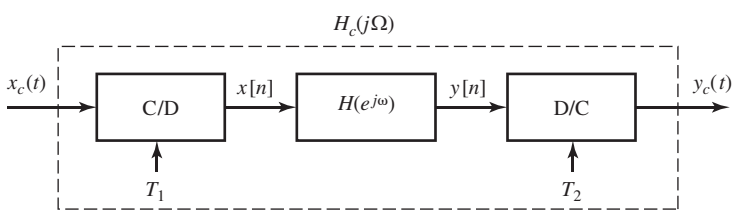


Figura P4.23-1

(a) Si la transformada de Fourier en tiempo continuo de $x_c(t)$, es decir $X_c(j\Omega)$, es como se muestra en la Figura P4.23-2 y $\omega_c = \frac{\pi}{5}$, dibuje y etiquete $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ e $Y_c(j\Omega)$ en cada uno de los siguientes casos:

(I) $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$

(II) $1/T_1 = 4 \times 10^4,\ 1/T_2 = 10^4$

(III) $1/T_1 = 10^4,\ 1/T_2 = 3 \times 10^4$.

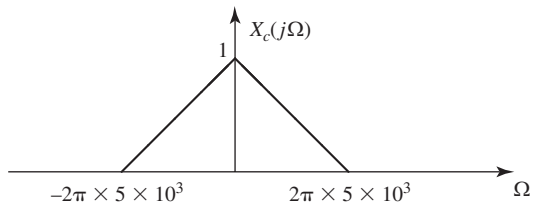


Figura P4.23-2

(b) Para $1/T_1 = 1/T_2 = 6 \times 10^3$, y para señales de entrada cuyos espectros sean de banda limitada a $|\Omega| < 2\pi \times 5 \times 10^3$ (sin ninguna otra restricción), ¿cuál es el máximo valor de la frecuencia de corte ω_c del filtro $H(e^{j\omega})$ para la que el sistema completo es lineal e invariante con el tiempo? Para ese valor máximo de ω_c, especifique $H_c(j\Omega)$.

4.24. Considere el sistema que se muestra en la Figura P4.24-1

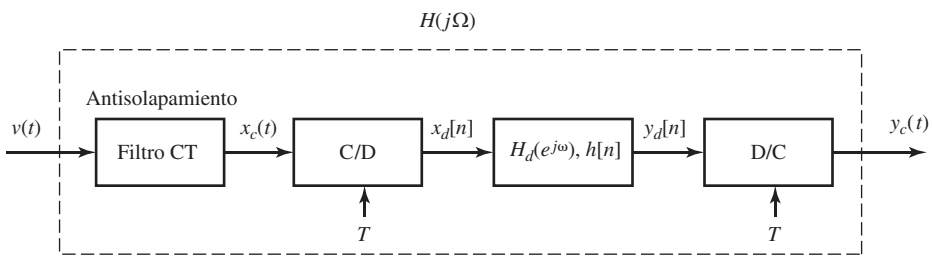


Figura P4.24-1

El filtro antisolapamiento es un filtro en tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia $L(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.24-2.

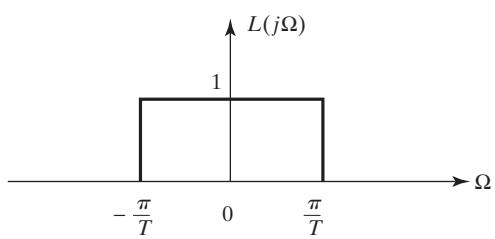


Figura P4.24-2

La respuesta en frecuencia del sistema lineal e invariante con el tiempo en tiempo discreto entre los conversores está dada por:

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{3}}, \quad |\omega| < \pi$$

(a) ¿Cuál es la respuesta en frecuencia en tiempo continuo efectiva del sistema completo, $H(j\Omega)$?

(b) Elija la expresión más exacta:

(i) $y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(3t)$.

(ii) $y_c(t) = x_c(t - \frac{T}{3})$.

(iii) $y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t - 3T)$.

(iv) $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{3})$.

(c) Exprese $y_d[n]$ en función de $y_c(t)$.

(d) Determine la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo.

4.25. Dos señales de banda limitada, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se multiplican, produciéndose la señal producto $w(t) = x_1(t)x_2(t)$. Esta señal se muestrea mediante un tren periódico de impulsos dando lugar a la señal

$$w_p(t) = w(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT)\delta(t - nT).$$

Suponga que $x_1(t)$ es de banda limitada a Ω_1, y que $x_2(t)$ es de banda limitada a Ω_2; es decir,

$$X_1(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \Omega_1$$

$$X_2(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \Omega_2.$$

Determine el *máximo* intervalo de muestreo T para que $w(t)$ sea recuperable a partir de $w_p(t)$ mediante el uso de un filtro paso bajo ideal.

4.26. El sistema de la Figura P4.26 se utiliza para filtrar señales musicales en tiempo continuo y emplea una velocidad de muestreo de 16 kHz.

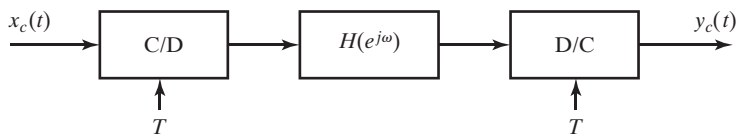


Figura P4.26

$H(e^{j\omega})$ es un filtro paso banda ideal con corte en $\pi/2$. Si la entrada es limitada en banda de forma que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_c$, ¿cómo se debería escoger para que el sistema completo de la Figura P4.26 sea lineal e invariante con el tiempo?

4.27. El sistema que se muestra en la Figura P4.27 pretende aproximar un diferenciador para señales en tiempo continuo de banda limitada.

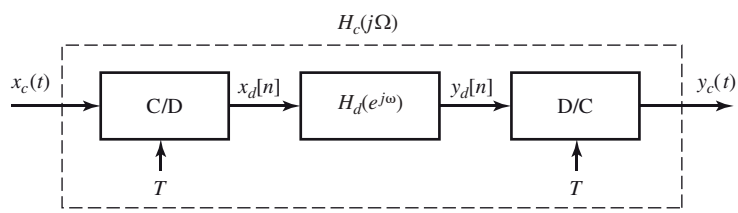


Figura P4.27

- La señal de entrada en tiempo continuo $x_c(t)$ es de banda limitada a $|\Omega| < \Omega_M$.
- El periodo de muestreo del conversor C/D es $T = \dfrac{\pi}{\Omega_M}$ y produce la señal $x_d[n] = x_c(nT)$.
- La respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto es

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{T}, \qquad |\omega| \leq \pi .$$

- El conversor C/D ideal es tal que $y_d[n] = y_c(nT)$.

(a) Calcule la respuesta en frecuencia en tiempo continuo $H_c(j\Omega)$ del sistema extremo a extremo.

(b) Calcule $x_d[n]$, $y_c(t)$ e $y_d[n]$, cuando la señal de entrada es

$$x_c(t) = \frac{\operatorname{sen}(\Omega_M t)}{\Omega_M t} .$$

4.28. Considere la representación del proceso de muestreo seguido por la reconstrucción que se muestra en la Figura P4.28.

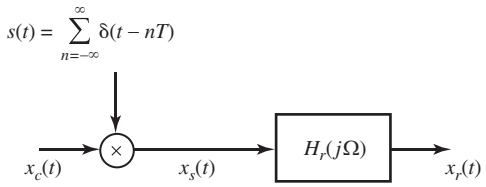


Figura P4.28

Suponga que la señal de entrada es

$$x_c(t) = 2\cos(100\pi t - \pi/4) + \cos(300\pi t + \pi/3) \quad -\infty < t < \infty$$

La respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción es

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| \leq \pi/T \\ 0 & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

(a) Determine la transformada de Fourier en tiempo continuo $X_c(j\Omega)$ y dibújela como función de Ω.
(b) Suponga que $f_s = 1/T = 500$ muestras/segundo y dibuje la transformada de Fourier $X_s(j\Omega)$ en función de Ω para $-2\pi/T \leq \Omega \leq 2\pi/T$. ¿Cuál es la salida $x_r(t)$ en este caso? (Debe ser capaz de dar una ecuación exacta de $x_r(t)$.)
(c) Suponga ahora que $f_s = 1/T = 250$ muestras/segundo. Repita el apartado (b) para esta condición.
(d) ¿Es posible elegir la frecuencia de muestreo de forma que

$$x_r(t) = A + 2\cos(100\pi t - \pi/4)$$

siendo A una constante? Si es así, ¿cuál es la frecuencia de muestreo $f_s = 1/T$, y cuál es el valor numérico de A?

4.29. En la Figura P4.29 suponga que $X_c(j\Omega) = 0$, $|\Omega| \geq \pi/T_1$. Para el caso general en el que $T_1 \neq T_2$ en el sistema, exprese $y_c(t)$ en función de $x_c(t)$. ¿Es diferente la relación básica para $T_1 > T_2$ y $T_1 < T_2$?

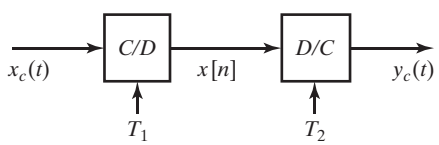


Figura P4.29

4.30. La Figura P4.30 muestra $X_c(j\Omega)$ y $H(e^{j\omega})$ para el sistema que se indica. Dibuje y etiquete la transformada de Fourier de $y_c(t)$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$
(b) $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \times 10^4$
(c) $1/T_1 = 2 \times 10^4, \quad 1/T_2 = 10^4$
(d) $1/T_1 = 10^4, \quad 1/T_2 = 2 \times 10^4$.

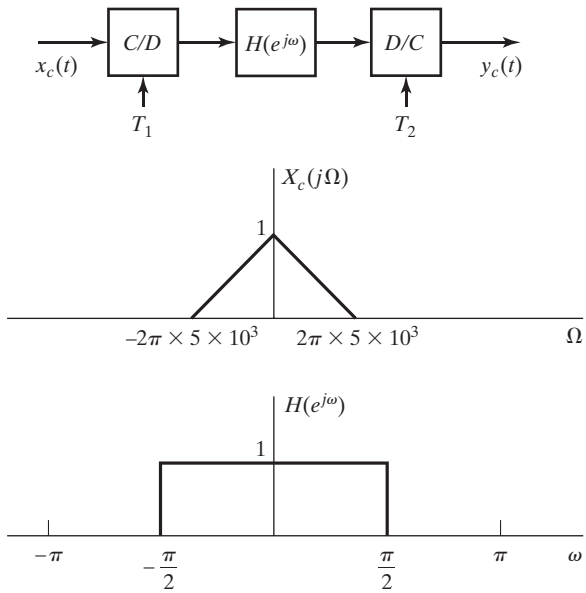


Figura P4.30

4.31. La Figura P4.31-1 muestra el sistema global para filtrar una señal en tiempo continuo utilizando un filtro en tiempo discreto. La Figura P4.31-2 muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción $H_r(j\Omega)$ y del filtro en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$.

(a) Para la señal cuyo espectro $X_c(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.31-3 y $1/T = 20$ kHz, dibuje $X_s(j\Omega)$ y $X(e^{j\omega})$.
Para un cierto intervalo de valores de T el sistema completo, con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$ es equivalente a un filtro paso bajo en tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia $H_{eff}(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.31-4.

(b) Determine el intervalo de valores de T para los que la información presentada en el apartado (a) es verdadera cuando $X_c(j\Omega)$ es de banda limitada a $|\Omega| \leq 2\pi \times 10^4$, como se muestra en la Figura P4.31-3.

(c) Para el intervalo de valores determinado en el apartado (b), dibuje Ω_c en función de $1/T$.

Nota: esto representa un procedimiento que permite realizar un filtro en tiempo continuo de frecuencia de corte variable utilizando filtros fijos en tiempo continuo y en tiempo discreto y una frecuencia de muestreo variable.

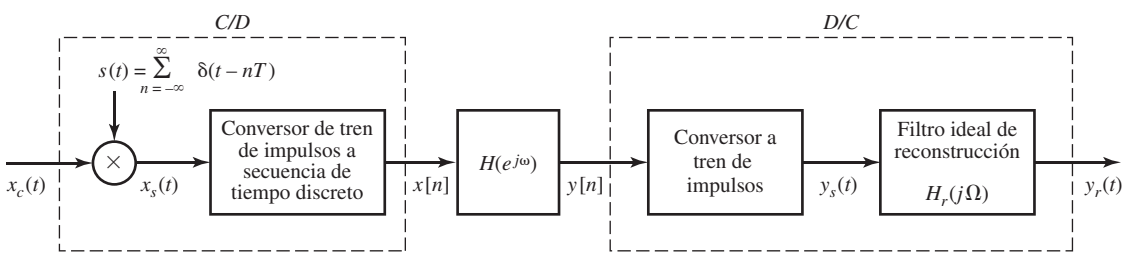


Figura P4.31-1

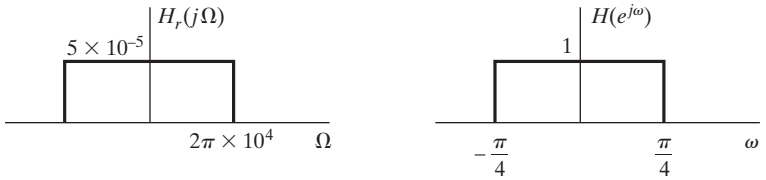


Figura P4.31-2

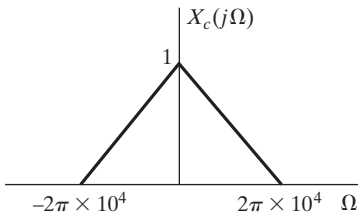


Figura P4.31-3

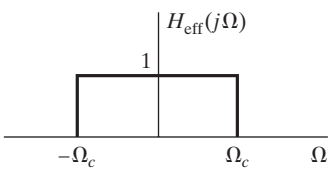


Figura P4.31-4

4.32. Considere el sistema en tiempo discreto que se muestra en la Figura P4.32-1.

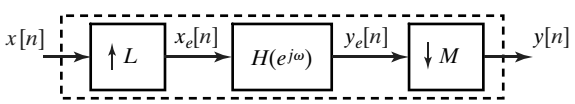


Figura P4.32-1

donde

(I) L y M son enteros positivos.

(II) $x_e[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = kL, \quad k \text{ es cualquier entero} \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

(III) $y[n] = y_e[nM]$.

(IV) $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} M & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \pi \,. \end{cases}$

(a) Suponga que $L = 2$ y $M = 4$, y que $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$, es real y tiene la forma que se muestra en la Figura P4.32-2. Realice un gráfico adecuadamente etiquetado de $X_e(e^{j\omega})$, $Y_e(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$, las transformadas de Fourier en tiempo discreto de $x_e[n]$, $y_e[n]$ e $y[n]$, respectivamente. Asegúrese de etiquetar claramente las amplitudes y frecuencias destacadas.

(b) Suponga ahora que $L = 2$ y $M = 8$. Determine $y[n]$ en este caso.
Sugerencia: observe qué diagramas cambian en su respuesta al apartado (a).

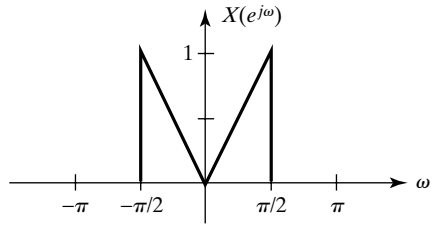


Figura P4.32-2

4.33. Dado el sistema de la Figura P4.33, obtenga la expresión de $y[n]$ en función de $x[n]$. Simplifique la expresión tanto como sea posible.

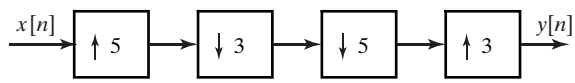


Figura P4.33

Problemas avanzados

4.34. En el sistema que se muestra en la Figura 4.34, cada uno de los bloques está definido como se indica.

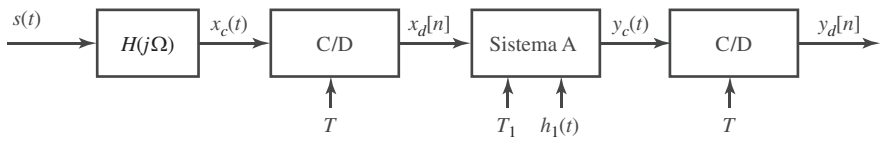


Figura P4.34

$$H(j\Omega): \quad H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi \cdot 10^{-3} \text{ rad/seg} \\ 0, & |\Omega| > \pi \cdot 10^{-3} \text{ rad/seg} \end{cases}$$

$$\text{Sistema A:} \quad y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] h_1(t - kT_1)$$

$$\text{Segundo C/D:} \quad y_d[n] = y_c(nT)$$

(a) Especifique valores de T, T_1 y $h_1(t)$ de forma que se garantice que $y_c(t)$ y $x_c(t)$ son iguales para cualquier valor de $s(t)$.

(b) Indique si los valores de (a) son únicos o si existen otros valores de T, T_1 y $h_1(t)$ que garantizan que $y_c(t)$ y $x_c(t)$ son iguales. Como siempre, explique claramente su razonamiento.

(c) En este apartado, estamos interesados en lo que se conoce frecuentemente como *remuestreo consistente*. Concretamente, el sistema A construye una señal en tiempo continuo $y_c(t)$ a partir de $x_d[n]$, la secuencia de muestras de $x_c(t)$. La señal en tiempo continuo se remuestrea posteriormente para formar $y_d[n]$. Se dice que el remuestreo es consistente si $y_d[n] = x_d[n]$. Determine las condiciones más generales que pueda sobre T, T_1 y $h_1(t)$ de forma que $y_d[n] = x_d[n]$.

4.35. Considere el sistema que se muestra en la Figura P4.35-1.

Sólo para los apartados (a) y (b). $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > 2\pi \times 10^3$ y $H(e^{j\omega})$ es como se muestra en la Figura P4.35-2 (y por supuesto se repite periódicamente).

(a) Determine la condición más general sobre T, si existe, de forma que el sistema global en tiempo continuo desde $x_c(t)$ hasta $y_c(t)$ sea lineal e invariante con el tiempo.

(b) Dibuje y etiquete claramente la respuesta en frecuencia en tiempo continuo equivalente $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ que resulta cuando se cumple la condición determinada en (a).

(c) **Sólo en este apartado** suponga que $X_c(j\Omega)$ en la Figura P4.35-1 es de banda limitada para evitar el solapamiento, es decir, $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$. Para un periodo de muestreo genérico T, nos gustaría escoger el sistema $H(e^{j\omega})$ in Figure P4.35-1 de la Figura P4.35-1 de forma que el sistema global en tiempo continuo desde $x_c(t)$ hasta $y_c(t)$ sea lineal e invariante con el tiempo para cualquier entrada $x_c(t)$ de banda limitada como se ha indicado anteriormente. Determine las condiciones más generales sobre $H(e^{j\omega})$, si existen, de forma que el sistema completo en tiempo continuo sea lineal e invariante con el tiempo. Suponiendo que se cumplen esas condiciones, especifique también en términos de $H(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia en tiempo continuo global equivalente $H_{\text{eff}}(j\Omega)$.

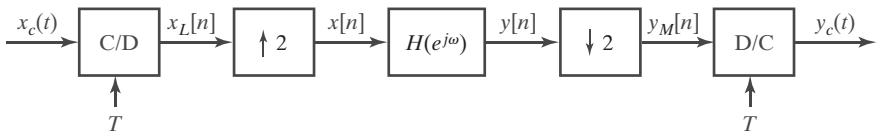


Figura P4.35-1

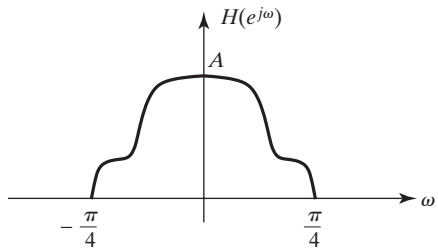


Figura P4.35-2

4.36. Sea una señal en tiempo discreto $x[n]$, procedente de una fuente con una velocidad de $\frac{1}{T_1}$ muestras por segundo. Se desea remuestrear digitalmente dicha señal para crear otra señal $y[n]$ a $\frac{1}{T_2}$ muestras por segundo, con $T_2 = \frac{3}{5}T_1$.

(a) Dibuje el diagrama de bloques de un sistema en tiempo discreto que realice el remuestreo. Especifique en el dominio de Fourier la relación entrada/salida de todos los bloques de su sistema

(b) Dada la señal de entrada $x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$ determine y[n].

4.37. Considere la estructura de filtro de diezmado que se muestra en la Figura P4.37-1, donde $y_0[n]$ e $y_1[n]$ se generan de acuerdo a las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$y_0[n] = \frac{1}{4}y_0[n-1] - \frac{1}{3}x_0[n] + \frac{1}{8}x_0[n-1]$$

$$y_1[n] = \frac{1}{4}y_1[n-1] + \frac{1}{12}x_1[n]$$

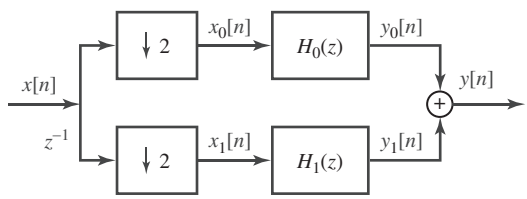


Figura P4.37-1

(a) ¿Cuántas multiplicaciones por muestra de salida requiere la implementación de la estructura del filtro? Considere que una división es equivalente a una multiplicación.

El filtro de diezmado se puede implementar también como se muestra en la Figura P4.37-2, donde $v[n] = av[n-1] + bx[n] + cx[n-1]$.

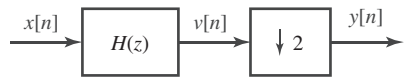


Figura P4.37-2

(b) Determine a, b y c.

(c) ¿Cuántas multiplicaciones por muestra de salida requiere esta segunda implementación?

4.38. Considere los dos sistemas de la Figura P4.38.

(a) Para $M = 2$, $L = 3$ y cualquier señal arbitraria $x[n]$, ¿será $y_A[n] = y_B[n]$? Si su respuesta es afirmativa, justifíquela. Si es negativa, explíquela claramente o proporcione un contraejemplo.

(b) ¿Cómo deben estar relacionadas M y L para garantizar que $y_A[n] = y_B[n]$ para cualquier señal arbitraria $x[n]$?

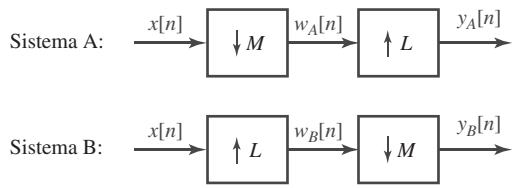


Figura P4.38

4.39. En el sistema A, se procesa una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ tal como indica la Figura P4.39-1.

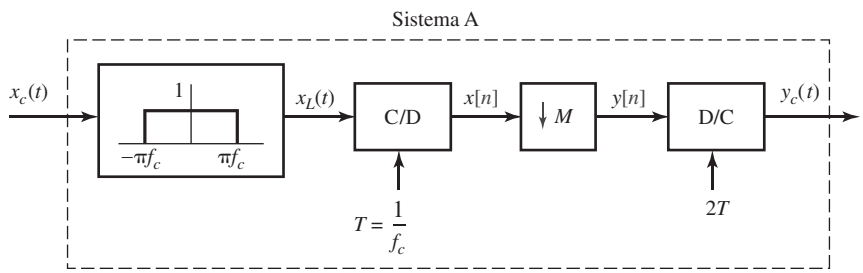


Figura P4.39-1

(a) Si $M = 2$ y $x_c(t)$ tiene la trnsformada de Fourier que se muestra en la Figura P4.39-2, determine $y[n]$. Demuestre claramente su trabajo en este apartado.

Se desea ahora modificar el sistema A situando apropiadamente módulos de proceso adicionales en la cascada de bloques que forman el sistema A (es decir, bloques que se pueden añadir en cualquier punto de la cascada, al principio, al final, o incluso entre dos bloques existentes). Deben mantenerse todos los bloques actuales del sistema A. Se desea que el sistema modificado sea un filtro paso bajo ideal, lineal e invariante con el tiempo, como se indica en la Figura P4.39-3.

Disponemos de un número ilimitado de seis clases de módulos que se especifican en la tabla de la Figura P4.39-1. El coste por unidad de cada tipo de módulo es el que se indica, y se desea que el coste final sea el mínimo posible. **Observe que el conversor D/C funciona con tasa "$2T$".**

(b) Diseñe el sistema modificado de coste mínimo si $M = 2$ en el sistema A. Especifique los parámetros de todos los módulos utilizados.

(c) Diseñe el sistema modificado de coste mínimo si $M = 4$ en el sistema A. Especifique los parámetros de todos los módulos utilizados.

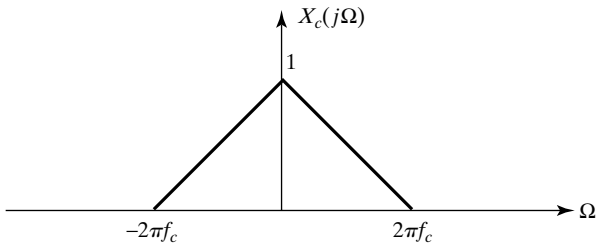


Figura P4.39-2

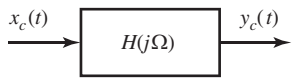


Figura P4.39-3

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{2\pi f_c}{5} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$x(t) \rightarrow$ C/D $\rightarrow x[n]$, T	**Conversor tiempo continuo a tiempo discreto** Parámetros: T Coste : 10
$x[n] \rightarrow$ D/C $\rightarrow x(t)$, T	**Conversor tiempo discreto a tiempo continuo** Parámetros: T Coste : 10
$x[n] \rightarrow$ A, $-\pi/T$, π/T $\rightarrow y[n]$	**Filtro paso bajo en tiempo discreto** Parámetros: A, T Coste : 10
$x(t) \rightarrow$ A, $-\pi/R$, π/R $\rightarrow y(t)$	**Filtro paso bajo en tiempo continuo** Parámetros: A, R Coste : 20
$\rightarrow \uparrow L \rightarrow$	**Expansor** Parámetros: L Coste : 5
$\rightarrow \downarrow M \rightarrow$	**Compresor** Parámetros: M Coste : 5

Figura P4.39-4

4.40. Considere el sistema que se muestra en la Figura P4.40-1, donde

(i) M es un entero

(ii) $x_e[n] = \begin{cases} x[n/M] & n = kM, \quad k \text{ es cualquier entero} \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

(iii) $y[n] = y_e[nM]$.

(iv) $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} M & |\omega| \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$.

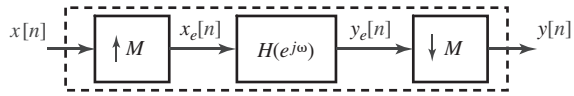


Figura P4.40-1

(a) Suponga que $M = 2$ y que $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$, es real, y se muestra en la Figura P4.40-2. Realice un gráfico etiquetado adecuadamente de $X_e(e^{j\omega})$, $Y_e(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$, las transformadas de Fourier en tiempo discreto de $x_e[n]$, $y_e[n]$ e $y[n]$, respectivamente. Asegúrese de etiquetar claramente las amplitudes y frecuencias más relevantes.

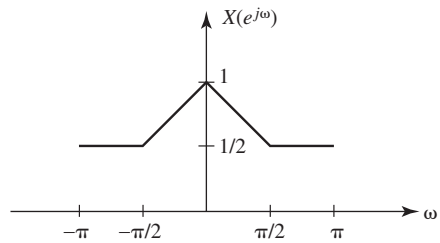


Figura P4.40-2

(b) Para $M = 2$ y $X(e^{j\omega})$ tal como se muestra en la Figura P4.24-2, obtenga el valor de

$$\varepsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2 .$$

(c) Para $M = 2$, el sistema completo es lineal e invariante con el tiempo. Determine y dibuje el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema completo, $|H_{\text{eff}}(e^{j\omega})|$.

(d) Para $M = 6$, el sistema completo todavía es lineal e invariante con el tiempo. Determine y dibuje el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema completo, $|H_{\text{eff}}(e^{j\omega})|$.

4.41. **(a)** Considere el sistema de la Figura P4.41-1 en el que un filtro $H(z)$ es seguido por un compresor. Suponga que la respuesta al impulso de $H(z)$ es:

$$h[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & 0 \le n \le 11 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \qquad \text{(P4.41-1)}$$

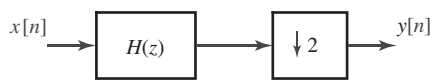


Figura P4.41-1

La eficiencia de este sistema se puede mejorar implementando el filtro $H(z)$ y el compresor mediante descomposición polifásica. Dibuje una estructura polifásica eficiente para este sistema con dos componentes polifásicas. Especifique por favor los filtros que utilice.

(b) Considere ahora el sistema de la Figura P4.41-2, en el que un filtro $H(z)$ está precedido por un expansor. Suponga que la respuesta al impulso de $H(z)$ es la que se indica en la Ecuación (P4.41-1).

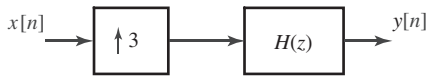
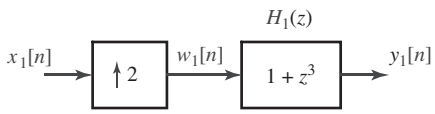


Figura P4.41-2

La eficiencia de este sistema se puede mejorar implementando el expansor y el filtro $H(z)$ mediante descomposición polifásica. Dibuje una estructura polifásica eficiente para este sistema con tres componentes polifásicas. Especifique por favor los filtros que utilice.

4.42. Para los sistemas que se muestran en las Figuras P4.42-1 y P4.42-2, determine si es o no posible escoger $H_2(z)$ en el Sistema 2 de forma que $y_2[n] = y_1[n]$ cuando $x_2[n] = x_1[n]$ y $H_1(z)$ es tal como se especifica. Si es posible, especifique $H_2(z)$. Si no es posible, especifique claramente por qué.

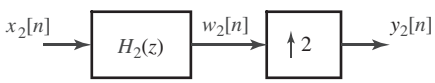
Sistema 1:



$$w_1[n] = \begin{cases} x_1[n/2] & , \ n/2 \text{ entero} \\ 0 & , \ \text{en el resto} \end{cases}$$

Figura P4.42-1

Sistema 2:



$$y_2[n] = \begin{cases} w_2[n/2] & , \ n/2 \text{ entero} \\ 0 & , \ \text{en el resto} \end{cases}$$

Figura P4.42-2

4.43. El diagrama de bloques de la Figura P4.43 representa un sistema que se desearía implementar. Determine un diagrama de bloques de un sistema equivalente formado por una cascada de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, bloques de tipo compresor, y bloques de tipo expansor que requiera el mínimo número de multiplicaciones por muestra de salida.

Nota: por "sistema equivalente" se entiende un sistema que produce la misma secuencia de salida para cualquier secuencia de entrada dada.

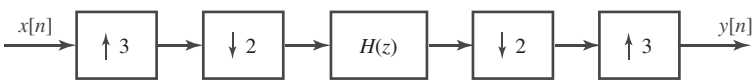


Figura P4.43

$$H(z) = \frac{z^{-6}}{7 + z^{-6} - 2z^{-12}}$$

4.44. Considere los dos sistemas mostrados en la Figura P4.44.

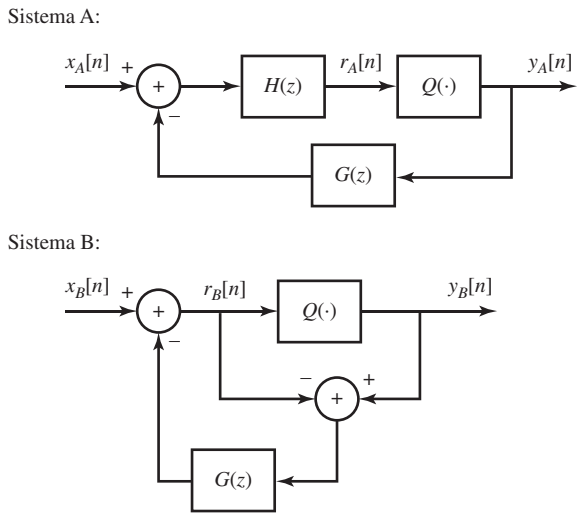


Figura P4.44

donde $Q(\cdot)$ representa un cuantificador que es el mismo en ambos sistemas. Para cualquier $G(z)$ dada, ¿es posible especificar siempre $H(z)$ de forma que los dos sistemas sean equivalentes (es decir, $y_A[n] = y_B[n]$ cuando $x_A[n] = x_B[n]$) para cualquier cuantificador arbitrario $Q(\cdot)$? Si es así, especifique $H(z)$. En caso contrario, explique claramente su razonamiento.

4.45. El cuantificador $Q(\cdot)$ del sistema S_1 (Figura P4.45-1) se puede modelar mediante un ruido aditivo. La Figura P4.45-2 muestra el sistema S_2, que es un modelo del sistema S_1

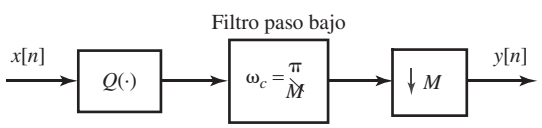


Figura P4.45-1 Sistema S_1

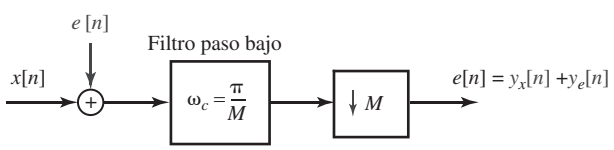


Figura P4.45-2 Sistema S_2

La entrada $x[n]$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio de media cero con densidad espectral de potencia $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ de banda limitada a π/M y cumple que $E\left[x^2[n]\right] = 1$. El ruido aditivo $e[n]$ es ruido blanco estacionario en sentido amplio de media cero y varianza σ_e^2. La entrada y el ruido aditivo están incorrelados. La respuesta en frecuencia del filtro paso bajo en todos los diagramas tiene ganancia unidad.

(a) Obtenga la relación señal a ruido del sistema S_2: $SNR = 10\log\frac{E[y_x^2[n]]}{E[y_e^2[n]]}$. Nótese que $y_x[n]$ es la salida debida únicamente a $x[n]$ e $y_e[n]$ es la salida debida únicamente a $e[n]$.

(b) Para mejorar la relación señal a ruido de cuantificación, se propone el sistema de la Figura 4.45-3:

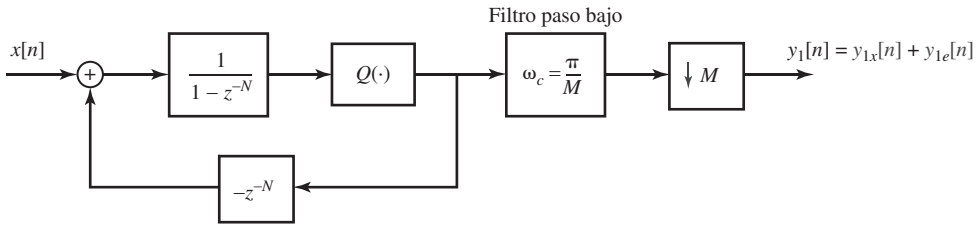


Figura P4.45-3

donde $N > 0$ es un entero tal que $\pi N << M$. Sustituya el cuantificador por el modelo de ruido aditivo, como se indica en la Figura 4.45-4. Exprese $y_{1x}[n]$ en función de $x[n]$ e $y_{1e}[n]$ en función de $e[n]$.

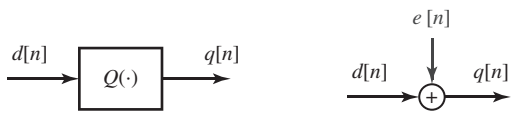


Figura P4.45-4

(c) Suponga que $e[n]$ es ruido blanco estacionario en sentido amplio de media cero e incorrelado con la entrada $x[n]$. ¿Es $y_{1e}[n]$ una señal estacionaria en sentido amplio? ¿Qué puede decir sobre $y_1[n]$? Explique sus respuestas.

(d) ¿Mejora la relación señal a ruido el método propuesto en el apartado (b)? ¿Para qué valor de N se maximiza le relación señal a ruido del sistema del apartado (b)?

4.46. A continuación se proponen unas equivalencias entre compresores y expansores. Indique si cada una de ellas es o no válida. Si su respuesta es que es válida, demuestre explícitamente por qué. Si su respuesta es que no lo es, indique explícitamente un contraejemplo simple.

(a) Equivalencia propuesta (a):

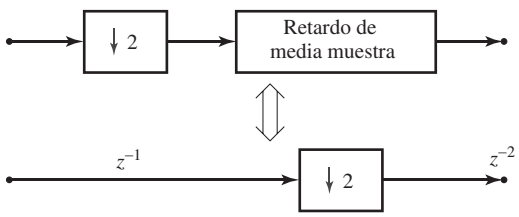


Figura P4.46-1

(b) Equivalencia propuesta (b):

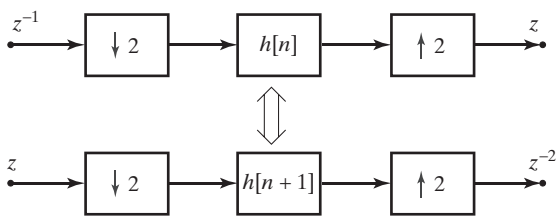


Figura P4.46-2

(c) Equivalencia propuesta (c):

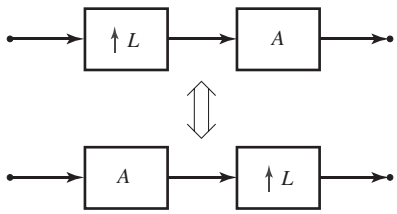
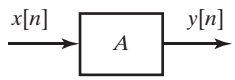


Figura P4.46-3

siendo L un entero positivo. A está definida en términos de $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ ((las respectivas transformadas de Fourier en tiempo discreto de la entrada y la salida de A), de la siguiente forma:



$$Y(e^{j\omega}) = \left(X(e^{j\omega})\right)^L$$

Figura P4.46-4

4.47. Considere el sistema de la Figura P4.47-1 para realizar el procesado en tiempo discreto de la señal de entrada en tiempo continuo $g_c(t)$.

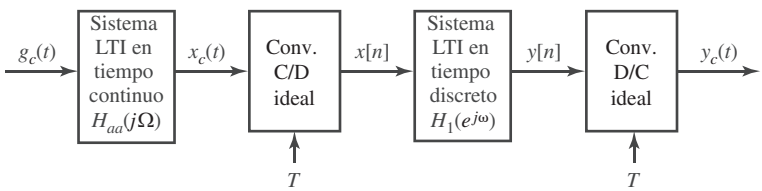


Figura P4.47-1

La señal de entrada en tiempo continuo al sistema completo es de la forma $g_c(t) = f_c(t) + e_c(t)$ donde $f_c(t)$ se considera la componente de "señal" y $e_c(t)$ se considera una componente de "ruido aditivo". La Figura P4.47-2 muestra las transformadas de Fourier de $f_c(t)$ y $e_c(t)$.

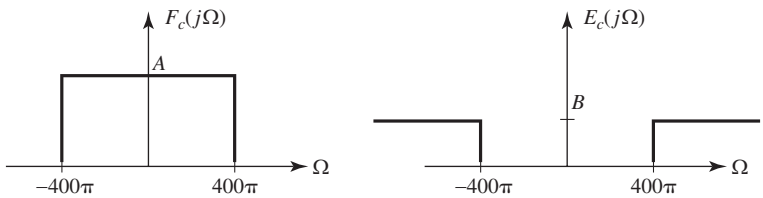


Figura P4.47-2

Como la señal de entrada $g_c(t)$ no tiene una transformada de Fourier de banda limitada, se utiliza un filtro antisolapamiento en tiempo continuo de fase cero para combatir la distorsión por solapamiento. La Figura P4.43-3 muestra su respuesta en frecuencia.

(a) En la Figura P4.47-1 la frecuencia de muestreo es $2\pi/T = 1600\pi$, y la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto es

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

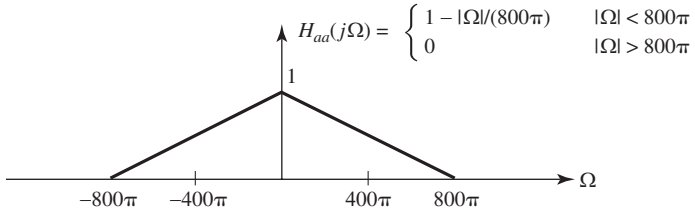


Figura P4.47-3

Dibuje la transformada de Fourier de la señal de salida en tiempo continuo para la entrada cuya transformada de Fourier se muestra en la Figura P4-47-2.

(b) Si la frecuencia de muestreo es $2\pi/T = 1600\pi$, determine el módulo y la fase de $H_1(e^{j\omega})$ (la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto) de forma que la salida del sistema de la Figura P4.47-1 sea $y_c(t) = f_c(t-0{,}1)$. Para expresar su respuesta, puede utilizar cualquier combinación de ecuaciones o bien gráficas etiquetadas cuidadosamente.

(c) Resulta que como sólo estamos interesados en obtener $f_c(t)$ a la salida, podemos usar una frecuencia de muestreo más baja que $2\pi/T = 1600\pi$ utilizando todavía el filtro antisolapamiento de la Figura P4.47-3, Determine la mínima frecuencia de muestreo que evitaría la distorsión por solapamiento en $F_c(j\Omega)$ y determine también la respuesta en frecuencia del filtro $H_1(e^{j\omega})$ que se puede utilizar de forma que $y_c(t) = f_c(t)$ a la salida del sistema de la Figura P4.47-1.

(d) Considere ahora el sistema que se muestra en la Figura P4.47-4, con $2\pi/T = 1600\pi$, la señal de entrada definida en la Figura P4.47-2 y el filtro antisolapamiento como se muestra en la Figura P4.47-3, siendo

$$v[n] = \begin{cases} x[n/3] & n = 0, \pm 3, \pm 6, \ldots \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

¿Cómo debería ser $H_2(e^{j\omega})$ si se desea que $y[n] = f_c(nT/3)$?

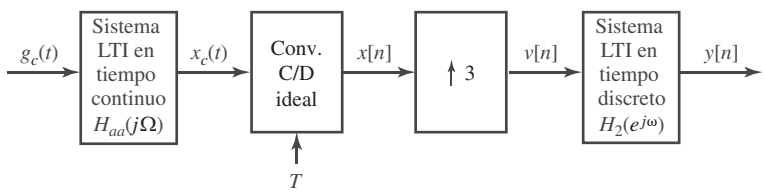


Figura P4.47-4 Otro diagrama de bloques del sistema.

4.48. **(a)** Una secuencia finita $b[n]$ es tal que:

$$B(z) + B(-z) = 2c, \quad c \neq 0.$$

Explique la estructura de $b[n]$. ¿Existe alguna restricción sobre la longitud de $b[n]$?

(b) ¿Es posible que $B(z) = H(z)H(z^{-1})$? Explique su respuesta.

(c) Un filtro $H(z)$ de longitud N cumple que,

$$H(z)H(z^{-1}) + H(-z)H(-z^{-1}) = c. \tag{P4.48-1}$$

Obtenga $G_0(z)$ y $G_1(z)$ de forma que el filtro que se muestra en la Figura P4.48 sea lineal e invariante con el tiempo.

(d) Dados $G_0(z)$ y $G_1(z)$ del apartado (c), ¿reconstruye perfectamente la entrada el sistema global? Explique su respuesta.

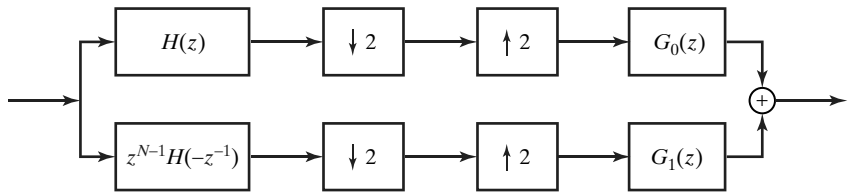


Figura P4.48

4.49. Considere el sistema multitasa que se muestra en la Figura P4.49-1, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$:

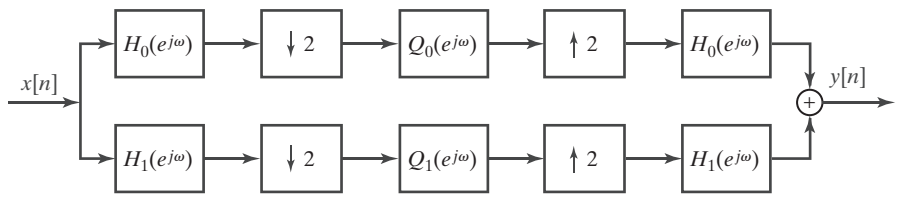


Figura P4.49-1

donde $Q_0(e^{j\omega})$ y $Q_1(e^{j\omega})$ son las respuestas en frecuencia de dos sistemas lineales e invariantes con el tiempo. $H_0(e^{j\omega})$ y $H_1(e^{j\omega})$ son respectivamente filtros paso bajo y paso alto ideales, con frecuencia de corte en $\pi/2$ como se muestra en la Figura P4.49-2:

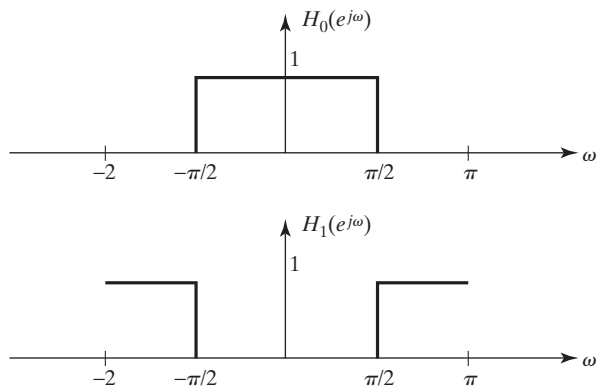


Figura P4.49-2

El sistema completo es lineal e invariante con el tiempo si $Q_0(e^{j\omega})$ y $Q_1(e^{j\omega})$ son como se muestra en la Figura P4.49-3.

Para esos valores de $Q_0(e^{j\omega})$ y $Q_1(e^{j\omega})$, dibuje la respuesta en frecuencia

$$G(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

del sistema completo.

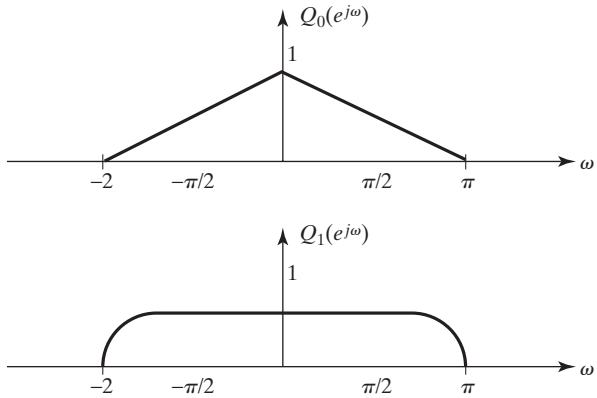


Figura P4.49-3

4.50. Considere el banco de filtros especulares en cuadratura que se muestra en la Figura P4.50:

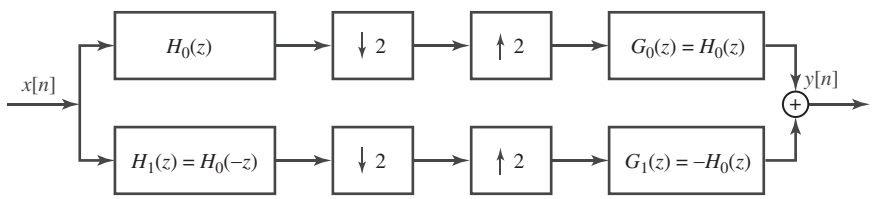


Figura P4.50

La relación entrada-salida es $Y(z) = T(z)X(z)$, siendo

$$T(z) = \frac{1}{2}(H_0^2(z) - H_0^2(-z)) = 2z^{-1}E_0(z^2)E_1(z^2)$$

y $E_0(z^2)$, $E_1(z^2)$ las componentes polifásicas de $H_0(z)$.

Los apartados (a) y (b) son independientes.

(a) Explique si las siguientes dos afirmaciones son correctas

(a1) Si $H_0(z)$ es de fase lineal, entonces $T(z)$ es de fase lineal.

(a2) Si $E_0(z)$ y $E_1(z)$ son de fase lineal, entonces $T(z)$ es de fase lineal.

(b) El filtro prototipo es conocido, $h_0[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$:

(b1) ¿Cómo son $h_1[n]$, $g_0[n]$ y $g_1[n]$?

(b2) ¿Cómo son $e_0[n]$ y $e_1[n]$?

(b3) ¿Cómo son $T(z)$ y $t[n]$?

4.51. Considere el sistema de la Figura 4.10 con $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(1000)$ y siendo el sistema en tiempo discreto un sistema que eleva al cuadrado, es decir, $y[n] = x^2[n]$. ¿Cuál es el máximo valor de T tal que $y_c(t) = x_c^2(t)$?

4.52. En el sistema de la Figura P4.52,

$$X_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq \pi/T,$$

y

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

¿Cómo se relaciona $y[n]$ con la señal de entrada $x_c(t)$?

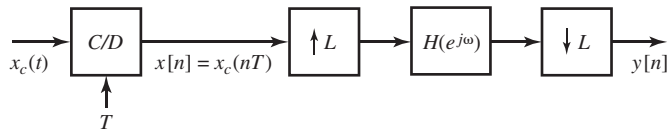


Figura P4.52

Problemas de ampliación

4.53. En muchas aplicaciones aparecen señales aleatorias en tiempo discreto mediante el muestreo periódico de señales aleatorias en tiempo continuo. Este problema considera una derivación del teorema de muestreo para señales aleatorias. Considere un proceso aleatorio en tiempo continuo estacionario definido por las variables aleatorias $\{x_a(t)\}$, siendo t una variable continua. La función de autocorrelación se define así:

$$\phi_{x_c x_c}(\tau) = \mathscr{E}\{x(t)x^*(t+\tau)\},$$

y la densidad espectral de potencia es

$$P_{x_c x_c}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x_c x_c}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau.$$

Un proceso aleatorio discreto definido mediante muestreo periódico se define mediante el conjunto de variables aleatorias $\{x[n]\}$, siendo $x[n] = x_a(nT)$ y T el periodo de muestreo.

(a) ¿Cuál es la relación entre $\phi_{xx}[n]$ y $\phi_{x_c x_c}(\tau)$?
(b) Exprese la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto en función de la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo.
(c) ¿Bajo qué condición la densidad espectral de potencia en tiempo discreto es una representación fiable de la densidad espectral de potencia en tiempo continuo?

4.54. Considere un proceso aleatorio en tiempo continuo $x_c(t)$ con una densidad espectral de potencia $P_{x_c x_c}(\Omega)$ de banda limitada, como se muestra en la Figura P4.54-1. Suponga que se muestrea $x_c(t)$ y se obtiene el proceso aleatorio en tiempo discreto $x[n] = x_c(nT)$.

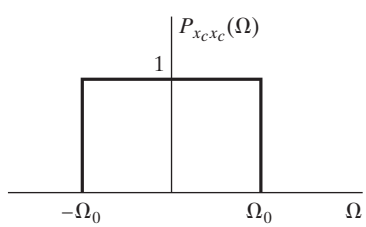


Figura P4.54-1

(a) ¿Cuál es la secuencia de autocorrelación del proceso aleatorio en tiempo discreto?
(b) Dada la densidad espectral de potencia en tiempo continuo que se muestra en la Figura P4.54-1, ¿cuál debería ser el valor de T para que el proceso aleatorio en tiempo discreto sea blanco, es decir, para que la densidad espectral de potencia sea constante para todo ω?
(c) Si la densidad espectral de potencia en tiempo continuo fuera como se muestra en la Figura P4.54-2, ¿cómo debería escogerse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?
(d) ¿Cuál es la condición general que deben cumplir el proceso en tiempo continuo y el periodo de muestreo para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

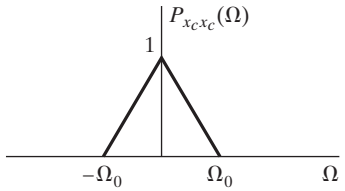


Figura P4.54-2

4.55. En este problema se explora el efecto de intercambiar el orden de dos operaciones que se realizan sobre una señal; concretamente, el muestreo y una operación no lineal sin memoria.

(a) Considere los dos sistemas de proceso que se muestran en la Figura P4.55-1, donde los conversores C/D y D/C son ideales. La función $g[x] = x^2$ representa un dispositivo no lineal sin memoria. Para los dos sistemas que se muestran en la figura, dibuje los espectros de la señal en los puntos 1, 2 y 3 cuando el periodo de muestreo cumple $1/T = 2f_m$ Hz y la transformada de Fourier de $x_c(t)$ es como se muestra en la Figura P4.55-2 ¿Es $y_1(t) = y_2(t)$? Si no es así, ¿Por qué no? ¿Es $y_1(t) = x^2(t)$? Explique la respuesta.

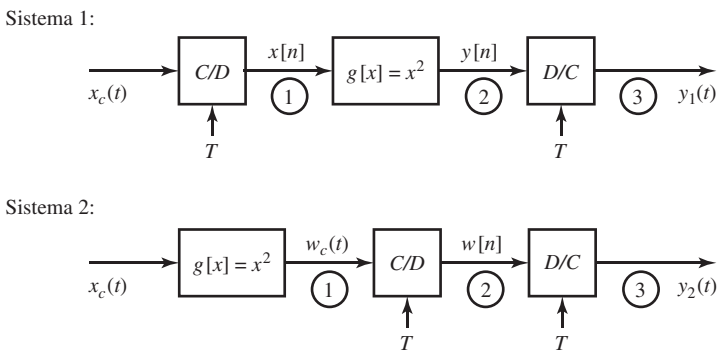


Figura P4.55-1

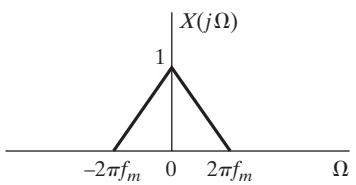


Figura P4.55-2

(b) Considere el Sistema 1, y sea $x(t) = A\cos(30\pi t)$. Sea la frecuencia de muestreo $1/T = 40$ Hz. ¿Es $y_1(t) = x_c^2(t)$? Explique por qué o por qué no.

(c) Considere el sistema de procesado de señal que se muestra en la Figura P4.55-3, donde $g[x] = x^3$ y $g^{-1}[v]$ es la función inversa (única), es decir, $g^{-1}[g(x)] = x$. Sea $x(t) = A\cos(30\pi t)$ y $1/T = 40$ Hz. Exprese $v[n]$ en función de $x[n]$. ¿Hay solapamiento espectral? Exprese $y[n]$ en función de $x[n]$. ¿Qué conclusión se puede extraer de este ejemplo? La siguiente identidad puede resultar útil:

$$\cos^3 \Omega_0 t = \tfrac{3}{4}\cos\Omega_0 t + \tfrac{1}{4}\cos 3\Omega_0 t.$$

(d) Un problema práctico es el de la digitalización de una señal con un margen dinámico grande. Supongamos que comprimimos dicho margen dinámico pasando la señal por un dispositivo no lineal sin memoria previamente al proceso de conversión A/D, y posteriormente lo expandimos tras la conversión A/D ¿Qué impacto tiene esta operación no lineal previa a la conversión A/D en la selección de la frecuencia de muestreo?

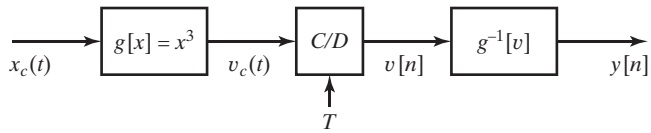


Figura P4.55-3

4.56. La Figura 4.23 muestra un sistema para interpolar una señal por un factor L, siendo

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0,\ \pm L,\ \pm 2L\ , \text{etc}\ldots, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases}$$

y donde el filtro paso bajo interpola entre los valores distintos de cero de $x_e[n]$ para generar la señal sobremuestreada o interpolada $x_i[n]$. Cuando el filtro paso bajo es ideal, la interpolación se denomina interpolación de banda limitada. Como se indica en la Sección 4.6.3, los procedimientos simples de interpolación son adecuados en muchas aplicaciones. Dos procedimientos sencillos que se utilizan muy a menudo son la retención de orden cero y la interpolación lineal. Para el caso de la interpolación mediante retención de orden cero, cada valor de $x[n]$ se repite L veces, es decir,

$$x_i[n] = \begin{cases} x_e[0], & n = 0,\ 1, \ldots, L-1, \\ x_e[L], & n = L,\ L+1, \ldots, 2L-1, \\ x_e[2L], & n = 2L,\ 2L+1, \ldots, \\ \vdots \end{cases}$$

La interpolación lineal se describe en la Sección 4.6.2.

(a) Determine la selección apropiada de la respuesta al impulso del filtro paso bajo de la Figura 4.23 para realizar la interpolación mediante retención de orden cero. Determine también la correspondiente respuesta en frecuencia.

(b) La Ecuación (4.91) especifica la respuesta al impulso para la interpolación lineal. Determine la correspondiente respuesta en frecuencia (puede resultar útil emplear el hecho de que $h_{\text{lin}}[n]$ tiene forma triangular y en consecuencia corresponde a la convolución de dos secuencias rectangulares).

(c) Dibuje el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro para la retención de orden cero y para la interpolación lineal. ¿Cuál es una mejor aproximación a la interpolación ideal de banda limitada?

4.57. Se desea calcular la función de autocorrelación de una señal interpolada, como se indica en la Figura P4.57-1. Se sugiere que esto puede ser equivalente a utilizar el sistema que se muestra en la Figura P4.57-2 ¿Se puede escoger $H_2(e^{j\omega})$ de forma que $\phi_3[m] = \phi_1[m]$? Si no, ¿por qué? Si es así, especifique $H_2(e^{j\omega})$.

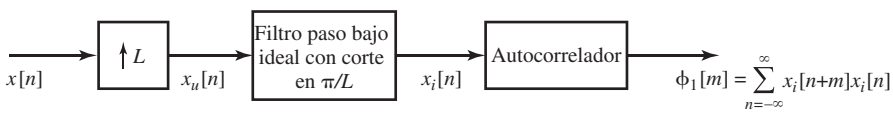


Figura P4.57-1

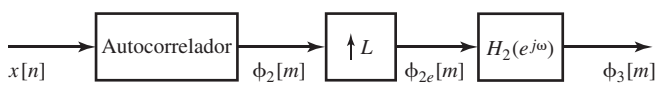
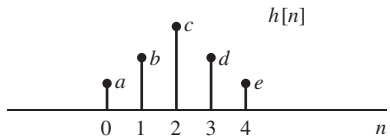


Figura P4.57-2

4.58. Suponga que se desea interpolar una secuencia por un factor de 2, utilizando un sistema con la forma de la Figura 4.23. Sin embargo, el filtro paso bajo de esa figura se va a aproximar mediante un filtro de cinco puntos cuya respuesta al impulso $h[n]$ se muestra en la Figura P4.58-1. En este sistema, la salida $y_1[n]$ se obtiene mediante la convolución directa de $h[n]$ con $w[n]$.



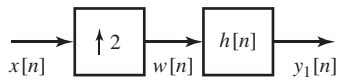


Figura P4.58-1

(a) La Figura P4.58-2 muestra una posible realización del sistema con la selección comentada de $h[n]$. Las tres respuestas al impulso $h_1[n]$, $h_2[n]$ y $h_3[n]$ son cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq 2$. Determine y justifique claramente una selección de valores de $h_1[n]$, $h_2[n]$ y $h_3[n]$ de forma que $y_1[n] = y_2[n]$ para cualquier señal $x[n]$, es decir, para que los dos sistemas sean idénticos.

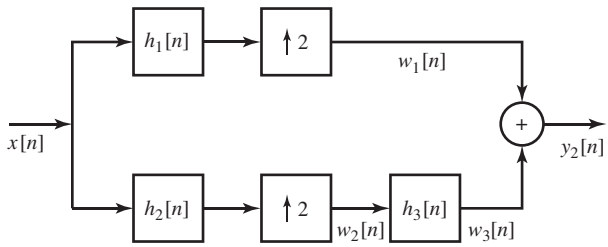


Figura P4.58-2

(b) Determine el número de multiplicaciones por punto de salida que se requieren en el sistema de la Figura P4.58-1 y en el sistema de la Figura P4.58-2. Se debe llegar a la conclusión de que el sistema de la Figura P4.58-2 es más eficiente.

4.59. Considere el sistema de análisis-síntesis que se muestra en la Figura P4.59-1. El filtro paso bajo $h_0[n]$ es idéntico en el analizador y el sintetizador, y el filtro paso alto $h_1[n]$ es idéntico en el analizador y el sintetizador. La relación entre las transformadas de Fourier de $h_0[n]$ y de $h_1[n]$ es

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)}).$$

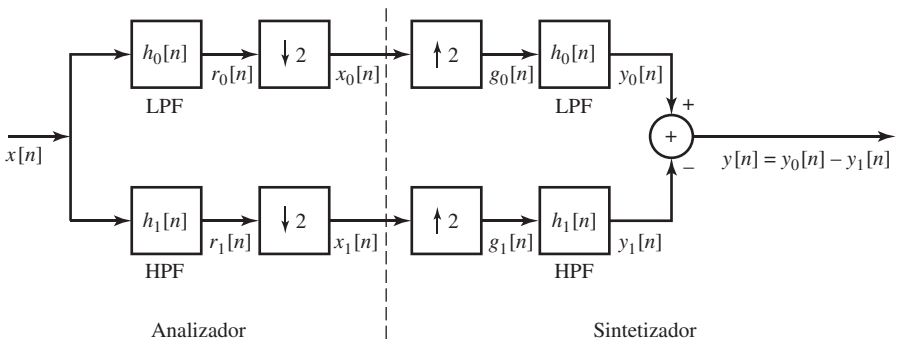


Figura P4.59-1

(a) Si $X(e^{j\omega})$ y $H_0(e^{j\omega})$ son como se muestra en la Figura P4.59-2, dibuje (salvo un factor de escala) $X_0(e^{j\omega})$, $G_0(e^{j\omega})$ e $Y_0(e^{j\omega})$.

(b) Escriba una expresión general de $G_0(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$ y $H_0(e^{j\omega})$. *No* suponga que $X(e^{j\omega})$ y $H_0(e^{j\omega})$ son como se muestra en la Figura P4.59-2.

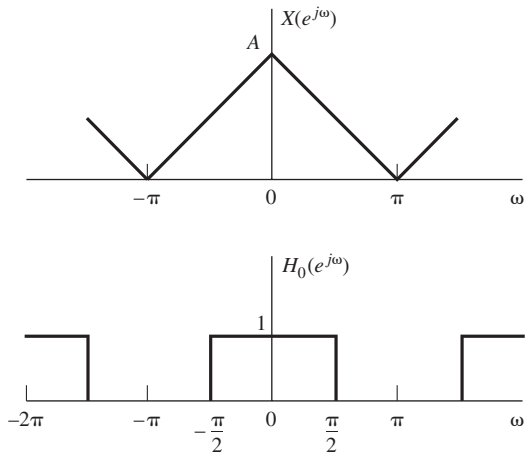


Figura P4.59-2

(c) Determine un conjunto de condiciones sobre $H_0(e^{j\omega})$ lo más general posible que garantice que la señal $|Y(e^{j\omega})|$ es proporcional a $|X(e^{j\omega})|$ para cualquier entrada estable $x[n]$.

Nota: los bancos de filtros de análisis-síntesis como el que se considera en este problema son muy similares a los bancos de filtros especulares en cuadratura. Para una ampliación de este tema, véase Crochiere y Rabiner (1983), págs. 378–392.)

4.60. Considere una secuencia real $x[n]$ que cumple

$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad \frac{\pi}{3} \le |\omega| \le \pi.$$

Un valor de $x[n]$ puede haber resultado perturbado, y se desea recuperarlo de forma exacta o aproximada. Sea $\hat{x}[n]$ la señal perturbada,

$$\hat{x}[n] = x[n] \text{ para } n \neq n_0,$$

y $\hat{x}[n_0]$ es un valor real no relacionado con $x[n_0]$. Para cada uno de los tres casos siguientes, especifique un algoritmo práctico para recuperar de forma exacta o aproximada $x[n]$ a partir de $\hat{x}[n]$:

(a) Se conoce el valor de n_0.

(b) *No* se conoce el valor exacto de n_0, pero se sabe que es un número par.

(c) No se sabe nada sobre n_0.

4.61. En los sistemas de comunicaciones se requiere a menudo realizar la conversión de multiplexación en el dominio del tiempo (TDM - *Time Domain Multiplexing*) a multiplicación en el dominio de la frecuencia (FDM - *Frequency Domain Multiplexing*). El diagrama de bloques del sistema que se va a estudiar se muestra en la Figura P4.61-1. La entrada TDM se supone que es una secuencia de muestras entrelazadas

$$w[n] = \begin{cases} x_1[n/2] & \text{para } n \text{ entero par,} \\ x_2[(n-1)/2] & \text{para } n \text{ entero impar.} \end{cases}$$

Suponga que las secuencias $x_1[n] = x_{c1}(nT)$ y $x_2[n] = x_{c2}(nT)$ se obtienen por muestreo sin solapamiento de las señales en tiempo continuo $x_{c1}(t)$ y $x_{c2}(t)$, respectivamente.

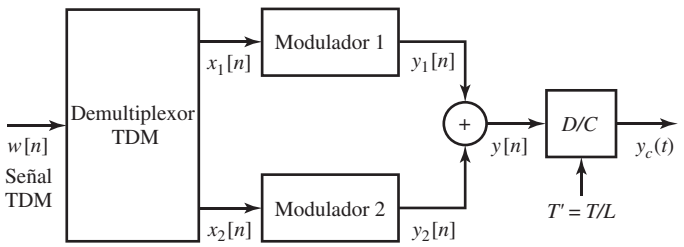


Figura P4.61-1

Suponga también que las dos señales tienen la misma frecuencia máxima Ω_N y que el periodo de muestreo es $T = \pi/\Omega_N$.

(a) Dibuje un diagrama de bloques de un sistema que produzca como salida las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Es decir, obtenga un sistema que demultiplexe una señal TDM utilizando operaciones simples. Indique si el sistema resultante es lineal, invariante con el tiempo, causal y estable.

El sistema modulador k-ésimo ($k = 1$ o 2) se define mediante el diagrama de bloques de la Figura P4.61-2. El filtro paso bajo $H_i(e^{j\omega})$, que es el mismo para los dos canales, tiene ganancia L y frecuencia de corte π/L, y los filtros paso alto $H_k(e^{j\omega})$ tienen ganancia unidad y frecuencia de corte ω_k. Las frecuencias del modulador cumplen

$$\omega_2 = \omega_1 + \pi/L \qquad \text{y} \qquad \omega_2 + \pi/L \leq \pi \qquad (\text{suponga } \omega_1 > \pi/2).$$

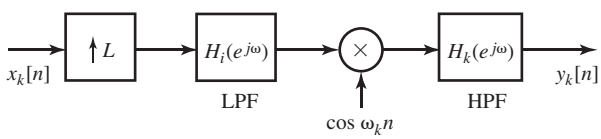


Figura P4.61-2

(b) Suponga que $\Omega_N = 2\pi \times 5 \times 10^3$. Obtenga ω_1 y L de forma que, tras la conversión ideal D/C con periodo de muestreo T/L, la transformada de Fourier de $y_c(t)$ sea cero, excepto en la banda de frecuencias

$$2\pi \times 10^5 \leq |\omega| \leq 2\pi \times 10^5 + 2\Omega_N.$$

(c) Suponga que las transformadas de Fourier en tiempo continuo de las dos señales de entrada originales son como se muestra en la Figura P4.61-3. Dibuje las transformadas de Fourier en cada punto del sistema.

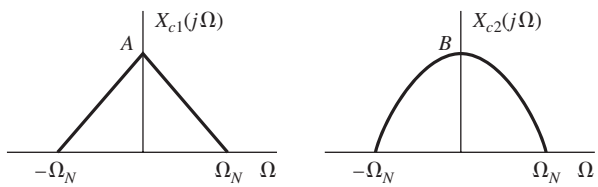


Figura P4.61-3

(d) Basándose en la solución de los apartados (a)–(c), discuta cómo podría generalizarse el sistema para manejar M canales de igual ancho de banda.

4.62. En la Sección 4.8.1, consideramos el uso del filtrado previo para evitar el solapamiento. En la práctica, el filtro antisolapamiento no puede ser ideal. Sin embargo, las características no ideales se pueden compensar parcialmente con un sistema en tiempo discreto aplicado a la secuencia $x[n]$ de salida del conversor C/D.

Considere los dos sistemas que se muestran en al Figura P4.56-1. Los filtros antisolapamiento $H_{\text{ideal}}(j\Omega)$ y $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ se muestran en la Figura P4.56-2. En la Figura P4.56-1, $H(e^{j\omega})$ se especifica para compensar las características no ideales de $H_{\text{aa}}(j\Omega)$.

Dibuje $H(e^{j\omega})$ de forma que las secuencias $x[n]$ y $w[n]$ sean idénticas.

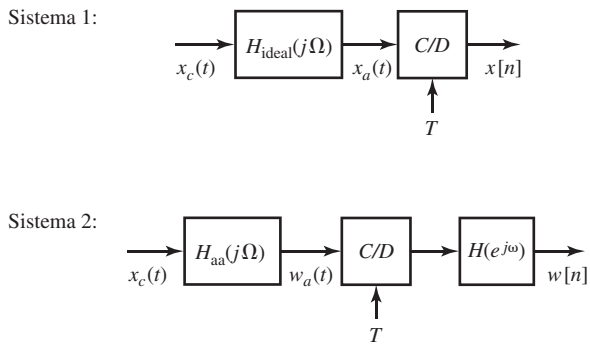


Figura P4.62-1

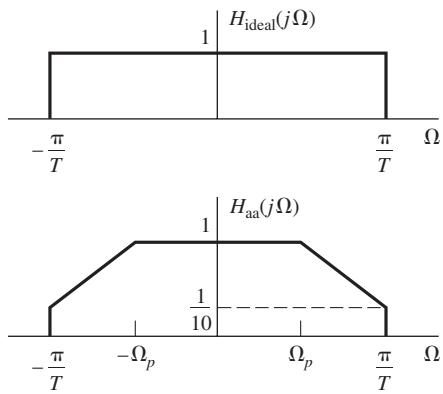


Figura P4.62-2

4.63. Como se comentó en la Sección 4.8.2, para procesar secuencias en un computador digital, se debe cuantificar la amplitud de la secuencia en un conjunto de valores discretos. El proceso de cuantificación se puede modelar pasando la secuencia de entrada $x[n]$ por un cuantificador $Q(x)$ cuya relación entrada–salida es como se muestra en la Figura 4.54.

Como se indicó en la Sección 4.8.3, si el intervalo de cuantificación Δ es pequeño comparado con los cambios de nivel de la secuencia de entrada, se puede suponer que la salida del cuantificador es de la forma

$$y[n] = x[n] + e[n],$$

siendo $e[n] = Q(x[n]) - x[n]$ un proceso aleatorio estacionario con función densidad de probabilidad de primero orden uniforme entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$, incorrelado muestra a muestra e incorrelado con $x[n]$, es decir, que $\mathscr{E}\{e[n]x[m]\} = 0$ para todo m y n.

Sea $x[n]$ un proceso estacionario de ruido blanco con media cero y varianza σ_x^2.

(a) Obtenga la media, varianza y función de autocorrelación de $e[n]$.

(b) ¿Cuál es la relación señal a ruido de cuantificación σ_x^2/σ_e^2?

(c) La señal cuantificada $y[n]$ se filtra con un filtro digital de respuesta al impulso $h[n] = \frac{1}{2}[a^n + (-a)^n]u[n]$. Determine la varianza del ruido producido a la salida debido al ruido de cuantificación a la entrada y determine la relación señal a ruido a la salida.

En algunos casos es conveniente utilizar intervalos de cuantificación no lineales, por ejemplo, espaciados logarítmicamente. Esto se puede realizar aplicando cuantificación uniforme al logaritmo de la entrada, como se indica en la Figura P4.63, donde $Q[\cdot]$ es un cuantificador uniforme como el especificado en la Figura 4.54. En este caso, si suponemos que es pequeño comparado con los cambios de la secuencia $\ln(x[n])$, se puede suponer que la salida del cuantificador vale

$$\ln(y[n]) = \ln(x[n]) + e[n].$$

Por tanto,

$$y[n] = x[n] \cdot \exp(e[n]).$$

Si e es pequeño, se puede aproximar $\exp(e[n])$ por $(1+e[n])$, con lo que

$$y[n] \approx x[n](1+e[n]) = x[n] + f[n]. \qquad \text{(P4.63-1)}$$

Esta ecuación se utilizará para describir el efecto de la cuantificación logarítmica. Se supone que $e[n]$ es un proceso aleatorio estacionario, de muestras incorreladas, independiente de la señal $x[n]$, y con densidad de probabilidad de primer orden uniformemente distribuida entre $\pm\Delta/2$.

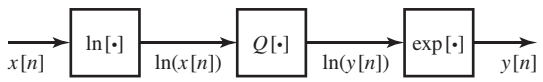


Figura P4.63

(d) Determine la media, varianza y secuencia de autocorrelación del ruido *aditivo* $f[n]$ definido en la Ecuación (4.57).

(e) ¿Cuál es la relación señal a ruido de cuantificación σ_x^2/σ_f^2? Nótese que en este caso σ_x^2/σ_f^2 es independiente de σ_x^2. Por tanto, dentro de los límites de las hipótesis, la relación señal a ruido de cuantificación es independiente del nivel de señal de entrada, mientras que en el caso de cuantificación lineal, la relación σ_x^2/σ_e^2 depende directamente de σ_x^2.

(f) (f) La señal cuantificada $y[n]$ se filtra con un filtro digital de respuesta al impulso $h[n] = \frac{1}{2}[a^n + (-a)^n]u[n]$. Determine la varianza del ruido producido a la salida debido al ruido de cuantificación a la entrada y determine la relación señal a ruido a la salida.

4.64. La Figura P4.64-1 muestra un sistema en el que se multiplican dos señales en tiempo continuo y se obtiene una señal en tiempo discreto a partir del producto muestreando dicho producto a la frecuencia de Nyquist, es decir, $y_1[n]$ son muestras de $y_c(t)$ tomadas a la frecuencia de Nyquist. La señal $x_1(t)$ es de banda limitada a 25 kHz ($X_1(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 5\pi \times 10^4$), y $x_2(t)$ está limitada a 2,5 kHz ($X_2(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq (\pi/2) \times 10^4$).

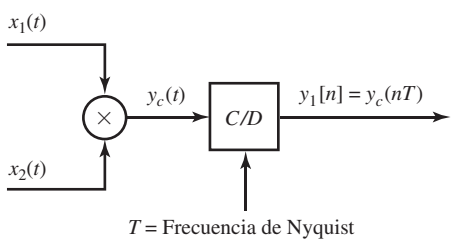


Figura P4.64-1

En algunas situaciones (transmisión digital, por ejemplo), las señales en tiempo continuo ya han sido muestreadas a sus correspondientes frecuencias de Nyquist, y la multiplicación se realiza en el dominio de tiempo discreto, posiblemente con algún tipo de procesado adicional antes y después de la multiplicación, como se indica en la Figura P4.64-2. Cada uno de los sistemas A, B y C, o bien es el sistema identidad o se puede realizar utilizando uno o más módulos de los que que se muestran en la Figura P4.64-3.

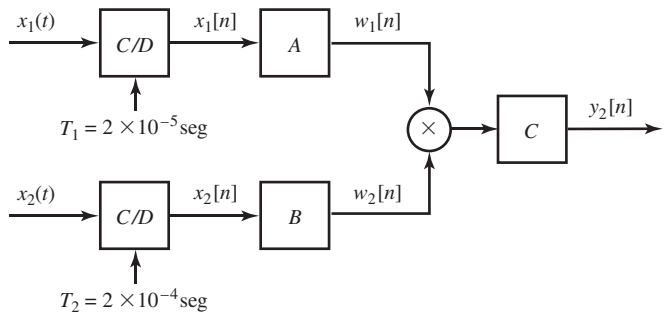


Figura P4.64-2

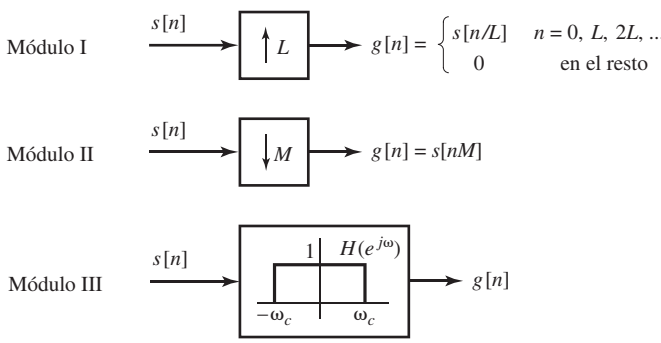


Figura P4.64-3

Para cada uno de los tres sistemas A, B y C o bien especifique que se trata del sistema identidad o bien especifique una interconexión apropiada de uno o más módulos de los que se muestran en la Figura P4.68-3. Especifique también los parámetros relevantes L, M y ω_c. Los sistemas A, B y C se deben diseñar de forma que $y_2[n]$ sea proporcional a $y_1[n]$, es decir,

$$y_2[n] = ky_1[n] = ky_c(nT) = kx_1(nT) \times x_2(nT),$$

y las muestras se toman a la frecuencia de Nyquist, es decir, $y_2[n]$ no es una versión sobremuestreada o submuestreada de $y_c(t)$.

4.65. Suponga que $s_c(t)$ es una señal de voz cuya transformada de Fourier en tiempo continuo $S_c(j\Omega)$ se muestra en la Figura P4.65-1. Utilizando el sistema que se muestra en la Figura P4.65-2 se obtiene una secuencia en tiempo discreto $s_r[n]$. $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo en tiempo discreto ideal de frecuencia de corte ω_c y ganancia L en la banda de paso, como se muestra en la Figura 4.29(b). La señal $s_r[n]$ se utilizará como entrada a un codificador de voz, que funciona correctamente sólo cuando las muestras en tiempo discreto representan una señal muestreada a una frecuencia de 8 kHz. Escoja los valores de L, M y ω_c que producen una señal de entrada $s_r[n]$ correcta al codificador de voz.

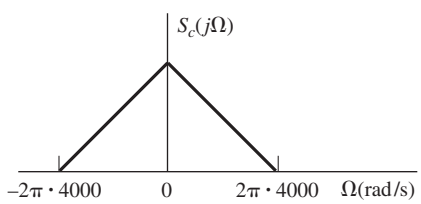


Figura P4.65-1

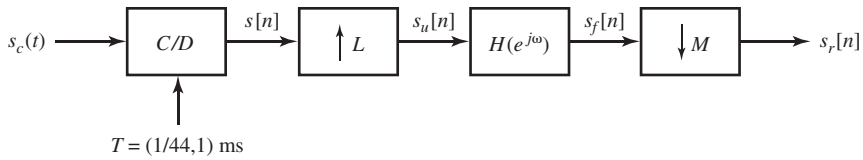


Figura P4.65-2

4.66. En muchas aplicaciones de audio es necesario muestrear una señal $x_c(t)$ en tiempo continuo a una frecuencia de muestreo de $1/T = 44$ kHz. La Figura P4.66-1 muestra un sistema directo para adquirir las muestras, que incluye un filtro antisolapamiento en tiempo continuo $H_{a0}(j\Omega)$. En muchas aplicaciones, en lugar del sistema convencional que se ilustra en la Figura P4.66-1 se utiliza el sistema de "sobremuestreo x4" que se muestra en la Figura P4.66-2. En este sistema,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/4, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

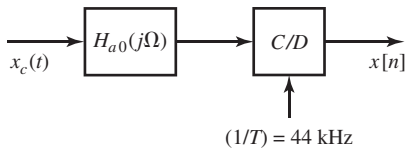


Figura P4.66-1

es un filtro paso bajo ideal y

$$H_{a1}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_p, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s, \end{cases}$$

para algunos valores $0 \leq \Omega_p \leq \Omega_s \leq \infty$.

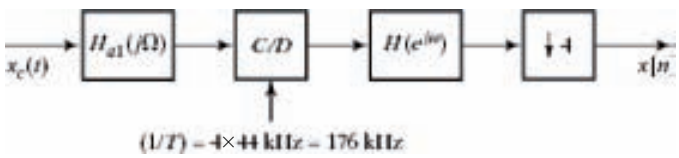


Figura P4.66-2

Suponiendo que $H(e^{j\omega})$ es ideal, obtenga el mínimo conjunto de especificaciones del filtro antisolapamiento $H_{a1}(j\Omega)$, es decir, el mínimo valor de Ω_p y el máximo valor de Ω_s, tales que el sistema de la Figura P4.66-2 sea equivalente al sistema de la Figura P4.66-1.

4.67. En este problema se considera el sistema de "doble integración" para la cuantificación con conformación de ruido que se muestra en la Figura P4.67. En este sistema,

$$H_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{y} \quad H_2(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}},$$

y la respuesta en frecuencia del filtro de diezmado es

$$H_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/M, \\ 0, & \pi/M \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

La fuente de ruido $e[n]$, que representa al cuantificador, se supone que es una señal de ruido blanco de media cero (densidad espectral de potencia constante), uniformemente distribuida en amplitud y con potencia de ruido $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$.

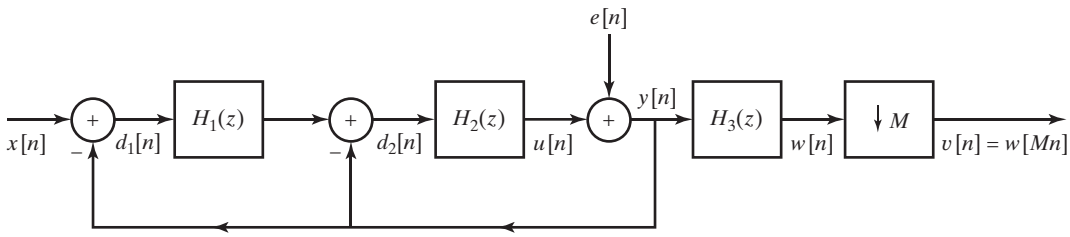


Figura P4.67

(a) Determine la ecuación de $Y(z)$ en función de $X(z)$ y $E(z)$. Suponga en este apartado que $E(z)$ existe. A partir de la relación de transformadas Z, demuestre que $y[n]$ se puede expresar como $y[n] = x[n-1] + f[n]$, siendo $f[n]$ la salida debida a la fuente de ruido $e[n]$. ¿Cuál es la relación en el dominio del tiempo entre $f[n]$ y $e[n]$?

(b) Suponga ahora que $e[n]$ es una señal de ruido blanco, tal como se describe previamente al apartado (a). Utilice el resultado de dicho apartado (a) para demostrar que el espectro de potencia del ruido $f[n]$ es

$$P_{ff}(e^{j\omega}) = 16\sigma_e^2 \operatorname{sen}^4(\omega/2).$$

¿Cuánto vale la potencia *total* de ruido (σ_f^2) de la componente de ruido de la señal $y[n]$? Dibuje sobre los mismos ejes las densidades espectrales de potencia $P_{ee}(e^{j\omega})$ y $P_{ff}(e^{j\omega})$ para $0 \le \omega \le \pi$.

(c) Suponga ahora que $X(e^{j\omega}) = 0$ para $\pi/M < \omega \le \pi$. Justifique que la salida de $H_3(z)$ es $w[n] = x[n-1] + g[n]$. Explique con palabras lo que es $g[n]$.

(d) Determine una expresión de la potencia de ruido σ_g^2 a la salida del filtro de diezmado. Suponga que $\pi/M \ll \pi$, es decir, que M es grande, de forma que se pueda utilizar la aproximación de ángulo pequeño para aproximar la integral.

(e) Después del sistema de diezmado, la salida es $v[n] = w[Mn] = x[Mn-1] + q[n]$, siendo $q[n] = g[Mn]$. Suponga ahora que $x[n] = x_c(nT)$ (es decir, que $x[n]$ se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo) ¿Qué condición debe satisfacer $X_c(j\Omega)$ para que $x[n-1]$ pase por el filtro sin modificación? Exprese la "componente de señal" de la salida $v[n]$ en función de $x_c(t)$. ¿Cuánto vale la potencia total de ruido σ_q^2 a la salida? Obtenga una expresión de la densidad espectral de potencia de ruido a la salida y, utilizando los mismos ejes, dibuje la densidad espectral de potencia $P_{ee}(e^{j\omega})$ y $P_{qq}(e^{j\omega})$ para $0 \le \omega \le \pi$.

4.68. En conversores sigma-delta con bucles de realimentación de orden alto, la estabilidad es un aspecto importante. Una solución alternativa conocida como MASH (*Multistage noise shaping* – Conformación multietapa de ruido) realiza una conformación de ruido de orden alto utilizando sólo realimentaciones de primer orden. La Figura P4.68-2 muestra la estructura de un sistema MASH de conformación de ruido de segundo orden que se analiza en este problema.

En la Figura P4.68-1 se muestra un sistema de conformación de ruido sigma-delta ($\Sigma - \Delta$) de primer orden, donde el efecto del cuantificador se representa mediante la señal de ruido aditivo $e[n]$. El ruido $e[n]$ se muestra explícitamente en el diagrama como una segunda salida del sistema. Suponga que la entrada es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio de media cero. Suponga también que $e[n]$ es blanco, de media cero, estacionario en sentido amplio y con una varianza de σ_e^2. $e[n]$ está incorrelado con $x[n]$.

(a) En el sistema de la Figura P4.68-1, la salida $y[n]$ tiene una componente $y_x[n]$ debida únicamente a $x[n]$ y una componente $y_e[n]$ debida únicamente a $e[n]$. Es decir, $y[n] = y_x[n] + y_e[n]$.

(i) Determine $y_x[n]$ en función de $x[n]$.

(ii) Determine $P_{y_e}(\omega)$, la densidad espectral de potencia de $y_e[n]$.

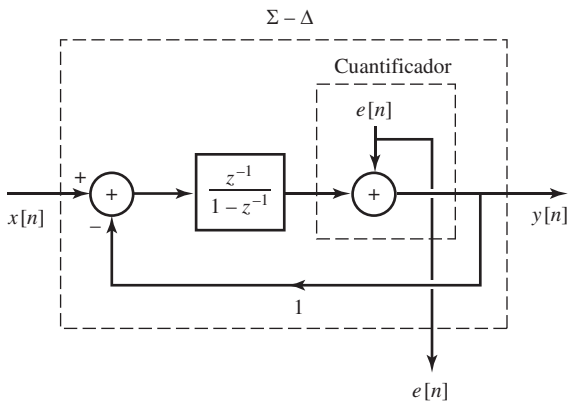


Figura P4.68-1

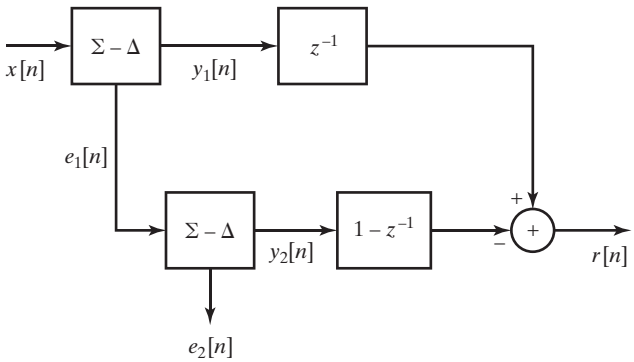


Figura P4.68-2

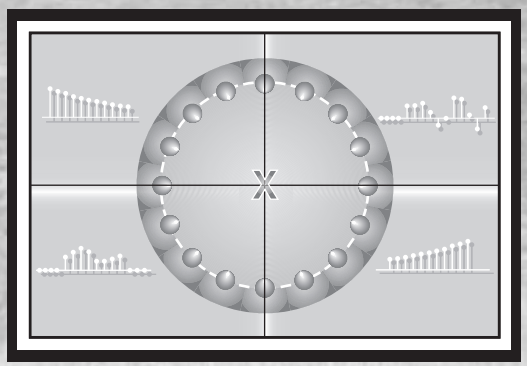
(a) El sistema de la Figura P4.68-1 se conecta ahora en la configuración que se muestra en la Figura P4.68-2, que muestra la estructura del sistema MASH. Nótese que $e_1[n]$ y $e_2[n]$ son las señales de ruido resultantes de los cuantificadores de los sistemas de conformación de ruido sigma-delta. La salida del sistema $r[n]$ tiene una componente $r_x[n]$ debida únicamente a $x[n]$ y una componente $r_e[n]$ debida únicamente a al ruido de cuantificación, es decir, $r[n] = r_x[n] + r_e[n]$. Suponga que $e_1[n]$ y $e_2[n]$ son blancas, de media cero, estacionarias en sentido amplio y de varianza σ_e^2. Suponga también que $e_1[n]$ está incorrelado con $e_2[n]$.

(I) Determine $r_x[n]$ en función de $x[n]$.

(II) Determine $P_{r_e}(\omega)$, la densidad espectral de potencia de $r_e[n]$.

5

Análisis en el dominio transformado de sistemas lineales e invariantes con el tiempo



5.0. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 2 desarrollamos la representación de señales y sistemas en tiempo discreto mediante la transformada de Fourier, y en el Capítulo 3 ampliamos esta representación definiendo la transformada Z. En ambos capítulos se dio especial importancia a las transformadas y a sus propiedades, y sólo se hizo una breve introducción a su uso en el análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI). En este capítulo vamos a considerar con mayor detalle la representación y análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo utilizando las transformadas de Fourier y Z. El material que se presenta es base esencial para la presentación en el Capítulo 6 de la implementación de sistemas lineales e invariantes con el tiempo y en el Capítulo 7 del diseño de estos sistemas.

Como se indicó en el Capítulo 2, un sistema lineal e invariante con el tiempo se puede caracterizar completamente en el dominio del tiempo mediante su respuesta al impulso $h[n]$, y la salida $y[n]$ debida a una entrada $x[n]$ se puede obtener mediante la suma de convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \tag{5.1}$$

Alternativamente, como la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia se relacionan directamente mediante la transformada de Fourier, la respuesta en frecuencia, suponiendo que exista (es decir, que $H(z)$ tenga una región de convergencia que incluya a $z = e^{j\omega}$), proporciona una caracterización también completa de un sistema lineal e invariante con el tiempo. En el Capítulo 3 desarrollamos la transformada Z como una generalización de la transformada de Fourier. La transformada Z de la salida de un sistema LTI se relaciona con la transformada Z de la entrada y la transformada Z de la respuesta al impulso de la siguiente forma

$$Y(z) = H(z)X(z), \tag{5.2}$$

siendo $Y(z)$, $X(z)$ y $H(z)$ las transformadas Z de $y[n]$, $x[n]$ y $h[n]$ respectivamente, con las regiones de convergencia apropiadas. $H(z)$ se denomina generalmente *función de transferencia*. Como una secuencia y su transformada Z forman una pareja única, se deduce que cualquier sistema lineal e invariante con el tiempo queda completamente caracterizado por su función de transferencia, suponiendo de nuevo convergencia.

Tanto la respuesta en frecuencia, que corresponde a la función de transferencia evaluada en la circunferencia unidad, como la función de transferencia, expresada de forma más general en función de la variable compleja z, son extremadamente útiles en el análisis y representación de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, debido a que podemos inferir rápidamente muchas propiedades del sistema a partir de ellas.

5.1. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ de un sistema lineal e invariante con el tiempo se definió en la Sección 2.6 como la ganancia compleja (autovalor) que el sistema aplica a una exponencial compleja a su entrada (autofunción) $e^{j\omega n}$. Además, en la Sección 2.9.6 indicamos que, como la transformada de Fourier de una secuencia representa una descomposición en forma de combinación lineal de exponenciales complejas, las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del sistema se relacionan así:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \tag{5.3}$$

siendo $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ las transformadas de Fourier de la entrada y de la salida del sistema, respectivamente.

5.1.1. Fase de la respuesta en frecuencia y retardo de grupo

La respuesta en frecuencia es, en general, un número complejo en cada valor de frecuencia. Si expresamos la respuesta en frecuencia en forma polar, el módulo y la fase de las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del sistema se relacionan así:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|, \tag{5.4a}$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}), \tag{5.4b}$$

donde $|H(e^{j\omega})|$ se denomina respuesta en *amplitud* o *ganancia* del sistema y $\angle H(e^{j\omega})$ se denomina *respuesta de fase* o *desplazamiento de fase* del sistema.

Los efectos en el módulo y la fase representados en las Ecuaciones (5.4a) y (5.4b) pueden ser deseables, si la señal de entrada se modifica de una forma útil, o indeseables, si la señal de entrada se deteriora. En este último caso, denominaremos a los efectos de un sistema lineal e invariante con el tiempo sobre una señal, tal como indican las Ecuaciones (5.4a) y (5.4b) *distorsiones de amplitud* y *de fase*, respectivamente.

La fase de un número complejo no está definida unívocamente, ya que se puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π sin que el número complejo cambie. Cuando la fase se calcula numéricamente con el uso de la subrutina arcotangente se obtiene generalmente el valor principal. Denotaremos como $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ el valor principal de la fase de $H(e^{j\omega})$, con

$$-\pi < \mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi. \tag{5.5}$$

Cualquier otra fase que dé el valor correcto de la función $H(e^{j\omega})$ se puede representar en función del valor principal como

$$\angle H(e^{j\omega}) = \mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega), \tag{5.6}$$

siendo $r(\omega)$ un entero positivo o negativo que puede ser diferente para cada valor de ω. Utilizaremos en general la notación para la fase del miembro izquierdo de la Ecuación (5.6) para indicar una fase ambigua, ya que $r(\omega)$ es arbitrario.

En muchos casos, el valor principal presentará discontinuidades de 2π radianes cuando se considera como función de ω. Esto se ilustra en la Figura 5.1, que muestra una función de fase $\arg[H(e^{j\omega})]$ y su valor principal $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ dibujados en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$. La función de fase que se muestra en la Figura 5.1(a) excede el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$. El valor principal, que se muestra en la Figura 5.1(b), presenta saltos de amplitud 2π, debido a los múltiplos enteros de 2π que se deben sustraer en ciertas regiones para llevar la curva de fase al intervalo de su valor principal. La Figura 5.1(c) muestra el valor correspondiente de $r(\omega)$ en la Ecuación (5.6).

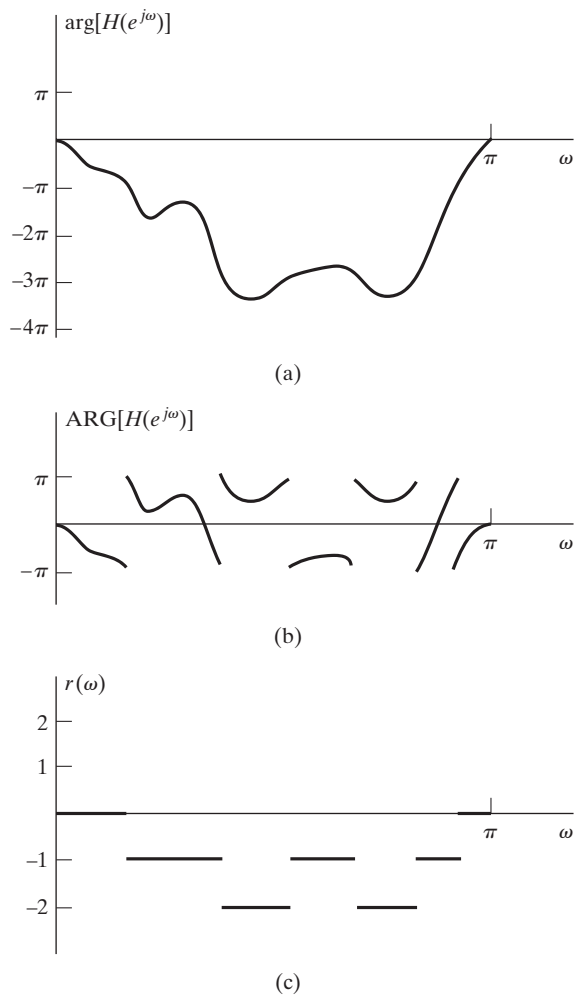


Figura 5.1 (a) Curva de fase continua de una función de transferencia evaluada en la circunferencia unidad. (b) Valor principal de la curva de fase de la parte (a). (c) Múltiplos enteros de 2 que se deben sumar a $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ para obtener $\arg[H(e^{j\omega})]$.

En este texto, en la presentación de la fase, denominaremos a $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ fase "enrollada" ya que la evaluación módulo 2π puede verse como si enrolláramos la fase alrededor de una circunferencia. En una representación en amplitud y fase (donde la amplitud es un valor real pero puede ser positiva o negativa), $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ se puede "desenrollar" para obtener una curva de fase continua en ω. La curva de fase continua (desenrollada) se denomina $\arg[H(e^{j\omega})]$. Otra representación particularmente útil de la fase es a través del retardo de grupo $\tau(\omega)$, definido como

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}. \tag{5.7}$$

Merece la pena resaltar que como la derivada de $\arg[H(e^{j\omega})]$ y de $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ son idénticas, excepto por la presencia de impulsos en la derivada de $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ situados en las discontinuidades, el retardo de grupo se puede obtener a partir de, valor principal diferenciando, excepto en las discontinuidades. De forma similar, el retardo de grupo se puede expresar en función de la fase ambigua $\angle H(e^{j\omega})$ como

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\angle H(e^{j\omega})\}, \tag{5.8}$$

con la interpretación de que los impulsos causados por las discontinuidades de tamaño 2π en $\angle H(e^{j\omega})$ deben ignorarse.

Para entender el efecto de la fase y específicamente del retardo de grupo de un sistema lineal, consideremos primero el sistema de retardo ideal. Su respuesta al impulso es

$$h_{\mathrm{id}}[n] = \delta[n - n_d], \tag{5.9}$$

y su respuesta en frecuencia es

$$H_{\mathrm{id}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}, \tag{5.10}$$

o

$$|H_{\mathrm{id}}(e^{j\omega})| = 1, \tag{5.11a}$$

$$\angle H_{\mathrm{id}}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \qquad |\omega| < \pi, \tag{5.11b}$$

donde se asume periodicidad de 2π en frecuencia. A partir de la Ecuación (5.11b) se puede ver que el retardo temporal (o avance si $n_d < 0$) se asocia con una fase que varía linealmente con la frecuencia.

En muchas aplicaciones, la distorsión de retardo se considera una forma suave de distorsión de fase, ya que su efecto sólo es desplazar la secuencia en el tiempo. Muchas veces esto no tiene consecuencias, o se podría compensar fácilmente introduciendo retardos en otras partes de un sistema más complejo. Por tanto, al diseñar aproximaciones a filtros ideales y a otros sistemas lineales e invariantes con el tiempo se puede aceptar como ideal una respuesta de fase lineal en lugar de una respuesta de fase cero. Por ejemplo, un filtro paso bajo ideal con fase lineal se definiría como

$$H_{\mathrm{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases} \tag{5.12}$$

Su correspondiente respuesta al impulso es

$$h_{\mathrm{lp}}[n] = \frac{\operatorname{sen} \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{5.13}$$

El retardo de grupo es una medida conveniente de la linealidad de la fase Concretamente, consideremos la salida de un sistema con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ cuando la entrada es una señal de banda estrecha de la forma $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$. Como se supone que $X(e^{j\omega})$ sólo es distinto de cero en los alrededores de $\omega = \omega_0$, el efecto de la fase del sistema se puede aproximar linealmente en una banda estrecha alrededor de $\omega = \omega_0$ mediante la aproximación

$$\arg[H(e^{j\omega})] \simeq -\phi_0 - \omega n_d, \tag{5.14}$$

donde n_d representa ahora el retardo de grupo. Utilizando esta aproximación se puede demostrar (véase el Problema 5.63) que la respuesta $y[n]$ a la señal $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$ es aproximadamente $y[n] = |H(e^{j\omega_0})|s[n-n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d)$. En consecuencia, el retardo en el tiempo de la envolvente $s[n]$ de la señal de banda estrecha $x[n]$ con transformada de Fourier centrada en ω_0 es igual al negativo de la pendiente de la fase en ω_0. En general, podemos ver una señal de banda ancha como una superposición señales de banda estrecha centradas en diferentes frecuencias. Si el retardo de grupo es constante con la frecuencia entonces cada componente de banda estrecha será afectada por un retardo idéntico. Si el retardo de grupo no es constante, se aplicarán diferentes retardos a cada paquete de frecuencias, con lo que se producirá una dispersión en el tiempo de la energía de la señal de salida. Por tanto, la no linealidad de fase o, lo que es lo mismo, un retardo de grupo no constante produce una dispersión en el tiempo.

5.1.2. Ilustración de los efectos del retardo de grupo y de la atenuación

Como ilustración de los efectos de la fase, el retardo de grupo y la atenuación, consideremos un sistema concreto con la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \underbrace{\left(\frac{(1-0{,}98e^{j0{,}8\pi}z^{-1})(1-0{,}98e^{-j0{,}8\pi}z^{-1})}{(1-0{,}8e^{j,4\pi}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j0{,}4\pi}z^{-1})}\right)}_{H_1(z)} \underbrace{\prod_{k=1}^{4}\left(\frac{(c_k^*-z^{-1})(c_k-z^{-1})}{(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z^{-1})}\right)^2}_{H_2(z)} \tag{5.15}$$

con $c_k = 0{,}95e^{j(0{,}15\pi+0{,}02\pi k)}$ para $k = 1,2,3,4$ y con $H_1(z)$ y $H_2(z)$ definidos como se indica. El diagrama polo-cero de la función de transferencia total del sistema $H(z)$ se muestra en la Figura 5.2, donde el

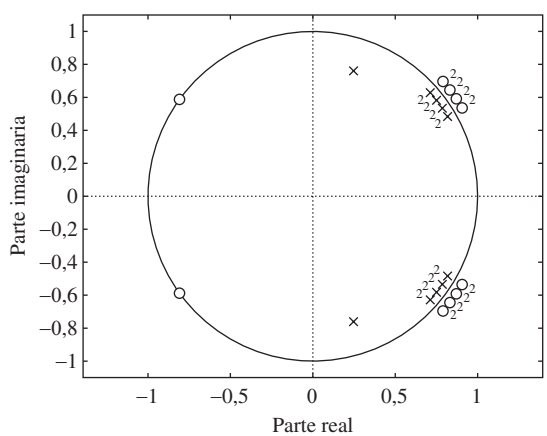
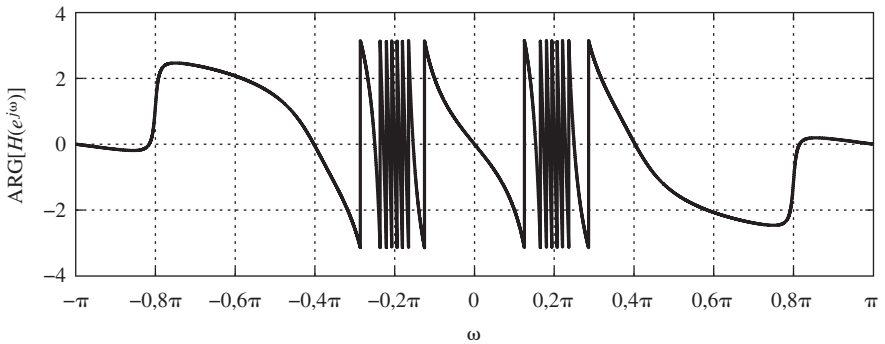
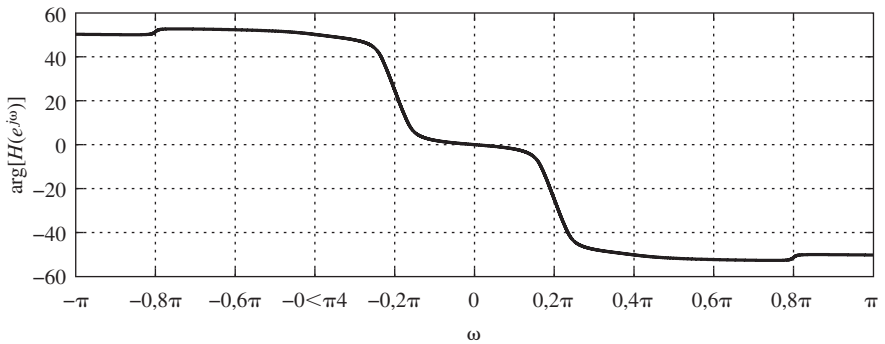


Figura 5.2 Diagrama polo–cero del filtro del ejemplo de la Sección 5.1.2 (el número dos indica polos y ceros de orden doble).



(a) Valor principal de la respuesta de fase



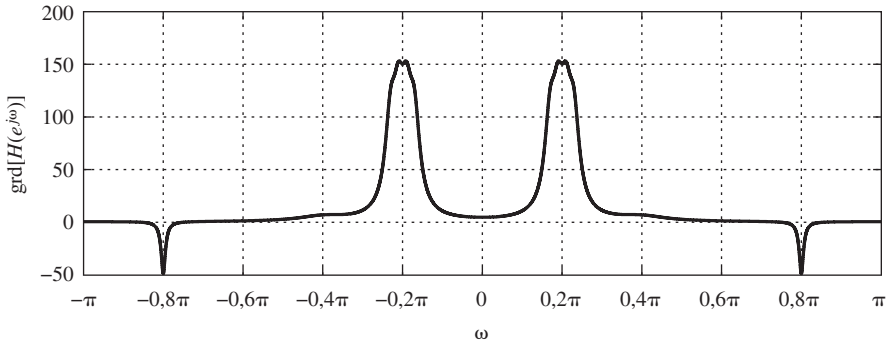
(b) Respuesta de fase desenrollada.

Figura 5.3 Funciones de respuesta de fase del sistema del ejemplo de la Sección 5.1.2. (a) Valor principal de la fase ARG$[H(e^{j\omega})]$, (b) Fase continua arg$[H(e^{j\omega})]$.

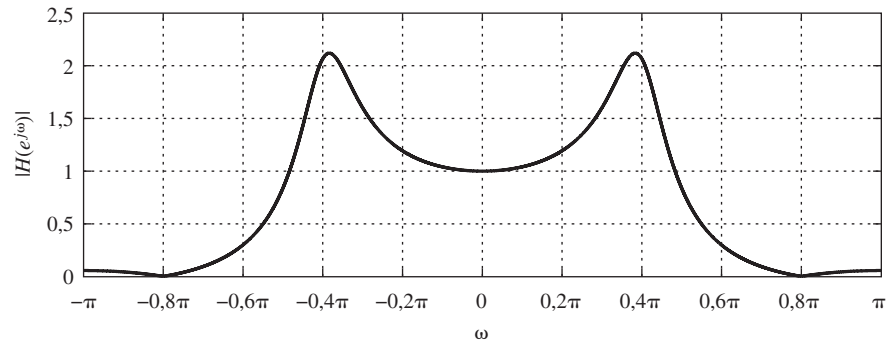
factor $H_1(z)$ en la Ecuación (5.15) contribuye con la pareja de polos conjugados en $z = 0{,}8e^{\pm j0{,}4\pi}$, así como con la pareja de ceros cerca de la circunferencia unidad en $z = 0{,}98e^{\pm j0{,}8\pi}$. El factor $H_2(z)$ de la Ecuación (5.15) contribuye con los grupos de polos de orden doble en $z = c_k = 0{,}95e^{\pm j(0{,}15\pi+0{,}02\pi k)}$ y con los ceros de orden doble $z = 1/c_k = 1/0{,}95e^{\mp j(0{,}15\pi+0{,}02\pi k)}$ para $k = 1,2,3,4$. Por sí mismo, $H_2(z)$ representa un sistema paso todo (véase la Sección 5.5), es decir, $|H_2(e^{j\omega})| = 1$ para todo ω. Como veremos, $H_2(z)$ produce un retardo de grupo muy grande en una banda estrecha de frecuencias.

Las Figuras 5.3 y 5.4 muestras las funciones de respuesta en frecuencia del sistema global. Estas figuras ilustran varios puntos importantes. En primer lugar, obsérvese en la Figura 5.3(a) que el valor principal de la respuesta de fase presenta múltiples discontinuidades de tamaño 2π. Son debidas al cálculo módulo 2π de la fase. La Figura 5.3(b) muestra la curva de fase desenrollada (continua) obtenida eliminando de forma apropiada los saltos de tamaño 2π.

La Figura 5.4 muestra el retardo de grupo y la respuesta de amplitud del sistema completo. Obsérvese que, como la fase desenrollada decrece monótonamente excepto en los alrededores de $\omega = \pm 0{,}8\pi$, el retardo de grupo es siempre positivo excepto en esa región. Además, el retardo de grupo presenta un pico positivo grande en las bandas de frecuencias $0{,}17\pi < |\omega| < 0{,}23\pi$ allí donde la fase continua tiene pendiente negativa máxima. La banda de frecuencia corresponde a la posición angular de las agrupaciones de polos y ceros situados en posiciones recíprocas de la Figura 5.2. Nótese también el descenso abrupto alrededor de las frecuencias $\omega = \pm 0{,}8\pi$, donde la pendiente de la fase es positiva. Como $H_2(z)$ representa un filtro paso todo, la respuesta en amplitud del sistema completo está completamente con-



(a) Retardo de grupo de $H(z)$



(b) Módulo de la respuesta en frecuencia

Figura 5.4 Respuesta en frecuencia del sistema del ejemplo de la Sección 5.1.2. (a) Función retardo de grupo grd$[H(e^{j\omega})]$, (b) Módulo de la respuesta en frecuencia, $|H(e^{j\omega})|$.

trolada por los polos y ceros de $H_1(z)$. Por tanto, como la respuesta en frecuencia es $H(z)$ evaluada en $z = e^{j\omega}$, los ceros en $z = 0{,}98e^{\pm j,8\pi}$ hacen que la respuesta en frecuencia global sea muy pequeña en una banda alrededor de las frecuencias $\omega = \pm 0{,}8\pi$.

En la Figura 5.5(a) se muestra una señal de entrada $x[n]$ formada por tres pulsos de banda estrecha separados en el tiempo. La Figura 5.5(b) muestra el correspondiente módulo de la transformada de Fourier en tiempo discreto $|X(e^{j\omega})|$. Los pulsos son

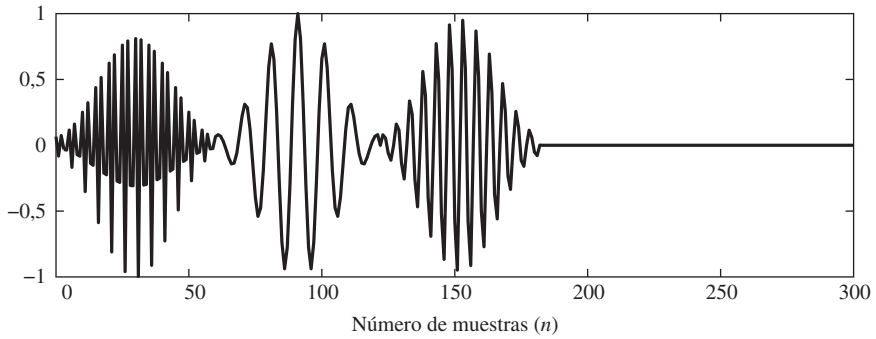
$$x_1[n] = w[n]\cos(0{,}2\pi n), \tag{5.16a}$$

$$x_2[n] = w[n]\cos(0{,}4\pi n - \pi/2), \tag{5.16b}$$

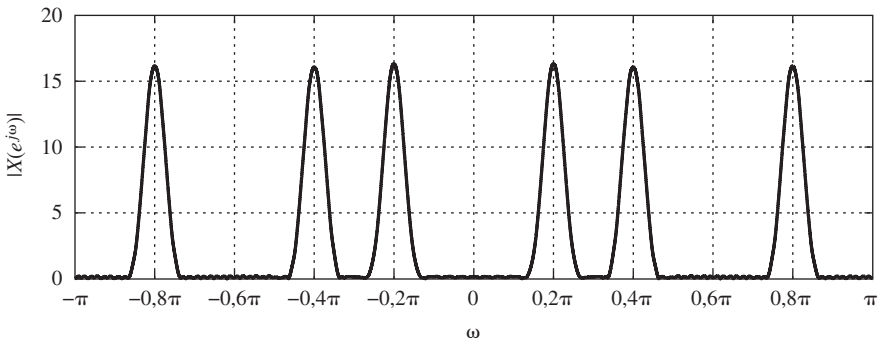
$$x_3[n] = w[n]\cos(0{,}8\pi n + \pi/5). \tag{5.16c}$$

donde cada sinusoide se transforma en un pulso de duración finita mediante la secuencia envolvente de 61 puntos

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{5.17}$$



(a) Forma de onda de la señal $x[n]$



(b) Módulo de la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$

Figura 5.5 Señal de entrada del ejemplo de la Sección 5.1.2. (a) Señal de entrada $x[n]$, (b) Módulo de la correspondiente transformada de Fourier en tiempo discreto $|X(e^{j\omega})|$.

con $M = 60$.[1] La secuencia de entrada completa que se muestra en la Figura 5.5(a) es

$$x[n] = x_3[n] + x_1[n-M-1] + x_2[n-2M-2], \tag{5.18}$$

es decir, primero aparece el pulso de frecuencia más alta, después el de frecuencia más baja y, finalmente, el de frecuencia intermedia. A partir del teorema de modulación o enventanado para transformadas de Fourier en tiempo discreto (Sección 2.9.7), la transformada de Fourier en tiempo discreto de una sinusoide enventanada (truncada en el tiempo) es la convolución de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la sinusoide de duración infinita (formada por impulsos a $\pm$ la frecuencia de la sinusoide) con la transformada de Fourier en tiempo discreto de la ventana. Las frecuencias de las tres sinusoides son $\omega_1 = 0{,}2\pi$, $\omega_2 = 0{,}4\pi$ y $\omega_3 = 0{,}8\pi$. De acuerdo con esto, en el módulo de la transformada de Fourier de la Figura 5.5(b) podemos ver que existe energía significativa centrada y concentrada alrededor de cada una de las tres frecuencias. Cada pulso contribuye (en el dominio de la frecuencia) con una banda de frecuencias centrada en la frecuencia de la sinusoide y con forma y anchura correspondientes a la transformada de Fourier de la ventana temporal aplicada a la sinusoide[2].

[1] En los Capítulos 7 y 10, veremos que esta secuencia envolvente se denomina ventana de Hamming cuando se utiliza, respectivamente, en diseño de filtros o en análisis espectral.

[2] Como veremos en los Capítulos 7 y 10, la anchura de las bandas de frecuencia es de forma aproximada inversamente proporcional a la longitud de la ventana $M+1$.

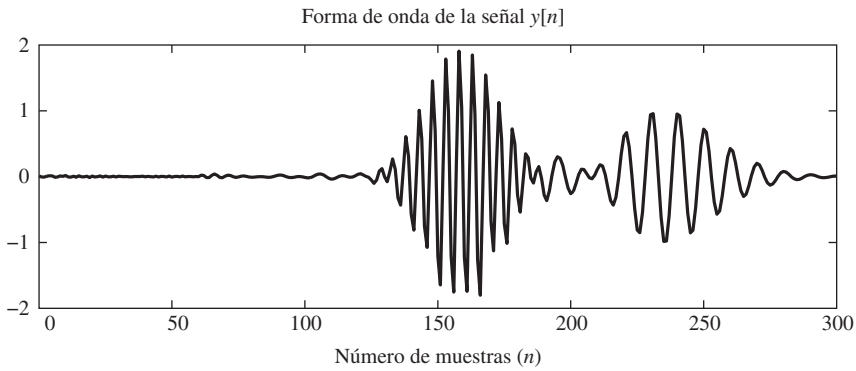


Figura 5.6 Señal de salida del ejemplo de la Sección 5.1.2.

Cuando se usa como entrada al sistema con función de transferencia $H(z)$, cada uno de los paquetes o grupos de frecuencias asociados con cada uno de los pulsos de banda estrecha será afectado por la respuesta en amplitud del filtro y por el retardo de grupo en la banda correspondiente a cada pulso. A partir de la respuesta en amplitud del filtro, podemos ver que el grupo de frecuencias centrado y concentrado alrededor de $\omega = \omega_1 = 0{,}2\pi$ experimentará una ligera ganancia en amplitud, y el centrado alrededor de $\omega = \omega_2 = 0{,}4\pi$ experimentará una ganancia de aproximadamente 2. Como el módulo de la respuesta en frecuencia es muy pequeño en los alrededores de $\omega = \omega_3 = 0{,}8\pi$, el pulso de frecuencia más alta quedará significativamente atenuado. Por supuesto, no será totalmente eliminado, ya que el contenido en frecuencia de ese grupo se extiende por encima y por debajo de la frecuencia $\omega = \omega_3 = 0{,}8\pi$ debido al enventanado aplicado a la sinusoide. Examinando la gráfica del retardo de grupo del sistema de la Figura 5.4(a), podemos ver que el retardo de grupo alrededor de la frecuencia $\omega = \omega_1 = 0{,}2\pi$ es significativamente mayor que para las frecuencias $\omega = \omega_2 = 0{,}4\pi$ o $\omega = \omega_3 = 0{,}8\pi$, y por tanto el pulso de menor frecuencia sufrirá el mayor retardo al atravesar el sistema.

La Figura 5.6 muestra la salida del sistema. El pulso de frecuencia $\omega = \omega_3 = 0{,}8\pi$ queda esencialmente eliminado, lo que es consistente con los bajos valores del módulo de la respuesta en frecuencia alrededor de esa frecuencia. Los otros dos pulsos han aumentado su amplitud y se han retrasado. El pulso en $\omega = 0{,}2\pi$ es ligeramente mayor y está retardado unas 150 muestras, y el pulso en $\omega = 0{,}4\pi$ ha doblado su amplitud y tiene un retardo aproximado de 10 muestras. Estos resultados son consistentes con los valores del módulo de la respuesta en frecuencia y del retardo de grupo en esas frecuencias. De hecho, como el pulso de baja frecuencia está retardado 140 muestras más que el pulso de frecuencia intermedia y la longitud de todos los pulsos es de 61 muestras, esos dos pulsos aparecen en la salida en orden inverso.

El ejemplo que hemos presentado en esta subsección se ha diseñado para ilustrar cómo los sistemas lineales e invariantes con el tiempo pueden modificar las señales mediante los efectos combinados del escalado en amplitud y el desplazamiento de fase. En el caso de la señal concreta escogida, formada por una suma de componentes de banda estrecha, ha sido posible considerar los efectos sobre cada uno de los pulsos por separado. Esto es debido a que las funciones de respuesta en frecuencia son suaves y varían sólo ligeramente en las bandas de frecuencia ocupadas por cada una de las tres componentes. Por tanto, todas las frecuencias correspondientes a un pulso determinado están afectadas aproximadamente por la misma ganancia y están retardadas aproximadamente lo mismo, y el resultado es que la forma del pulso queda replicada, siendo afectada a la salida sólo por un escalado y un retardo. En el caso de señales de banda ancha, esto en general no será así, ya que el sistema modificará de forma diferente las distintas partes del espectro. En esos casos, las características reconocibles de la señal, tales como la

forma del pulso, no resultarán en general obvias en la señal de salida, y pulsos separados en el tiempo en la entrada podrían causar contribuciones solapadas en la salida.

Este ejemplo ha ilustrado varios conceptos importantes que se elaborarán posteriormente en este capítulo y en los capítulos siguientes. Tras completar un estudio cuidadoso de este capítulo, merece la pena volver cuidadosamente sobre el ejemplo de esta subsección para obtener una mejor apreciación de sus matices. Con objeto de asimilar completamente este ejemplo, es aconsejable realizarlo con variables en un sistema de programación adecuado, como MATLAB. Antes de probar el programa software, el lector debería intentar predecir lo que va a suceder, por ejemplo, cuando la longitud de la ventana aumenta o disminuye o cuando se modifican las frecuencias de las sinusoides.

5.2. SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Aunque los filtros ideales son útiles conceptualmente, los filtros en tiempo discreto se realizan generalmente mediante la implementación de una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes de la forma de la Ecuación (5.19).

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{5.19}$$

En el Capítulo 6, presentaremos diversas estructuras computacionales para realizar estos sistemas y en el Capítulo 7 veremos varios procedimientos para obtener los parámetros de la ecuación en diferencias que aproxima una determinada respuesta en frecuencia. En esta sección, con la ayuda de la transformada Z, examinaremos las propiedades y características de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo representados por la Ecuación (5.19). Los resultados y apreciaciones jugarán un papel muy importante en los siguientes capítulos.

Como vimos en la Sección 3.5, aplicando la transformada Z a los dos miembros de la Ecuación (5.19), y utilizando las propiedades de linealidad (Sección 3.4.1) y la de desplazamiento temporal (Sección 3.4.2), se deduce que, dado un sistema cuya entrada y salida satisfacen la ecuación en diferencias con la forma de la Ecuación (5.19), su función de transferencia tiene la siguiente expresión algebraica

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{5.20}$$

La función $H(z)$ de la Ecuación (5.20) es un cociente de polinomios en z^{-1}, ya que la Ecuación (5.19) consiste en dos combinaciones lineales de términos de retardo. Aunque la Ecuación (5.20) se podría escribir, por supuesto de forma que los polinomios se expresen como potencias de z en lugar de z^{-1}, no es habitual hacerlo. También resulta a menudo conveniente expresar la Ecuación (5.20) en forma factorizada:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}. \tag{5.21}$$

Cada uno de los factores $(1-c_k z^{-1})$ del numerador contribuye con un cero en $z=c_k$ y con un polo en $z=0$. De la misma forma, cada uno de los factores $(1-d_k z^{-1})$ del denominador contribuye con un cero en $z=0$ y un polo en $z=d_k$.

Existe una relación directa entre la ecuación en diferencias y la correspondiente expresión algebraica de la función de transferencia. Concretamente, el polinomio del numerador de la Ecuación (5.20) tiene los mismos coeficientes y estructura algebraica que el miembro derecho de la Ecuación (5.19) (los términos de la forma $b_k z^{-k}$ corresponden a $b_k x[n-k]$), y el polinomio del denominador de la Ecuación (5.20) tiene los mismos coeficientes y estructura algebraica que el miembro izquierdo de la Ecuación (5.16) (los términos de la forma $a_k z^{-k}$ corresponden a $a_k y[n-k]$). Por tanto, dada una función de transferencia en la forma de la Ecuación (5.20) o la ecuación en diferencias en la forma de la Ecuación (5.19) es inmediato obtener la otra. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1 Sistema de segundo orden

Supongamos que la función de transferencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$H(z)=\frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}. \tag{5.22}$$

Para obtener la ecuación en diferencias satisfecha por la entrada y la salida de este sistema, expresamos $H(z)$ en la forma de la Ecuación (5.20) multiplicando los factores del numerador y del denominador para obtener el siguiente cociente de polinomios

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}. \tag{5.23}$$

Por tanto,

$$\left(1+\tfrac{1}{4}z^{-1}-\tfrac{3}{8}z^{-2}\right)Y(z)=(1+2z^{-1}+z^{-2})X(z),$$

y la ecuación en diferencias es

$$y[n]+\tfrac{1}{4}y[n-1]-\tfrac{3}{8}y[n-2]=x[n]+2x[n-1]+x[n-2]. \tag{5.24}$$

5.2.1. Estabilidad y causalidad

Al obtener la Ecuación (5.20) a partir de la Ecuación (5.19) supusimos que el sistema era lineal e invariante con el tiempo, con lo que se podía aplicar la Ecuación (5.2), pero no se hicieron supuestos adicionales sobre estabilidad o causalidad. También, a partir de la ecuación en diferencias se puede obtener una expresión de la función de transferencia, pero no la región de convergencia. Concretamente, la región de convergencia de $H(z)$ no se puede determinar a partir del razonamiento que nos condujo a la Ecuación (5.20), ya que todo lo que se requiere para que la Ecuación (5.20) sea válida es que las regiones de convergencia de $X(z)$ e $Y(z)$ se solapen. Esto es consistente con el hecho de que, tal como vimos en el Capítulo 2, la ecuación en diferencias no especifica de forma única la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo. Dada la función de transferencia de la Ecuación (5.20) o (5.21), existen varias posibilidades para la región de convergencia. Dado un cociente de polinomios, cada selección de la región de convergencia conducirá a una respuesta al impulso diferente, pero todas ellas cumplirán la misma ecuación en diferencias. Sin embargo, si suponemos que el sistema es causal, se deduce que $h[n]$ debe ser una secuencia limitada por la izquierda, y por tanto, la región de convergencia de $H(z)$ debe ser

hacia el exterior del polo más externo. Alternativamente, si suponemos que el sistema es estable, como vimos en la presentación realizada en la Sección 2.4, es posible deducir que la respuesta al impulso debe ser absolutamente sumable, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty. \tag{5.25}$$

Como la Ecuación (5.25) es idéntica a la condición de que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \tag{5.26}$$

para $|z| = 1$, la condición de estabilidad es equivalente a la condición de que la región de convergencia de $H(z)$ incluya a la circunferencia unidad. El siguiente ejemplo ilustra la determinación de la región de convergencia a asociar con la función de transferencia obtenida a partir de una ecuación en diferencias.

Ejemplo 5.2 Determinación de la región de convergencia

Consideremos un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada y salida se relacionan mediante la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \tfrac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]. \tag{5.27}$$

Utilizando los razonamientos anteriores, la expresión algebraica de $H(z)$ será

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}. \tag{5.28}$$

La Figura 5.7 muestra el correspondiente diagrama polo-cero de $H(z)$. Existen tres posibilidades de selección de la región de convergencia. Si suponemos que el sistema es causal, la región de convergencia será hacia el exterior del polo más externo, es decir, $|z| > 2$. En este caso el sistema no será estable, ya que esa región no incluye a la circunferencia unidad. Si suponemos que el sistema es estable, la región de convergencia será $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Para la tercera posibilidad de región de convergencia, $|z| < \frac{1}{2}$, el sistema no será estable ni causal.

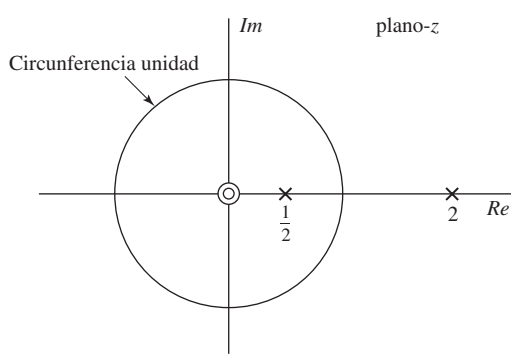


Figura 5.7 Diagrama polo-cero del Ejemplo 5.2.

Como sugiere el Ejemplo 5.2, la causalidad y la estabilidad no son condiciones necesariamente compatibles. Para que un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada y salida satisfacen una

ecuación en diferencias de la forma (5.19) sea a la vez causal y estable, la región de convergencia de la correspondiente función de transferencia debe ser hacia el exterior del polo más externo e incluir a la circunferencia unidad. Por tanto, esto requiere que todos los polos de la función de transferencia estén en el interior de la circunferencia unidad.

5.2.2. Sistemas inversos

Dado un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia $H(z)$, se define el sistema inverso como un sistema con función de transferencia $H_i(z)$ tal que si se coloca en cascada con $H(z)$, la función de transferencia efectiva es la unidad. Es decir,

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1. \tag{5.29}$$

Esto implica que

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}. \tag{5.30}$$

La condición equivalente en el dominio del tiempo a la Ecuación (5.29) es

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]. \tag{5.31}$$

A partir de la Ecuación (5.30), se puede obtener que la respuesta en frecuencia del sistema inverso, si existe, es

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}; \tag{5.32}$$

es decir, que $H_i(e^{j\omega})$ es el inverso de $H(e^{j\omega})$. Esto quiere decir que el logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo del sistema inverso son los negativos de las correspondientes funciones del sistema original. No todos los sistemas tienen inverso. Por ejemplo, el filtro paso bajo ideal no tiene. No hay forma de recuperar las componentes en frecuencia por encima de la frecuencia de corte, ya que la acción del filtro las puso a cero.

Muchos sistemas sí tienen inverso, y un ejemplo muy interesante y útil es el de los sistemas con función de transferencia racional. Concretamente, consideremos

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}, \tag{5.33}$$

con ceros en $z = c_k$ y polos en $z = d_k$, además de la adición de posibles ceros y/o polos en $z = 0$ y $z = \infty$. Entonces

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}; \tag{5.34}$$

es decir, los polos de $H_i(z)$ son los ceros de $H(z)$ y viceversa. La cuestión es qué región de convergencia asociar a $H_i(z)$. La respuesta la proporciona el teorema de convolución, expresado en este caso como

indica la Ecuación (5.31). Para que la Ecuación (5.31) tenga sentido, las regiones de convergencia de $H(z)$ y de $H_i(z)$ deben solaparse. Si $H(z)$ es causal, su región de convergencia es

$$|z| > \max_k |d_k|. \tag{5.35}$$

Por tanto, cualquier región de convergencia de $H_i(z)$ que se solape con la región de convergencia especificada en la Ecuación (5.35) será una región de convergencia válida para $H_i(z)$. Los Ejemplos 5.3 y 5.4 ilustran las diferentes posibilidades.

Ejemplo 5.3 Sistema inverso de un sistema de primer orden

Sea $H(z)$

$$H(z) = \frac{1-0{,}5z^{-1}}{1-0{,}9z^{-1}}$$

con región de convergencia $|z| > 0{,}9$. Entonces $H_i(z)$ es

$$H_i(z) = \frac{1-0{,}9z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}.$$

Como $H_i(z)$ sólo tiene un polo, existen únicamente dos posibilidades para su región de convergencia, y la que se solapa con $|z| > 0{,}9$ es $|z| > 0{,}5$. Por tanto, la respuesta al impulso del sistema inverso es

$$h_i[n] = (0{,}5)^n u[n] - 0{,}9(0{,}5)^{n-1} u[n-1].$$

En este caso, el sistema inverso es a la vez causal y estable.

Ejemplo 5.4 Sistema inverso de un sistema con un cero en la región de convergencia

Supongamos que $H(z)$ es

$$H(z) = \frac{z^{-1}-0{,}5}{1-0{,}9z^{-1}}, \qquad |z| > 0{,}9.$$

La función de transferencia del sistema inverso es

$$H_i(z) = \frac{1-0{,}9z^{-1}}{z^{-1}-0{,}5} = \frac{-2+1{,}8z^{-1}}{1-2z^{-1}}.$$

Como antes, existen dos posibles regiones de convergencia asociadas a la expresión algebraica de $H_i(z)$: $|z| < 2$ y $|z| > 2$. Sin embargo, en este caso, ambas regiones se solapan con $|z| > 0{,}9$, por lo que ambos sistemas son sistemas inversos válidos. La respuesta al impulso correspondiente a la región de convergencia $|z| < 2$ es

$$h_{i1}[n] = 2(2)^n u[-n-1] - 1{,}8(2)^{n-1} u[-n]$$

y la de $|z| > 2$ es

$$h_{i2}[n] = -2(2)^n u[n] + 1{,}8(2)^{n-1} u[n-1].$$

Hemos visto que $h_{i1}[n]$ es estable y no causal, mientras que $h_{i2}[n]$ no es estable y es causal. En teoría, cualquier sistena conectado en cascada con $H(z)$ dará como resultado el sistema identidad.

Una generalización de los Ejemplos 5.3 y 5.4 es que si $H(z)$ es un sistema causal con ceros en c_k, $k = 1, \ldots, M$, el sistema inverso será causal si y sólo si asociamos a $H_i(z)$ la región de convergencia

$$|z| > \max_k |c_k|,$$

Si requerimos también que el sistema inverso sea estable, la región de convergencia de $H_i(z)$ deberá contener a la circunferencia unidad. Por tanto, se debe cumplir que

$$\max_k |c_k| < 1;$$

es decir, todos los ceros de $H(z)$ deben estar en el interior de la circunferencia unidad. Por tanto, un sistema lineal e invariante que es causal y estable tendrá un sistema inverso también causal y estable si y sólo si los polos y los ceros de $H(z)$ están en el interior de la circunferencia unidad. Estos sistemas se denominan sistemas de *fase mínima* y se considerarán con más detalle en la Sección 5.6.

5.2.3. Respuesta al impulso de funciones de transferencia racionales

La presentación de la técnica de descomposición en fracciones simples para calcular transformadas Z inversas (Sección 3.3.2) se puede aplicar a la función de transferencia $H(z)$ para obtener una expresión general de la respuesta al impulso de un sistema cuya función de transferencia sea racional, como la de la Ecuación (5.21). Recuerde que cualquier función racional que sólo tenga polos de primer orden se puede expresar de la forma

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}, \tag{5.36}$$

donde los términos de la primera suma se obtienen por división de los polinomios del numerador y del denominador y sólo estarán presentes si $M \geq N$. Los coeficientes A_k del segundo sumatorio se obtienen mediante la Ecuación (3.43). Si $H(z)$ tuviera un polo de orden múltiple, su descomposición en fracciones simples tomaría la forma de la Ecuación (3.46). Si se supone que el sistema es causal, la región de convergencia estará en el exterior de todos los polos de la Ecuación (5.36), por lo que

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[n], \tag{5.37}$$

donde la primera suma sólo existe si $M \geq N$.

Al presentar los sistemas lineales a invariantes con el tiempo es útil distinguir dos clases. En la primera, al menos un polo distinto de cero de $H(z)$ no resulta cancelado por un cero. En este caso habrá al menos un término de la forma $A_k(d_k)^n u[n]$, y $h[n]$ no será de longitud finita, es decir, no será cero fuera de un intervalo de longitud finita. Por eso, los sistemas de este tipo se denominan de *respuesta al impulso infinita* (IIR, *Infinite Impulse Response*). En el siguiente ejemplo se presenta un sistema IIR.

En la segunda clase de sistemas, $H(z)$ no tiene polos excepto en $z = 0$. Es decir, en las Ecuaciones (5.16) y (5.18), $N = 0$. Por tanto no se puede realizar la descomposición en fracciones simples y $H(z)$ es simplemente un polinomio en z^{-1} de la forma

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}. \tag{5.38}$$

Hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que $a_0 = 1$. En este caso, $H(z)$ queda determinada, salvo un factor constante, por sus ceros. A partir de la Ecuación (5.38) se puede deducir por simple inspección que

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{5.39}$$

En este caso la respuesta al impulso es de longitud finita, es decir, es cero fuera de un intervalo finito. Por eso estos sistemas se denominan de *respuesta al impulso finita* (FIR, *Finite Impulse Response*). Nótese que en los sistemas FIR, la ecuación en diferencias (5.19) es idéntica a la suma de convolución, es decir,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{5.40}$$

En el Ejemplo 5.5 presentamos un ejemplo de sistema FIR.

Ejemplo 5.5 Un sistema FIR simple

Consideremos un sistema cuya respuesta al impulso se obtiene al truncar la respuesta al impulso de un sistema IIR cuya función de transferencia es:

$$G(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|,$$

Es decir,

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le M, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

La función de transferencia es

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - az^{-1}}. \tag{5.41}$$

Como los ceros del numerador están en las posiciones del plano z

$$z_k = a e^{j2\pi k/(M+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M, \tag{5.42}$$

siendo a un número real positivo, el polo en $z = a$ es cancelado por un cero. La Figura 5.8 muestra el diagrama polo-cero para el caso de $M = 7$.

La ecuación en diferencias satisfecha por la entrada y la salida del sistema lineal e invariante con el tiempo es la convolución discreta

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a^k x[n-k]. \tag{5.43}$$

Sin embargo, la Ecuación (5.41) sugiere que la entrada y la salida satisfacen también la ecuación en diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] - a^{M+1} x[n-M-1]. \tag{5.44}$$

Las dos ecuaciones en diferencias son el resultado de las dos formas equivalentes de $H(z)$ en la Ecuación (5.41).

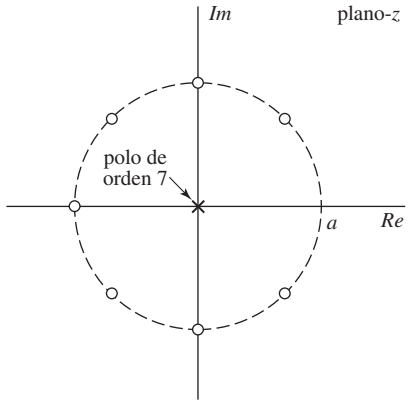


Figura 5.8 Diagrama polo-cero del Ejemplo 5.5.

5.3. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA RACIONALES

Si un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable tiene una función de transferencia racional (es decir, su entrada y su salida satisfacen una ecuación en diferencias como la Ecuación (5.19)), su respuesta en frecuencia (es decir, la función de transferencia de la Ecuación (5.20) evaluada en la circunferencia unidad) tiene la forma

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}. \tag{5.45}$$

En otras palabras, $H(e^{j\omega})$ es un cociente de polinomios en la variable $e^{-j\omega}$. Para determinar el módulo, la fase y el retardo de grupo asociados a la respuesta en frecuencia de sistemas de este tipo, resulta útil expresar $H(e^{j\omega})$ en función de los polos y los ceros de $H(z)$. La expresión se obtiene sustituyendo $z = e^{j\omega}$ en la Ecuación (5.21):

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k e^{-j\omega})}. \tag{5.46}$$

A partir de la Ecuación (5.46) se obtiene

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^{M}|1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^{N}|1 - d_k e^{-j\omega}|}. \tag{5.47}$$

La función módulo al cuadrado es

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k e^{-j\omega})(1-c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k e^{-j\omega})(1-d_k^* e^{j\omega})}. \tag{5.48}$$

Observando la Ecuación (5.47) podemos ver que $|H(e^{j\omega})|$ es el producto de los módulos de todos los factores de ceros de $H(z)$ evaluados en la circunferencia unidad, dividido por el producto de los módulos de todos los factores de polos evaluados en la circunferencia unidad. Expresada en decibelios (dB), la ganancia se define como

$$\text{Ganancia en dB} = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}\text{Ganancia en dB} = {} & 20\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \sum_{k=1}^{M} 20\log_{10}|1-c_k e^{-j\omega}| \\ & - \sum_{k=1}^{N} 20\log_{10}|1-d_k e^{-j\omega}|.\end{aligned} \tag{5.50}$$

La respuesta de fase de funciones de transferencia racionales tiene la forma

$$\arg\left[H(e^{j\omega})\right] = \arg\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^{M}\arg\left[1-c_k e^{-j\omega}\right] - \sum_{k=1}^{N}\arg\left[1-d_k e^{-j\omega}\right], \tag{5.51}$$

donde arg[ ] representa la fase continua (desenrollada).

El retardo de grupo correspondiente a una función de transferencia racional es

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^{N}\frac{d}{d\omega}(\arg[1-d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^{M}\frac{d}{d\omega}(\arg[1-c_k e^{-j\omega}]). \tag{5.52}$$

Una expresión equivalente es

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^{N}\frac{|d_k|^2 - \mathscr{R}e\{d_k e^{-j\omega}\}}{1+|d_k|^2 - 2\mathscr{R}e\{d_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^{M}\frac{|c_k|^2 - \mathscr{R}e\{c_k e^{-j\omega}\}}{1+|c_k|^2 - 2\mathscr{R}e\{c_k e^{-j\omega}\}}. \tag{5.53}$$

En la Ecuación (5.51), tal como se indica, la fase de cada término es ambigua, es decir, se puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π a cada término en cualquier valor de ω sin que el valor del número complejo cambie. La expresión del retardo de grupo por otra parte, se define en función de la derivada de la fase desenrollada.

Las Ecuaciones (5.50), (5.51) y (5.52) representan el módulo en dB, la fase y el retardo de grupo, respectivamente, como una suma de contribuciones de cada uno de los polos y los ceros de la función de transferencia. En consecuencia, para profundizar en la forma en que las posiciones de los polos y los ceros de los sistemas estables de órdenes superiores influyen en la respuesta en frecuencia, es útil considerar en detalle la respuesta en frecuencia de los sistemas de primer y segundo orden en relación con las posiciones de sus polos y ceros.

5.3.1. Respuesta en frecuencia de un polo o un cero simple

En esta sección examinaremos las propiedades de un solo factor de la forma $(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})$, donde r es el radio y θ el ángulo del polo o el cero en el plano z. Este factor es típico cuando hay un polo o un cero en el plano z, situado en dicho plano a un radio r y con un ángulo θ.

El cuadrado del módulo de este factor es

$$|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2 = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta). \tag{5.54}$$

La ganancia en dB asociada con este factor vale

$$(+/-)20\log_{10}|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = (+/-)10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)], \tag{5.55}$$

Con un signo positivo si el factor representa un cero y un signo negativo si representa un polo.

La contribución al valor principal de la fase de un factor como ése es,

$$(+/-)\mathrm{ARG}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = (+/-)\arctan\left[\frac{r\,\mathrm{sen}(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}\right]. \tag{5.56}$$

Derivando el miembro derecho de la Ecuación (5.56) (excepto en las discontinuidades) se obtiene el retardo de grupo de ese factor:

$$(+/-)\mathrm{grd}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = (+/-)\frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} = (+/-)\frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}. \tag{5.57}$$

de nuevo con un signo positivo si el factor representa un cero y un signo negativo si representa un polo. Las funciones de las Ecuaciones (5.54)-(5.57) son, por supuesto, periódicas en ω de periodo 2π. La Figura 5.9(a) muestra la gráfica correspondiente a la Ecuación (5.55) en función de ω en un periodo $(0 \leq \omega < 2\pi)$ para diversos valores de θ con $r = 0{,}9$.

La Figura 5.9(b) muestra la función de fase de la Ecuación (5.56) en función de ω para $r = 0{,}9$ y varios valores de θ. Observe que la fase es cero para $\omega = \theta$ y que para un valor de r fijo, la función simplemente se desplaza con θ. La Figura 5.9(c) muestra la función retardo de grupo de la Ecuación (5.57) para las mismas condiciones de r y θ. Nótese que la pendiente positiva alta de la fase en los alrededores de $\omega = \theta$ corresponde al pico negativo grande que se aprecia en la función retardo de grupo en $\omega = \theta$.

Al estudiar las características de la respuesta en frecuencia a partir de diagramas polo-cero de sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, resultan de utilidad los diagramas vectoriales en el plano complejo asociados. El procedimiento se basa en que cada factor correspondiente a un polo o un cero se puede representar como un vector en el plano z que va desde el polo o el cero hasta un punto de la circunferencia unidad. Para el caso de una función de transferencia de primer orden de la forma

$$H(z) = (1 - re^{j\theta}z^{-1}) = \frac{(z - re^{j\theta})}{z}, \qquad r < 1, \tag{5.58}$$

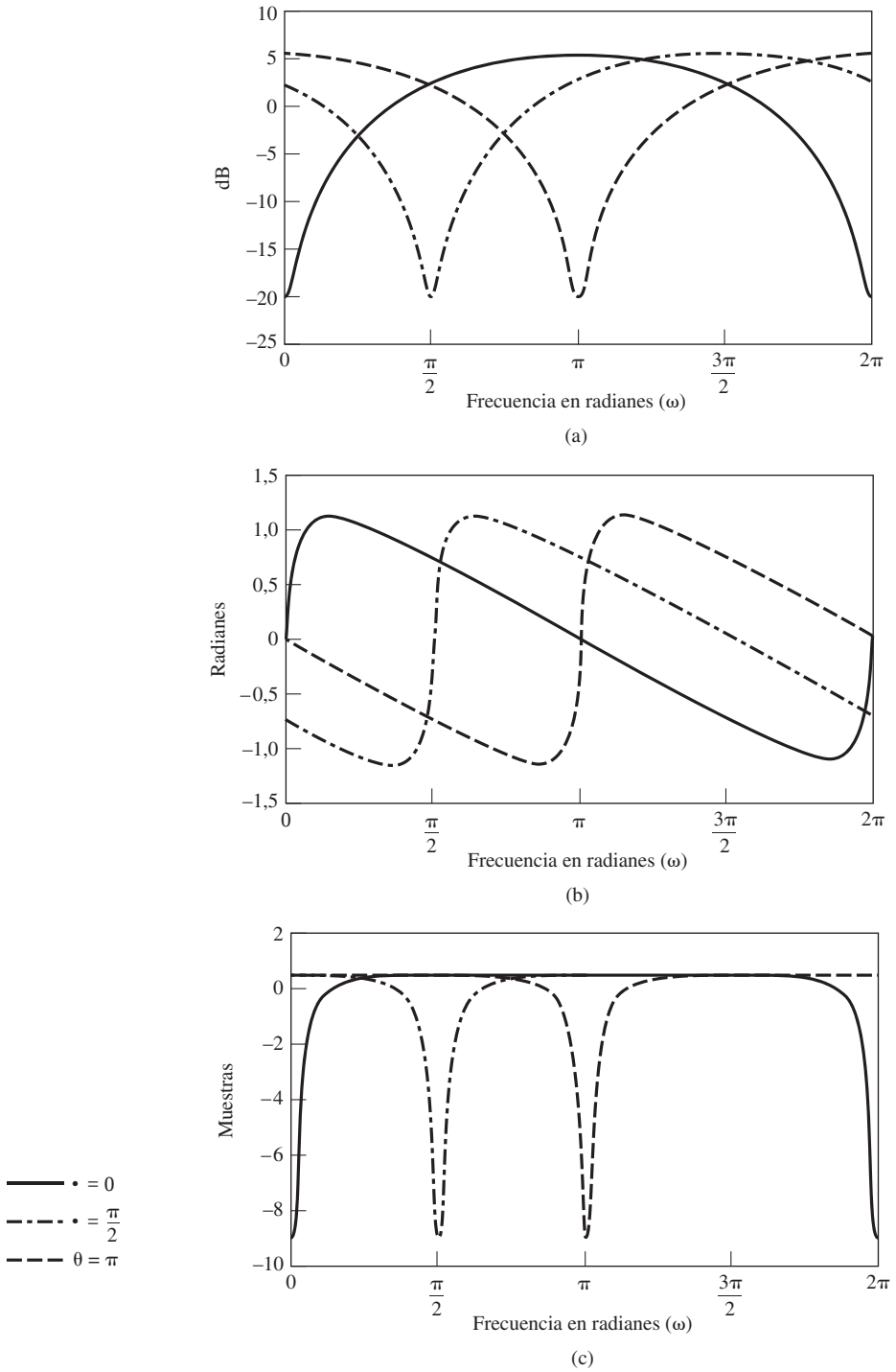


Figura 5.9 Respuesta en frecuencia para un único cero, con $r = 0{,}9$ y los tres valores de θ mostrados. (a) Módulo logarítmico. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

El esquema polo-cero se ilustra en la Figura 5.10. Se indican también en esta figura los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, que representan los números complejos $e^{j\omega}$, $re^{j\theta}$ y $(e^{j\omega} - re^{j\theta})$, respectivamente. En función de esos vectores, el módulo del número complejo

$$\frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}$$

es el cociente de los módulos de los vectores $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_1$, es decir,

$$|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}| = \left|\frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}\right| = \frac{|\mathbf{v}_3|}{|\mathbf{v}_1|}, \tag{5.59}$$

o, dado que $|\mathbf{v}_1| = 1$, la Ecuación (5.59) es igual a $|\mathbf{v}_3|$. La fase correspondiente es

$$\begin{aligned}\angle(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) &= \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle(e^{j\omega}) = \angle(\mathbf{v}_3) - \angle(\mathbf{v}_1)\\ &= \phi_3 - \phi_1 = \phi_3 - \omega.\end{aligned} \tag{5.60}$$

Por tanto, la contribución de un único factor de la forma $(1 - re^{j\theta}z^{-1})$ a la función del módulo en la frecuencia ω es la longitud del vector $\mathbf{v}_3$ desde el cero al punto $z = e^{j\omega}$ en la circunferencia unidad. Este vector tiene longitud mínima cuando $\omega = \theta$. Esta es la explicación del mínimo profundo que se observa en la función del módulo de la Figura 5.9(a) cuando $\omega = \theta$. El vector $\mathbf{v}_1$ que va desde el polo en $z = 0$ hasta el punto $z = e^{j\omega}$ tiene siempre módulo unidad. Es decir, no afecta a la respuesta en amplitud. La Ecuación (5.60) indica que la función de fase es igual a la diferencia entre el ángulo del vector que va desde el cero en $re^{j\theta}$ hasta el punto $z = e^{j\omega}$ y el ángulo del vector que va desde el polo en $z = 0$ hasta el punto $z = e^{j\omega}$. La Figura 5.10 muestra la dependencia de las contribuciones a la respuesta en frecuencia de un único factor $(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})$ con el radio r para $\theta = \pi$ y varios valores de r. Nótese que la función logaritmo del módulo que se muestra en la Figura 5.11(a) presenta un mínimo más pronunciado a medida que r se acerca a 1. De hecho, el módulo medido en dB se aproxima a $-\infty$ en $\omega = \theta$ a medida que r se acerca a 1. La función

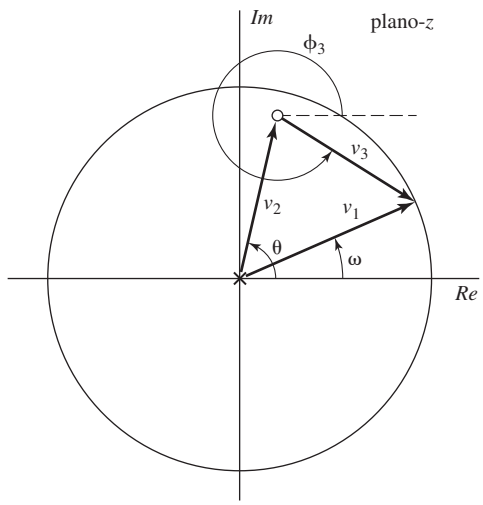


Figura 5.10 Vectores en el plano z para la evaluación en el círculo unidad de una función de transferencia de un sistema de primer orden, con $r < 1$.

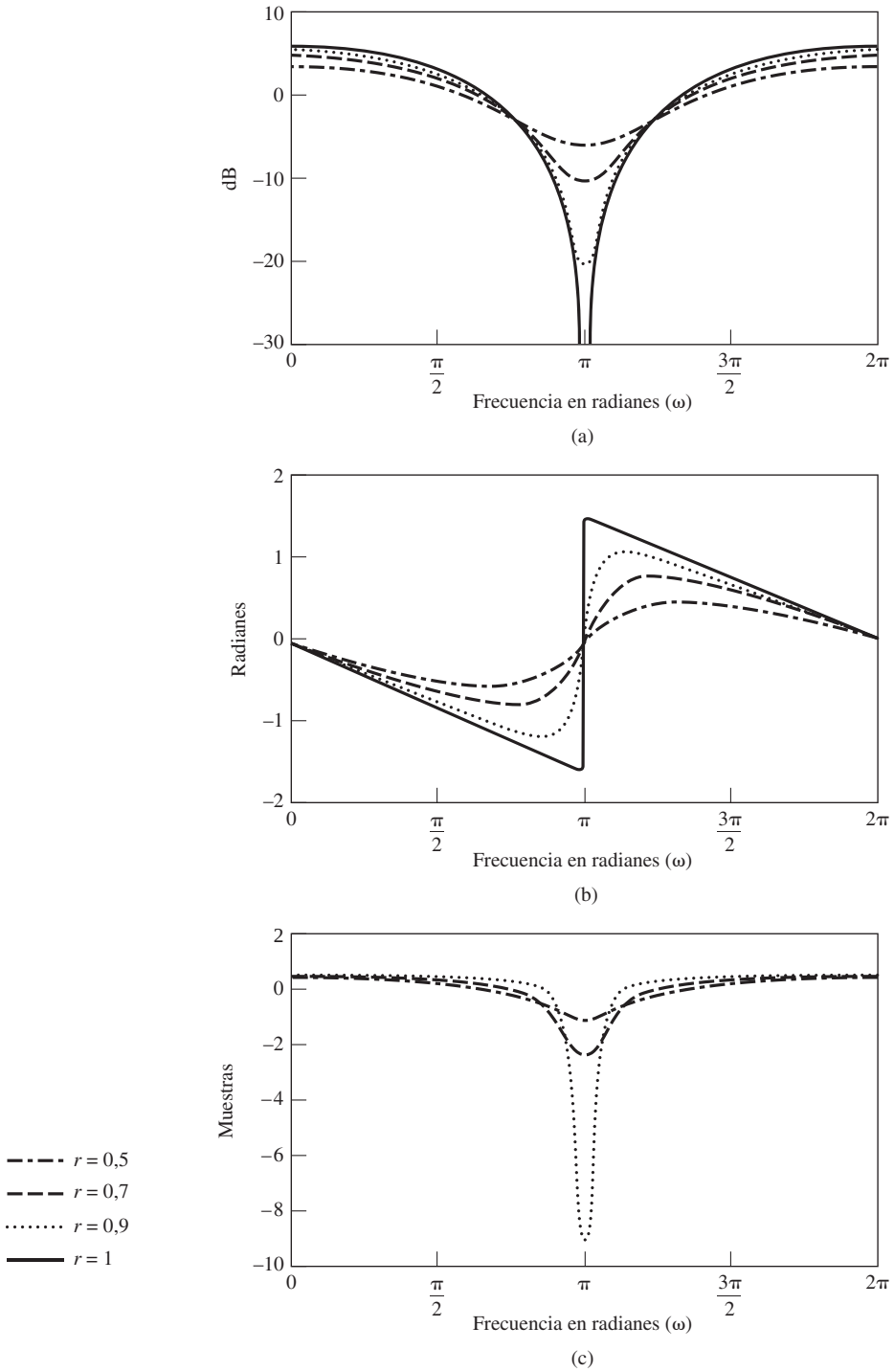


Figura 5.11 Respuesta en frecuencia de un solo cero con $\theta = \pi$, $r = 1$, 0,9, 0,7 y 0,5. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo para $r = 0{,}9$, 0,7 y 0,5.

de fase que se muestra en la Figura 5.11(b) tiene pendiente positiva alrededor de $\omega = \theta$, que se acerca a infinito a medida que r se acerca a 1. Por tanto, para $r = 1$, la función de fase es discontinua, con un salto de π radianes en $\omega = \theta$. Cuando nos alejamos del punto $\omega = \theta$, la pendiente de la función de fase se hace negativa. Como el retardo de grupo es la pendiente de la curva de fase cambiada de signo, el retardo de grupo es negativo alrededor de $\omega = \theta$, y presenta un mínimo más pronunciado a medida que r se acerca a 1, convirtiéndose en un impulso (que no se muestra) cuando $r = 1$. La Figura 5.11(c) muestra que a medida que nos alejamos de $\omega = \theta$, el retardo de grupo se hace positivo y relativamente plano.

5.3.2. Ejemplos con polos y ceros múltiples

En esta sección, utilizaremos y ampliaremos los resultados de la Sección 5.3.1 para determinar la respuesta en frecuencia de sistemas con funciones de transferencia racionales.

Ejemplo 5.6 Sistema IIR de segundo orden

Consideremos el sistema de segundo orden

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \tag{5.61}$$

La ecuación en diferencias satisfecha por la entrada y la salida del sistema es

$$y[n] - 2r\cos\theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n].$$

Utilizando la técnica de descomposición en fracciones simples se puede demostrar que la respuesta al impulso de un sistema causal con esta función de transferencia es

$$h[n] = \frac{r^n \operatorname{sen}[\theta(n+1)]}{\operatorname{sen}\theta} u[n]. \tag{5.62}$$

La función de transferencia de la Ecuación (5.61) tiene un polo en $z = re^{j\theta}$ y en la posición conjugada, $z = re^{-j\theta}$, y dos ceros en $z = 0$. La Figura 5.12 muestra el diagrama polo-cero.

Utilizando los razonamientos expuestos en la Sección S.3.1,

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = &-10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)] \\ &-10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega + \theta)], \end{aligned} \tag{5.63a}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan\left[\frac{r\operatorname{sen}(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}\right] - \arctan\left[\frac{r\operatorname{sen}(\omega + \theta)}{1 - r\cos(\omega + \theta)}\right], \tag{5.63b}$$

y

$$\operatorname{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} - \frac{r^2 - r\cos(\omega + \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega + \theta)}. \tag{5.63c}$$

La Figura 5.13 muestra estas funciones para $r = 0{,}9$ y $\theta = \pi/4$.

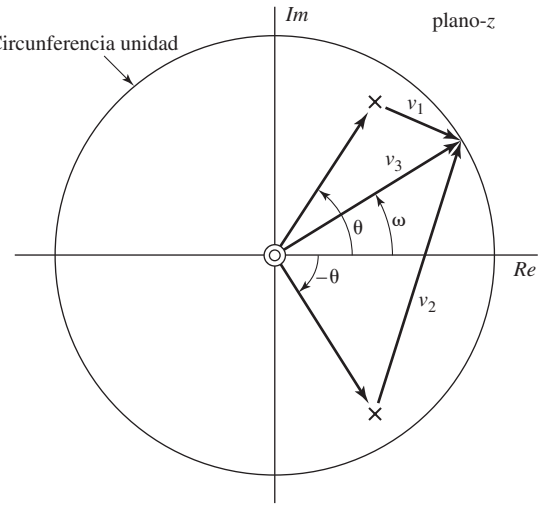


Figura 5.12 Diagrama polo-cero del Ejemplo 5.6.

La Figura 5.12 muestra los vectores de polos y ceros $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. La respuesta en amplitud es el producto de las longitudes de los vectores de los ceros (que en este caso son siempre la unidad) dividido por el producto de las longitudes de los vectores de los polos. Es decir,

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|\mathbf{v}_3|^2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|}. \tag{5.64}$$

Cuando $\omega \approx \theta$, la longitud del vector $\mathbf{v}_1 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ se hace pequeña y cambia de forma significativamente a medida que ω varía alrededor de θ, mientras que la longitud del vector $\mathbf{v}_2 = e^{j\omega} - re^{-j\theta}$ cambia sólo ligeramente cuando ω se mueve en los alrededores de $\omega = \theta$. se mueve en los alrededores de θ domina la respuesta en frecuencia alrededor de $\omega = \theta$, lo que se puede ver claramente en la Figura 5.13. Por simetría, el polo en el ángulo $-\theta$ domina la respuesta en frecuencia en los alrededores de $\omega = -\theta$.

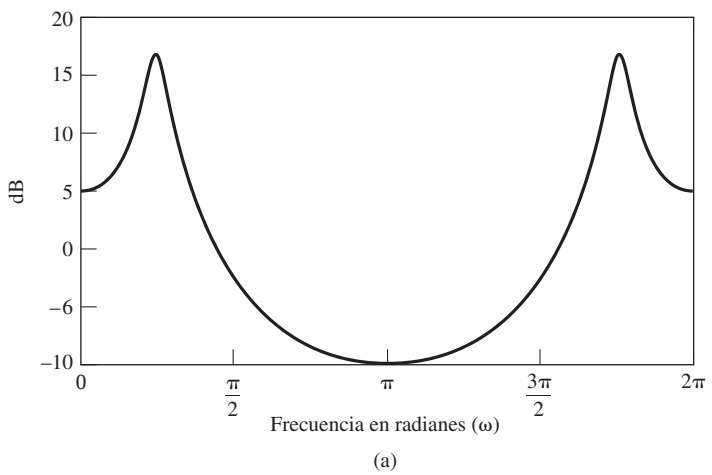


Figura 5.13 Respuesta en frecuencia de una pareja de polos conjugados como en el Ejemplo 5.6, con $r = 0{,}9$, $\theta = \pi/4$. (a) Logaritmo del módulo.

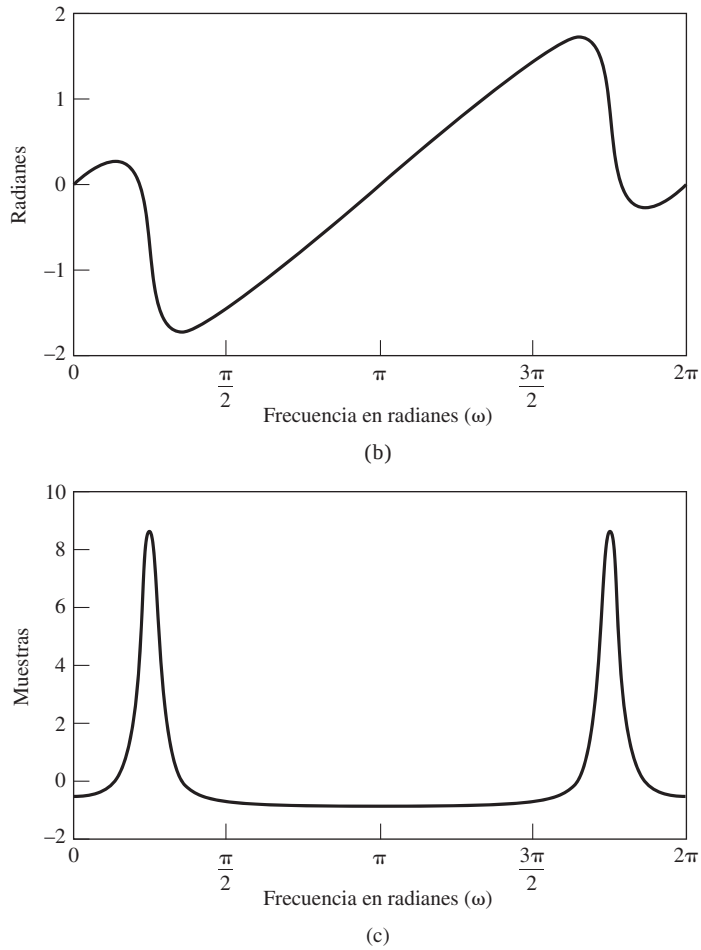


Figura 5.13 (*continuación*) Respuesta en frecuencia de una pareja de polos conjugados como en el Ejemplo 5.6, con $r = 0{,}9$, $\theta = \pi/4$. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

Ejemplo 5.7 Sistema FIR de segundo orden

En este ejemplo consideramos un sistema FIR cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] - 2r\cos\theta\,\delta[n-1] + r^2\delta[n-2]. \tag{5.65}$$

La correspondiente función de transferencia es

$$H(z) = 1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}, \tag{5.66}$$

que es la inversa de la función de transferencia del Ejemplo 5.6. Por tanto, las gráficas de la respuesta en frecuencia de este sistema FIR son simplemente el negativo de las gráficas de la Figura 5.13. Nótese que las posiciones de los polos y los ceros se intercambian en la inversa.

Ejemplo 5.8 Sistema IIR de tercer orden

En este ejemplo consideramos un filtro paso bajo diseñado utilizando uno de los métodos de aproximación que se presentarán en el Capítulo 7. La función de transferencia que consideramos es

$$H(z) = \frac{0{,}05634(1+z^{-1})(1-1{,}0166z^{-1}+z^{-2})}{(1-0{,}683z^{-1})(1-1{,}4461z^{-1}+0{,}7957z^{-2})}, \tag{5.67}$$

y se especifica que el sistema debe ser estable. Los ceros de la función de transferencia están situados en las siguientes posiciones

Radio	Ángulo
1	π rad
1	± 1.0376 rad (59,45°)

y los polos en las localizaciones siguientes:

Radio	Ángulo
0.683	0
0.892	± 0.6257 rad (35,85°)

La Figura 5.14 muestra el diagrama polo-cero de este sistema. La Figura 5.15 muestra el logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo del sistema. El efecto de los ceros que están en la circunferencia unidad en $\omega = \pm 1{,}0376$ y π es claramente evidente. Sin embargo, los polos están situados de forma que en lugar de producir picos en las frecuencias cercanas a sus posiciones angulares, el valor total del logaritmo del módulo permanece constante cercano a 0 dB en la banda que se extiende desde $\omega = 0$ hasta $\omega = 0{,}2\pi$ (y por simetría, desde $\omega = 1{,}8\pi$ hasta $\omega = 2\pi$), y cae después abruptamente permaneciendo por debajo de -25 dB desde aproximadamente $\omega = 0{,}3\pi$ hasta $1{,}7\pi$. Como sugiere este ejemplo, se pueden conseguir aproximaciones útiles a las respuestas de los filtros selectivos en frecuencia utilizando los polos para elevar la respuesta en amplitud y los ceros para reducirla.

En este ejemplo vemos ambos tipos de discontinuidades en la gráfica de la curva de fase. En $\omega \approx 0{,}22\pi$, hay una discontinuidad de 2π debida al uso del valor principal en la representación. En $\omega = \pm 1{,}0376$ y $\omega = \pi$, las discontinuidades de π se deben a los ceros en la circunferencia unidad.

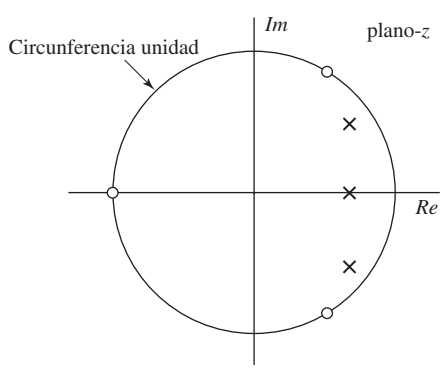


Figura 5.14 Diagrama polo–cero del filtro paso bajo del Ejemplo 5.8.

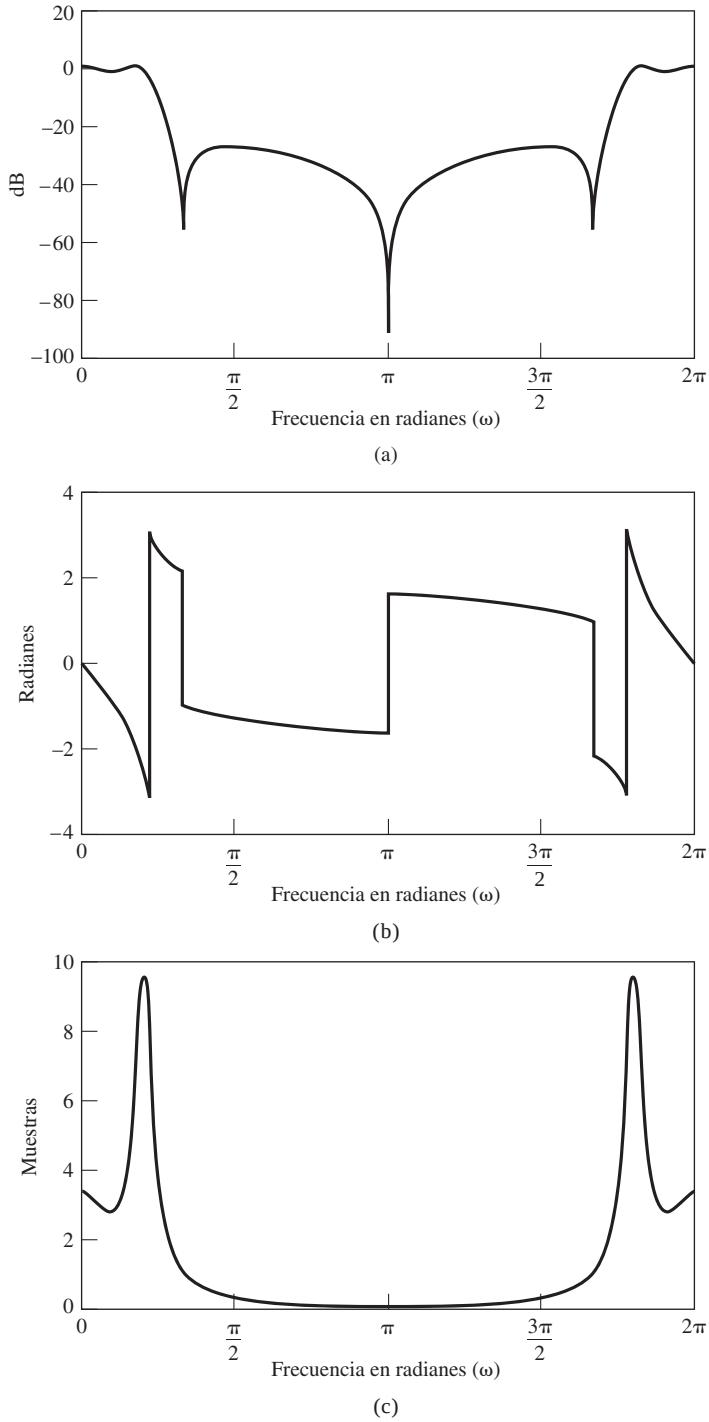


Figura 5.15 Respuesta en frecuencia del filtro paso bajo del Ejemplo 5.8. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

5.4. RELACIÓN ENTRE EL MÓDULO Y LA FASE

En general, el conocimiento del módulo de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo no proporciona información alguna sobre la fase, y viceversa. Sin embargo, para el caso de sistemas descritos por ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes, es decir, con funciones de transferencia racionales, existen relaciones entre el módulo y la fase. En particular, como veremos en esta sección, si se conoce el módulo de la respuesta en frecuencia y el número de polos y ceros, sólo hay un número finito de posibilidades para la fase asociada. De forma similar, si el número de polos y ceros y la fase son conocidos, entonces, salvo un factor de escala, sólo hay un número finito de posibilidades para el módulo. Pero además, aplicando una restricción conocida como de fase mínima, el módulo de la respuesta en frecuencia determina de forma única la fase, y la fase de la respuesta en frecuencia determina el módulo salvo un factor de escala.

Para explorar las posibilidades de selección de la función de transferencia, consideremos el cuadrado del módulo de la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|^2$ que expresaremos así:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(z)H^*(1/z^*)|_{z=e^{j\omega}}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Si restringimos las posibilidades de la función de transferencia $H(z)$ a funciones racionales de la forma indicada en la Ecuación (5.21), es decir,

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}, \tag{5.69}$$

podemos ver que la expresión de $H^*(1/z^*)$ en la Ecuación (5.68) es

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k^* z)}, \tag{5.70}$$

donde hemos supuesto que a_0 y b_0 son reales. Por tanto, la Ecuación (5.68) indica que el cuadrado del módulo de la respuesta en frecuencia resulta de la evaluación en la circunferencia unidad de la transformada Z

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) \tag{5.71}$$

$$= \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}. \tag{5.72}$$

Si conocemos $|H(e^{j\omega})|^2$ expresada en función de $e^{j\omega}$, sustituyendo $e^{j\omega}$ por z, se puede construir la función $C(z)$. A partir de $C(z)$, desearíamos inferir tanto como fuera posible sobre la función $H(z)$. Notemos

en primer lugar que por cada polo d_k de $H(z)$, hay un polo de $C(z)$ en d_k y en $(d_k^*)^{-1}$. Análogamente, por cada cero c_k de $H(z)$, existe un cero de $C(z)$ en c_k y en $(c_k^*)^{-1}$. Por tanto, los polos y los ceros de $C(z)$ aparecen en parejas inversas conjugadas. Un elemento de cada pareja está asociado con $H(z)$ y el otro elemento, con $H^*(1/z^*)$. Además, si un elemento de la pareja está en el interior de la circunferencia unidad, el otro (su inverso conjugado) estará en el exterior. La única alternativa restante es que los dos estén en la circunferencia unidad en la misma posición.

Si se supone que $H(z)$ corresponde a un sistema causal y estable, todos sus polos deberán estar en el interior de la circunferencia unidad. Con esta restricción, los polos de $H(z)$ se pueden identificar a partir de los polos de $C(z)$. Sin embargo, sólo con esta restricción, los ceros de $H(z)$ no quedan determinados a partir de los ceros de $C(z)$. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.9 Sistemas diferentes con la misma $C(z)$

Consideremos dos diferentes sistemas estables con las siguientes funciones de transferencia

$$H_1(z) = \frac{2(1-z^{-1})(1+0{,}5z^{-1})}{(1-0{,}8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \tag{5.73}$$

y

$$H_2(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1-0{,}8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j\pi/4}z^{-1})}. \tag{5.74}$$

Las Figuras 5.16(a) y 5.16(b) muestran, respectivamente, los diagramas polo-cero de estos sistemas. Los dos sistemas tienen los polos en la misma posición y ambos tienen un cero en $z = 1$, pero se diferencian en la posición del segundo cero.

Si hacemos

$$\begin{aligned} C_1(z) &= H_1(z)H_1^*(1/z^*) \\ &= \frac{2(1-z^{-1})(1+0{,}5z^{-1})2(1-z)(1+0{,}5z)}{(1-0{,}8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j\pi/4}z)(1-0{,}8e^{j\pi/4}z)} \end{aligned} \tag{5.75}$$

y

$$\begin{aligned} C_2(z) &= H_2(z)H_2^*(1/z^*) \\ &= \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0{,}8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j\pi/4}z)(1-0{,}8e^{j\pi/4}z)}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Utilizando que

$$4(1+0{,}5z^{-1})(1+0{,}5z) = (1+2z^{-1})(1+2z), \tag{5.77}$$

se puede ver que $C_1(z) = C_2(z)$. La Figura 5.16(c) muestra el diagrama polo-cero de $C_1(z)$ y $C_2(z)$, que son idénticos.

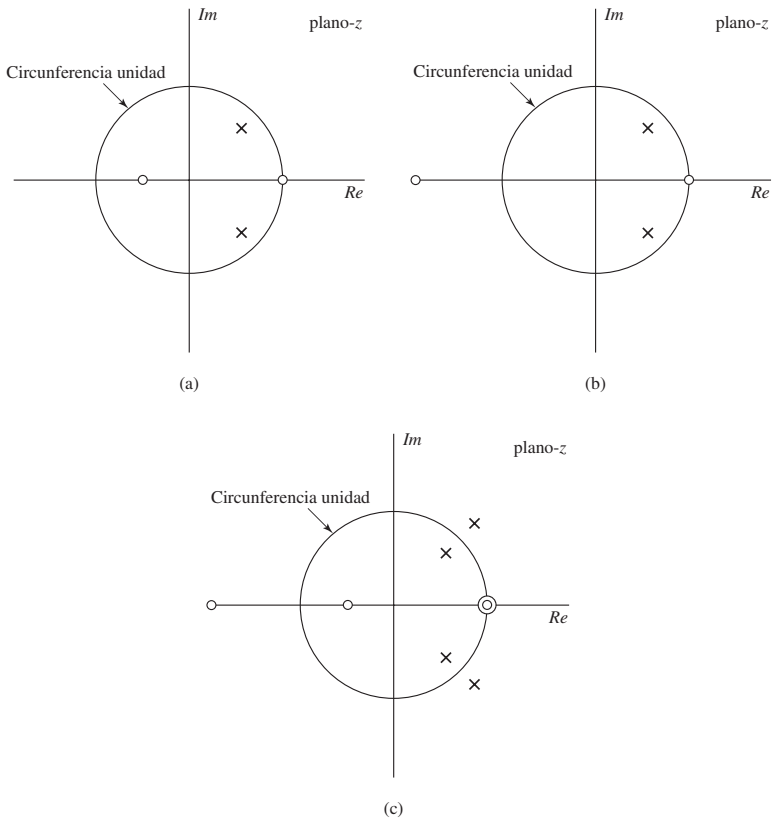


Figura 5.16 Diagramas polo-cero de dos funciones de transferencia con la misma función módulo al cuadrado. (a) $H_1(z)$. (b) $H_2(z)$. (c) $C_1(z)$, $C_2(z)$.

Las funciones de transferencia $H_1(z)$ y $H_2(z)$ del Ejemplo 5.9 difieren sólo en la posición de los ceros. En el ejemplo, el factor $2(1+0{,}5z^{-1}) = (z^{-1}+2)$ contribuye igual al cuadrado del módulo de la respuesta en frecuencia, como un factor $(1+2z^{-1})$ y, por tanto, $|H_1(e^{j\omega})|$ y $|H_2(e^{j\omega})|$ tienen el mismo valor. Sin embargo, las funciones de fase de las dos respuestas en frecuencia son diferentes.

Ejemplo 5.10 Determinación de $H(z)$ a partir de $C(z)$

Supongamos un diagrama polo-cero de la función $C(z)$ como el que se muestra en la Figura 5.17. Deseamos determinar los polos y los ceros que se asocian a $H(z)$. Las parejas inversas conjugadas de polos y ceros para las que un elemento de cada una se asocia a $H(z)$ y el otro a $H^*(1/z^*)$ son las siguientes:

Pareja de polos 1 :	(p_1, p_4)	Pareja de ceros 1 :	(z_1, z_4)
Pareja de polos 2 :	(p_2, p_5)	Pareja de ceros 2 :	(z_2, z_5)
Pareja de polos 3 :	(p_3, p_6)	Pareja de ceros 3 :	(z_3, z_6)

Sabiendo que $H(z)$ corresponde a un sistema causal y estable, los polos de cada pareja deben elegirse de manera que estén en el interior de la circunferencia unidad, es decir, p_1, p_2 y p_3. Esa restricción no se aplica a los ceros. Sin embargo, si suponemos que los coeficientes a_k y b_k de las Ecuaciones (5.19) y (5.20) son reales, los ceros (y los polos) o bien son reales o aparecen en pares complejos conjugados. Por tanto, los ceros que se asocian con $H(z)$ pueden ser

$$z_3 \quad \text{o} \quad z_6$$

y

$$(z_1, z_2) \quad \text{o} \quad (z_4, z_5).$$

Luego existen en total cuatro sistemas causales y estables diferentes, cada uno con tres polos y tres ceros, cuya función $C(z)$ presenta el diagrama polo-cero que se muestra en la Figura 5.17, o lo que es lo mismo, con idéntico valor del módulo de su respuesta en frecuencia. Si no hubiéramos supuesto que los coeficientes a_k y b_k son reales, el número de posibilidades sería mayor. Además, si el número de polos y ceros de $H(z)$ no estuviera restringido, el número de posibilidades para escoger $H(z)$ no tendría límite. Para verlo, supongamos que $H(z)$ tiene un factor de la forma

$$\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}},$$

es decir,

$$H(z) = H_1(z)\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}. \tag{5.78}$$

Los factores de esta forma se denominan *factores paso todo,* ya que su módulo vale siempre 1 en la circunferencia unidad. Estos factores se estudian en detalle en la Sección 5.5. Se puede verificar fácilmente que para $H(z)$ en la Ecuación (5.78),

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z)H_1^*(1/z^*); \tag{5.79}$$

Es decir, los factores paso todo se cancelan en $C(z)$ y por lo tanto no son identificables a partir de su diagrama polo-cero. Por tanto, si no se especifica el número de polos y ceros de $H(z)$, dada una función $C(z)$, cualquier selección de $H(z)$ se puede colocar en cascada con un número arbitrario de factores paso todo con polos en el interior de la circunferencia unidad (es decir, $|a| < 1$).

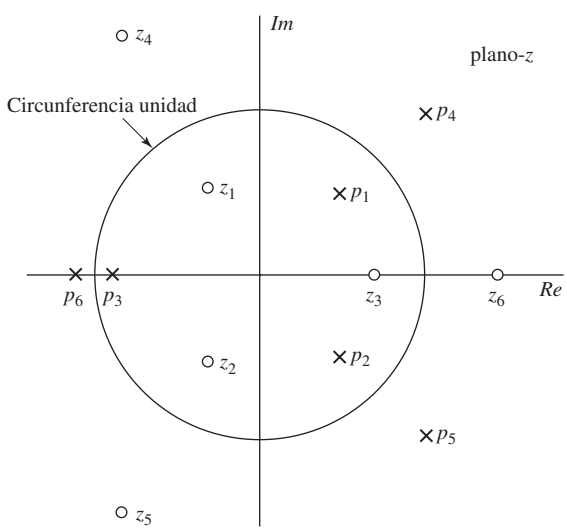


Figura 5.17 Diagrama polo–cero de la función módulo al cuadrado del Ejemplo 5.10.

5.5. SISTEMAS PASO TODO

Como se indicó en los comentarios del Ejemplo 5.10, si tenemos una función de transferencia de un sistema estable de la forma

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \tag{5.80}$$

el módulo de su respuesta en frecuencia es independiente de ω. Esto se puede ver si escribimos $H_{\text{ap}}(e^{j\omega})$ de la forma

$$\begin{aligned} H_{\text{ap}}(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega}\frac{1 - a^*e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \end{aligned} \tag{5.81}$$

En la Ecuación (5.81), el término $e^{-j\omega}$ tiene módulo unidad, y los restantes factores del numerador y el denominador son complejos conjugados y por lo tanto tienen el mismo módulo. Por consiguiente, $|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1$. Un sistema cuyo módulo de la respuesta en frecuencia es una constante se denomina sistema paso todo, ya que permite el paso de todas las componentes en frecuencia de su entrada con ganancia o atenuación constante.[3]

La forma más general de la función de transferencia de un sistema paso todo con respuesta al impulso real es un producto de factores como el de la Ecuación (5.80), en el que los polos complejos están emparejados con sus conjugados. Es decir,

$$H_{\text{ap}}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}, \tag{5.82}$$

siendo A una constante positiva, d_k los polos reales y e_k los polos complejos de $H_{\text{ap}}(z)$. En el caso de sistemas paso todo causales y estables, $|d_k| < 1$ y $|e_k| < 1$. Utilizando nuestra notación general para funciones de transferencia, todos los sistemas paso todo tienen $M = N = 2M_c + M_r$ polos y ceros. La Figura 5.18 muestra un diagrama de polos y ceros típico de un sistema paso todo. En este caso $M_r = 2$ y $M_c = 1$. Nótese que cada polo de $H_{\text{ap}}(z)$ está emparejado con un cero inverso conjugado.

La respuesta en frecuencia de un sistema paso todo general se puede expresar en función de las respuestas en frecuencia de sistemas paso todo de primer orden como el que se especifica en la Ecuación (5.80). En un sistema paso todo causal, cada uno de los términos consiste en un polo simple en el interior de la circunferencia unidad y un cero en la posición inversa conjugada. La respuesta en amplitud de este término es, como hemos demostrado, la unidad. Por tanto, el logaritmo del módulo en dB es cero. Si expresamos a en forma polar como $a = re^{j\theta}$, la función de fase correspondiente a la Ecuación (5.80) es

$$\angle\left[\frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right] = -\omega - 2\arctan\left[\frac{r\,\text{sen}(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}\right]. \tag{5.83}$$

[3]En algunos casos el sistema paso todo se define con ganancia unidad. En este texto se utiliza el término sistema paso todo para indicar un sistema que deja pasar todas las frecuencias y las multiplica por una constante A que no está restringida a ser la unidad.

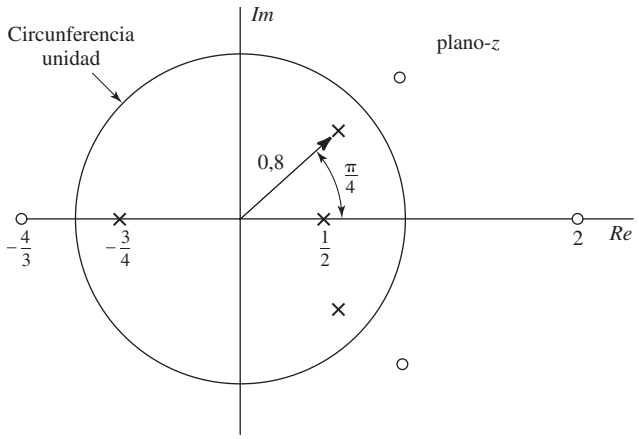


Figura 5.18 Diagrama polo–cero típico de un sistema paso todo.

Asimismo, la fase de un sistema paso todo de segundo orden con polos en $z = re^{j\theta}$ y $z = re^{-j\theta}$ es

$$\angle\left[\frac{(e^{-j\omega} - re^{-j\theta})(e^{-j\omega} - re^{j\theta})}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})}\right] = -2\omega - 2\arctan\left[\frac{r\,\mathrm{sen}(\omega-\theta)}{1 - r\cos(\omega-\theta)}\right] - 2\arctan\left[\frac{r\,\mathrm{sen}(\omega+\theta)}{1 - r\cos(\omega+\theta)}\right]. \tag{5.84}$$

Ejemplo 5.11 Sistemas paso todo de primer y segundo orden

La Figura 5.19 muestra las gráficas del logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo de dos sistemas paso todo de primer orden, uno con un polo real en $z = 0{,}9$ $(\theta = 0, r = 0{,}9)$ y otro con un polo en $z = -0{,}9$ $(\theta = \pi, r = 0{,}9)$. En ambos sistemas, los radios de los polos valen $r = 0{,}9$. Asimismo, la Figura 5.20 muestra las mismas funciones para un sistema paso todo de segundo orden con polos en $z = 0{,}9e^{j\pi/4}$ y $z = 0{,}9e^{-j\pi/4}$.

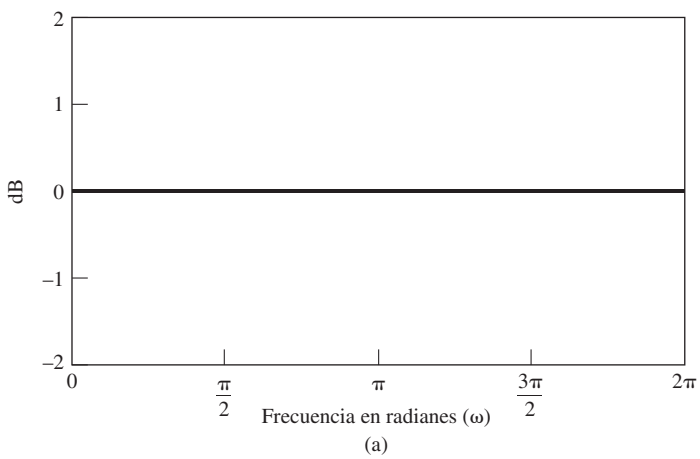


Figura 5.19 Respuesta en frecuencia de filtros paso todo con polos reales en $z = 0{,}9$ (línea continua) y en $z = -0{,}9$ (línea de trazos). (a) Logaritmo del módulo.

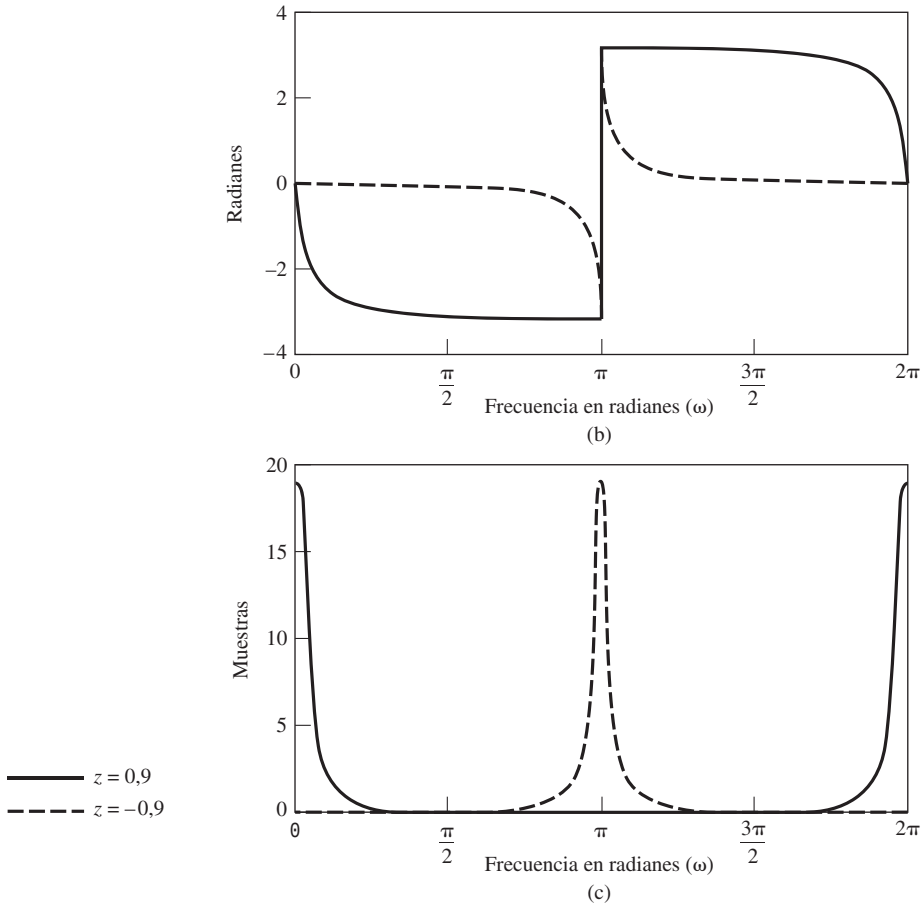


Figura 5.19 *Continuación* (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

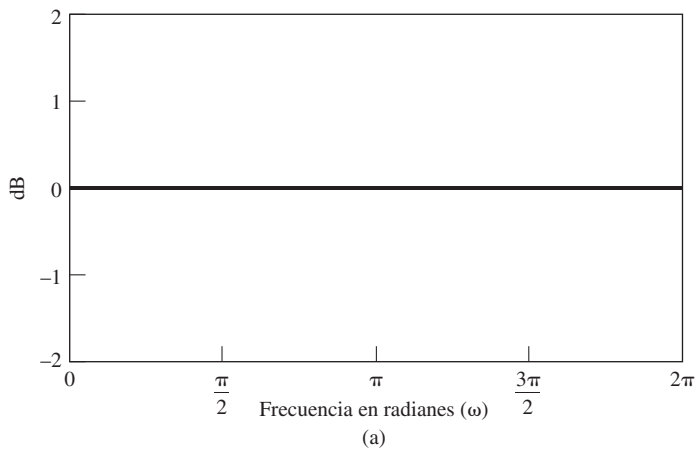


Figura 5.20 Respuesta en frecuencia de un filtro paso todo con polos en $z = 0{,}9e^{\pm j\pi/4}$. (a) Logaritmo del módulo.

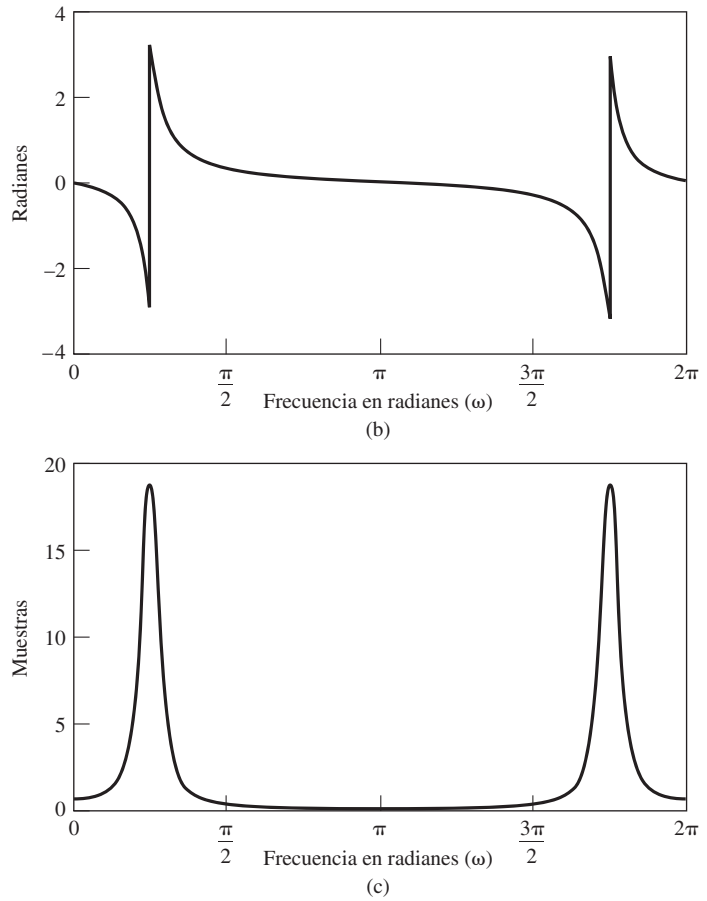


Figura 5.20 *Continuación* (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

El Ejemplo 5.11 ilustra una propiedad general de los sistemas paso todo causales. En la Figura 5.19(b) podemos ver que la fase es no positiva en $0 < \omega < \pi$. Análogamente, si en la Figura 5.20(b) se elimina la discontinuidad de 2π que resulta de calcular el valor principal, la curva de fase continua resultante es no positiva en $0 < \omega < \pi$. Como el sistema paso todo más general definido en la Ecuación (5.82) es sólo un producto de esos factores de primer y segundo orden, podemos concluir que la fase (desenrollada) $\arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]$, de un sistema paso todo causal es siempre no positiva en $0 < \omega < \pi$. Esto parece no ser cierto si se representa el valor principal, como se muestra en la Figura 5.21, que muestra el logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo de un sistema paso todo con polos y ceros como se indica en la Figura 5.18. Sin embargo, este resultado se puede establecer también considerando primero el retardo de grupo.

El retardo de grupo de un sistema paso todo simple de un polo como el de la Ecuación (5.80) es la derivada cambiada de signo de la fase dada en la Ecuación (5.83). Tras realizar algunas operaciones algebraicas se puede demostrar que

$$\text{grd}\left[\frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right] = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2}. \tag{5.85}$$

Como en un sistema paso todo causal y estable $r < 1$, observando la Ecuación (5.85) se puede concluir que la contribución de un factor causal paso todo simple al retardo de grupo es siempre positiva. Como el retardo de grupo de un sistema paso todo de orden superior es la suma de términos positivos, como se indica en la Ecuación (5.85), será en general cierto que el retardo de grupo de un sistema paso todo racional causal es siempre positivo. Las Figuras 5.19(c), 5.20(c) y 5.21(c), que muestran respectivamente los retardos de grupo de sistemas paso todo de primer, segundo y tercer orden, confirman este hecho.

La positividad del retardo de grupo de los sistemas paso todo causales es la base de una demostración simple de la negatividad de la fase en estos sistemas. En primer lugar, tengamos en cuenta que

$$\arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] = -\int_0^{\omega} \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\phi})]d\phi + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j0})] \tag{5.86}$$

para $0 \leq \omega \leq \pi$. Utilizando la Ecuación (5.82),

$$H_{\text{ap}}(e^{j0}) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{1-d_k}{1-d_k}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{|1-e_k|^2}{|1-e_k|^2} = A. \tag{5.87}$$

Por tanto, $\arg[H_{\text{ap}}(e^{j0})] = 0$, y como

$$\text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] \geq 0, \tag{5.88}$$

utilizando la Ecuación (5.86) se desprende que

$$\arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})] \leq 0 \qquad \text{para } 0 \leq \omega < \pi. \tag{5.89}$$

La positividad del retardo de grupo y la no positividad de la fase desenrrollada son propiedades importantes de los sistemas paso todo causales.

Los sistemas paso todo tienen importancia en muchas aplicaciones. Se pueden utilizar como compensadores de distorsión de fase (o de retardo de grupo), como veremos en el Capítulo 7, y son útiles en la teoría de sistemas de fase mínima, como veremos en la Sección 5.6. Son también de utilidad en la transformación de filtros paso bajo selectivos en frecuencia en otras formas de filtros y para obtener filtros selectivos en frecuencia con frecuencia de corte variable. Estas aplicaciones se presentan en el Capítulo 7 y se utilizan en algunos problemas de ese capítulo.

5.6. SISTEMAS DE FASE MÍNIMA

En la Sección 5.4 demostramos que el módulo de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia racional no caracteriza de forma única al sistema. Si el sistema es estable y causal, los polos deben estar situados en el interior de la circunferencia unidad, pero las propiedades de estabilidad y causalidad no restringen las posiciones de los ceros. En ciertas clases de problemas, es útil imponer la restricción adicional de que el sistema inverso (es decir, el sistema con función de transferencia $1/H(z)$)) sea estable y causal. Como se indicó en la Sección 5.2.2, esto restringe la posición de los ceros, así como de los polos, al interior de la circunferencia unidad, debido a que los polos de $1/H(z)$ son los ceros de $H(z)$. Estos sistemas se denominan comúnmente *sistemas de fase mínima*. El nombre de fase mínima procede de una propiedad de la respuesta de fase, que no se deduce de forma inmediata a partir de la definición anterior. Esta propiedad y otras que presentaremos son exclusivas de esta clase de sistemas, y por lo tanto, cualquiera de ellas se puede tomar como la que define la clase. En la Sección 5.6.3 detallaremos estas propiedades.

Si tenemos una función módulo al cuadrado como la que se indica en la Ecuación (5.72) y sabemos que el sistema y su inverso son causales y estables (es decir, es un sistema de fase mínima), $H(z)$ queda

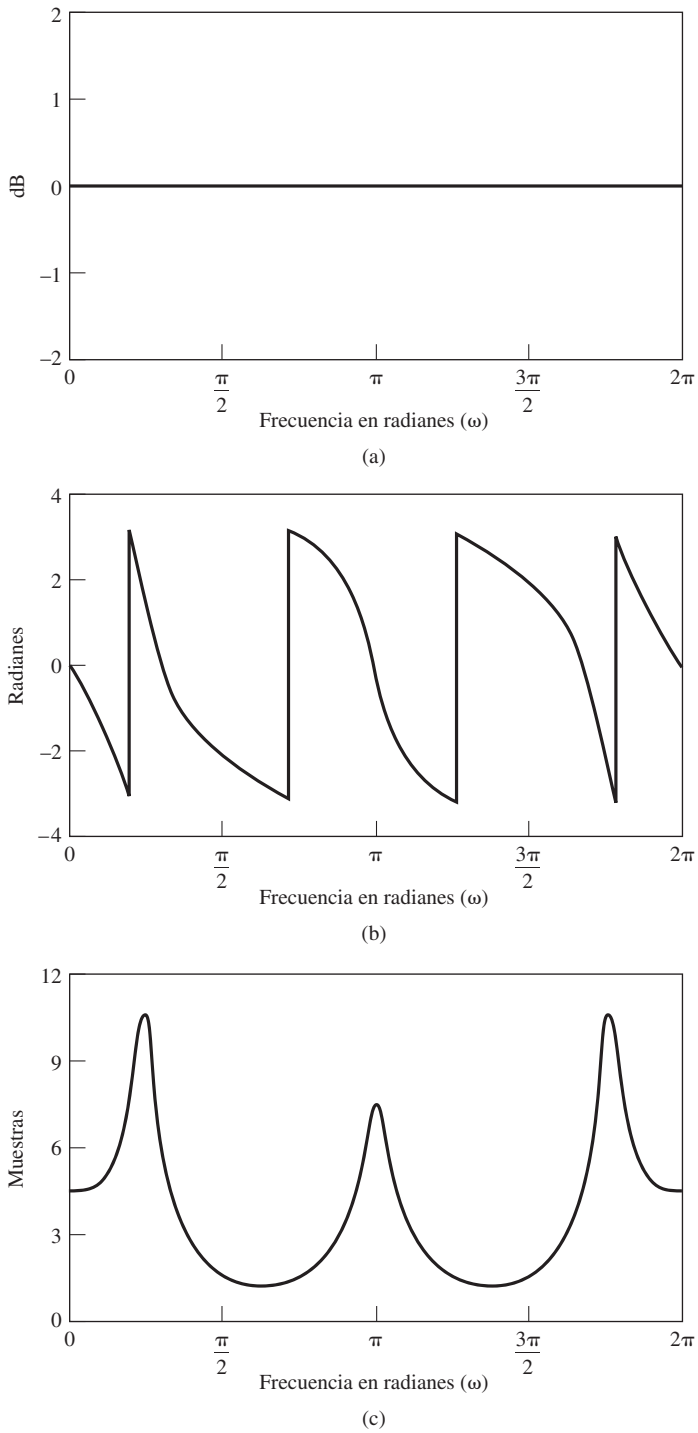


Figura 5.21 Respuesta en frecuencia de un filtro paso todo con el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura 5.18. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

determinada de forma única y tiene todos los polos y ceros de $C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$ que están en el interior de la circunferencia unidad.[4] Esta propiedad se utiliza a menudo en diseño de filtros, donde el método de diseño especifica sólo la respuesta en amplitud (Véase el Capítulo 7).

5.6.1. Fase mínima y descomposición paso todo

En la Sección 5.4 demostramos que sólo con el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia no se puede determinar de forma única la función de transferencia $H(z)$, ya que cualquier selección que fuera coherente con el valor del módulo de la respuesta en frecuencia se podría colocar en cascada con un número arbitrario de factores paso todo sin afectar a dicho módulo. Una observación relacionada con esta idea es que cualquier función de transferencia racional[5] se puede expresar como

$$H(z) = H_{\text{mín}}(z)H_{\text{ap}}(z), \tag{5.90}$$

siendo $H_{\text{mín}}(z)$ un sistema de fase mínima y $H_{\text{ap}}(z)$ un sistema paso todo.

Para demostrarlo, supongamos que $H(z)$ tiene un cero en el exterior de la circunferencia unidad en $z = 1/c^*$, siendo $|c| < 1$, y que los restantes polos y ceros están en el interior de la circunferencia unidad. Entonces, $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*), \tag{5.91}$$

donde, por definición, $H_1(z)$ es de fase mínima. Una expresión equivalente de $H(z)$ es

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1})\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}. \tag{5.92}$$

Como $|c| < 1$, el factor $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ es también de fase mínima, y se diferencia de $H(z)$ sólo en que el cero de $H(z)$ que está en el exterior de la circunferencia unidad en $z = 1/c^*$ se refleja en el interior de la circunferencia unidad en la posición inversa conjugada $z = c$. El término $(z^{-1} - c^*)/(1 - cz^{-1})$ es paso todo. Este ejemplo se puede generalizar de forma directa para contemplar la existencia de más ceros en el exterior de la circunferencia unidad, con lo que se demuestra que, en general, cualquier función de transferencia se puede expresar como

$$H(z) = H_{\text{mín}}(z)H_{\text{ap}}(z), \tag{5.93}$$

siendo $H_{\text{mín}}(z)$ el término que contiene los polos y ceros de $H(z)$ que están en el interior de la circunferencia unidad, más los ceros que son los inversos conjugados de los ceros de $H(z)$ que están en el exterior de la circunferencia unidad. La función de transferencia $H_{\text{ap}}(z)$ tiene todos los ceros de $H(z)$ que están en el exterior de la circunferencia unidad junto con los polos necesarios para cancelar los ceros inversos conjugados de $H_{\text{mín}}(z)$.

Utilizando la Ecuación (5.93), se puede obtener un sistema de fase no mínima partiendo de un sistema de fase mínima reflejando uno o más ceros en el interior de la circunferencia unidad a sus posiciones

---

[4] Hemos supuesto que $h_{min}[n]$ no tiene polos ni ceros en la circunferencia unidad. Estrictamente hablando, los sistemas con polos en la circunferencia unidad son inestables y en la práctica se evitan. Sin embargo, los ceros en la circunferencia unidad aparecen a menudo en el diseño práctico de filtros. Según nuestra definición, esos sistemas no son de fase mínima, aunque muchas de las propiedades de los sistemas de fase mínima se mantienen también en este caso.

[5] Por conveniencia, limitaremos nuestra presentación a sistemas causales y estables, aunque la observación aplica de forma más general.

inversas conjugadas en el exterior de la circunferencia unidad o viceversa, se puede obtener un sistema de fase mínima a partir de un sistema de fase no mínima reflejando los ceros que están en el exterior de la circunferencia unidad a sus posiciones inversas conjugadas en el interior de la circunferencia unidad. En los dos casos, tanto el sistema de fase mínima como el de fase no mínima tendrán una respuesta en frecuencia con el mismo módulo.

Ejemplo 5.12 Descomposición fase mínima/paso todo

Para ilustrar la descomposición de un sistema causal y estable en una cascada de sistemas de fase mínima y paso todo, consideremos dos sistemas causales y estables especificados por las siguientes funciones de transferencia

$$H_1(z) = \frac{(1+3z^{-1})}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

y

$$H_2(z) = \frac{\left(1+\frac{3}{2}e^{+j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

La primera función de transferencia, $H_1(z)$, tiene un polo en el interior de la circunferencia unidad en $z=-\frac{1}{2}$, y un cero en el exterior, en $z=-3$. Hay que elegir los sistemas paso todo apropiados para reflejar este cero en el exterior de la circunferencia unidad. Utilizando la Ecuación (5.91), tenemos que $c=-\frac{1}{3}$. Así, empleando las Ecuaciones (5.92) y (5.93), obtenemos que la componente paso todo es

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{z^{-1}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}},$$

y la componente de fase mínima será

$$H_{\min}(z) = 3\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}};$$

es decir,

$$H_1(z) = \left(3\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\right).$$

La segunda función de transferencia, $H_2(z)$, tiene dos ceros complejos en el exterior de la circunferencia unidad y un polo real en el interior. $H_2(z)$ se puede expresar en la forma indicada en la Ecuación (5.91) factorizando los términos con $\frac{3}{2}e^{j\pi/4}$ y $\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}$ del numerador, con lo que se obtiene

$$H_2(z) = \frac{9}{4}\frac{\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}\right)\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{j\pi/4}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Factorizando como en la Ecuación (5.92) queda

$$H_2(z) = \frac{9}{4}\frac{\left(1+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \times \frac{\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}\right)\left(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{j\pi/4}\right)}{\left(1+\frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)}.$$

El primer término entre corchetes es el término de fase mínima y el segundo es el sistema paso todo.

5.6.2. Compensación de la respuesta en frecuencia de sistemas de fase no mínima

En muchas aplicaciones de tratamiento de señales, un sistema lineal e invariante con el tiempo distorsiona una señal con una respuesta en frecuencia no deseada. Puede resultar de interés procesar la señal distorsionada con un sistema de compensación, como indica la Figura 5.22. Esta situación puede surgir, por ejemplo, en la transmisión de señales por canales de comunicaciones. Si se consigue una compensación perfecta, entonces $s_c[n] = s[n]$, es decir, $H_c(z)$ es el sistema inverso de $H_d(z)$. Sin embargo, si suponemos que el sistema distorsionante es estable y causal y exigimos que el sistema de compensación sea también estable y causal, la compensación perfecta sólo es posible si el sistema $H_d(z)$ es de fase mínima, de forma que su inverso sea causal y estable.

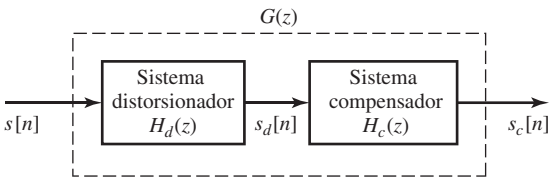


Figura 5.22 Ilustración de la compensación de la distorsión mediante filtrado lineal.

Basándonos en el razonamiento anterior y suponiendo que $H_d(z)$ es racional o se puede aproximar mediante una función racional, se puede formar un sistema de fase mínima $H_{d\,\text{mín}}(z)$ reflejando todos los ceros de $H_d(z)$ que están en el exterior de la circunferencia unidad a sus posiciones inversas conjugadas en el interior de la circunferencia unidad. $H_d(z)$ y $H_{d\,\text{mín}}(z)$ tienen el mismo valor del módulo de su respuesta en frecuencia y se relacionan a través de un sistema paso todo $H_{\text{ap}}(z)$, es decir,

$$H_d(z) = H_{d\,\text{mín}}(z)H_{\text{ap}}(z). \tag{5.94}$$

Seleccionando el filtro de compensación como

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d\,\text{mín}}(z)}, \tag{5.95}$$

obtenemos que la función de transferencia completa que relaciona $s[n]$ y $s_c[n]$ es

$$G(z) = H_d(z)H_c(z) = H_{\text{ap}}(z); \tag{5.96}$$

Es decir, $G(z)$ corresponde a un sistema paso todo. En consecuencia, el módulo de la respuesta en frecuencia se compensa de forma exacta y la respuesta de fase se modifica con $\angle H_{\text{ap}}(e^{j\omega})$.

El Ejemplo 5.13 ilustra la compensación del módulo de la respuesta en frecuencia cuando el sistema que se compensa es un sistema FIR de fase no mínima.

5.6.3. Propiedades de los sistemas de fase mínima

Hemos utilizado el término "fase mínima" para referirnos a sistemas que son causales y estables y cuyo sistema inverso es también causal y estable. Este nombre está motivado por una propiedad de la función de fase que, aunque no es obvia, se deduce de la definición presentada. En esta sección vamos a estudiar algunas propiedades importantes e interesantes de los sistemas de fase mínima en relación con todos los otros sistemas que tienen una respuesta en frecuencia del mismo módulo.

Ejemplo 5.13 Compensación de un sistema FIR

Consideremos que la función de transferencia del sistema distorsionador es

$$\begin{aligned} H_d(z) = {} & (1-0{,}9e^{j0{,}6\pi}z^{-1})(1-0{,}9e^{-j0{,}6\pi}z^{-1}) \\ & \times(1-1{,}25e^{j0{,}8\pi}z^{-1})(1-1{,}25e^{-j0{,}8\pi}z^{-1}). \end{aligned} \tag{5.97}$$

La Figura 5.23 muestra el diagrama polo–cero. Como $H_d(z)$ sólo tiene ceros (todos los polos están en $z=0$), se deduce que el sistema tiene una respuesta al impulso de duración finita. Por tanto, el sistema es estable. Como $H_d(z)$ es un polinomio que sólo tiene potencias negativas de z, el sistema es causal. Sin embargo, como dos de los ceros están en el exterior de la circunferencia unidad, el sistema no es de fase mínima. La Figura 5.24 muestra el logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo de $H_d(e^{j\omega})$.

El correspondiente sistema de fase mínima se obtiene reflejando los ceros que aparecen en $z = 1{,}25e^{\pm j0{,}8\pi}$ a sus posiciones inversas conjugadas en el interior de la circunferencia unidad. Si expresamos $H_d(z)$ como

$$\begin{aligned} H_d(z) = {} & (1-0{,}9e^{j0{,}6\pi}z^{-1})(1-0{,}9e^{-j0{,}6\pi}z^{-1})(1{,}25)^2 \\ & \times(z^{-1}-0{,}8e^{-j0{,}8\pi})(z^{-1}-0{,}8e^{j0{,}8\pi}), \end{aligned} \tag{5.98}$$

entonces

$$\begin{aligned} H_{\text{mín}}(z) = {} & (1{,}25)^2(1-0{,}9e^{j0{,}6\pi}z^{-1})(1-0{,}9e^{-j0{,}6\pi}z^{-1}) \\ & \times(1-0{,}8e^{-j0{,}8\pi}z^{-1})(1-0{,}8e^{j0{,}8\pi}z^{-1}), \end{aligned} \tag{5.99}$$

y el sistema paso todo que relaciona $H_{\text{mín}}(z)$ con $H_d(z)$ es

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{(z^{-1}-0{,}8e^{-j0{,}8\pi})(z^{-1}-0{,}8e^{j0{,}8\pi})}{(1-0{,}8e^{j0{,}8\pi}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j0{,}8\pi}z^{-1})}. \tag{5.100}$$

El logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo de $H_{\text{mín}}(e^{j\omega})$ se muestran en la Figura 5.25. Las Figuras 5.24(a) y 5.25(a) son, por supuesto, idénticas. La Figura 5.26 muestra el logaritmo del módulo, la fase y el retardo de grupo de $H_{\text{ap}}(e^{j\omega})$.

Nótese que el sistema inverso de $H_d(z)$ tendría polos en $z = 1{,}25e^{\pm j0{,}8\pi}$ y en $z = 0{,}9e^{\pm j0{,}6\pi}$, y, por tanto, el sistema causal inverso sería inestable. El sistema inverso de fase mínima sería el inverso de $H_{\text{mín}}(z)$, tal como se indica en la Ecuación (5.99), y si se utilizara este inverso en el sistema en cascada de la Figura 5.22, la función de transferencia efectiva global sería $H_{\text{ap}}(z)$, como se indica en la Ecuación (5.100).

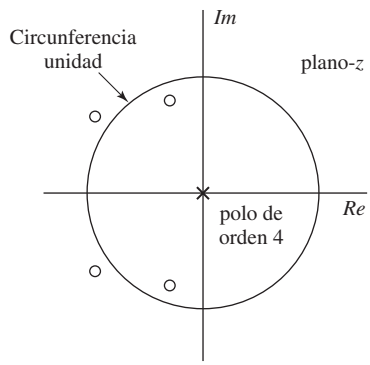


Figura 5.23 Diagrama polo–cero del sistema FIR del Ejemplo 5.13.

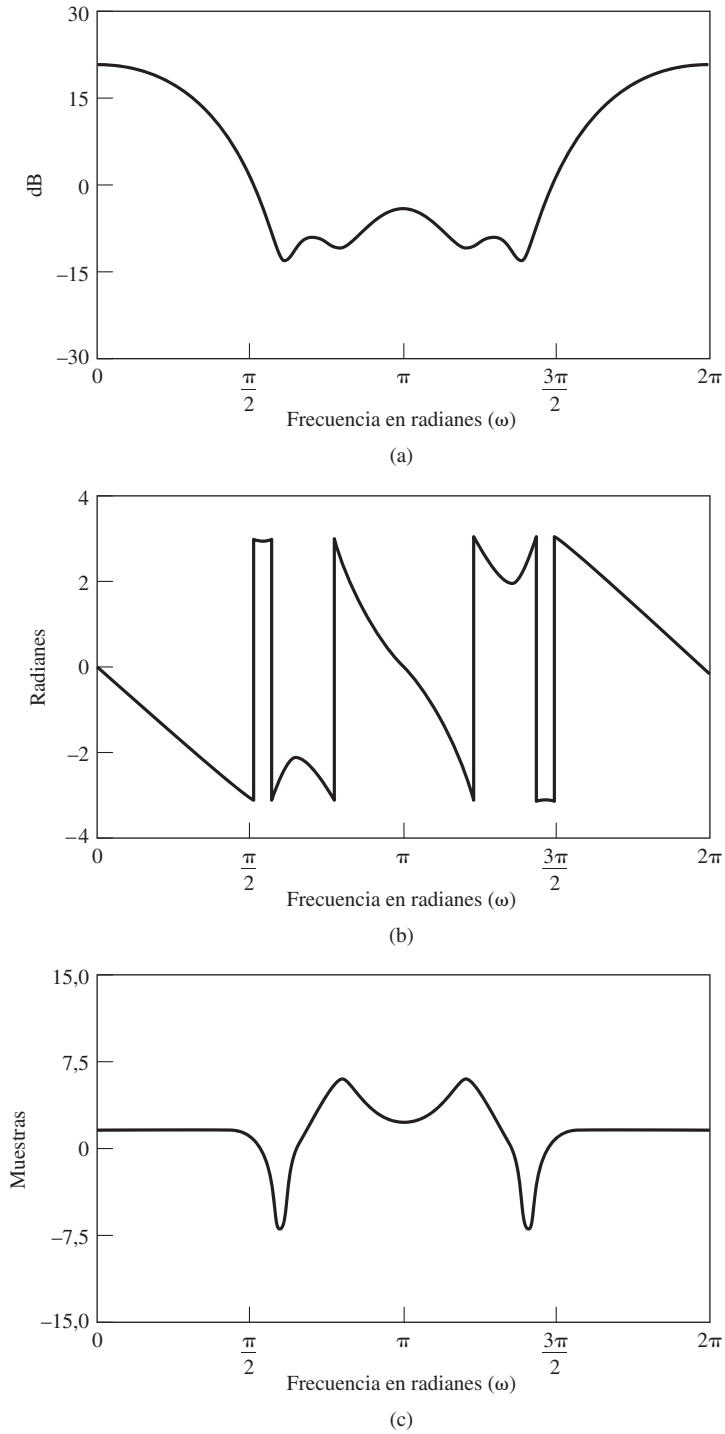


Figura 5.24 Respuesta en frecuencia del sistema FIR con el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura 5.23. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

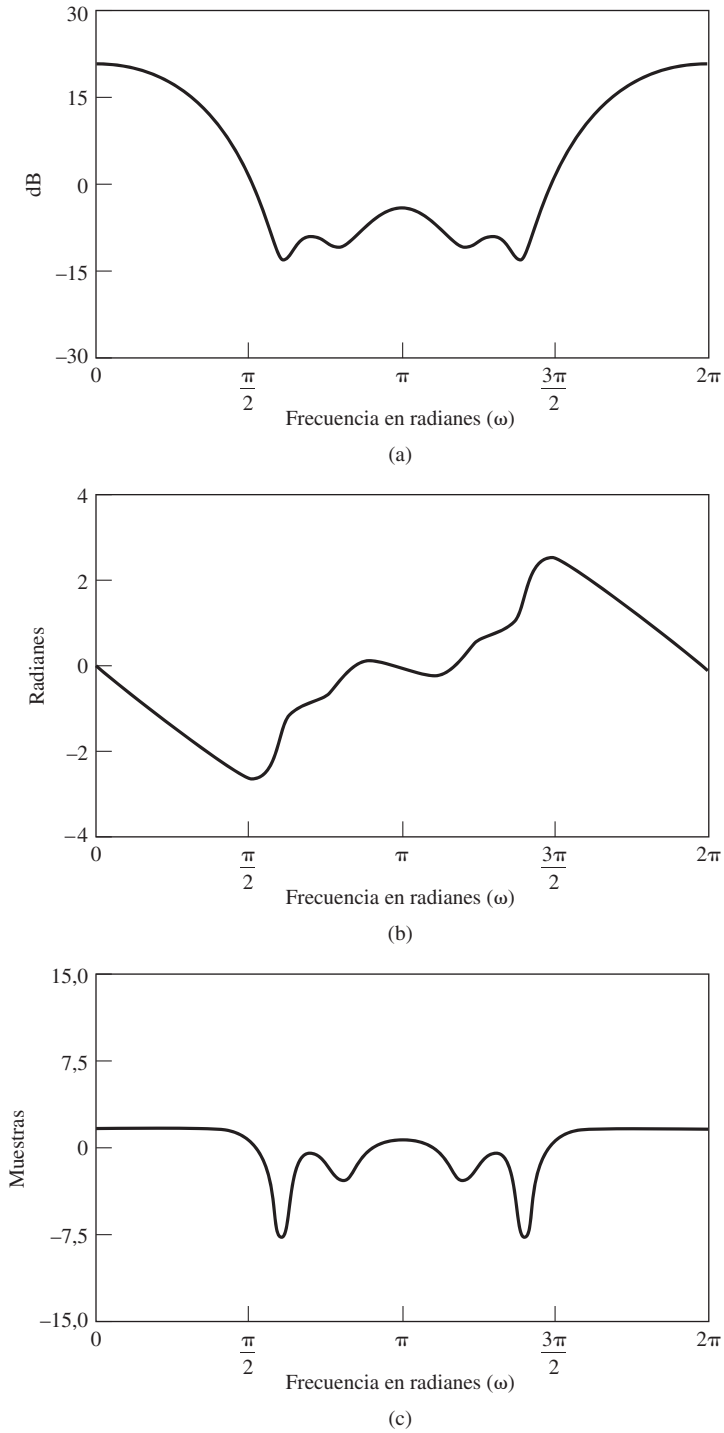


Figura 5.25 Respuesta en frecuencia del sistema de fase mínima del Ejemplo 5.13. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

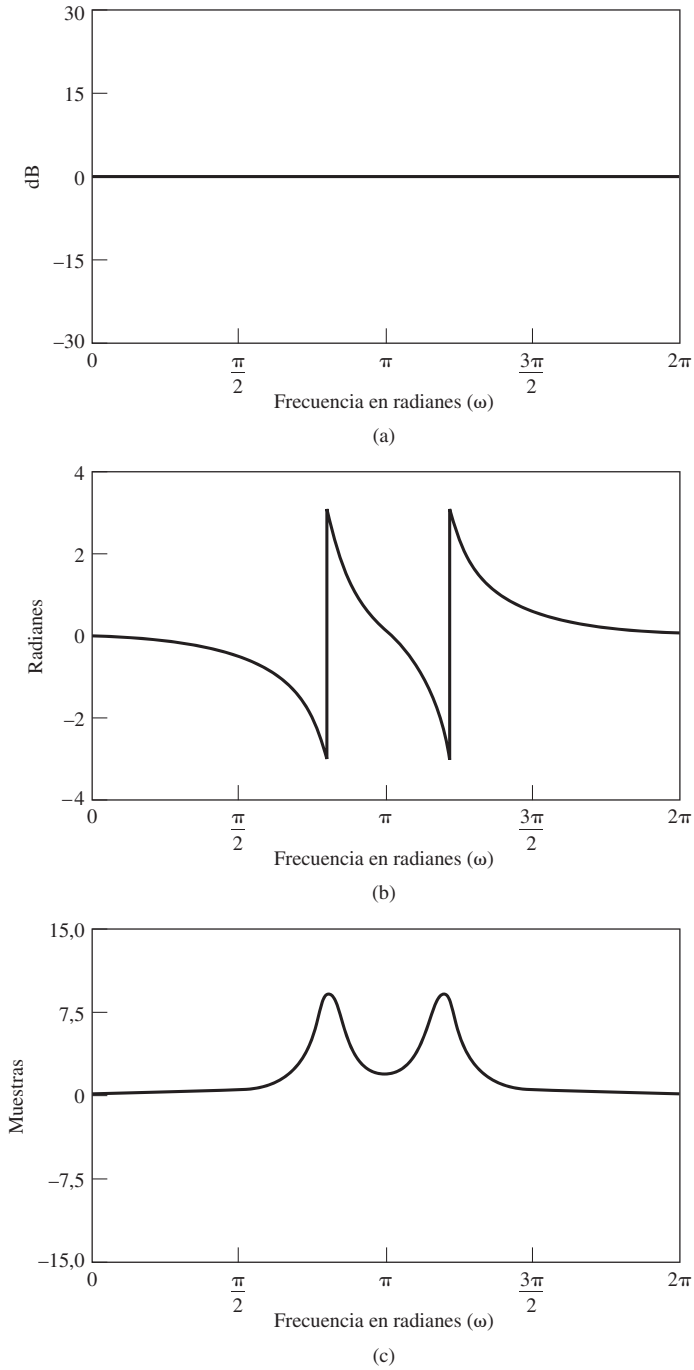


Figura 5.26 Respuesta en frecuencia del sistema paso todo del Ejemplo 5.13 (la suma de las correspondientes curvas de las Figuras 5.25 y 5.26 es igual a la curva correspondiente de la Figura 5.24 en donde la suma de las curvas de fase se toma módulo 2.) (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

Propiedad de retardo de fase mínimo

El Ejemplo 5.13 sugiere el uso de la terminología "fase mínima" como nombre descriptivo de un sistema con todos sus polos y ceros en el interior de la circunferencia unidad. No olvidemos que, como consecuencia de la Ecuación (5.90), la fase desenrollada, es decir $\arg[H(e^{j\omega})]$, de un sistema de fase no mínima se puede expresar como

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{\text{mín}}(e^{j\omega})] + \arg[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]. \tag{5.101}$$

Por tanto, la fase continua que correspondería al valor principal de la fase que se muestra en la Figura 5.24(b) es la suma de la fase continua asociada a la función de fase mínima de la Figura 5.25(b) y la fase desenrollada del sistema paso todo asociado con el valor principal de la fase que se muestra en la Figura 5.26(b). Como se indicó en la Sección 5.5, y como se puede ver en las curvas del valor principal de la fase de las Figuras 5.19(b), 5.20(b), 5.21(b) y 5.26(b), la curva de fase desenrollada de un sistema paso todo es negativa para $0 \leq \omega \leq \pi$. Por tanto, la reflexión de los ceros de $H_{\text{mín}}(z)$ desde el interior de la circunferencia unidad a sus posiciones inversas conjugadas del exterior hace disminuir la fase (desenrollada) o hace aumentar el negativo de la fase, que se denomina función de *retardo de fase*. Es decir, el sistema causal y estable cuyo módulo de la respuesta en frecuencia vale $|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$ y tiene todos sus ceros (y por supuesto sus polos) en el interior de la circunferencia unidad tiene la función de retardo de fase mínima (en $0 \leq \omega < \pi$) de todos los sistemas con el mismo módulo de la respuesta en frecuencia. En consecuencia, una terminología más precisa sería sistema de *retardo de fase mínimo* pero la terminología *fase mínima* es la que se ha mantenido históricamente.

Para precisar más la interpretación de los sistemas de retardo de fase mínimo es necesario imponer la restricción adicional de que $H(e^{j\omega})$ sea positivo en $\omega = 0$. Es decir,

$$H(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0. \tag{5.102}$$

Nótese que $H(e^{j0})$ será real si $h[n]$ es real. La condición de la Ecuación (5.102) es necesaria ya que un sistema con respuesta al impulso $-h[n]$ tiene una respuesta en frecuencia con los mismos polos y ceros que un sistema con respuesta al impulso $h[n]$. Sin embargo, al multiplicar por -1 se altera la fase en π radianes. Por tanto, para eliminar esta ambigüedad, debemos imponer la condición de la Ecuación (5.102), asegurando así que un sistema con todos sus polos y ceros en el interior de la circunferencia unidad tiene también la propiedad de mínimo retardo de fase. Sin embargo, esta restricción es a menudo poco significativa, y nuestra definición al principio de la Sección 5.6, que no la incluye, es la definición generalmente aceptada para la clase de los sistemas de fase mínima.

Propiedad de retardo de grupo mínimo

El Ejemplo 5.13 ilustra otra propiedad de los sistemas cuyos polos y ceros están en el interior de la circunferencia unidad. Nótese en primer lugar que el retardo de grupo de los sistemas que tienen el mismo valor del módulo de su respuesta en frecuencia es

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{\text{mín}}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{\text{ap}}(e^{j\omega})]. \tag{5.103}$$

El retardo de grupo del sistema de fase mínima que se muestra en la Figura 5.25(c) es siempre menor que el retardo de grupo del sistema de fase no mínima que se muestra en la Figura 5.24(c). Esto es porque, como muestra la Figura 5.24(c), el sistema paso todo que convierte el sistema de fase mínima en un sistema de fase no mínima tiene un retardo de grupo positivo. En la Sección 5.5 demostramos que esta es una propiedad general de los sistemas paso todo: tienen siempre retardo de grupo positivo para

todo ω. Por tanto, si consideramos de nuevo todos los sistemas con un determinado valor del módulo de su respuesta en frecuencia, $|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$, el que tiene todos sus polos y ceros en el interior de la circunferencia unidad es el que tiene el mínimo retardo de grupo. Un nombre igualmente adecuado para estos sistemas sería el de sistemas de *retardo de grupo mínimo* pero esta terminología en general no se usa.

Propiedad de mínimo retardo de la energía

En el Ejemplo 5.13 hay un total de cuatro sistemas FIR causales con respuestas al impulso reales que tienen el mismo módulo de la respuesta en frecuencia que el sistema de la Ecuación (5.97). La Figura 5.27 muestra los diagramas polo-cero asociados. La Figura 5.27(d) es la que corresponde a la Ecuación (5.97), y la Figura 5.27(a) al sistema de fase mínima de la Ecuación (5.99). Las respuestas al impulso de estos cuatro casos se muestran en la Figura 5.28. Si comparamos las cuatro secuencias de esta figura, observamos que la secuencia de fase mínima parece tener muestras mayores en su extremo izquierdo que todas las otras secuencias. De hecho, en este ejemplo y en general se cumple que

$$|h[0]| \leq |h_{\text{mín}}[0]| \tag{5.104}$$

para cualquier secuencia $h[n]$ causal y estable que cumpla que

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|. \tag{5.105}$$

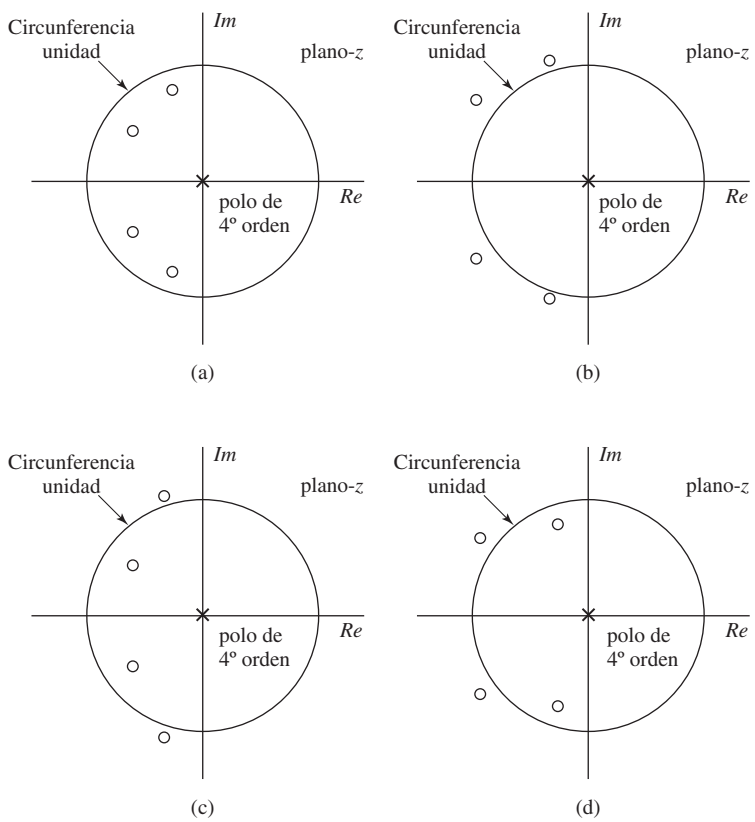


Figura 5.27 Cuatro sistemas con el mismo valor del módulo de su respuesta en frecuencia. Los ceros están en todas las combinaciones de $0{,}9e^{\pm j0{,}6\pi}$ y $0{,}8e^{\pm j0{,}8\pi}$ y sus recíprocos.

El Problema 5.71 sugiere una demostración de esta propiedad.

Todas las respuestas al impulso cuyo módulo de la respuesta en frecuencia es igual a $|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$ tienen la misma energía total que $h_{\text{mín}}[n]$, ya que por el teorema de Parseval,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|h[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|h_{\text{mín}}[n]|^2.\end{aligned} \tag{5.106}$$

Si definimos la *energía parcial* de la respuesta al impulso como

$$E[n] = \sum_{m=0}^{n}|h[m]|^2, \tag{5.107}$$

se puede demostrar que (véase el Problema 5.72)

$$\sum_{m=0}^{n}|h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^{n}|h_{\text{mín}}[m]|^2 \tag{5.108}$$

para todas las respuestas al impulso $h[n]$ pertenecientes a la familia de sistemas cuya respuesta en amplitud está dada por la Ecuación (5.105). De acuerdo con la Ecuación (5.108), la energía parcial de la secuencia de fase mínima está más concentrada alrededor de $n = 0$. Es decir, de todos los sistemas con el mismo valor del módulo de su respuesta en frecuencia, el sistema de fase mínima es el que menos retarda la energía. Por este motivo los sistemas de fase mínima (mínimo retardo de fase) se denominan también *sistemas de retardo de energía mínimo,* o simplemente *sistemas de retardo mínimo.* La Figura 5.29 ilustra esta propiedad de retardo. Dicha figura muestra la energía parcial para las cuatro secuencias de la Figura 5.28. Podemos ver en este ejemplo que el retardo de energía mínimo se produce para el sistema con todos sus ceros en el interior de la circunferencia unidad (es decir, el sistema de fase mínima), cosa que es cierta en general, y que el retardo de energía máximo se produce para el sistema con todos sus ceros en el exterior de la circunferencia unidad. Los sistemas de retardo de energía máximo se denominan también *sistemas de fase máxima.*

5.7. SISTEMAS LINEALES CON FASE LINEAL GENERALIZADA

Al diseñar filtros y otros sistemas de tratamiento de señal que dejan pasar sin distorsión una parte de la banda de frecuencias, es deseable que el módulo de la respuesta en frecuencia sea aproximadamente constante y la fase valga cero en la banda de paso. Para sistemas causales no es posible conseguir fase cero, y por lo tanto se debe permitir una cierta distorsión de fase. Como vimos en la Sección 5.1, el efecto de la fase lineal de pendiente entera es simplemente un desplazamiento temporal. Por otra parte, una fase no lineal tendría un efecto importante en la forma de la señal, incluso aunque el módulo de la respuesta en frecuencia fuera constante. Por tanto, en muchas situaciones es deseable diseñar sistemas cuya fase sea exacta o aproximadamente lineal. En esta sección consideraremos la formalización y generalización de las nociones de fase lineal y retardo temporal ideal considerando la clase de sistemas que tienen retardo de grupo constante. Comenzaremos reconsiderando el concepto de retardo en sistemas en tiempo discreto.

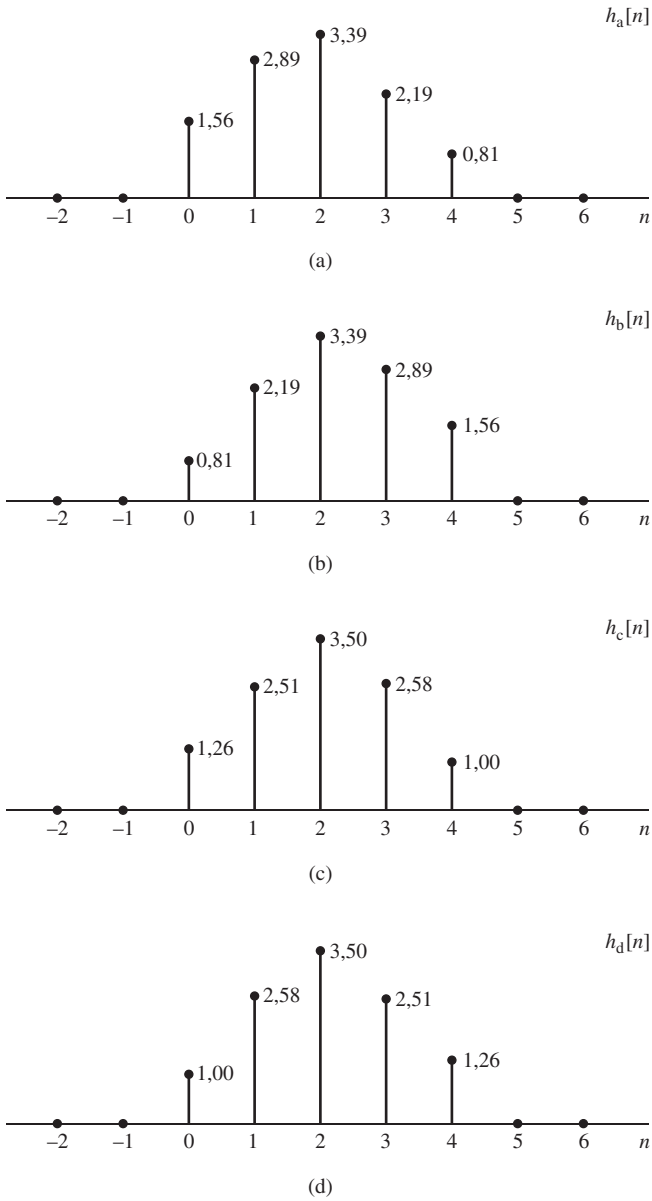


Figura 5.28 Secuencias correspondientes a los diagramas polo-cero de la Figura 5.27.

5.7.1. Sistemas con fase lineal

Consideremos un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia en un periodo es

$$H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \qquad |\omega| < \pi, \tag{5.109}$$

siendo α un número real, no necesariamente entero. Este sistema es de "retardo ideal", siendo α el retardo que introduce el sistema. Nótese que la respuesta en amplitud de este sistema es constante, la fase es lineal y el retardo de grupo es constante. Es decir,

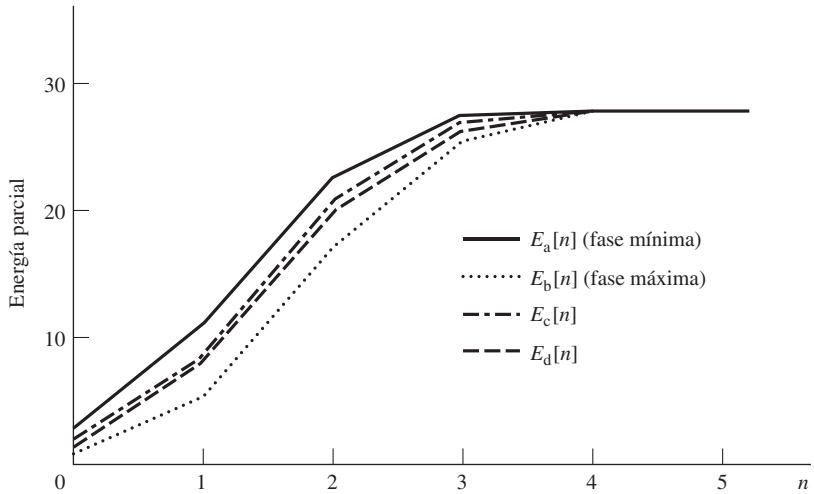


Figura 5.29 Energías parciales de las cuatro secuencias de la Figura 5.28 (observe que $E_a[n]$ es para la secuencia de fase mínima $h_a[n]$ y $E_b[n]$ es para la secuencia de fase máxima $h_b[n]$).

$$|H_{\text{id}}(e^{j\omega})| = 1, \tag{5.110a}$$

$$\angle H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha, \tag{5.110b}$$

$$\text{grd}[H_{\text{id}}(e^{j\omega})] = \alpha. \tag{5.110c}$$

La transformada inversa de Fourier de $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ es la respuesta al impulso

$$h_{\text{id}}[n] = \frac{\operatorname{sen}\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{5.111}$$

La salida de este sistema para una señal entrada $x[n]$ es

$$y[n] = x[n] * \frac{\operatorname{sen}\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{\operatorname{sen}\pi(n-k-\alpha)}{\pi(n-k-\alpha)}. \tag{5.112}$$

Si $\alpha = n_d$, siendo n_d un número entero, entonces, como se indicó en la Sección 5.1,

$$h_{\text{id}}[n] = \delta[n-n_d] \tag{5.113}$$

y

$$y[n] = x[n] * \delta[n-n_d] = x[n-n_d]. \tag{5.114}$$

Es decir, si $\alpha = n_d$ es entero, el sistema con fase lineal y ganancia unidad de la Ecuación (5.109) simplemente desplaza la secuencia de entrada n_d muestras. Si α no es un entero, la interpretación más directa es la que se desarrolló en el Ejemplo 4.7 del Capítulo 4.

Concretamente, la Figura 5.30 muestra una representación del sistema de la Ecuación (5.109), con $h_c(t) = \delta(t-\alpha T)$ y $H_c(j\Omega) = e^{-j\Omega\alpha T}$. Es decir,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \qquad |\omega| < \pi. \tag{5.115}$$

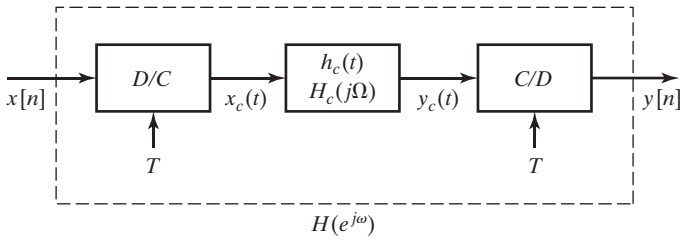


Figura 5.30 Interpretación de un retardo no entero en sistemas en tiempo discreto.

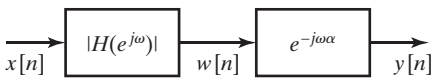


Figura 5.31 Representación de un sistema lineal, invariante con el tiempo y de fase lineal como una cascada de un filtro con el módulo y un desplazamiento de fase.

En esta representación, la elección de T es irrelevante y puede normalizarse a la unidad. Es importante resaltar de nuevo que la representación es válida independientemente de si $x[n]$ se obtuvo inicialmente por muestreo de una señal en tiempo continuo o no. De acuerdo con la representación de la Figura 5.30, $y[n]$ es la secuencia de muestras desplazadas en el tiempo de la interpolación de banda limitada de la secuencia de entrada $x[n]$. Es decir, $y[n] = x_c(nT - \alpha T)$. Se dice que el sistema de la Ecuación (5.109) realiza un desplazamiento temporal de α muestras, incluso si α no es entero. Si el retardo de grupo α es positivo, el desplazamiento temporal es un retardo. Si α es negativo, se trata de un adelanto en el tiempo.

Esta presentación proporciona también una interpretación útil de la fase lineal cuando está asociada a una respuesta en amplitud no lineal. Por ejemplo, consideremos una respuesta en frecuencia más general con fase lineal. Es decir,

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}, \qquad |\omega| < \pi. \tag{5.116}$$

La Ecuación (5.116) sugiere la interpretación de la Figura 5.31. La señal $x[n]$ se filtra con la respuesta en frecuencia de fase cero $|H(e^{j\omega})|$, y la salida filtrada se "desplaza en el tiempo" la cantidad (entera o no entera) α. Supongamos, por ejemplo, que $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo ideal de fase lineal

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \tag{5.117}$$

La correspondiente respuesta al impulso es

$$h_{\text{lp}}[n] = \frac{\operatorname{sen} \omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}. \tag{5.118}$$

Nótese que si $\omega_c = \pi$, se obtiene la Ecuación (5.111).

Ejemplo 5.14 Filtro paso bajo ideal con fase lineal

La respuesta al impulso del filtro paso bajo ideal permite ilustrar algunas propiedades interesantes de los sistemas de fase lineal. La Figura 5.32(a) muestra $h_{\text{lp}}[n]$ para $\omega_c = 0{,}4\pi$ y $\alpha = n_d = 5$. Nótese que cuando α es entero, la respuesta al impulso es simétrica alrededor de $n = n_d$; es decir,

$$h_{\text{lp}}[2n_d - n] = \frac{\operatorname{sen}\omega_c(2n_d - n - n_d)}{\pi(2n_d - n - n_d)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\omega_c(n_d - n)}{\pi(n_d - n)} = h_{\text{lp}}[n] \tag{5.119}$$

En este caso se podría definir un *sistema de fase cero*

$$\hat{H}_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = H_{\text{lp}}(e^{j\omega})e^{j\omega n_d} = |H_{\text{lp}}(e^{j\omega})|, \tag{5.120}$$

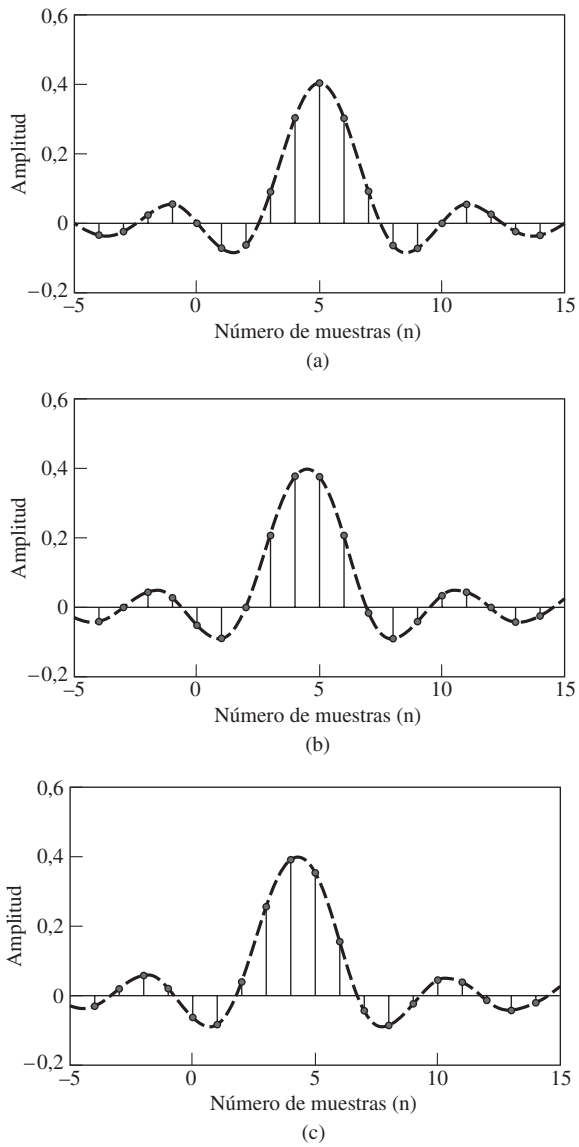


Figura 5.32 Respuesta al impulso del filtro paso bajo ideal con $\omega_c = 0{,}4\pi$. (a) Retardo $= \alpha = 5$. (b) Retardo $= \alpha = 4{,}5$. (c) Retardo $= \alpha = 4{,}3$.

en el que la respuesta al impulso está desplazada n_d muestras a la izquierda, resultando una secuencia par

$$\hat{h}_{\text{lp}}[n] = \frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n} = \hat{h}_{\text{lp}}[-n]. \tag{5.121}$$

La Figura 5.32(b) muestra $h_{\text{lp}}[n]$ para $\omega_c = 0{,}4\pi$ y $\alpha = 4{,}5$. Esto es un ejemplo del caso en el que la fase lineal corresponde a un entero más un medio. Como en el caso de retardo entero, se puede ver fácilmente que si α es un entero más un medio, (o 2α es un entero), entonces

$$h_{\text{lp}}[2\alpha - n] = h_{\text{lp}}[n]. \tag{5.122}$$

En este caso, el punto de simetría es α, que no es entero. Por tanto, como la simetría no es con respecto a ningún punto de la secuencia, no es posible desplazarla para obtener una secuencia par que tenga fase cero. Este caso es similar al del Ejemplo 4.8 con M impar.

La Figura 5.32(c) representa un tercer caso en el que no existe simetría en absoluto. En este caso $\omega_c = 0{,}4\pi$ y $\alpha = 4{,}3$.

En general un sistema de fase lineal tiene como respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}. \tag{5.123}$$

Como se ilustra en el Ejemplo 5.14, si 2α es un entero (es decir, α es un entero o un entero más un medio), la correspondiente respuesta al impulso tiene simetría par con respecto a α. Es decir,

$$h[2\alpha - n] = h[n]. \tag{5.124}$$

Si 2α no es entero, la respuesta al impulso no tendrá simetría. Esto se puede apreciar en la Figura 5.32(c), en la que se muestra una respuesta al impulso que no es simétrica pero que tiene fase lineal, o equivalentemente, retardo de grupo constante.

5.7.2. Fase lineal generalizada

En la presentación de la Sección 5.7.1 hemos considerado la clase de sistemas cuya respuesta en frecuencia tiene la forma de la Ecuación (5.116), es decir, una función real y no negativa de ω multiplicada por un término de fase lineal $e^{-j\omega\alpha}$. Dada una respuesta en frecuencia con esta forma, la fase de $H(e^{j\omega})$ se asocia completamente al factor lineal de fase $e^{-j\omega\alpha}$, es decir, $\arg[H(e^{j\omega})] = -\omega\alpha$. Por tanto, los sistemas de esta clase se denominan sistemas de fase lineal. En el Ejemplo 4.8 sobre promediado móvil se puede ver que la respuesta en frecuencia de la Ecuación (4.66) es una función real de ω multiplicada por un término de fase lineal, pero estrictamente hablando, el sistema no es de fase lineal, ya que en las frecuencias en las que el factor

$$\frac{1}{M+1}\frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$

se hace negativo, este término contribuye a la fase total con una fase adicional de π radianes.

Muchas de las ventajas de los sistemas de fase lineal se aplican también a los sistemas cuya respuesta en frecuencia tiene la forma de la Ecuación (4.66). Por tanto, resulta de utilidad generalizar de alguna forma la definición y el concepto de fase lineal. Concretamente, se dice que un sistema es de *fase lineal generalizada* si su respuesta en frecuencia se puede expresar de la forma

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta}, \tag{5.125}$$

siendo α y β constantes y $A\left(e^{j\omega}\right)$ una función real (posiblemente bipolar) de ω. En el caso del sistema de fase lineal de la Ecuación (5.117) y del filtro de promediado móvil del Ejemplo 4.8, $\alpha = -M/2$ y $\beta = 0$. Sin embargo, podemos ver que el sistema diferenciador de banda limitada del Ejemplo 4.4 tiene la forma de la Ecuación (5.125) con $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ y $A\left(e^{j\omega}\right) = \omega/T$.

Un sistema cuya respuesta en frecuencia tiene la forma de la Ecuación (5.125) se denomina sistema de fase lineal generalizada porque la fase de dicho sistema consiste en términos constantes sumados a la función lineal $-\omega\alpha$; es decir, $-\omega\alpha + \beta$ es la ecuación de una línea recta. No obstante, si ignoramos las discontinuidades que resultan de la adición de una fase constante en toda la banda $|\omega| < \pi$, o parte de ella, el sistema se puede caracterizar por un retardo de grupo constante. Es decir, la clase de sistemas que cumplen

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha \tag{5.126}$$

tienen fase lineal, cuya forma más general es

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \qquad 0 < \omega < \pi, \tag{5.127}$$

siendo β y α constantes reales.

Recordemos ahora que, como demostramos en la Sección 5.7.1, la respuesta al impulso de los sistemas de fase lineal tiene simetría con respecto a α si 2α es un número entero. Para ver la implicación de esto en los sistemas de fase lineal generalizada, es útil obtener la ecuación que deben cumplir $h[n]$, α y β en sistemas con retardo de grupo constante. Esta ecuación se puede obtener si nos damos cuenta de que en estos sistemas, la respuesta en frecuencia se puede expresar como

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A\left(e^{j\omega}\right)e^{j(\beta-\alpha\omega)} \\ &= A\left(e^{j\omega}\right)\cos(\beta-\omega\alpha) + jA\left(e^{j\omega}\right)\mathrm{sen}(\beta-\omega\alpha), \end{aligned} \tag{5.128}$$

o, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\mathrm{sen}\,\omega n, \end{aligned} \tag{5.129}$$

donde hemos supuesto que $h[n]$ es real. La tangente del ángulo de fase de $H(e^{j\omega})$ se puede expresar como

$$\tan(\beta-\omega\alpha) = \frac{\mathrm{sen}(\beta-\omega\alpha)}{\cos(\beta-\omega\alpha)} = \frac{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\mathrm{sen}\,\omega n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n}.$$

Realizando la multiplicación cruzada y combinando los términos utilizando una igualdad trigonométrica se llega a la relación

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\mathrm{sen}[\omega(n-\alpha)+\beta] = 0 \quad \text{para todo } \omega. \tag{5.130}$$

Esta ecuación es una condición necesaria que deben cumplir $h[n]$, α y β para que el sistema tenga retardo de grupo constante. Sin embargo, no es condición suficiente, y debido a su naturaleza implícita, no nos dice cómo encontrar un sistema de fase lineal.

Un ejemplo de clase de sistemas con fase lineal generalizada son aquellos que cumplen

$$\beta = 0 \quad \text{o} \quad \pi, \tag{5.131a}$$

$$2\alpha = M = \text{un entero}, \tag{5.131b}$$

$$h[2\alpha - n] = h[n]. \tag{5.131c}$$

Con $\beta = 0$ o π, la Ecuación (5.130) se convierte en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\text{sen}[\omega(n-\alpha)] = 0, \tag{5.132}$$

de donde se puede deducir que si 2α es entero, los términos de la Ecuación (5.132) se pueden emparejar de forma que cada pareja de términos valga cero para todo ω. Estas condiciones a su vez implican que la correspondiente respuesta en frecuencia tiene la forma de la Ecuación (5.125) con $\beta = 0$ o π y $A(e^{j\omega})$ una función par (y por supuesto real) de ω.

Otro ejemplo de clase de sistemas con fase lineal generalizada son aquellos que cumplen

$$\beta = \pi/2 \quad \text{o} \quad 3\pi/2, \tag{5.133a}$$

$$2\alpha = M = \text{un entero}, \tag{5.133b}$$

y

$$h[2\alpha - n] = -h[n] \tag{5.133c}$$

Las Ecuaciones (5.133) implican que la respuesta en frecuencia tiene la forma de la Ecuación (5.125) con $\beta = \pi/2$ y $A(e^{j\omega})$ una función impar de ω. En estos casos, la Ecuación (5.130) se convierte en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos[\omega(n-\alpha)] = 0, \tag{5.134}$$

y se cumple para todo ω.

Nótese que las Ecuaciones (5.131) y (5.133) proporcionan dos conjuntos de condiciones suficientes que garantizan fase lineal generalizada o retardo de grupo constante, pero como ya hemos visto en la Figura 5.32(c), hay otros sistemas que satisfacen la Ecuación (5.125) sin esas condiciones de simetría.

5.7.3. Sistemas causales con fase lineal generalizada

Si el sistema es causal, la Ecuación (5.130) se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\,\text{sen}[\omega(n-\alpha)+\beta] = 0 \qquad \text{para todo } \omega. \tag{5.135}$$

La causalidad junto con las condiciones de las Ecuaciones (5.131) y (5.133) implican que

$$h[n] = 0, \qquad n < 0 \quad \text{y} \quad n > M;$$

Es decir, los filtros FIR causales tienen fase lineal generalizada si su respuesta al impulso es de longitud $(M+1)$ y satisfacen la Ecuación (5.131c) o la (5.133c). Concretamente, se puede demostrar que si

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{5.136a}$$

entonces

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \tag{5.136b}$$

siendo $A_e(e^{j\omega})$ una función real, par y periódica de ω. De forma similar, si

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{5.137a}$$

se puede deducir que

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} = A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2+j\pi/2}, \tag{5.137b}$$

siendo $A_o(e^{j\omega})$ una función real, impar y periódica de ω. Observe que en ambos casos la respuesta al impulso tiene una longitud de $(M+1)$ muestras.

Las condiciones de las Ecuaciones (5.136a) y (5.137a) son suficientes para garantizar que el sistema es causal con fase lineal generalizada. Sin embargo, no son condiciones necesarias. Clements y Pease (1989) han demostrado que los sistemas causales con respuesta al impulso de duración infinita pueden también tener transformadas de Fourier con fase lineal generalizada. Sin embargo, las funciones de transferencia correspondientes no son racionales, por lo que los sistemas no se pueden implementar mediante ecuaciones en diferencias.

Las expresiones de la respuesta en frecuencia de los sistemas FIR de fase lineal son útiles en el diseño de filtros y en el estudio de las propiedades de este tipo de sistemas. Al obtener las expresiones, se puede llegar a resultados significativamente diferentes dependiendo del tipo de simetría y de si M es un entero par o impar. Por este motivo, en general resulta útil definir cuatro tipos de sistemas FIR con fase lineal generalizada.

Sistemas FIR de fase lineal de tipo I

Un sistema de tipo I se define como un sistema con respuesta al impulso simétrica

$$h[n] = h[M-n], \qquad 0 \le n \le M, \tag{5.138}$$

siendo M un entero par. El retardo $M/2$ es entero. La respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}. \tag{5.139}$$

Aplicando la condición de simetría dada por la Ecuación (5.138), la suma de la Ecuación (5.139) se puede escribir de la forma

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k]\cos\omega k\right), \tag{5.140a}$$

siendo

$$a[0] = h[M/2], \tag{5.140b}$$

$$a[k] = 2h[(M/2)-k], \qquad k = 1,2,\ldots,M/2. \tag{5.140c}$$

Por tanto, utilizando la Ecuación (5.140a), podemos ver que $H(e^{j\omega})$ tiene la forma de la Ecuación (5.136b) y en particular, el valor de β en la Ecuación (5.125) es 0 o π.

Sistemas FIR de fase lineal de tipo II

Un sistema de tipo II tiene una respuesta al impulso simétrica como en la Ecuación (5.138), siendo M un entero impar. $H(e^{j\omega})$ se puede expresar en este caso como

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left\{\sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k]\cos\left[\omega\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\right]\right\}, \tag{5.141a}$$

siendo

$$b[k] = 2h[(M+1)/2-k], \qquad k = 1,2,\ldots,(M+1)/2. \tag{5.141b}$$

$H(e^{j\omega})$ tiene de nuevo la forma de la Ecuación (5.136b) con un retardo temporal de $M/2$, que en este caso es un valor entero más un medio, y el valor de β en la Ecuación (5.125) es 0 o π.

Sistemas FIR de fase lineal de tipo III

Si la respuesta al impulso del sistema es antisimétrica

$$h[n] = -h[M-n], \qquad 0 \le n \le M, \tag{5.142}$$

siendo M un número impar, $H(e^{j\omega})$ tiene la forma

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega M/2}\left[\sum_{k=1}^{M/2} c[k]\,\mathrm{sen}\,\omega k\right], \tag{5.143a}$$

siendo

$$c[k] = 2h[(M/2)-k], \qquad k = 1,2,\ldots,M/2. \tag{5.143b}$$

En este caso, $H(e^{j\omega})$ es de la forma de la Ecuación (5.137b) con un retardo de $M/2$, que es entero, y un valor de β en la Ecuación (5.125) de $\pi/2$ o $3\pi/2$.

Sistemas FIR de fase lineal de tipo IV

Si la respuesta al impulso es antisimétrica como en la Ecuación (5.142) y M es impar, entonces

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega M/2}\left[\sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k]\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\right]\right], \tag{5.144a}$$

siendo

$$d[k] = 2h[(M+1)/2-k], \qquad k = 1,2,\ldots,(M+1)/2. \tag{5.144b}$$

Como en el caso de los sistemas tipo III, $H(e^{j\omega})$ es de la forma de la Ecuación (5.137b) con un retardo de $M/2$, que es un entero más un medio, y un valor de β en la Ecuación (5.125) de $\pi/2$ o $3\pi/2$.

Ejemplos de sistemas FIR de fase lineal

La Figura 5.33 muestra un ejemplo de cada uno de los cuatro tipos de sistemas FIR de fase lineal. Las respuestas en frecuencia asociadas se presentan en los Ejemplos 5.15-5.18.

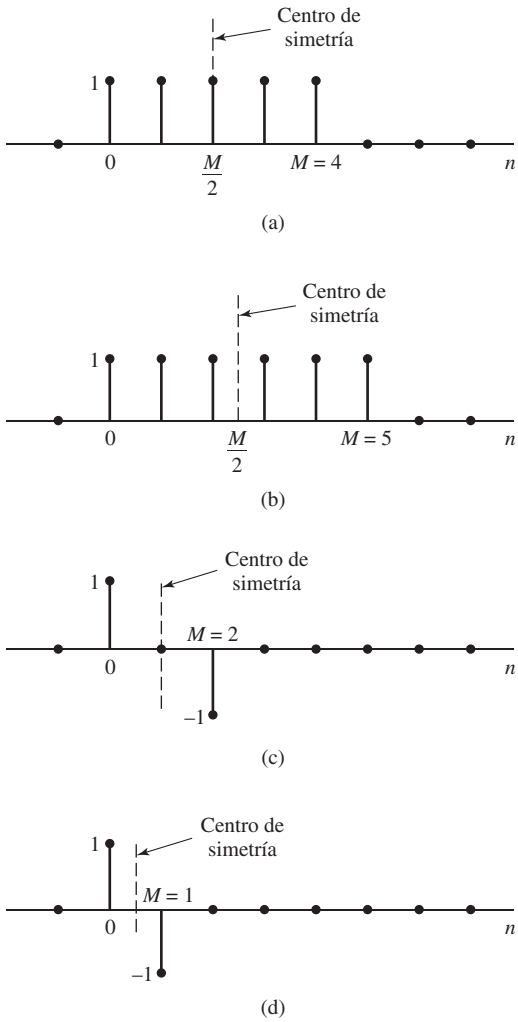


Figura 5.33 Ejemplos de sistemas FIR de fase lineal. (a) Tipo I, M par, $h[n] = h[M-n]$. (b) Tipo II, M impar, $h[n] = h[M-n]$. (c) Tipo III, M par, $h[n] = -h[M-n]$. (d) Tipo IV, M impar, $h[n] = -h[M-n]$.

Ejemplo 5.15 Sistema de fase lineal de tipo I

Si la respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{5.145}$$

como se muestra en la Figura 5.33(a), el sistema satisface las condiciones de la Ecuación (5.138). La respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega 5}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega 2}\frac{\operatorname{sen}(5\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}. \tag{5.146}$$

El módulo, la fase y el retardo de grupo del sistema se muestran en la Figura 5.34. Como $M = 4$ es par, el retardo de grupo es entero, es decir, $\alpha = 2$.

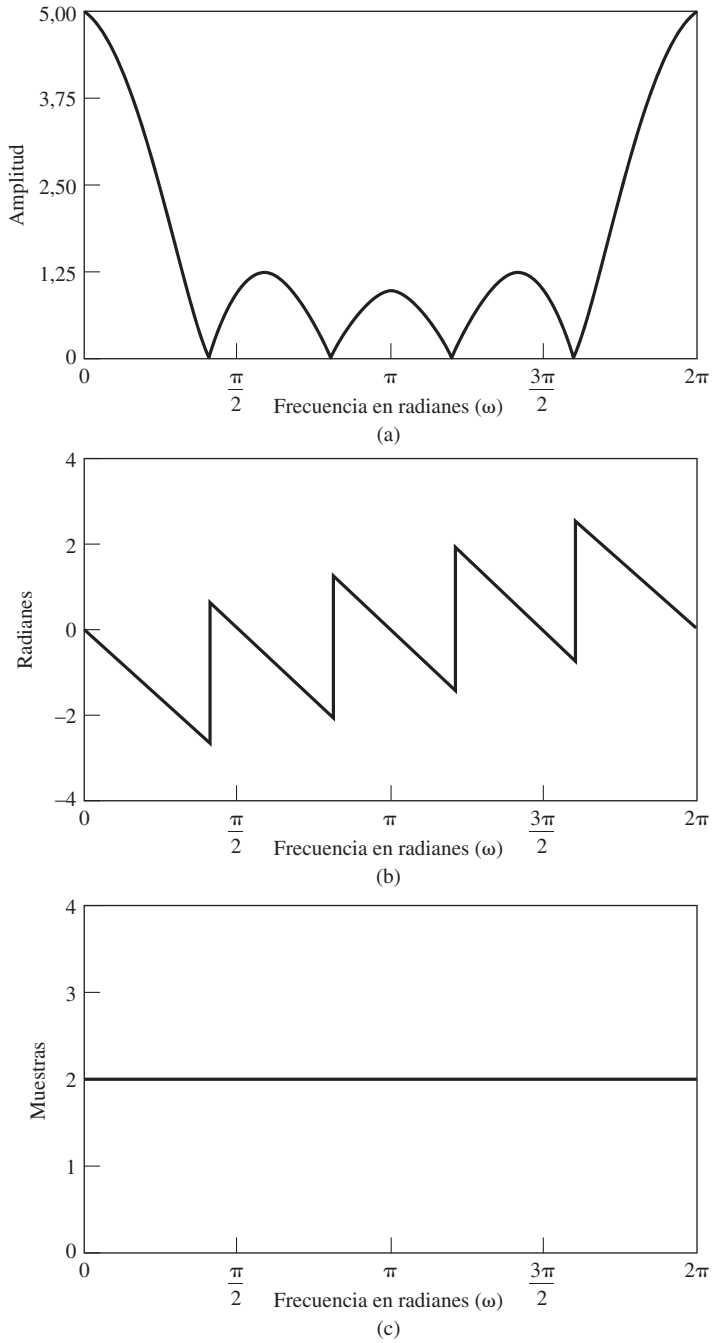


Figura 5.34 Respuesta en frecuencia del sistema de tipo I del Ejemplo 5.15. (a) Módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

Ejemplo 5.16 Sistema de fase lineal de tipo II

Si la longitud de la respuesta al impulso del sistema del ejemplo anterior se amplía en una muestra se obtiene la respuesta al impulso de la Figura 5.33(b) cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 5/2}\frac{\operatorname{sen}(3\omega)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}. \tag{5.147}$$

Las funciones de la respuesta en frecuencia de este sistema se muestran en la Figura 5.35. Nótese que en este caso el retardo de grupo es constante con $\alpha = 5/2$.

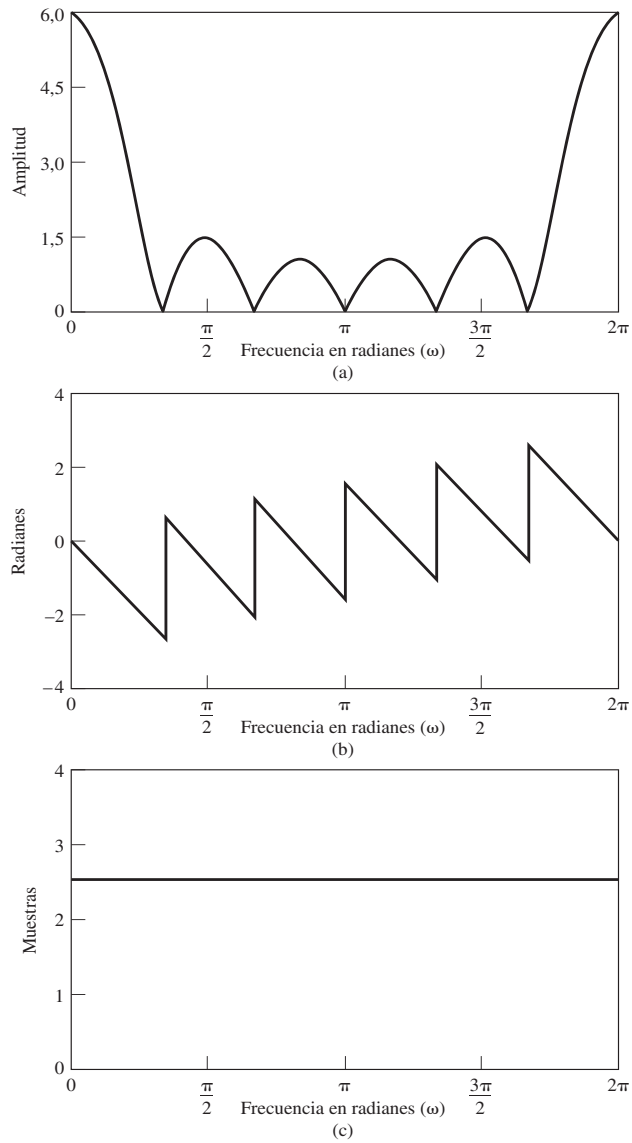


Figura 5.35 Respuesta en frecuencia del sistema de tipo II del Ejemplo 5.16. (a) Módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

Ejemplo 5.17 Sistema de fase lineal de tipo III

Si la respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-2], \tag{5.148}$$

como la de la Figura 5.33(c), entonces

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega} = j[2\,\mathrm{sen}(\omega)]e^{-j\omega}. \tag{5.149}$$

La Figura 5.36 muestra las gráficas de la respuesta en frecuencia de este ejemplo. Nótese que el retardo de grupo es constante con $\alpha = 1$.

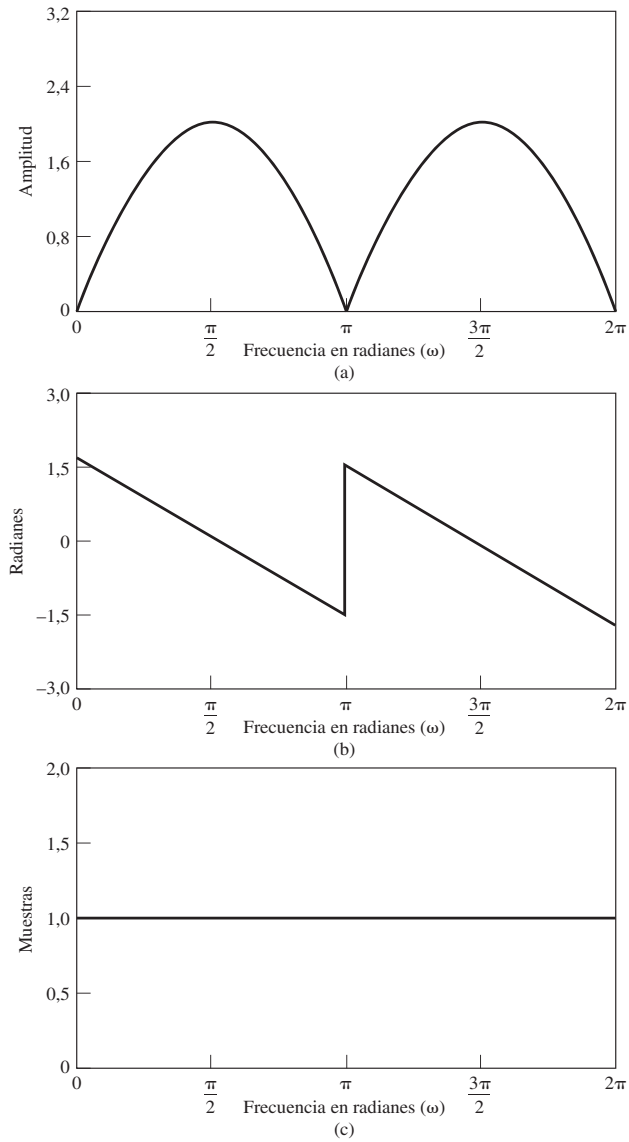


Figura 5.36 Respuesta en frecuencia del sistema de tipo III del Ejemplo 5.17. (a) Módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

Ejemplo 5.18 Sistema de fase lineal de tipo IV

En este caso (Figura 5.33(d)), la respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \tag{5.150}$$

y la correspondiente respuesta en frecuencia es

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} \\ &= j[2\,\mathrm{sen}(\omega/2)]e^{-j\omega/2}. \end{aligned} \tag{5.151}$$

La Figura 5.37 muestra la respuesta en frecuencia de este sistema. Nótese que el retardo de grupo vale $\frac{1}{2}$ para todo ω.

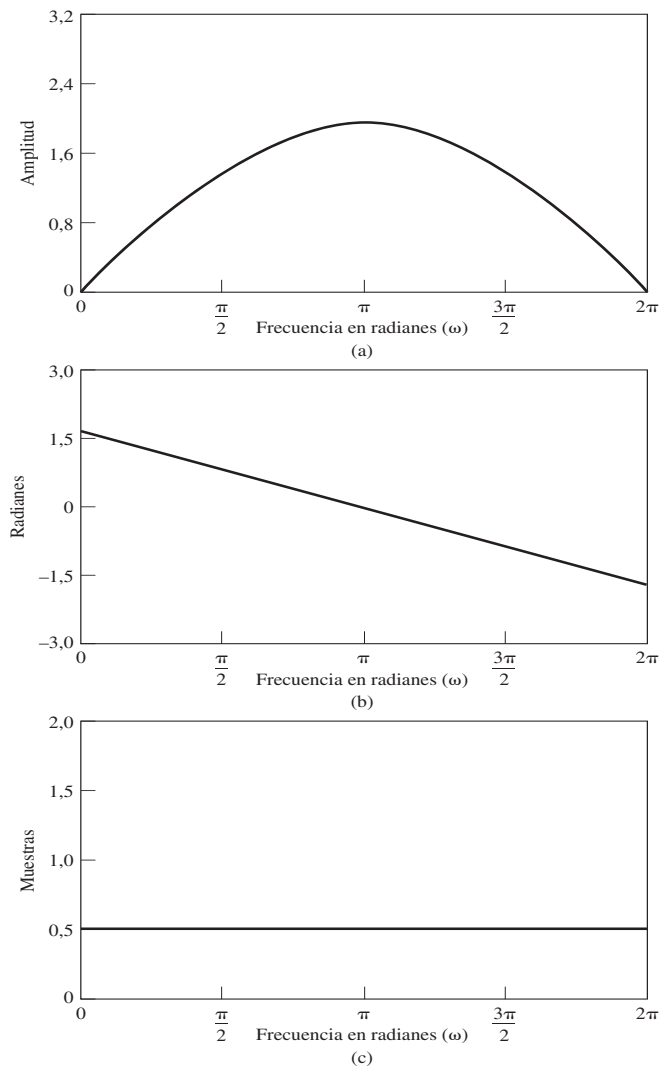


Figura 5.37 Respuesta en frecuencia del sistema de tipo IV del Ejemplo 5.18. (a) Módulo. (b) Fase. (c) Retardo de grupo.

Posiciones de los ceros en sistemas FIR de fase lineal

Los ejemplos anteriores ilustran las propiedades de la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia de los cuatro tipos de sistemas FIR de fase lineal. Es también instructivo considerar las posiciones de los ceros de la función de transferencia para sistemas FIR de fase lineal. La función de transferencia es

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n}. \tag{5.152}$$

En los casos simétricos (tipos I y II), podemos utilizar la Ecuación (5.138) para expresar $H(z)$ como

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{M} h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=M}^{0} h[k]z^{k}z^{-M} \\ &= z^{-M}H(z^{-1}). \end{aligned} \tag{5.153}$$

De la Ecuación (5.153) se deduce que si z_0 es un cero de $H(z)$, entonces

$$H(z_0) = z_0^{-M}H(z_0^{-1}) = 0. \tag{5.154}$$

Esto implica que si $z_0 = re^{j\theta}$ es un cero de $H(z)$, entonces $z_0^{-1} = r^{-1}e^{-j\theta}$ es también un cero de $H(z)$. Si $h[n]$ es real y z_0 es un cero de $H(z)$, $z_0^* = re^{-j\theta}$ será también un cero de $H(z)$, y utilizando el argumento anterior, también lo será $(z_0^*)^{-1} = r^{-1}e^{j\theta}$. Por tanto, cuando $h[n]$ es real, cualquier cero complejo que no esté en la circunferencia unidad será parte de un conjunto de cuatro ceros inversos conjugados de la forma

$$(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{-j\theta}z^{-1}).$$

Si $H(z)$ tiene un cero en la circunferencia unidad, es decir, $z_0 = e^{j\theta}$, entonces $z_0^{-1} = e^{-j\theta} = z_0^*$, con lo que los ceros en la circunferencia unidad aparecen en parejas de la forma

$$(1 - e^{j\theta}z^{-1})(1 - e^{-j\theta}z^{-1}).$$

Si $H(z)$ tiene un cero real que no está en la circunferencia unidad, su inverso será también un cero de $H(z)$, y $H(z)$ tendrá factores de la forma

$$(1 \pm rz^{-1})(1 \pm r^{-1}z^{-1}).$$

Finalmente, un cero de $H(z)$ en $z = \pm 1$ puede aparecer solo, ya que es su propio inverso y conjugado. Por tanto, $H(z)$ puede tener también factores de la forma

$$(1 \pm z^{-1}).$$

El caso de un cero en $z = -1$ es particularmente importante. Utilizando la Ecuación (5.153),

$$H(-1) = (-1)^M H(-1).$$

Si M es par, tenemos una simple identidad, pero si M es impar, $H(-1) = -H(-1)$, de modo que $H(-1)$ debe ser cero. Por tanto, en las respuestas al impulso simétricas con M impar, la función de transferencia *debe* tener un cero en $z = -1$. Las Figuras 5.38(a) y 5.38(b) muestran posiciones típicas de ceros para sistemas tipo I (M par) y de tipo II (M impar), respectivamente.

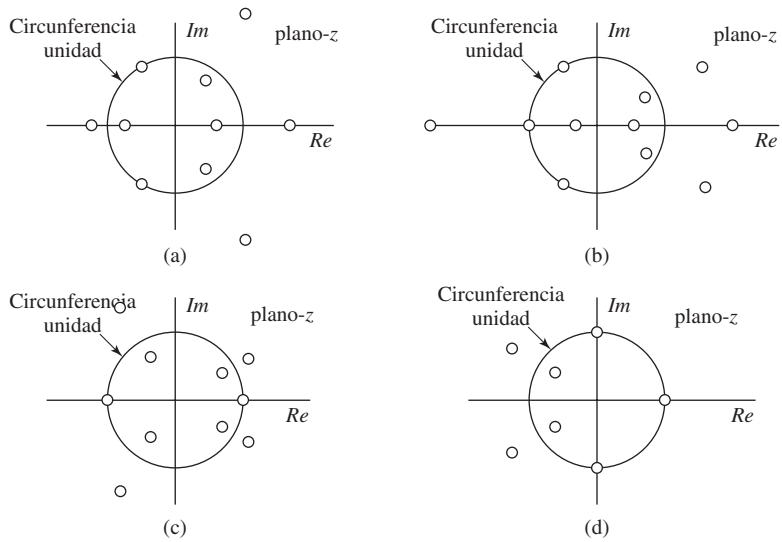


Figura 5.38 Diagramas de ceros típicos de sistemas de fase lineal. (a) Tipo I. (b) Tipo II. (c) Tipo III. (d) Tipo IV.

Si la respuesta al impulso es antisimétrica (tipos III y IV) entonces, siguiendo la deducción utilizada para obtener la Ecuación (5.153), se puede demostrar que

$$H(z) = -z^{-M}H(z^{-1}). \tag{5.155}$$

Esta ecuación se puede emplear para demostrar que los ceros de $H(z)$ en el caso antisimétrico tienen el mismo tipo de restricciones que en el caso simétrico. Sin embargo, en el caso antisimétrico, tanto $z = 1$ como $z = -1$ son de particular interés. Si $z = 1$, la Ecuación (5.155) se convierte en

$$H(1) = -H(1). \tag{5.156}$$

Por tanto, $H(z)$ *debe* tener un cero en $z = 1$ tanto para M par como para M impar. Si $z = -1$, la Ecuación (5.155) resulta

$$H(-1) = (-1)^{-M+1}H(-1). \tag{5.157}$$

En este caso, si $(M-1)$ es impar (es decir, si M es par, $H(-1) = -H(-1)$, por lo que $z = -1$ *debe* ser un cero de $H(z)$ si M es par. Las Figuras 5.38(c) y 5.38(d) muestran posiciones de ceros típicas para sistemas de tipos III y IV, respectivamente.

Estas restricciones sobre los ceros son importantes en el diseño de sistemas FIR de fase lineal ya que imponen limitaciones en los tipos de respuestas en frecuencia que se pueden conseguir. Por ejemplo, nótese que, al aproximar un filtro paso alto utilizando una respuesta al impulso simétrica, M no debería ser impar, ya que entonces la respuesta en frecuencia debe tener un cero en $\omega = \pi (z = -1)$.

5.7.4. Relación entre los sistemas FIR de fase lineal y los sistemas de fase mínima

La exposición anterior demuestra que todos los sistemas FIR de fase lineal con respuesta al impulso real tienen ceros bien en la circunferencia unidad o en posiciones inversas conjugadas. Por tanto, es posible

demostrar fácilmente que la función de transferencia de cualquier sistema FIR de fase lineal se puede factorizar en un término de fase mínima $H_{\text{mín}}(z)$, un término de fase máxima, $H_{\text{máx}}(z)$, y un término $H_{\text{uc}}(z)$ que sólo tiene ceros en la circunferencia unidad, es decir,

$$H(z) = H_{\text{mín}}(z)H_{\text{uc}}(z)H_{\text{máx}}(z), \tag{5.158a}$$

siendo

$$H_{\text{máx}}(z) = H_{\text{mín}}(z^{-1})z^{-M_i} \tag{5.158b}$$

y M_i el número de ceros de $H_{\text{mín}}(z)$. En la Ecuación (5.158a), $H_{\text{mín}}(z)$ tiene todos sus M_i ceros en el *interior* de la circunferencia unidad, y $H_{\text{uc}}(z)$ tiene todos sus M_o ceros *en* la circunferencia unidad, y $H_{\text{máx}}(z)$ tiene todos sus M_i ceros en el *exterior* de la circunferencia unidad y, por la Ecuación (5.158b), sus ceros están en posiciones inversas de los M_i ceros de $H_{\text{mín}}(z)$. El orden de la función de transferencia $H(z)$ es por tanto $M = 2M_i + M_o$.

Ejemplo 5.19 Descomposición de un sistema de fase lineal

Como un ejemplo simple del uso de las Ecuaciones (5.158), consideremos la función de transferencia de fase mínima que se muestra en la Ecuación (5.99). Su respuesta en frecuencia se muestra en la Figura 5.25. El sistema que resulta de aplicar la Ecuación (5.158b) a $H_{\text{mín}}(z)$ de la Ecuación (5.99) es

$$\begin{aligned} H_{\text{máx}}(z) = {} & (0{,}9)^2(1-1{,}1111e^{j0{,}6\pi}z^{-1})(1-1{,}1111e^{-j0{,}6\pi}z^{-1}) \\ & \times (1-1{,}25e^{-j0{,}8\pi}z^{-1})(1-1{,}25e^{j0{,}8\pi}z^{-1}). \end{aligned}$$

$H_{\text{máx}}(z)$ tiene la respuesta en frecuencia que se muestra en la Figura 5.39. Si se conectan ahora los dos sistemas en cascada, de la Ecuación (5.158b) se deduce que el sistema global

$$H(z) = H_{\text{mín}}(z)H_{\text{máx}}(z)$$

tiene fase lineal. La respuesta en frecuencia del sistema compuesto se obtiene sumando las respectivas funciones de logaritmo del módulo, fase y retardo de grupo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| &= 20\log_{10}|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})| + 20\log_{10}|H_{\text{máx}}(e^{j\omega})| \\ &= 40\log_{10}|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|. \end{aligned} \tag{5.159}$$

Similarmente,

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{\text{mín}}(e^{j\omega}) + \angle H_{\text{máx}}(e^{j\omega}). \tag{5.160}$$

A partir de la Ecuación (5.158b), se deduce que

$$\angle H_{\text{máx}}(e^{j\omega}) = -\omega M_i - \angle H_{\text{mín}}(e^{j\omega}). \tag{5.161}$$

y por tanto

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega M_i,$$

siendo $M_i = 4$ el número de ceros de $H_{\text{mín}}(z)$. De forma análoga, las funciones de retardo de grupo de $H_{\text{mín}}(e^{j\omega})$ y $H_{\text{máx}}(e^{j\omega})$ se combinan resultando

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = M_i = 4.$$

La Figura 5.40 muestra las gráficas de respuesta en frecuencia del sistema compuesto. Nótese que las curvas son sumas de las correspondientes funciones de las Figuras 5.25 y 5.39.

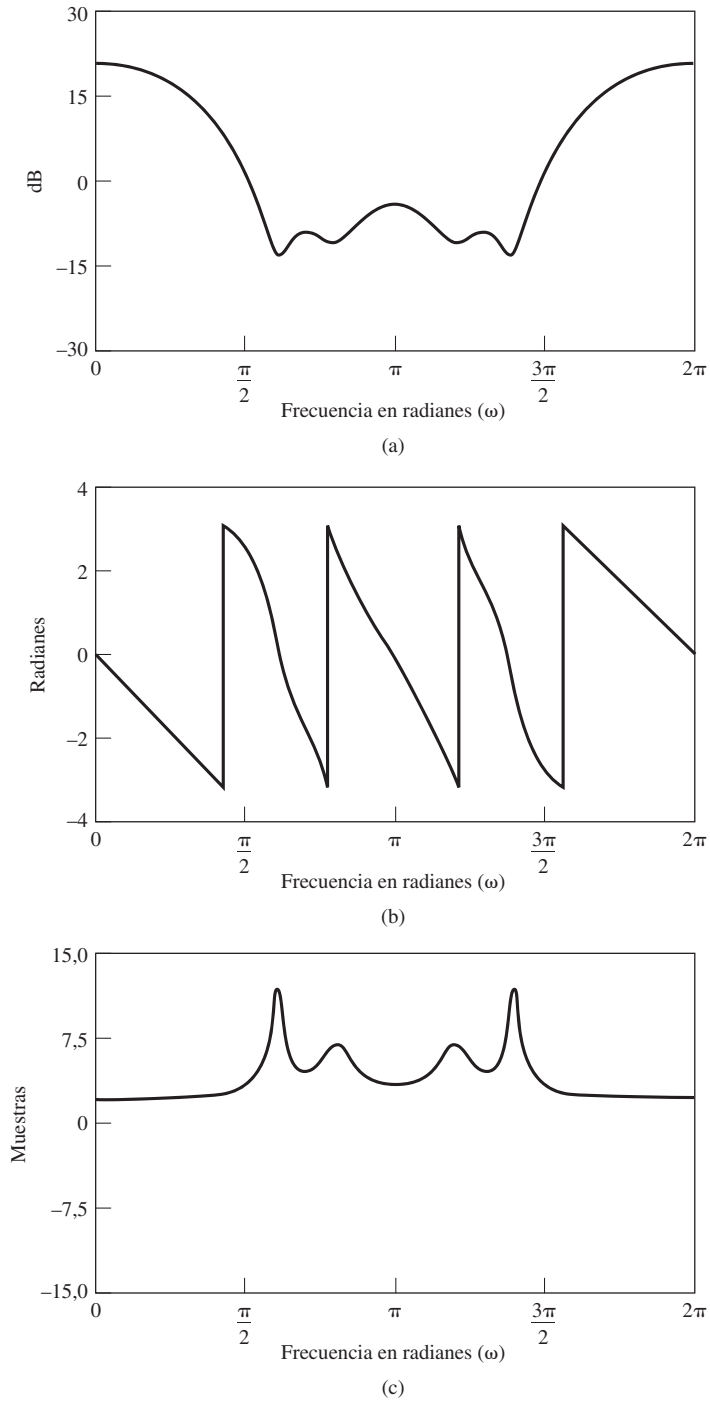


Figura 5.39 Respuesta en frecuencia de un sistema de fase máxima que tiene el mismo módulo que el sistema de la Figura 5.25. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

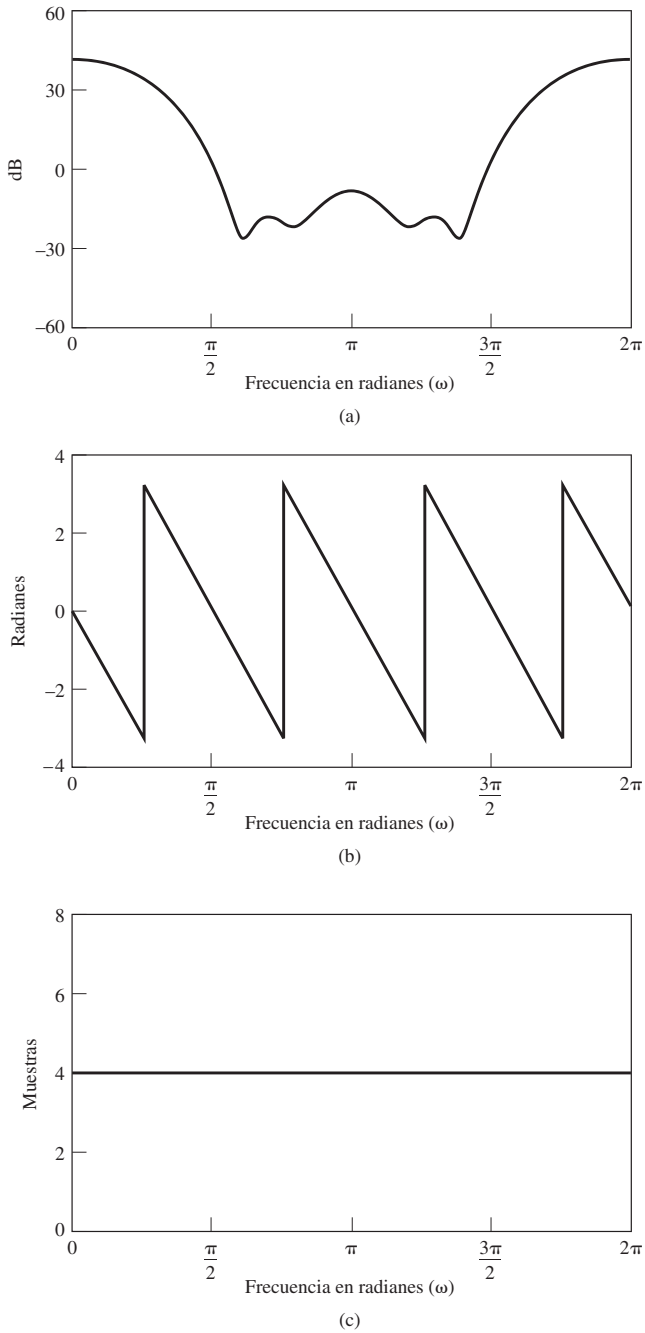


Figura 5.40 Respuesta en frecuencia de la combinación en cascada de un sistema de fase mínima y de fase máxima, lo que produce un sistema de fase lineal. (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase (valor principal). (c) Retardo de grupo.

5.8. RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado y explorado la representación y análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante las transformadas de Fourier y Z. La importancia del análisis basado en transformadas de sistemas lineales e invariantes con el tiempo surge directamente del hecho de que las exponenciales complejas son autofunciones de esos sistemas y los autovalores asociados son las funciones de transferencia o respuesta en frecuencia.

Una clase particularmente importante de sistemas lineales e invariantes con el tiempo es la caracterizada por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. Los sistemas caracterizados mediante ecuaciones en diferencias pueden tener una respuesta al impulso de duración infinita (IIR) o de duración finita (FIR). El análisis basado en transformadas es particularmente útil para estos sistemas, ya que las transformadas de Fourier o Z convierten una ecuación en diferencias en una ecuación algebraica. Concretamente, la función de transferencia es un cociente de polinomios, cuyos coeficientes se corresponden directamente con los coeficientes de la ecuación en diferencias. Las raíces de esos polinomios permiten realizar una representación útil del sistema mediante el diagrama polo-cero.

La respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes con el tiempo se caracteriza frecuentemente mediante el módulo y la fase o el retardo de grupo, que corresponde a la derivada de la fase cambiada de signo. La fase lineal es una característica a menudo deseable de la respuesta en frecuencia de un sistema, ya que es una forma de distorsión de fase relativamente suave, correspondiente a un retardo en el tiempo. La importancia de los sistemas FIR es en parte debida a que estos sistemas se pueden diseñar de forma sencilla con fase exactamente lineal (o fase lineal generalizada), aunque dadas unas determinadas especificaciones del módulo de la respuesta en frecuencia, los sistemas IIR son más eficientes. En el Capítulo 7 discutiremos este compromiso de diseño y otros.

Aunque en general para sistemas lineales e invariantes con el tiempo el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia son independientes, en el caso de sistemas de fase mínima el módulo determina la fase y la fase determina el módulo salvo un factor de escala. Los sistemas de fase no mínima se pueden representar como la combinación en cascada de un sistema de fase mínima y un sistema paso todo. En el Capítulo 12 se presentarán con un detalle considerablemente mayor las relaciones entre el módulo y la fase de la transformada de Fourier.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

5.1. En el sistema que se muestra en la Figura P5.1-1, $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo ideal. Determine si para alguna selección de la entrada $x[n]$ y de la frecuencia de corte ω_c, la salida puede ser el pulso

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 10, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

que se muestra en la Figura P5.1-2.

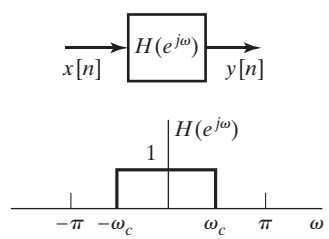


Figura P5.1-1

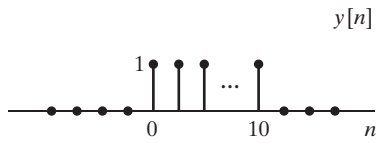


Figura P5.1-2

5.2. Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. La entrada y la salida satisfacen la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n-1] - \tfrac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

(a) Dibuje los polos y los ceros de la función de transferencia en el plano z.
(b) Determine la respuesta al impulso $h[n]$.

5.3. Considere un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo en el que la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ están relacionadas mediante la ecuación en diferencias de segundo orden

$$y[n-1] + \tfrac{1}{3}y[n-2] = x[n].$$

De la siguiente lista, elija *dos* posibles respuestas al impulso de este sistema:

(a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n+1]$
(b) $3^{n+1}u[n+1]$
(c) $3(-3)^{n+2}u[-n-2]$
(d) $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u[-n-2]$
(e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[-n-2]$
(f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n+1]$
(g) $(-3)^{n+1}u[n]$
(h) $n^{1/3}u[n]$.

5.4. Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n-1],$$

la salida es

$$y[n] = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\tfrac{3}{4}\right)^n u[n].$$

(a) Determine la función de transferencia $H(z)$ del sistema. Dibuje los polos y los ceros de $H(z)$, e indique la región de convergencia.
(b) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h[n]$ para todos los valores de n.
(c) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema.
(d) ¿Es el sistema estable? ¿Es causal?

5.5. Considere un sistema descrito por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes con condiciones de reposo inicial. La respuesta al escalón de este sistema es

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + u[n].$$

(a) Determine la ecuación en diferencias.
(b) Determine la respuesta al impulso del sistema.
(c) Determine si el sistema es estable o no.

5.6. De un sistema lineal e invariante con el tiempo se conoce la siguiente información:

(1) El sistema es causal.
(2) Cuando la entrada es

$$x[n] = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \tfrac{4}{3}(2)^n u[-n-1],$$

la transformada Z de la salida es

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}.$$

(a) Calcule la transformada Z de $x[n]$.
(b) ¿Cuáles son las posibles opciones para la región de convergencia de $Y(z)$?
(c) ¿Cuáles son las posibles opciones para la respuesta al impulso del sistema?

5.7. Cuando la entrada a un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$x[n] = 5u[n],$$

la salida es

$$y[n] = \left[2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\tfrac{3}{4}\right)^n\right] u[n].$$

(a) Obtenga la función de transferencia $H(z)$ del sistema. Dibuje sus polos y ceros, e indique la región de convergencia.
(b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema para todos los valores de n.
(c) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema.

5.8. Un sistema causal lineal e invariante con el tiempo está descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = \tfrac{3}{2}y[n-1] + y[n-2] + x[n-1].$$

(a) Determine la función de transferencia del sistema $H(z) = Y(z)/X(z)$. Dibuje los polos y los ceros de $H(z)$, e indique su región de convergencia.
(b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema
(c) Debe haber obtenido que el sistema no es estable. Obtenga la respuesta al impulso de un sistema estable (no causal) que cumpla la ecuación en diferencias.

5.9. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ que cumplen

$$y[n-1] - \tfrac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n].$$

El sistema puede ser o no ser estable o causal. Considerando el diagrama polo–cero asociado con la anterior ecuación en diferencias, determine tres posibles opciones de la respuesta al impulso del sistema. Demuestre que cada una de las opciones satisface la ecuación en diferencias. Indique cuál de ellas corresponde a un sistema estable y cuál de ellas a un sistema causal.

5.10. Si la función de transferencia $H(z)$ de un sistema lineal e invariante con el tiempo tiene un diagrama polo–cero como el mostrado en la Figura P5.10 y el sistema es causal, ¿puede el sistema inverso $H_i(z)$, siendo $H(z)H_i(z) = 1$, ser causal y estable? Justifique claramente su respuesta.

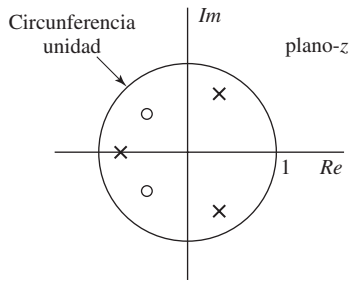


Figura P5.10

5.11. La función de transferencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo tiene el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P5.11. Especifique si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera, falsa, o no se puede saber con la información que se proporciona.

(a) El sistema es estable
(b) El sistema es causal.
(c) Si el sistema es causal, debe ser estable.
(d) Si el sistema es estable, debe tener una respuesta al impulso bilateral.

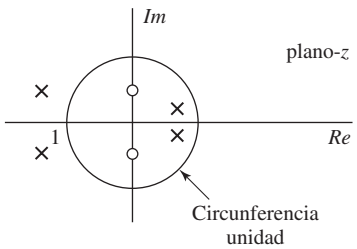


Figura P5.11

5.12. Un sistema en tiempo discreto lineal, invariante con el tiempo y causal tiene como función de transferencia

$$H(z) = \frac{(1+0{,}2z^{-1})(1-9z^{-2})}{(1+0{,}81z^{-2})}.$$

(a) ¿Es estable el sistema?
(b) Determine las expresiones de un sistema de fase mínima $H_1(z)$ y de un sistema paso todo $H_{\text{ap}}(z)$ de forma que

$$H(z) = H_1(z)H_{\text{ap}}(z).$$

5.13. La Figura P5.13 muestra los diagramas polo–cero de cuatro sistemas diferentes lineales e invariantes con el tiempo. Basándose en esos diagramas, indique si cada uno de los sistemas es o no paso todo.

5.14. Determine el retardo de grupo en $0 < \omega < \pi$ para cada una de la siguientes secuencias:

(a)

$$x_1[n] = \begin{cases} n-1, & 1 \le n \le 5, \\ 9-n, & 5 < n \le 9, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(b)

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|} + \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

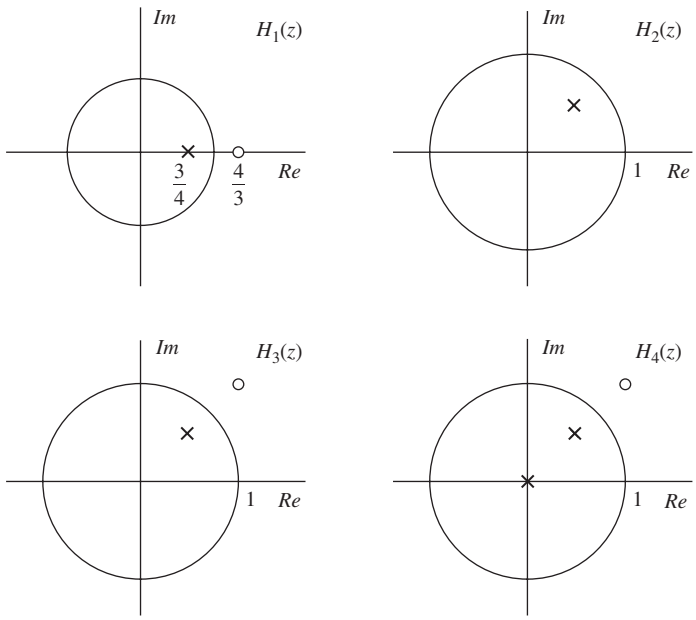


Figura P5.13

5.15. Considere la clase de los filtros en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia tiene la forma

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega},$$

siendo $|H(e^{j\omega})|$ una función real no negativa de ω y α una constante real. Como se indicó en la Sección 5.7.1, esta clase de filtros se denomina filtros de *fase lineal*.

Considere también la clase de los filtros en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia tiene la forma

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta},$$

siendo $A(e^{j\omega})$ una función real de ω, α una constante real y β una constante real. Como se comentó en la Sección 5.7.2, los filtros de esta clase se denominan filtros de *fase lineal generalizada*.

Para cada uno de los filtros que se muestran en la Figura P5.15, determine si se trata de filtros de fase lineal generalizada. En caso afirmativo, calcule $A(e^{j\omega})$, α y β. Además, para cada filtro que se determine como de fase lineal generalizada, indique si cumple el criterio más restrictivo para ser de fase lineal.

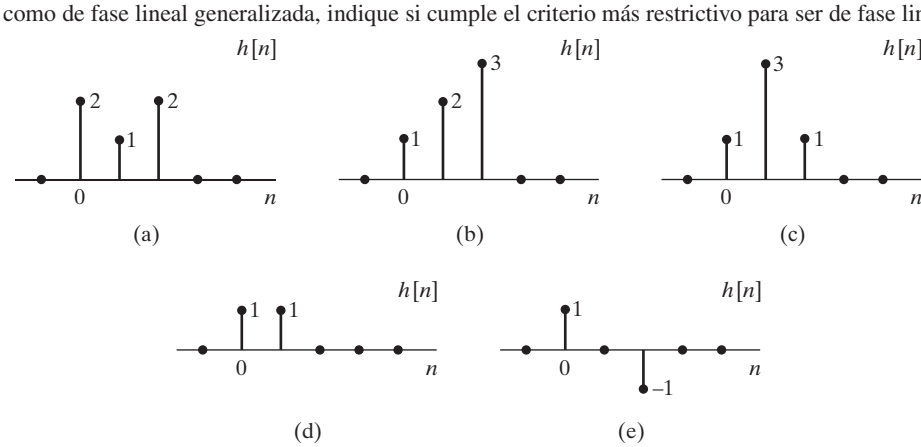


Figura P5.15

5.16. La Figura P5.16 muestra la fase continua $\arg[H(e^{j\omega})]$ de la respuesta en frecuencia de un sistema específico lineal e invariante con el tiempo, siendo

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\alpha\omega$$

para $|\omega| < \pi$ y α un entero positivo.

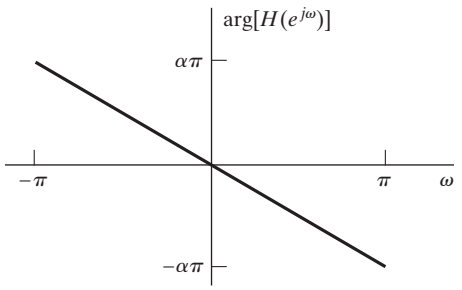


Figura P5.16

¿Es la respuesta al impulso $h[n]$ de este sistema una secuencia causal? Tanto si se obtiene definitivamente que el sistema es causal como si se obtiene definitivamente lo contrario, demuéstrelo. Si a partir de la Figura 5.16 no fuera posible determinar la causalidad del sistema, proporcione ejemplos de una secuencia no causal y de una secuencia causal que tengan la misma respuesta de fase $\arg[H(e^{j\omega})]$.

5.17. Para cada una de las siguientes funciones de transferencia, indique si el sistema correspondiente es o no de fase mínima. Justifique sus respuestas:

$$H_1(z) = \frac{(1-2z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)},$$

$$H_2(z) = \frac{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)},$$

$$H_3(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{j}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{j}{2}z^{-1}\right)},$$

$$H_4(z) = \frac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{j}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{j}{2}z^{-1}\right)}.$$

5.18. Para cada uno de las siguientes funciones de transferencia $H_k(z)$, especifique una función de transferencia de fase mínima $H_{\text{mín}}(z)$ de forma que los módulos de las respuestas en frecuencia de los dos sistemas sean iguales, es decir, $|H_k(e^{j\omega})| = |H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$.

(a)

$$H_1(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

(b)

$$H_2(z) = \frac{(1+3z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{z^{-1}\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

(c)

$$H_3(z) = \frac{(1-3z^{-1})\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{4}{3}z^{-1}\right)}.$$

5.19. La Figura P5.19 muestra las respuestas al impulso de varios sistemas lineales e invariantes con le tiempo. Obtenga el retardo de grupo asociado a cada sistema.

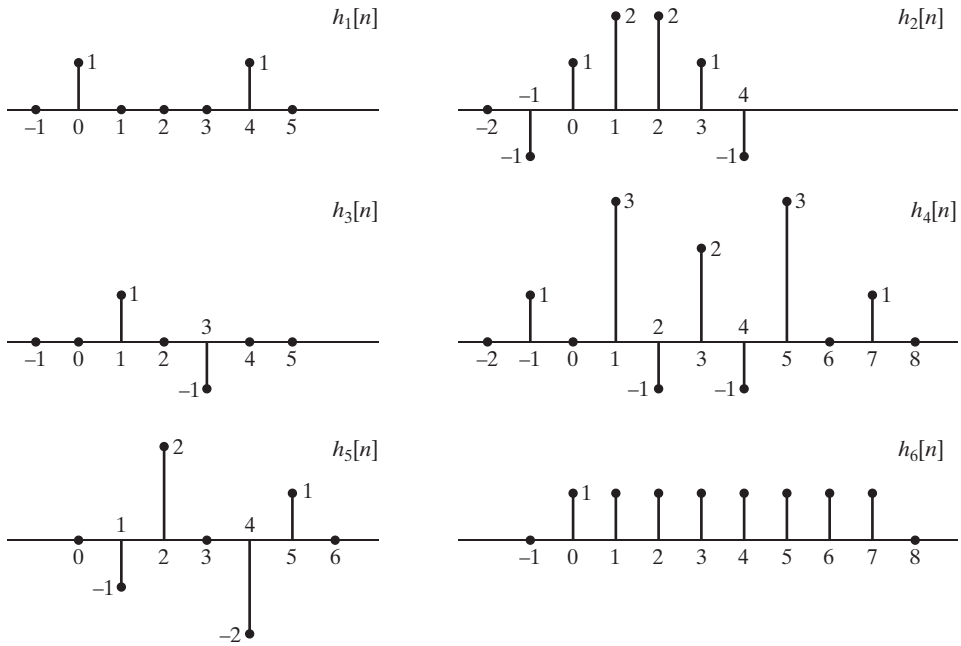


Figura P5.19

5.20. La Figura P5.20 muestra sólo las posiciones de los ceros de varias funciones de transferencia diferentes. Para cada diagrama, indique si la función de transferencia podría ser de un sistema con fase lineal generalizada implementado mediante una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes.

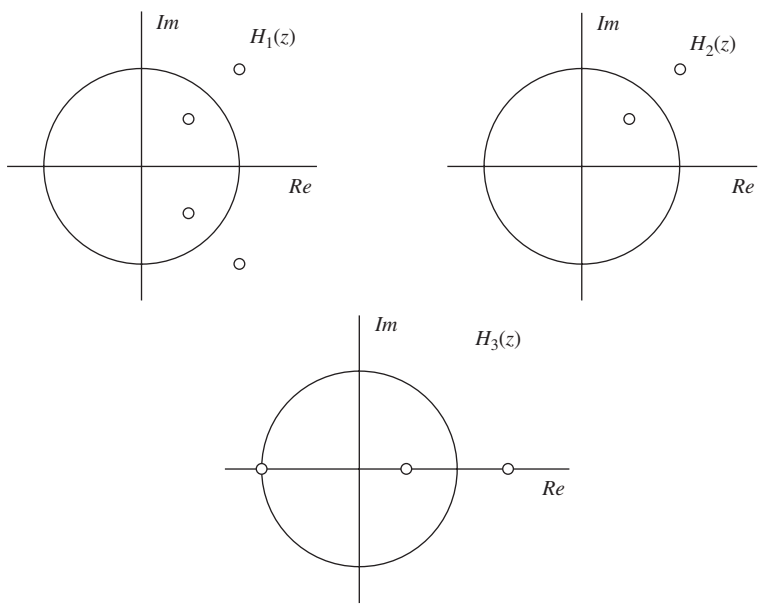


Figura P5.20

Problemas básicos

5.21. Sea $h_{\text{lp}}[n]$ la respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal con ganancia unidad en la banda de paso y frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$. La Figura P5.21 muestra cinco sistemas, cada uno de los cuales es equivalente a un filtro ideal selectivo en frecuencia. Para cada uno de los sistemas que se muestran, dibuje la respuesta en frecuencia equivalente, indicando explícitamente los límites de las bandas de frecuencia en función de ω_c. Especifique en cada caso si el sistema es paso bajo, paso alto, paso banda, banda eliminada o un filtro multibanda.

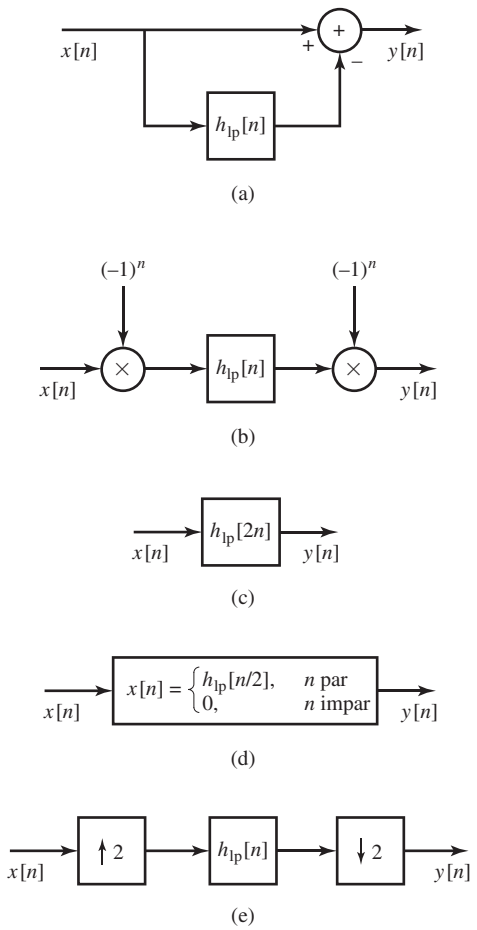


Figura P5.21

5.22. Muchas propiedades de una secuencia en tiempo discreto $h[n]$ o de un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$ se pueden discernir a partir del diagrama polo–cero de $H(z)$. En este problema consideraremos únicamente sistemas causales. Describa claramente la característica en el plano z que corresponde a cada una de las siguientes propiedades:

(a) Respuesta al impulso real.
(b) Respuesta al impulso finita.
(c) $h[n] = h[2\alpha - n]$ siendo 2α un valor entero.
(d) Fase mínima.
(e) Paso todo.

5.23. En todos los apartados de este problema, $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia de un filtro en tiempo discreto y se puede expresar en coordenadas polares como

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

siendo $A(\omega)$ par y real, y $\theta(\omega)$ una función continua e impar de ω para $-\pi < \omega < \pi$, es decir, $\theta(\omega)$ es lo que hemos denominado *fase desenrollada.* Recuerde que:

- El *retardo de grupo* $\tau(\omega)$ asociado con el filtro se define como

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \qquad \text{para} |\omega| < \pi.$$

- Un filtro lineal e invariante con el tiempo se denomina de *fase mínima* si es estable y causal y su inverso es también estable y causal.

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es VERDADERA o FALSA. Si su decisión es que es VERDADERA; proporcione una justificación breve y clara. Si su decisión es que es FALSA, proporcione un contraejemplo simple, junto con una explicación breve y clara de por qué es un contraejemplo.

(a) "Si el filtro es causal, su retardo de grupo debe ser no negativo en todas las frecuencias del intervalo $|\omega| < \pi$".

(b) "Si el retardo de grupo del filtro es una constante positiva para $|\omega| < \pi$ el filtro debe ser un simple retardo entero".

(c) "Si el filtro es de fase mínima y todos sus polos y ceros están en el eje real, entonces $\int_0^{\pi} \tau(\omega)d\omega = 0$".

5.24. Un sistema estable con función de transferencia $H(z)$ tiene el diagrama polo–cero mostrado en la Figura P5.24. Se puede representar como la combinación en cascada de un sistema estable de fase mínima $H_{min}(z)$ y un sistema estable paso todo $H_{ap}(z)$.

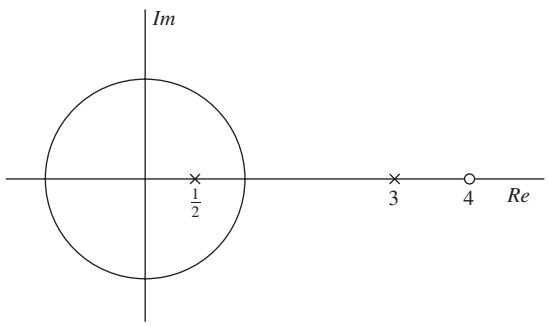


Figura P5.24 Diagrama polo–cero de $H(z)$.

Determine unos valores de $H_{min}(z)$ y $H_{ap}(z)$ (salvo un factor de escala) y dibuje sus correspondientes diagramas polo–cero. Indique si su descomposición es única, salvo un factor de escala).

5.25. **(a)** Un filtro paso bajo ideal con respuesta al impulso $h[n]$ se diseña con fase cero, frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$, ganancia 1 en la banda de paso y ganancia 0 en la banda eliminada (la Figura P5.21 muestra $(H(e^{j\omega})$. Dibuje la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(-1)^n h[n]$.

(b) Un filtro complejo con respuesta al impulso $g[n]$ tiene el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P5.25. Dibuje el diagrama polo–cero de $(-1)^n g[n]$. Si no se proporciona suficiente información, explique por qué.

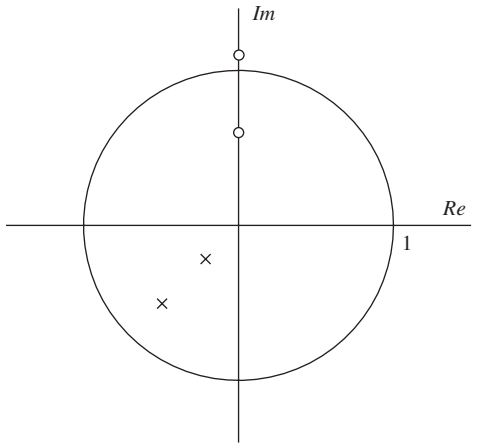


Figura P5.25

5.26. Considere un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo con la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) = -j, \quad 0 < \omega < \pi$$

$$H(e^{j\omega}) = j, \quad -\pi < \omega < 0$$

(a) ¿Es real la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$? (es decir, ¿es $h[n] = h^*[n]$ para todo n?).
(b) Calcule lo siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2$$

(c) Determine la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = s[n]\cos(\omega_c n)$, con $0 < \omega_c < \pi/2$ y $S(e^{j\omega}) = 0$ para $\omega_c/3 \leq |\omega| \leq \pi$.

5.27. Se procesa la señal $x[n] = \cos(0{,}3\pi n)$ con un sistema lineal e invariante con el tiempo que es paso todo y de ganancia unidad, con respuesta en frecuencia $w = H(e^{j\omega})$ y un retardo de grupo de 4 muestras a la frecuencia $\omega = 0{,}3\pi$. La salida que se obtiene es $y[n]$. Se sabe también que $\angle H(e^{j0{,}3\pi}) = \theta$ y que $\angle H(e^{-j0{,}3\pi}) = -\theta$. Elija la sentencia más precisa.

(a) $y[n] = \cos(0{,}3\pi n + \theta)$
(b) $y[n] = \cos(0{,}3\pi(n-4) + \theta)$
(c) $y[n] = \cos(0{,}3\pi(n-4-\theta))$
(d) $y[n] = \cos(0{,}3\pi(n-4))$
(e) $y[n] = \cos(0{,}3\pi(n-4+\theta))$.

5.28. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene como función de transferencia:

$$H(z) = \frac{(1-e^{j\pi/3}z^{-1})(1-e^{-j\pi/3}z^{-1})(1+1{,}1765z^{-1})}{(1-0{,}9e^{j\pi/3}z^{-1})(1-0{,}9e^{-j\pi/3}z^{-1})(1+0{,}85z^{-1})}.$$

(a) Escriba la ecuación en diferencias satisfecha por la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de este sistema.
(b) Dibuje el diagrama polo-cero e indique la región de convergencia de la función de transferencia.
(c) Realice un gráfico cuidadosamente etiquetado de $|H(e^{j\omega})|$. Use las posiciones de los polos y los ceros porqué la respuesta en frecuencia tiene ese aspecto.
(d) Indique si las siguientes afirmaciones sobre el sistema son verdaderas o falsas:

(i) El sistema es estable.
(ii) La respuesta al impulso tiende a una constante distinta de cero para n grande.
(iii) Como la función de transferencia tiene un polo en el ángulo $\pi/3$, el módulo de la respuesta en frecuencia tiene un pico aproximadamente en $\omega = \pi/3$.
(iv) El sistema es de fase mínima.
(v) El sistema tiene un inverso que es causal y estable.

5.29. Considere la conexión en cascada de un sistema lineal e invariante con el tiempo con su inverso, como se muestra en la Figura P5.29.

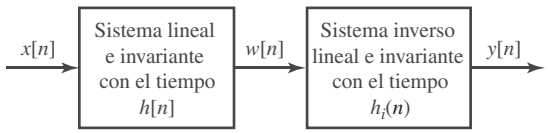


Figura P5.29

La respuesta al impulso del primer sistema es $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$.

(a) Determine la respuesta al impulso $h_i[n]$ de un sistema inverso de $h[n]$ que sea estable.
(b) Considere ahora el caso más general en el que $h[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n-1]$. ¿Qué condiciones debe cumplir α para que exista un sistema inverso que sea estable y causal?

5.30. Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es VERDADERA o FALSA. Justifique sus respuestas.

(a) "Un sistema en tiempo discreto lineal e invariante formado por la conexión en cascada de dos sistemas de fase mínima es también de fase mínima."
(b) "Un sistema en tiempo discreto lineal e invariante formado por la conexión en paralelo de dos sistemas de fase mínima es también de fase mínima."

5.31. Considere la función de transferencia

$$H(z) = \frac{rz^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}, \qquad |z| > r.$$

Suponga que $\omega_0 \neq 0$.

(a) Dibuje un diagrama polo–cero etiquetado y determine $h[n]$.
(b) Repita el apartado (a) cuando $\omega_0 = 0$. Este caso se conoce como sistema con amortiguamiento crítico.

Problemas avanzados

5.32. Suponga que un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene una respuesta al impulso de longitud 6, como muestra la Figura P5.32, siendo c una constante real (positiva o negativa).

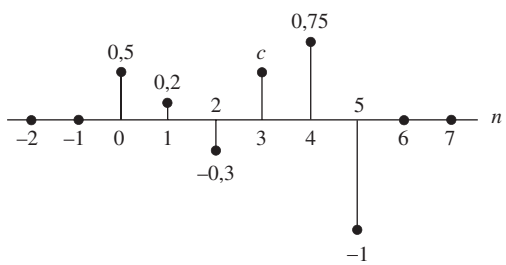


Figura P5.32

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Este sistema debe ser de fase mínima.

(b) Este sistema no puede ser de fase mínima.
(c) Este sistema puede ser o no de fase mínima, dependiendo del valor de c.

Justifique su respuesta.

5.33. $H(z)$ es la función de transferencia de un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable, y su expresión es

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-0{,}75z^{-1})}{z^{-1}(1-0{,}5z^{-1})}.$$

(a) $H(z)$ se puede representar como la combinación en cascada de un sistema de fase mínima $H_{\text{min1}}(z)$ y un sistema paso todo de ganancia unidad $H_{\text{ap}}(z)$, es decir,

$$H(z) = H_{\text{min1}}(z)H_{\text{ap}}(z).$$

Determine una posible selección de $H_{\text{min1}}(z)$ y $H_{\text{ap}}(z)$ y determine si son o no únicas, salvo un factor de escala.

(b) $H(z)$ se puede representar como la combinación en cascada de un sistema de fase mínima $H_{\text{min2}}(z)$ y un sistema FIR de fase lineal generalizada $H_{\text{lp}}(z)$:

$$H(z) = H_{\text{min2}}(z)H_{\text{lp}}(z).$$

Determine una posible selección de $H_{\text{min2}}(z)$ y $H_{\text{lp}}(z)$ e indique si son o no únicas, salvo un factor de escala.

5.34. La Figura P5.34-1 muestra el módulo de la respuesta en frecuencia y el retardo de grupo de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo. La señal $x[n]$, que se muestra también en la Figura P5.34-1, es la suma de tres pulsos de banda estrecha. Concretamente, la Figura P5.34-1 contiene las siguientes gráficas:

- $x[n]$.
- $|X(e^{j\omega})|$, el módulo de la transformada de Fourier de la entrada concreta $x[n]$.
- El módulo de la respuesta en frecuencia del sistema.
- El retardo de grupo del sistema.

En la Figura P5.34-2 se proponen cuatro posibles señales de salida, $y_i[n]$ $i = 1,2,\ldots,4$. Determine cuál de esas posibles señales de salida es la salida del sistema cuando la entrada es $x[n]$. Proporcione una justificación de su elección.

5.35. Suponga que $\tau(\omega)$ es el retardo de grupo de un filtro en tiempo discreto. ¿Implica la condición $\tau(\omega) > 0$ para $-\pi < \omega \leq \pi$ que el filtro debe ser necesariamente causal? Explique claramente su razonamiento.

5.36. Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1+4z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}.$$

La función de transferencia $H(z)$ se puede factorizar de la siguiente forma

$$H(z) = H_{\text{min}}(z)H_{\text{ap}}(z),$$

siendo $H_{\text{min}}(z)$ un sistema de fase mínima y $H_{\text{ap}}(z)$ un sistema paso todo, es decir,

$$|H_{\text{ap}}(e^{j\omega})| = 1.$$

Dibuje los diagramas polo–cero de $H_{\text{min}}(z)$ y de $H_{\text{ap}}(z)$. Asegúrese de etiquetar las posiciones de todos los polos y los ceros. Indique también las regiones de convergencia de $H_{\text{min}}(z)$ y de $H_{\text{ap}}(z)$.

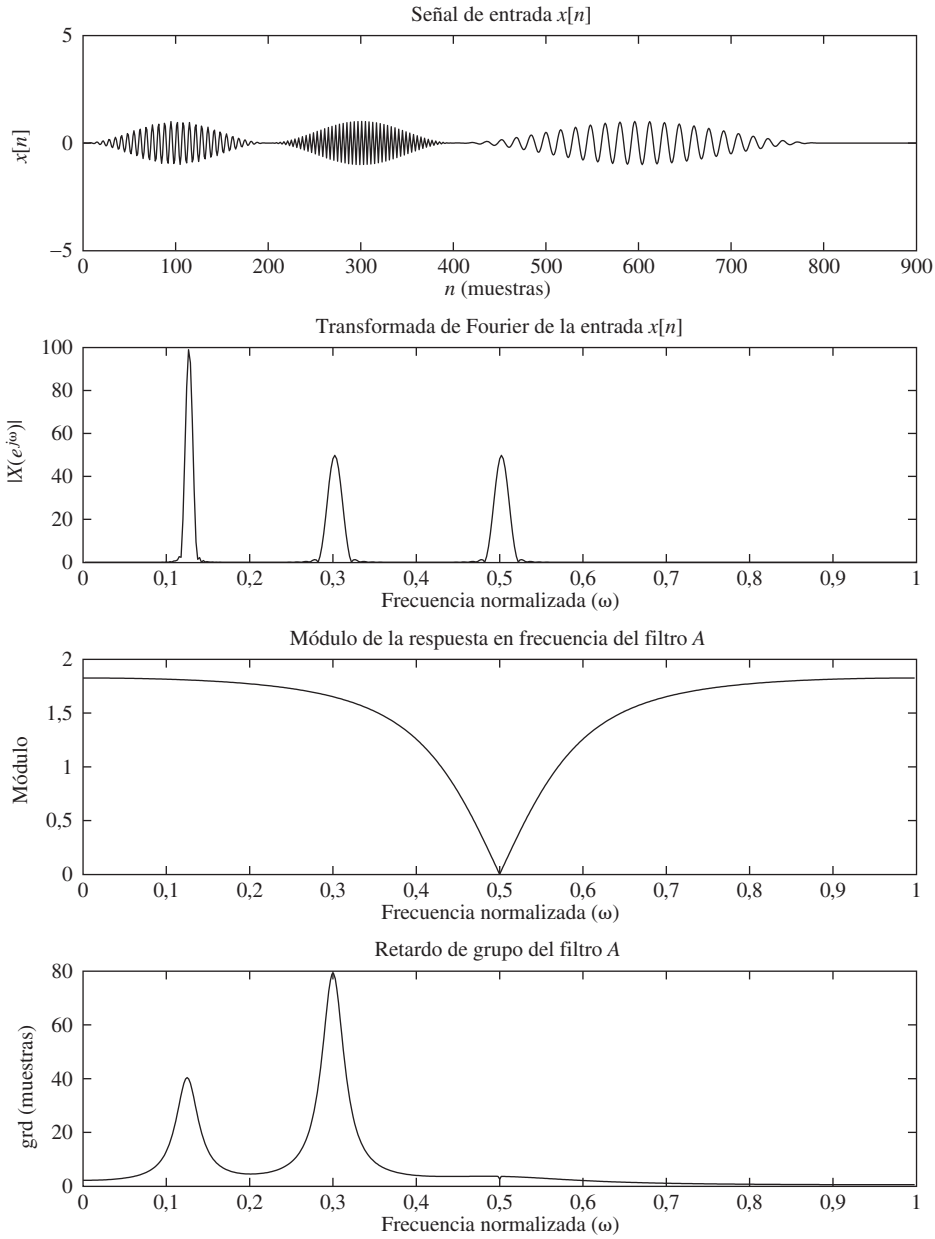


Figura P5.34-1 Señal de entrada y respuesta en frecuencia del filtro.

5.37. Un sistema lineal e invariante con el tiempo y de fase lineal generalizada tiene como función de transferencia $H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2}$. Su respuesta al impulso tiene energía unidad, $a \geq 0$, y $H(e^{j\pi}) = H(e^{j0}) = 0$.

(a) Determine la respuesta al impulso $h[n]$.

(b) Dibuje $|H(e^{j\omega})|$.

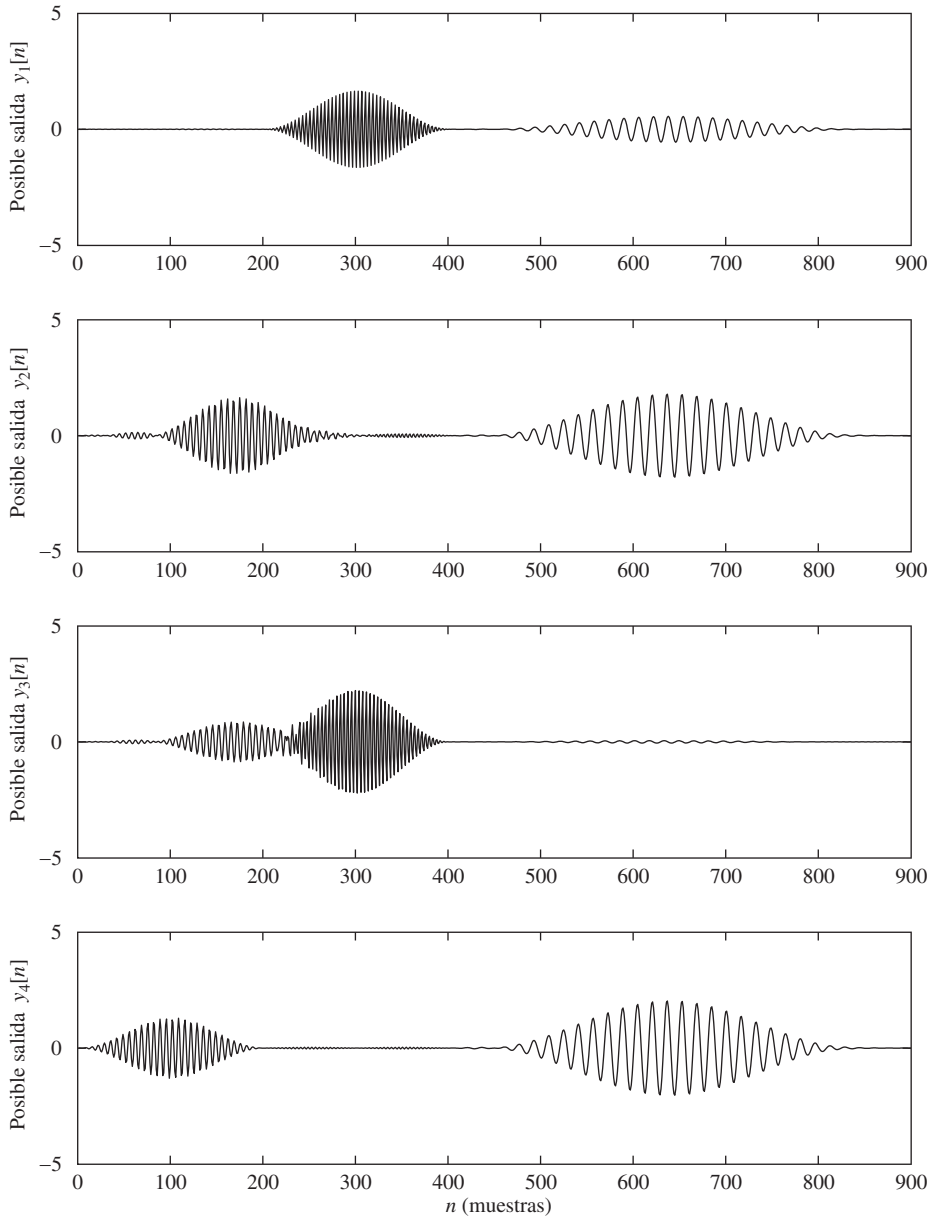


Figura P5.34-2 Posibles señales de salida.

5.38. La función de transferencia $H(z)$ de un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable está dada por:

$$H(z) = \frac{(1-9z^{-2})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

(a) $H(z)$ se puede representar como la combinación en cascada de un sistema de fase mínima $H_{\text{min}}(z)$ y un sistema paso todo de ganancia unidad $H_{\text{ap}}(z)$. Determine una posible selección de $H_{\text{min}}(z)$ y $H_{\text{ap}}(z)$ y especifique si son o no únicas salvo un factor de escala.

(b) ¿Es el sistema de fase mínima $H_{\min}(z)$, un sistema FIR? Explique su respuesta.

(c) ¿Es el sistema de fase mínima $H_{\min}(z)$, un sistema de fase lineal generalizada? Si no lo es, ¿se puede representar $H(z)$ como la combinación en cascada de un sistema de fase lineal generalizada $H_{\text{lin}}(z)$ y un sistema paso todo $H_{\text{ap2}}(z)$? Si su respuesta es afirmativa, determine $H_{\text{lin}}(z)$ y $H_{\text{ap2}}(z)$. Si su respuesta es negativa, explique por qué no es posible esa representación.

5.39. $H(z)$ es la función de transferencia de un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable, y está dada por:

$$H(z) = \frac{z-2}{z(z-1/3)}.$$

(a) ¿Es el sistema causal? Justifique claramente su respuesta.

(b) $H(z)$ se puede expresar también como $H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{lin}}(z)$ siendo $H_{\min}(z)$ un sistema de fase mínima y $H_{\text{lin}}(z)$ un sistema de fase lineal generalizada. Determine una posible selección de $H_{\min}(z)$ y $H_{\text{lin}}(z)$.

5.40. Un sistema S_1 tiene respuesta al impulso $h_1[n]$ y una respuesta en frecuencia real $H_1(e^{j\omega})$.

(a) ¿Tiene alguna simetría la respuesta al impulso $h_1[n]$? Explique su respuesta.

(b) Un sistema S_2 con fase lineal tiene la misma respuesta en amplitud que el sistema S_1. ¿Cuál es la relación entre $h_2[n]$, la respuesta al impulso del sistema S_2 y $h_1[n]$?

(c) ¿Puede ser de fase lineal un sistema IIR causal? Explique su respuesta. Si ésta es afirmativa, proporcione un ejemplo.

5.41. Considere un filtro en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta al impulso $h[n]$ sólo es distinta de cero en cinco muestras consecutivas. La respuesta en frecuencia del filtro es $H(e^{j\omega})$. Sean las señales $x[n]$ e $y[n]$ la entrada y la salida del filtro, respectivamente.

Además, se dispone de la siguiente información sobre el filtro.

(I) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\,d\omega = 4\pi.$

(II) Existe una señal $a[n]$ que tiene una transformada de Fourier en tiempo discreto $A(e^{j\omega})$ real y par , dada por

$$A(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})e^{j2\omega}.$$

(III) $A(e^{j0}) = 8$, y $A(e^{j\pi}) = 12$.

Especifique completamente la respuesta al impulso $h[n]$, es decir, especifique el valor de la respuesta al impulso en cada instante temporal donde tome un valor distinto de cero. Dibuje $h[n]$, etiquetando cuidadosamente y de forma precisa sus características más relevantes.

5.42. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable (entrada acotada - salida acotada) tiene respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia $H(z)$ con el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P5.42.

Además, se sabe que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] = -1.$

(a) Determine $H(z)$ y su región de convergencia.

(b) Considere un nuevo sistema con respuesta al impulso $g[n] = h[n+n_0]$, siendo n_0 un entero. Sabiendo que $G(z)|_{z=0} = 0$ y que $\lim_{z\to\infty} G(z) < \infty$, determine los valores de n_0 y $g[0]$.

(c) Un nuevo sistema tiene respuesta al impulso $f[n] = h[n] * h[-n]$. Determine $F(z)$ y su región de convergencia.

(d) ¿Existe alguna señal limitada por la izquierda $e[n]$ tal que $e[n] * h[n] = u[n]$, siendo $u[n]$ la secuencia escalón unidad? Si existe, ¿es $e[n]$ causal?

5.43. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^{-2}(1-2z^{-1})}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

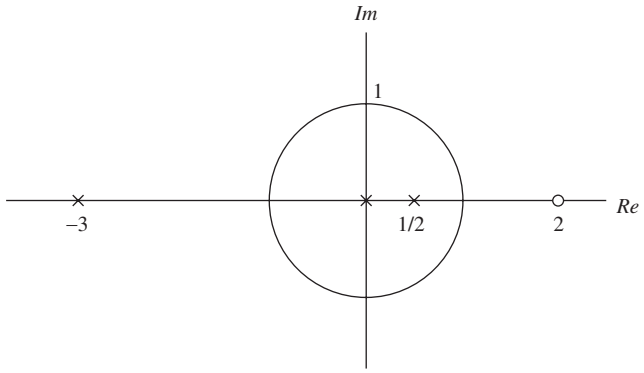


Figura P5.42

(a) ¿Es $H(z)$ un sistema paso todo? Explique su respuesta.

(b) El sistema se va a implementar como una cascada de tres sistemas $H_{\min}(z)$, $H_{\max}(z)$ y $H_d(z)$, que indican, respectivamente, sistema de fase mínima, sistema de fase máxima y desplazamiento temporal. Determine las respuestas al impulso $h_{\min}[n]$, $h_{\max}[n]$ y $h_d[n]$, correspondientes a cada uno de los tres sistemas.

5.44. Las respuestas al impulso de cuatro sistemas lineales, invariantes con el tiempo y de fase lineal, $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ y $h_4[n]$ se proporcionan a continuación. Además, en la Figura P5.44 se muestran las gráficas de las respuestas en amplitud, A, B, C y D, que corresponden potencialmente a esas respuestas al impulso. Para cada

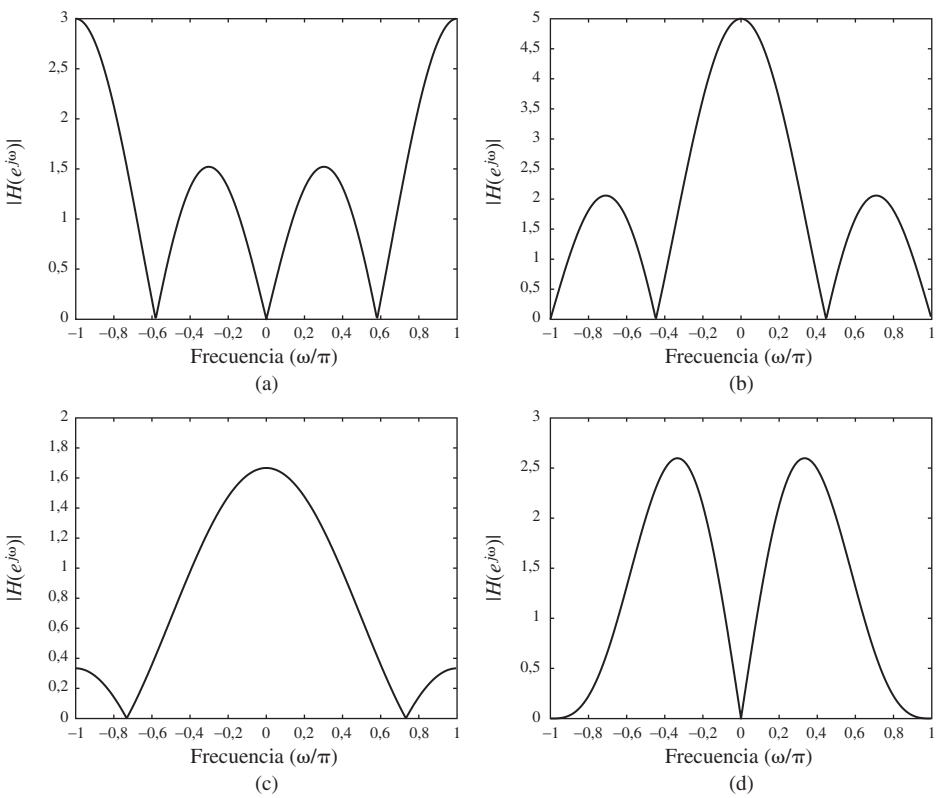


Figura P5.44

respuesta al impulso $h_i[n]$, $i = 1, \ldots, 4$, especifique qué gráfica de respuesta en amplitud le corresponde, si hay alguna. Si ninguna de las gráficas de respuesta en amplitud se corresponde con una determinada $h_i[n]$, especifique "ninguna" como su respuesta para esa $h_i[n]$.

$$\begin{aligned}
h_1[n] &= 0{,}5\delta[n] + 0{,}7\delta[n-1] + 0{,}5\delta[n-2] \\
h_2[n] &= 1{,}5\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + 1{,}5\delta[n-3] \\
h_3[n] &= -0{,}5\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-3] + 0{,}5\delta[n-4] \\
h_4[n] &= -\delta[n] + 0{,}5\delta[n-1] - 0{,}5\delta[n-2] + \delta[n-3].
\end{aligned}$$

5.45. La Figura P5.45 muestra los diagramas polo–cero de seis diferentes sistemas lineales, invariantes con el tiempo y causales.

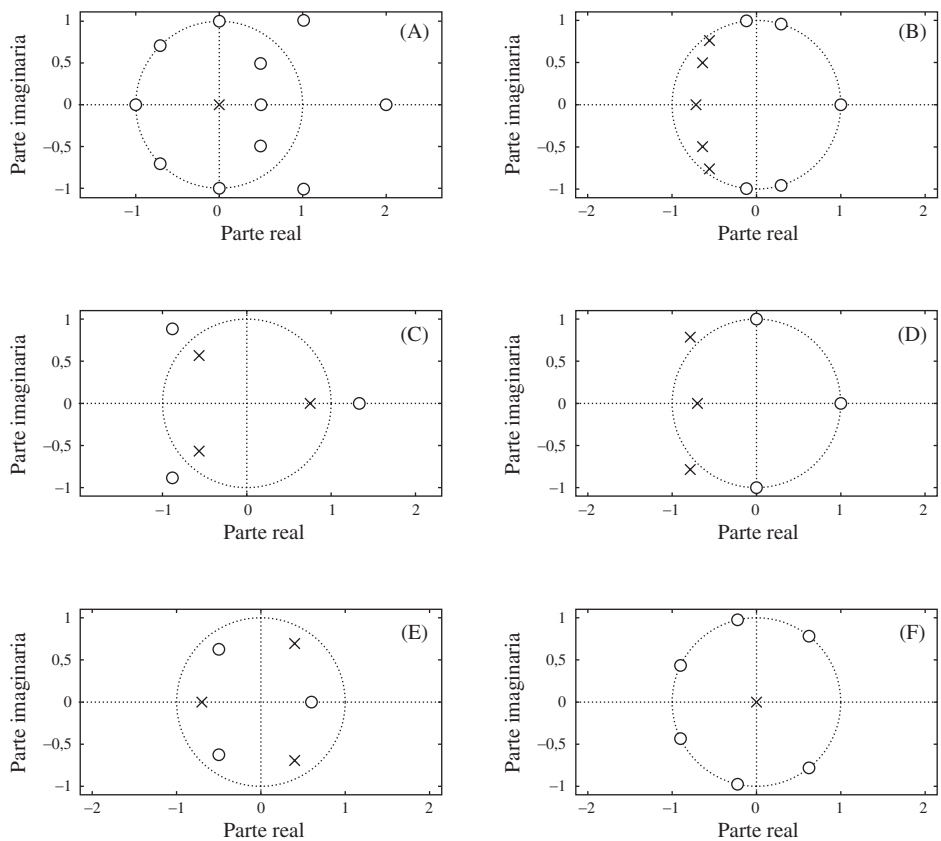


Figura P5.45

Responda a las siguientes preguntas sobre los sistemas que tiene los diagramas polo–cero anteriores. En todos los casos, *ninguno* o *todos* podrían ser respuestas aceptables.

(a) ¿Qué sistemas son IIR?
(b) ¿Qué sistemas son FIR?
(c) ¿Qué sistemas son estables?
(d) ¿Qué sistemas son de fase mínima?
(e) ¿Qué sistemas son de fase lineal generalizada?
(f) ¿Qué sistemas tienen $|H(e^{j\omega})|$ = constante para todo ω?

(g) ¿Qué sistemas tienen sistema inverso causal y estable?
(h) ¿Qué sistema tiene la respuesta al impulso más corta (con el mínimo número de muestras distintas de cero?
(i) ¿Qué sistemas tienen respuestas en frecuencia paso bajo?
(j) ¿Qué sistemas tienen retardo de grupo mínimo?

5.46. Suponga que los dos sistemas lineales de la combinación en cascada de la Figura P5.46 son filtros lineales, invariantes con el tiempo y de fase lineal. Suponga que el orden de $H_1(z)$ es M_1 (su respuesta al impulso tiene longitud M_1+1) y que el orden de $H_2(z)$ es M_2. Suponga que las respuestas en frecuencia son de la forma $H_1(e^{j\omega}) = A_1(e^{j\omega})e^{-j\omega M_1/2}$ y $H_2(e^{j\omega}) = jA_2(e^{j\omega})e^{-j\omega M_2/2}$, siendo M_1 un entero par y M_2 un entero impar.

(a) Determine la respuesta en frecuencia global $H(e^{j\omega})$.
(b) Determine la longitud de la respuesta al impulso del sistema completo.
(c) Determine el retardo de grupo del sistema completo.
(d) ¿Es el sistema completo un sistema de fase lineal generalizada de Tipo I, Tipo I, Tipo III o Tipo IV?

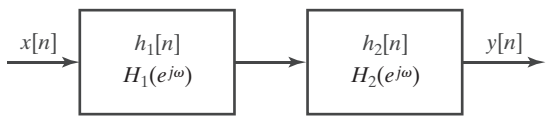


Figura P5.46

5.47. Un sistema FIR de fase lineal tiene respuesta al impulso $h[n]$ real y se sabe que su transformada Z tiene la forma

$$H(z) = (1-az^{-1})(1-e^{j\pi/2}z^{-1})(1-bz^{-1})(1-0{,}5z^{-1})(1-cz^{-1})$$

siendo a, b y c ceros de $H(z)$ que hay que encontrar. Se sabe también que $H(e^{j\omega}) = 0$ para $\omega = 0$. Esta información y el conocimiento de las propiedades de los sistemas de fase lineal son suficientes para determinar completamente la función de transferencia (y por tanto la respuesta al impulso) y responder en consecuencia a las siguientes preguntas:

(a) Determine la longitud de la respuesta al impulso (es decir, el número de muestras distintas de cero).
(b) ¿Es un sistema de Tipo I, Tipo II, Tipo III o Tipo IV?
(c) Determine el retardo de grupo en muestras de este sistema.
(d) Determine los ceros desconocidos a, b y c. (Las etiquetas son arbitrarias, pero hay que encontrar tres ceros más.)
(e) Determine los valores de la respuesta al impulso y dibújela.

5.48. La función de transferencia $H(z)$ de un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene el diagrama polo-cero que se muestra en la Figura P5.48. Se sabe también que $H(z) = 6$ cuando $z = 1$.

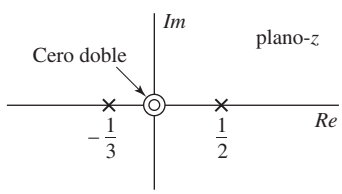


Figura P5.48

(a) Determine $H(z)$.
(b) Determine la respuesta al impulso del sistema $h[n]$.
(c) Determine la respuesta del sistema a las siguientes señales de entrada:

(i) $x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1]$

(ii) La secuencia $x[n]$ que se obtiene al muestrear la señal en tiempo continuo

$$x(t) = 50 + 10\cos 20\pi t + 30\cos 40\pi t$$

con una frecuencia de muestreo $\Omega_s = 2\pi(40)$ rad/s.

5.49. La función de transferencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo está dada por

$$H(z) = \frac{21}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}.$$

Se sabe que el sistema no es estable y que su respuesta al impulso es bilateral.

(a) Determine la respuesta al impulso del sistema $h[n]$.

(b) La respuesta al impulso obtenida en (a) se puede expresar como la suma de una respuesta al impulso causal $h_1[n]$ y una respuesta al impuso anticausal $h_2[n]$. Determine las correspondientes funciones de transferencia $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

5.50. La respuesta en frecuencia de un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable es real y se muestra en la Figura P5.50. Determine si este sistema tiene un sistema inverso estable.

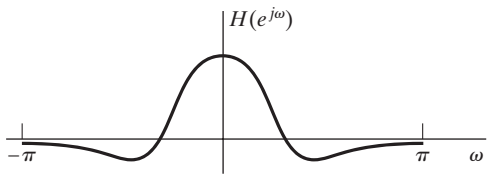


Figura P5.50

5.51. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{(1-1{,}5z^{-1}-z^{-2})(1+0{,}9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0{,}7jz^{-1})(1-0{,}7jz^{-1})}.$$

(a) Escriba la ecuación en diferencias satisfecha por la entrada y la salida del sistema.

(b) Dibuje el diagrama polo–cero e indique la región de convergencia de la función de transferencia.

(c) Dibuje $|H(e^{j\omega})|$.

(d) Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones sobre el sistema:

(I) El sistema es estable.

(II) La respuesta al impulso tiende a una constante para n grande.

(III) El módulo de la respuesta en frecuencia tiene un pico aproximadamente en la frecuencia $\omega = \pm\pi/4$.

(IV) El sistema tiene un inverso causal y estable.

5.52. Considere una secuencia causal $x[n]$ con transformada Z.

$$X(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z\right)}{\left(1-\frac{1}{6}z\right)}.$$

¿Para qué valores de α es $\alpha^n x[n]$ una secuencia real de fase mínima?

5.53. Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia es

$$H(z) = (1-0{,}9e^{j0{,}6\pi}z^{-1})(1-0{,}9e^{-j0{,}6\pi}z^{-1})(1-1{,}25e^{j0{,}8\pi}z^{-1})(1-1{,}25e^{-j0{,}8\pi}z^{-1}).$$

(a) Determine todas las funciones de transferencia causales que producen el mismo módulo de su respuesta en frecuencia que $H(z)$ y para las que las correspondientes respuestas al impulso son reales y de la misma longitud que la respuesta al impulso asociada a $H(z)$. (existen cuatro funciones de transferencia diferentes). Identifique qué función de transferencia es de fase mínima y cuál, con un posible desplazamiento temporal, es de fase máxima.

(b) Determine las respuestas al impulso para las funciones de transferencia del apartado (a).

(c) Para cada una de las secuencias del apartado (b), obtenga y dibuje

$$E[n] = \sum_{m=0}^{n} (h[m])^2$$

para $0 \leq n \leq 5$. Indique explícitamente qué gráfica corresponde al sistema de fase mínima.

5.54. La Figura P5.54 muestra ocho secuencias de duración finita. Cada secuencia tiene una longitud de cuatro puntos. El módulo de la transformada de Fourier es el mismo para todas las secuencias. ¿Cuál de las secuencias tiene todos los ceros de su transformada Z en el *interior* de la circunferencia unidad?

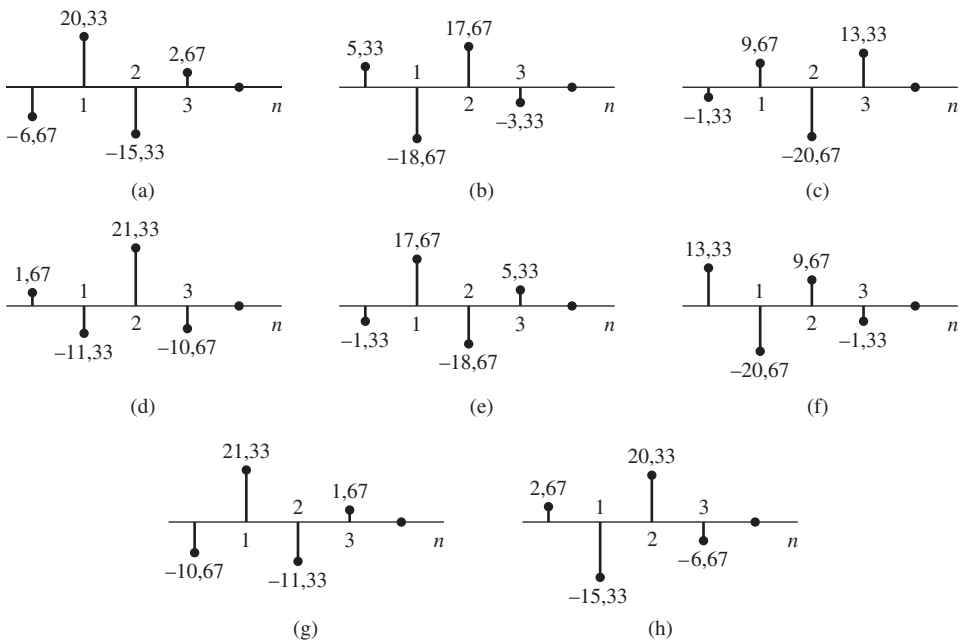


Figura P5.54

5.55. Cada uno de los diagramas polo–cero de la Figura P5.55, junto con la especificación de la correspondiente región de convergencia, especifica un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia $H(z)$. Determine en cada caso si alguna de las siguientes afirmaciones es cierta. Justifique brevemente su respuesta o proporcione un contraejemplo.

(a) El sistema es de fase cero o de fase lineal generalizada.

(b) El sistema tiene un inverso $H_i(z)$ estable.

5.56. Suponiendo conversores D/C y C/D ideales, el sistema global de la Figura P5.56 es un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ y respuesta al impulso $h[n]$.

(a) $H(e^{j\omega})$ se puede expresar en la forma $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\phi(\omega)}$, siendo $A(e^{j\omega})$ real. Determine y dibuje $A(e^{j\omega})$ y $\phi(\omega)$ para $|\omega| < \pi$.

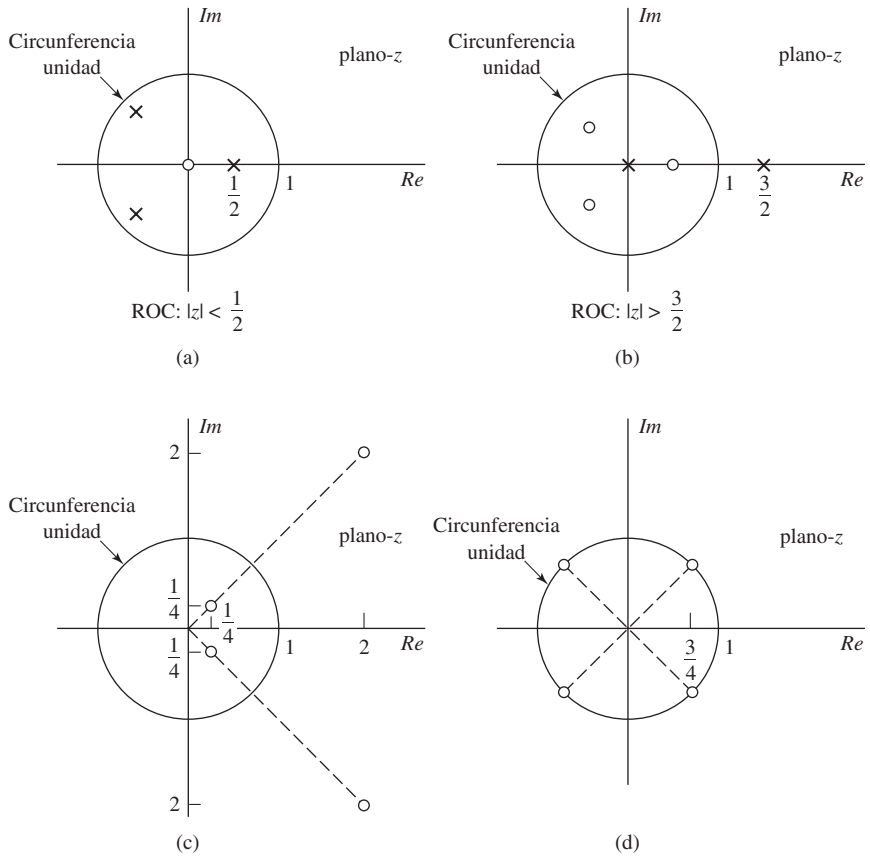


Figura P5.55

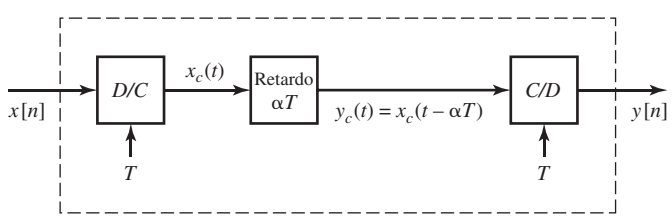


Figura P5.56

(b) Dibuje $h[n]$ para los siguientes casos:

(I) $\alpha = 3$

(II) $\alpha = 3\frac{1}{2}$

(III) $\alpha = 3\frac{1}{4}$.

(c) Considere un sistema en tiempo discreto lineal e invariante para el que

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\alpha\omega}, \qquad |\omega| < \pi,$$

siendo $A(e^{j\omega})$ real. ¿Qué se puede decir de la simetría de $h[n]$ en los siguientes casos?

(I) $\alpha =$ entero

(II) $\alpha = M/2$, siendo M un entero impar

(III) α un valor general.

5.57. Considere la clase de filtros FIR que tienen $h[n]$ real, $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > M$, y una de las siguientes propiedades de simetría:

$$\text{Simétrica:} \quad h[n] = h[M-n]$$
$$\text{Antisimétrica:} \quad h[n] = -h[M-n]$$

Considere la clase de filtros FIR que tienen fase lineal generalizada, es decir, su respuesta en frecuencia es de la forma

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega + j\beta},$$

siendo $A(e^{j\omega})$ una función real de ω, α una constante real y β una constante real.

Dada la siguiente tabla, demuestre que $A(e^{j\omega})$ tiene la forma que se indica, y obtenga los valores de α y β.

Tipo	Simetría	$(M+1)$	Forma de $A(e^{j\omega})$	α	β
I	Simétrica	Impar	$\sum_{n=0}^{M/2} a[n]\cos\omega n$		
II	Simétrica	Par	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega(n-1/2)$		
III	Antisimétrica	Impar	$\sum_{n=1}^{M/2} c[n]\operatorname{sen}\omega n$		
IV	Antisimétrica	Par	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n]\operatorname{sen}\omega(n-1/2)$		

He aquí varias sugerencias útiles.

- Para los filtros de tipo I, demuestre en primer lugar que $H(e^{j\omega})$ se puede expresar de la forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[M-n]e^{-j\omega[M-n]} + h[M/2]e^{-j\omega(M/2)}.$$

- El análisis de los filtros de tipo III es muy similar a los de tipo I, con la excepción del cambio de signo y la supresión de uno de los términos precedentes.
- Para los filtros de tipo II, exprese primero $H(e^{j\omega})$ de la forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[M-n]e^{-j\omega[M-n]},$$

  y luego saque factor común $e^{-j\omega(M/2)}$ en ambos sumatorios.
- El análisis de los filtros de tipo IV es muy similar al de los filtros de tipo II.

5.58. Sea $h_{\text{lp}}[n]$ la respuesta al impulso de un filtro paso bajo FIR de fase lineal generalizada. La respuesta al impulso $h_{\text{hp}}[n]$ de un filtro paso alto FIR de fase lineal generalizada se puede obtener mediante la transformación

$$h_{\text{hp}}[n] = (-1)^n h_{\text{lp}}[n].$$

Si se decide diseñar un filtro paso alto utilizando esta transformación y se quiere que el filtro paso alto resultante sea simétrico, ¿cuál de los cuatro tipos de filtros FIR de fase lineal generalizada se puede utilizar para diseñar el filtro paso bajo? Su respuesta debe considerar *todos* los tipos posibles.

5.59. **(a)** Un determinado sistema de fase mínima tiene una función de transferencia $H_{\min}(z)$ tal que

$$H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z) = H_{\text{lin}}(z),$$

siendo $H_{\text{ap}}(z)$ una función de transferencia paso todo y $H_{\text{lin}}(z)$ un sistema causal de fase lineal generalizada. ¿Qué le sugiere esta información sobre los polos y ceros de $H_{\min}(z)$?

(b) Un sistema FIR de fase lineal generalizada tiene una respuesta al impulso con valores reales que cumple que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n \geq 8$, y $h[n] = -h[7-n]$. La función de transferencia de este sistema tiene un cero en $z = 0{,}8e^{j\pi/4}$ y otro cero en $z = -2$. ¿Cómo es $H(z)$?

5.60. En este problema se considera un filtro en tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ real. Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Afirmación: Si el retardo de grupo del filtro es una constante para $0 < \omega < \pi$, entonces la respuesta al impulso debe tener la propiedad de que o bien

$$h[n] = h[M-n]$$

o bien

$$h[n] = -h[M-n],$$

siendo M un entero.

Si la afirmación es verdadera, demuestre por qué. Si es falsa, proponga un contraejemplo.

5.61. La función de transferencia $H_{\text{II}}(z)$ representa un sistema FIR de fase lineal generalizada de tipo II con respuesta al impulso $h_{\text{II}}[n]$. Este sistema se conecta en cascada con un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia es $(1 - z^{-1})$ para producir un tercer sistema con función de transferencia $H(z)$ y respuesta al impulso $h[n]$. Demuestre que el sistema completo es de fase lineal generalizada y determine de qué tipo es.

5.62. Sea S_1 un sistema lineal, invariante con el tiempo, causal y estable con respuesta al impulso $h_1[n]$ y respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$. La entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de S_1 están relacionadas por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] - y[n-1] + \tfrac{1}{4}y[n-2] = x[n].$$

(a) Si un sistema lineal e invariante con el tiempo S_2 tiene una respuesta en frecuencia dada por $H_2(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega})$, ¿se puede caracterizar S_2 como filtro paso bajo, paso banda o banda eliminada? Justifique su respuesta.

(b) Sea S_3 un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal, cuya respuesta en frecuencia $H_3(e^{j\omega})$ tiene la propiedad de que

$$H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1.$$

¿Es S_3 un sistema de fase mínima? ¿Se puede caracterizar S_3 como uno de los cuatro tipos de filtros FIR con fase lineal generalizada? Justifique sus respuestas.

(c) Sea S_4 un sistema lineal, invariante con el tiempo, estable y no causal cuya respuesta en frecuencia es $H_4(e^{j\omega})$ y cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ se relacionan mediante la ecuación en diferencias:

$$y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n],$$

siendo α_1, α_2 y β_0 constantes reales distintas de cero. Especifique un valor de α_1, un valor de α_2 y un valor de β_0 tal que $|H_4(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})|$.

(d) Sea S_5 un filtro FIR cuya respuesta al impulso es $h_5[n]$ y cuya respuesta en frecuencia, $H_5(e^{j\omega})$, tiene la propiedad de que $H_5(e^{j\omega}) = |A(e^{j\omega})|^2$ para alguna transformada de Fourier en tiempo discreto $A(e^{j\omega})$ (es decir, S_5 es un filtro de fase cero). Determine $h_5[n]$ de forma que $h_5[n] * h_1[n]$ sea la respuesta al impulso de un filtro FIR no causal.

Problemas de ampliación

5.63. En el sistema que se muestra en la Figura P5.63-1, suponga que la entrada se puede expresar de la forma

$$x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n).$$

Suponga también que $s[n]$ es paso bajo y de banda relativamente limitada, es decir, $S(e^{j\omega}) = 0$ para $|\omega| > \Delta$, siendo Δ muy pequeño y $\Delta \ll \omega_0$, de forma que $X(e^{j\omega})$ es de banda estrecha alrededor de $\omega = \pm\omega_0$.

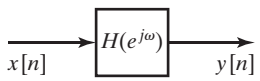


Figura P5.63-1

(a) Si $|H(e^{j\omega})| = 1$ y $\angle H(e^{j\omega})$ es como se muestra en la Figura P5.63-2, demuestre que $y[n] = s[n]\cos(\omega_0 n - \phi_0)$.

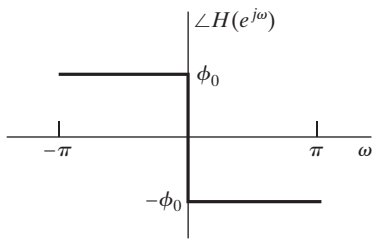


Figura P5.63-2

(b) Si $|H(e^{j\omega})| = 1$ y $\angle H(e^{j\omega})$ es como se indica en la Figura P5.63-3, demuestre que $y[n]$ se puede expresar en la forma

$$y[n] = s[n - n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d).$$

Demuestre también que $y[n]$ se puede expresar de forma equivalente como

$$y[n] = s[n - n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_1),$$

siendo $-\phi_1$ la fase de $H(e^{j\omega})$ en $\omega = \omega_0$.

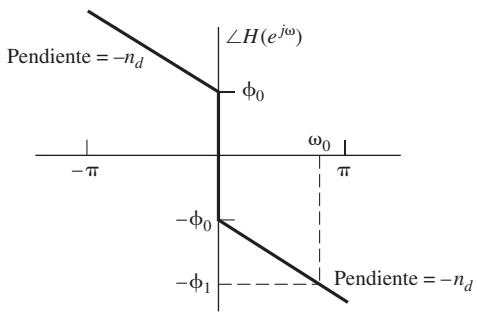


Figura P5.63-3

(c) El retardo de grupo asociado con $H(e^{j\omega})$ se define como

$$\tau_{gr}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\arg[H(e^{j\omega})],$$

y el retardo de fase se define como $\tau_{\text{ph}}(\omega) = -(1/\omega)\angle H(e^{j\omega})$. Suponga que $|H(e^{j\omega})|$ es la unidad en el ancho de banda de $x[n]$. Basándose en los resultados de los apartados (a) y (b) y en el supuesto de que $x[n]$ es de banda estrecha, demuestre que si $\tau_{\text{gr}}(\omega_0)$ y $\tau_{\text{ph}}(\omega_0)$ son ambos enteros entonces

$$y[n] = s[n - \tau_{\text{gr}}(\omega_0)]\cos\{\omega_0[n - \tau_{\text{ph}}(\omega_0)]\}.$$

Esta ecuación demuestra que, dada una señal de banda estrecha $x[n]$, $\angle H(e^{j\omega})$ aplica efectivamente un retardo de $\tau_{\text{gr}}(\omega_0)$ a la envolvente $s[n]$ de $x[n]$ y un retardo de $\tau_{\text{ph}}(\omega_0)$ a la portadora $\cos \omega_0 n$.

(d) Teniendo en cuenta lo visto en la Sección 4.5 sobre retardos no enteros de una secuencia, ¿cómo se interpretaría el efecto del retardo de grupo y de fase si $\tau_{\text{gr}}(\omega_0)$ o $\tau_{\text{ph}}(\omega_0)$ (o ambos) no son enteros?

5.64. La señal $y[n]$ es la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada es $x[n]$, una señal de ruido blanco de media nula. El sistema está descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \qquad b_0 = 1.$$

(a) ¿Cuál es la transformada Z $\Phi_{yy}(z)$ de la función de autocorrelación $\phi_{yy}[n]$?

Algunas veces resulta de interés procesar $y[n]$ mediante un filtro lineal de forma que el espectro de potencia a la salida del filtro lineal sea plana cuando la entrada a dicho filtro es $y[n]$. Este procedimiento se conoce con el nombre de "blanqueado" de la señal $y[n]$, y el filtro lineal que realiza esta tarea se denomina "filtro blanqueador" de la señal $y[n]$. Suponga que se conoce la función de autocorrelación $\phi_{yy}[n]$ y su transformada z $\Phi_{yy}(z)$, pero no los valores de los coeficientes a_k y b_k.

(b) Indique un procedimiento para obtener la función de transferencia $H_w(z)$ del filtro blanqueador.

(c) ¿Es único el filtro blanqueador?

5.65. En muchas situaciones prácticas aparece el problema de recuperar una señal que ha sido distorsionada por un proceso de convolución. Este proceso de distorsión se puede modelar mediante una operación de filtrado lineal como indica la Figura P5.65-1. La Figura P5.65-2 muestra la respuesta al impulso del filtro. En este problema se van a considerar procedimientos para recuperar la señal $x[n]$ a partir de $y[n]$.

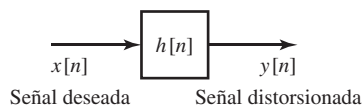


Figura P5.65–1

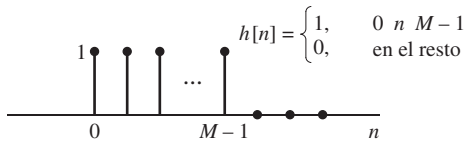


Figura P5.65–2

(a) Un procedimiento para recuperar la señal $x[n]$ a partir de $y[n]$ es utilizar un filtro inverso. Es decir, filtrar la señal $y[n]$ con un sistema cuya respuesta en frecuencia sea

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})},$$

siendo $H(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de $h[n]$. Dada la respuesta al impulso $h[n]$ que se muestra en la Figura P5.65-2, comente los problemas prácticos que se presentan al realizar la solución basada en el filtro inverso. Sea completo, pero también breve y concreto.

(b) Debido a las dificultades que aparecen al realizar el filtro inverso, se sugiere otra solución para recuperar la señal $x[n]$ a partir de $y[n]$: la señal distorsionada $y[n]$ es procesada por el sistema que se muestra en la Figura P5.65-3, que produce una salida $w[n]$ de la que podemos extraer una réplica mejorada de $x[n]$. La Figura P5.65-4 muestra las respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$, Explique con detalle el funcionamiento de este sistema. En particular, establezca de forma precisa las condiciones bajo las que se puede recuperar de forma exacta $x[n]$ a partir de $w[n]$. *Sugerencia*: considere la respuesta al impulso del sistema completo desde $x[n]$ to $w[n]$.

Figura P5.65-3

(c) (c) Se intentará generalizar ahora la solución a respuestas al impulso del filtro de distorsión $h[n]$ arbitrarias de longitud finita. Es decir, sólo se supone que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq M$. Se supone además que $h_1[n]$ es la misma que se muestra en la Figura P5.65-4. ¿Cómo se deben relacionar $H_2(z)$ y $H(z)$ para que el sistema funcione como en el apartado (b)? ¿Qué condición debe satisfacer $H(z)$ para que sea posible realizar $H_2(z)$ con un sistema causal?

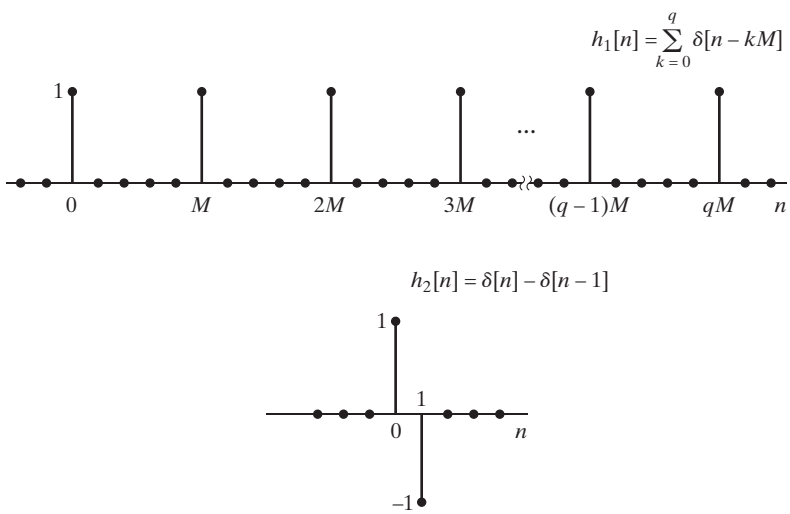


Figura P5.65-4

5.66. En este problema demostraremos que, para transformadas Z racionales, un factor de la forma $(z - z_0)$ y un factor de la forma $z/(z - 1/z_0^*)$ contribuyen con la misma fase.

(a) Sea $H(z) = z - 1/a$, con a real y $0 < a < 1$. Dibuje los polos y los ceros del sistema, indicando los que se encuentran en $z = \infty$. Determine $\angle H(e^{j\omega})$, la fase del sistema.

(b) Suponga que $G(z)$ es tal que sus polos se encuentran en las posiciones inversas conjugadas de los ceros de $H(z)$, y sus ceros en las posiciones inversas conjugadas de los polos de $H(z)$, incluyendo en ambos casos los que estén en cero y en ∞. Dibuje el diagrama polo–cero de $G(z)$. Determine $\angle G(e^{j\omega})$, la fase del sistema, y demuestre que es idéntica a $\angle H(e^{j\omega})$.

5.67. Demuestre la validez de las dos afirmaciones siguientes:

(a) La convolución de dos secuencias de fase mínima es también una secuencia de fase mínima.

(b) La suma de dos secuencias de fase mínima no es necesariamente una secuencia de fase mínima. Concretamente, proporcione un ejemplo con una secuencia de fase mínima y otra de fase no mínima que se puedan formar como la suma de dos secuencias de fase mínima.

5.68. Una secuencia se define mediante la relación:

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]h[n+m] = h[n] * h[-n],$$

siendo $h[n]$ una secuencia de fase mínima y

$$r[n] = \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{4}{3}2^n u[-n-1].$$

(a) Determine $R(z)$ y dibuje su diagrama polo–cero.

(b) Determine la secuencia de fase mínima $h[n]$ salvo un factor de escala de ± 1. Determine también la transformada Z de $h[n]$, $H(z)$.

5.69. Una secuencia de *fase máxima* es una secuencia estable cuya transformada Z tiene todos sus polos y ceros en el *exterior* de la circunferencia unidad.

(a) Demuestre que las secuencias de fase máxima son necesariamente anticausales, es decir, que son cero para $n > 0$.

Las secuencias FIR de fase máxima se pueden convertir en causales incluyendo un retardo finito. Una secuencia causal de duración finita de fase máxima con un determinado módulo de su transformada de Fourier se puede obtener reflejando todos los ceros de la transformada Z de una secuencia de fase mínima a sus posiciones inversas conjugadas en el exterior de la circunferencia unidad. Es decir, podemos expresar la transformada Z de una secuencia de fase máxima causal y de duración finita como

$$H_{\text{máx}}(z) = H_{\text{mín}}(z)H_{\text{ap}}(z).$$

Obviamente, este proceso asegura que $|H_{\text{máx}}(e^{j\omega})| = |H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$. Ahora, la transformada Z de una secuencia de fase mínima de duración finita se puede expresar como

$$H_{\text{mín}}(z) = h_{\text{mín}}[0]\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1}), \qquad |c_k| < 1.$$

(b) Obtenga una expresión de la función de transferencia paso todo necesaria para reflejar todos los ceros de $H_{\text{mín}}(z)$ a sus posiciones en el exterior de la circunferencia unidad.

(c) Demuestre que $H_{\text{máx}}(z)$ se puede expresar como

$$H_{\text{máx}}(z) = z^{-M}H_{\text{mín}}(z^{-1}).$$

(d) Utilizando el resultado del apartado (c), exprese la secuencia de fase máxima $h_{\text{máx}}[n]$ en función de $h_{\text{mín}}[n]$.

5.70. No es posible obtener un sistema inverso causal y estable (un compensador perfecto) de un sistema de fase no mínima. En este problema se estudia una solución para compensar únicamente el módulo de la respuesta en frecuencia de un sistema de fase no mínima.

Suponga que un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo de fase no mínima y con función de transferencia racional $H(z)$ se conecta en cascada con un sistema compensador $H_c(z)$, como se muestra en la Figura P5.70.

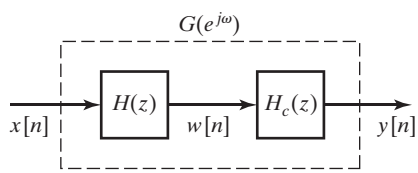


Figura P5.70

(a) ¿Cómo se debería escoger $H_c(z)$ de forma que sea estable y causal, y que el módulo de la respuesta efectiva global sea la unidad? (No olvide que $H(z)$ se puede expresar siempre como $H(z) = H_{\text{ap}}(z)H_{\text{mín}}(z)$.)

(b) ¿Cuáles son las correspondientes funciones de transferencia $H_c(z)$ y $G(z)$?

(c) Suponiendo que

$$H(z) = (1-0{,}8e^{j0{,}3\pi}z^{-1})(1-0{,}8e^{-j0{,}3\pi}z^{-1})(1-1{,}2e^{j0{,}7\pi}z^{-1})(1-1{,}2e^{-j0{,}7\pi}z^{-1}).$$

Obtenga $H_{\text{mín}}(z)$, $H_{\text{ap}}(z)$, $H_c(z)$ y $G(z)$ en este caso, y dibuje los diagramas polo–cero de cada función de transferencia.

5.71. Sea $h_{\text{mín}}[n]$ una secuencia de fase mínima cuya transformada Z es $H_{\text{mín}}(z)$. Si $h[n]$ es una secuencia causal de fase no mínima y el módulo de su transformada de Fourier es igual a $|H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$, demuestre que

$$|h[0]| < |h_{\text{mín}}[0]|.$$

(Utilice el teorema del valor inicial junto con la Ecuación (5.93).)

5.72. Una de las propiedades más interesantes e importantes de las secuencias de fase mínima es la propiedad de mínimo retardo de la energía. Es decir, para todas las secuencias causales que tienen el mismo módulo de su transformada de Fourier $|H(e^{j\omega})|$, la cantidad

$$E[n] = \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2$$

es máxima para todo $n \geq 0$ cuando $h[n]$ es la secuencia de fase mínima. Este resultado se puede demostrar como sigue: sea $h_{\text{mín}}[n]$ una secuencia de fase mínima cuya transformada Z es $H_{\text{mín}}(z)$. Sea además z_k un cero de $H_{\text{mín}}(z)$. $H_{\text{mín}}(z)$ se puede expresar entonces como

$$H_{\text{mín}}(z) = Q(z)(1-z_k z^{-1}), \qquad |z_k| < 1,$$

siendo $Q(z)$ de nuevo de fase mínima. Consideremos ahora otra secuencia $h[n]$ cuya transformada Z, $H(z)$, cumple que

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\text{mín}}(e^{j\omega})|$$

y tal que $H(z)$ es cero en $z = 1/z_k^*$ en lugar de en z_k.

(a) Exprese $H(z)$ en función de $Q(z)$.

(b) Exprese $h[n]$ y $h_{\text{mín}}[n]$ en función de la secuencia de fase mínima $q[n]$ que tiene $Q(z)$ como transformada Z.

(c) Para comparar la distribución de la energía de las dos secuencias, demuestre que

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^{n} |h_{\text{mín}}[m]|^2 - \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 = (1-|z_k|^2)|q[n]|^2.$$

(d) Utilizando el resultado del apartado (c), justifique que

$$\sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^{n} |h_{\text{mín}}[m]|^2 \qquad \text{para todo } n.$$

5.73. Un sistema paso todo causal $H_{\text{ap}}(z)$ tiene como entrada $x[n]$ y como salida $y[n]$.

(a) Si $x[n]$ es una secuencia real de fase mínima (lo que implica también que $x[n] = 0$ para $n < 0$), demuestre utilizando la Ecuación (5.108) que

$$\sum_{k=0}^{n} |x[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} |y[k]|^2. \qquad \text{(P5.73-1)}$$

(b) Demuestre que la Ecuación (P5.73-1) es válida incluso cuando $x[n]$ no es de fase mínima, siempre que sea cero para $n < 0$.

5.74. En el diseño de filtros en tiempo continuo o en tiempo discreto se aproxima muchas veces una determinada característica de amplitud sin tener en cuenta la fase. Por ejemplo, las técnicas estándar de diseño de filtros paso bajo y paso banda se obtienen teniendo en cuenta sólo consideraciones sobre la característica de amplitud.

En muchos problemas de filtrado es preferible que la característica de fase sea cero o lineal. Utilizando filtros causales es imposible obtener fase cero. Sin embargo, en muchas aplicaciones de filtrado no es necesario que la respuesta al impulso del filtro sea cero para $n < 0$ si el procesamiento no se va a realizar en tiempo real.

Una técnica utilizada comúnmente en filtrado en tiempo discreto cuando los datos que se filtran son de duración finita y están almacenados, por ejemplo, en la memoria de un computador, es procesar los datos en forma progresiva y luego en forma regresiva utilizando el mismo filtro.

Sea $h[n]$ la respuesta al impulso de un filtro causal con una característica de fase arbitraria. Supongamos que $h[n]$ es real, y sea $H(e^{j\omega})$ su transformada de Fourier. Sea $x[n]$ los datos que deseamos filtrar.

(a) *Método A:* la operación de filtrado se realiza como indica la Figura P5.74-1.

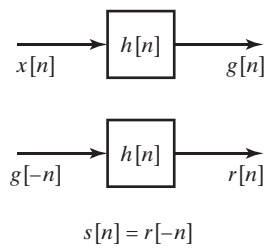


Figura P5.74-1

1. Determine la respuesta al impulso global $h_1[n]$ que relaciona $x[n]$ con $s[n]$, y demuestre que es de fase cero.
2. Determine $|H_1(e^{j\omega})|$, y expréselo en función de $|H(e^{j\omega})|$ y de $\angle H(e^{j\omega})$.

(b) *Método B:* como se muestra en la Figura P5.74-2, se procesa $x[n]$ mediante el filtro $h[n]$ para obtener $g[n]$. Se procesa también $x[n]$ con el mismo filtro $h[n]$ en sentido regresivo para obtener $r[n]$. La salida $y[n]$ se obtiene como la suma de $g[n]$ y $r[-n]$. La composición de estas operaciones se puede representar mediante un filtro con entrada $x[n]$, salida $y[n]$ y respuesta al impulso $h_2[n]$.

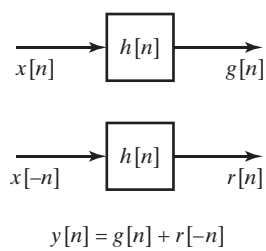


Figura P5.74-2

1. Demuestre que el filtro compuesto $h_2[n]$ es de fase cero.
2. Determine $|H_2(e^{j\omega})|$, y expréselo en función de $|H(e^{j\omega})|$ y de $\angle H(e^{j\omega})$.

(c) Suponga que tenemos una secuencia de duración finita sobre la que se desea realizar una operación de filtrado paso banda con fase cero. Suponga además que tenemos el filtro paso banda $h[n]$, cuya respuesta en frecuencia se especifica en la Figura P5.74-3. La respuesta en amplitud es como se desea, pero la fase es lineal. Para obtener fase cero, se puede utilizar el método A o el B. Determine y dibuje $|H_1(e^{j\omega})|$ y $|H_2(e^{j\omega})|$. A partir de estos resultados, ¿qué método utilizaría para realizar la operación de filtrado paso

banda? Explique por qué. De forma más general, si $h[n]$ tiene la respuesta en amplitud deseada pero una característica de fase no lineal ¿qué método es preferible para obtener una característica de fase cero?

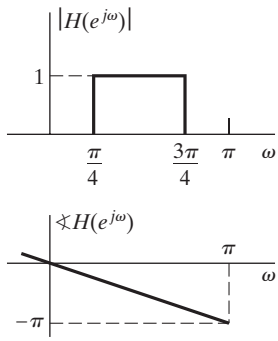


Figura P5.74-3

5.75. Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique concisamente el razonamiento realizado. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.
Afirmación: si la función de transferencia $H(z)$ de un sistema tiene polos en cualquier lugar excepto en el origen o en el infinito, dicho sistema no puede ser de fase cero ni de fase lineal generalizada.

5.76. La Figura P5.76 muestra los ceros de una función de transferencia $H(z)$ de un filtro FIR real, causal y de fase lineal. Todos los ceros indicados representan factores de la forma $(1-az^{-1})$. Los correspondientes polos en $z=0$ para esos factores no se muestran en la figura. El filtro tiene aproximadamente una ganancia unidad en su banda de paso.

(a) Uno de los ceros tiene módulo 0,5 y fase de 153 grados. Precise la posición exacta de todos los ceros que se puedan determinar con esta información.

(b) La función de transferencia $H(z)$ se utiliza en el sistema para tratamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo que se muestra en la Figura 4.10, con un periodo de muestreo de $T = 0{,}5$ milisegundos. Suponga que la entrada en tiempo continuo $X_c(j\Omega)$ es de banda limitada y que la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta para evitar el solapamiento ¿Cuánto vale el retardo (en milisegundos) del sistema completo, suponiendo que las conversiones C/D y D/C requieren una cantidad de tiempo despreciable?

(c) Dado el sistema del apartado (b), dibuje la respuesta en frecuencia efectiva global, $20\log_{10}|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ para $0 \le \Omega \le \pi/T$ tan exactamente como sea posible utilizando la información suministrada. Utilizando los datos de la Figura P5.76, estime las frecuencias en las que $H_{\text{eff}}(j\Omega) = 0$, y márquelas en su dibujo.

5.77. Una señal $x[n]$ se procesa con un sistema lineal e invariante con el tiempo $H(z)$ y posteriormente se submuestrea con un factor de 2 para obtener la señal $y[n]$, como se indica en la Figura P5.77. Como se muestra también en la misma figura, $x[n]$ se submuestrea primero y se procesa con un sistema lineal e invariante con el tiempo $G(z)$ obteniéndose $r[n]$.

(a) Especifique una selección de $H(z)$ (diferente de la constante) y de $G(z)$, de forma que $r[n] = y[n]$ para cualquier $x[n]$ arbitraria.

(b) Especifique una selección de $H(z)$ para que no se pueda obtener $G(z)$ de forma que $r[n] = y[n]$ para cualquier $x[n]$ arbitraria.

(c) Determine un conjunto general de condiciones sobre $H(z)$ de forma que se pueda determinar $G(z)$ para que $r[n] = y[n]$ para cualquier $x[n]$ arbitraria. Las condiciones no deberían depender de $x[n]$. Si desarrolla en primer lugar las condiciones en función de $h[n]$, reformúlelas en función de $H(z)$.

(d) Para las condiciones determinadas en el apartado (c), exprese $g[n]$ en función de $h[n]$ para que se cumpla que $r[n] = y[n]$.

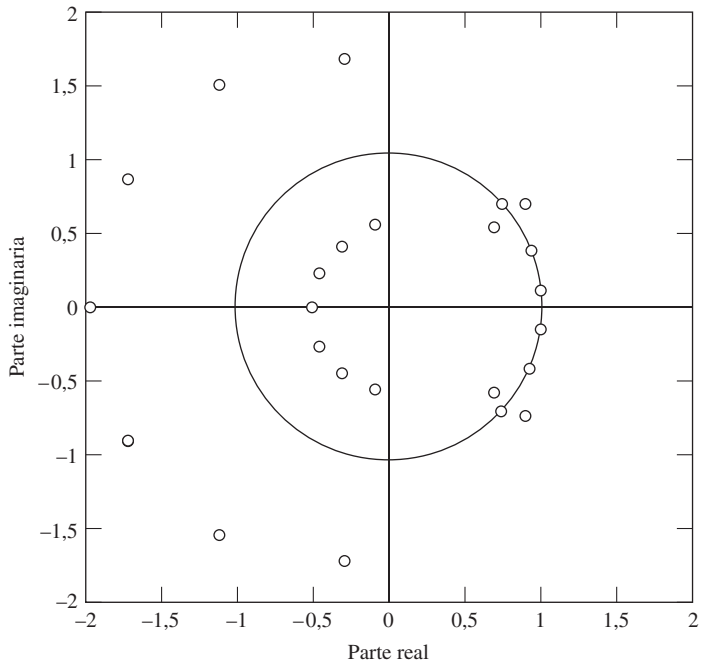


Figura P5.76

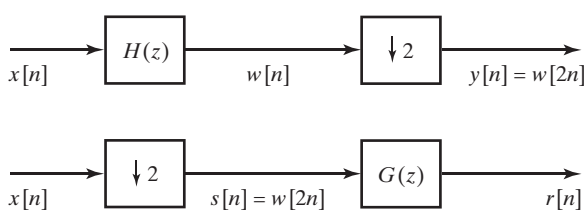


Figura P5.77

5.78. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo en tiempo discreto con una respuesta al impulso real $h[n]$. Se desea obtener $h[n]$, o equivalentemente, la función de transferencia $H(z)$ a partir de la autocorrelación $c_{hh}[\ell]$ de la respuesta al impulso. La definición de autocorrelación es

$$c_{hh}[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[k+\ell].$$

(a) Si el sistema $h[n]$ es causal y estable, ¿se puede recuperar de forma única $h[n]$ a partir de $c_{hh}[\ell]$? Justifique su respuesta.

(b) Suponga que $h[n]$ es causal y estable y que además, se sabe que la función de transferencia es de la forma

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

para valores a_k finitos. ¿Se puede recuperar de forma única $h[n]$ a partir de $c_{hh}[\ell]$? Justifique claramente su respuesta.

5.79. Sean $h[n]$ y $H(z)$ respectivamente la respuesta al impulso y la función de transferencia de un sistema paso todo lineal, invariante con el tiempo y estable. Sea $h_i[n]$ la respuesta al impulso del sistema inverso lineal e invariante con el tiempo (estable). Suponiendo que $h[n]$ es real, demuestre que $h_i[n] = h[-n]$.

5.80. Considere una secuencia real $x[n]$ tal que $X(e^{j\omega}) = 0$ para $\frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi$. Un valor de la secuencia $x[n]$ puede haberse alterado, y se desea recuperarlo de forma exacta o aproximada. Sea $g[n]$ la señal alterada,

$$g[n] = x[n] \qquad \text{para } n \neq n_0,$$

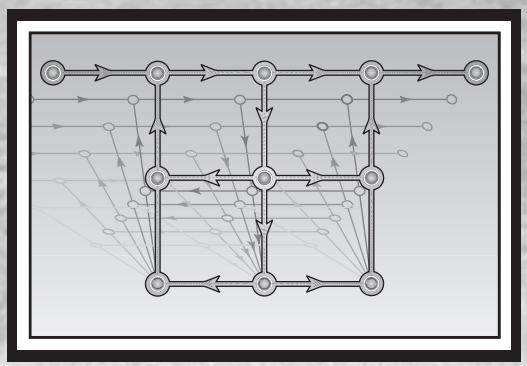
con $g[n_0]$ real pero no relacionada con $x[n_0]$. En los dos casos que siguen, especifique un algoritmo práctico para recuperar de forma exacta o aproximada $x[n]$ a partir de $g[n]$.

(a) No se sabe el valor exacto de n_0 pero se sabe que es un número impar.
(b) No se sabe nada sobre n_0.

5.81. Demuestre que si $h[n]$ es un filtro FIR de N puntos tal que $h[n] = h[N-1-n]$ y $H(z_0) = 0$, entonces $H(1/z_0) = 0$. Esto demuestra que incluso los filtros FIR de fase lineal tienen ceros que son imágenes inversas (si $h[n]$ es real, los ceros serán todos reales o aparecerán en posiciones complejas conjugadas).

6

Estructuras de sistemas en tiempo discreto



6.0. INTRODUCCIÓN

Como vimos en el Capítulo 5, un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia racional tiene la propiedad de que la entrada y la salida satisfacen una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes. Como la función de transferencia es la transformada Z de la respuesta al impulso, y además la ecuación en diferencias que satisfacen la entrada y la salida se puede determinar por simple inspección de la función de transferencia, se deduce que la ecuación en diferencias, la respuesta al impulso y la función de transferencia son caracterizaciones equivalentes de la relación entrada–salida de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo. Cuando este tipo de sistemas se realiza utilizando hardware digital o analógico en tiempo discreto, la representación mediante la ecuación en diferencias o la función de transferencia se deben convertir en un algoritmo o estructura que se pueda realizar utilizando la tecnología deseada. Como veremos en este capítulo, los sistemas descritos por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes se pueden representar mediante estructuras formadas por la interconexión de operaciones básicas como la suma, la multiplicación por una constante o el retardo. La implementación concreta de esas estructuras depende de la tecnología que se vaya a utilizar.

Como ejemplo de los cálculos que hay que realizar en una ecuación en diferencias, consideremos el sistema descrito por la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}}, \qquad |z| > |a|. \tag{6.1}$$

La respuesta al impulso de este sistema es

$$h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1], \tag{6.2}$$

y la ecuación en diferencias de primer orden satisfecha por las secuencias de entrada y de salida es

$$y[n] - a y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]. \tag{6.3}$$

La Ecuación (6.2) proporciona una fórmula para la respuesta al impulso de este sistema. No obstante, como la respuesta al impulso del sistema es de duración infinita, no es posible realizarlo mediante convolución discreta, incluso en el caso de que sólo deseáramos calcular la salida en un intervalo de duración finita. No resultaría eficiente, ya que el coste computacional necesario para obtener $y[n]$ crecería con n. Sin embargo, si reescribimos la Ecuación (6.3) de la siguiente forma

$$y[n] = ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1] \tag{6.4}$$

encontramos la base de un algoritmo para el cálculo recursivo de la salida en cualquier instante n en función de la salida anterior $y[n-1]$, de la muestra actual de la entrada $x[n]$, y de la muestra anterior de la entrada $x[n-1]$. Como se indicó en la Sección 2.5, si suponemos además condiciones de reposo inicial (es decir, si $x[n] = 0$ para $n < 0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < 0$), y utilizamos la Ecuación (6.4) como fórmula de recurrencia para calcular la salida a partir de los valores anteriores de dicha salida y de los valores presentes y pasados de la entrada, el sistema será lineal e invariante con el tiempo. Se puede aplicar un procedimiento similar al caso más general de una ecuación en diferencias de orden N. Sin embargo, el algoritmo que sugiere la Ecuación (6.4) y su generalización a ecuaciones en diferencias de orden superior no es el único algoritmo computacional posible para realizar un sistema concreto, y a menudo resulta no ser el más deseable. Como veremos, existe una variedad ilimitada de estructuras computacionales que producen la misma relación entre la secuencia de entrada $x[n]$ y la secuencia de salida $y[n]$.

En el resto de este capítulo consideraremos los aspectos importantes de la realización de sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo. Presentaremos en primer lugar descripciones basadas en diagramas de bloques o en diagramas de flujo de señales. Estas descripciones representan las estructuras o redes computacionales que realizan las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes que verifican los sistemas lineales, invariantes con el tiempo y causales.[1] Combinando adecuadamente operaciones algebraicas y manejando las representaciones de diagramas de bloques se pueden obtener varias estructuras básicas equivalentes para realizar un determinado sistema lineal, invariante con el tiempo y causal incluyendo las estructuras en celosía. Aunque dos estructuras pueden ser equivalentes con respecto a su relación entrada-salida, representando con precisión infinita los coeficientes y las variables, su comportamiento puede ser claramente diferente cuando la precisión numérica está limitada. Esta es la principal razón de que resulte de interés estudiar diferentes estructuras de realización. Los efectos de la representación con precisión finita de los coeficientes del sistema y los efectos de truncamiento o redondeo en los cálculos intermedios se consideran en las últimas secciones de este capítulo.

6.1. REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES MEDIANTE DIAGRAMAS DE BLOQUES

La realización de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo mediante la evaluación iterativa de una fórmula de recurrencia obtenida a partir de una ecuación en diferencias, requiere que estén disponibles los valores retardados de la salida, de la entrada y de las secuencias intermedias. El retardo de los valores de la secuencia implica la necesidad de almacenar los valores pasados de la misma.

[1] Estos diagramas de flujo se denominan también "redes", por analogía con los diagramas de circuitos eléctricos. Para denominar a las representaciones gráficas de las ecuaciones en diferencias, utilizaremos indistintamente los términos grafo de flujo, estructura y red.

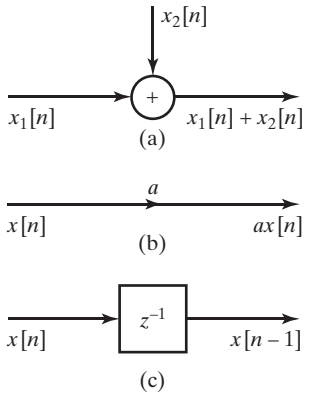


Figura 6.1 Símbolos de diagramas de bloques. (a) Suma de dos secuencias. (b) Multiplicación de una secuencia por una constante. (c) Retardo unidad.

Además, hay que proporcionar medios para multiplicar por coeficientes los valores retardados de la secuencia, así como para sumar los productos resultantes. Por tanto, los elementos básicos necesarios para la realización de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo son sumadores, multiplicadores y memoria para almacenar los valores retardados de la secuencia. La interconexión de estos elementos básicos se representa de forma conveniente utilizando diagramas de bloques con los símbolos básicos que se muestran en la Figura 6.1. La Figura 6.1(a) representa la suma de dos secuencias. En notación general de diagramas de bloques, un sumador puede tener cualquier número de entradas. Sin embargo, en casi todas las realizaciones prácticas, los sumadores tienen sólo dos entradas. En todos los diagramas de este capítulo indicaremos esto de forma explícita limitando su número de entradas como se indica en la Figura 6.1(a). La Figura 6.1(b) muestra la multiplicación de una secuencia por una constante y la Figura 6.1(c) muestra un retardo de una muestra. En las implementaciones digitales, la operación de retardo se puede hacer utilizando un registro de almacenamiento por cada unidad de retardo que se necesite. Por esta razón, el operador de la Figura 6.1(c) se denomina algunas veces *registro de retardo*. En realizaciones analógicas en tiempo discreto, como filtros de condensadores conmutados, los retardos se realizan mediante dispositivos de almacenamiento de carga. El sistema de retardo unidad se representa en la Figura 6.1(c) mediante su función de transferencia, z^{-1}. Los retardos de más de una muestra se pueden representar también como se muestra en la Figura 6.1(c), utilizando la función de transferencia z^{-M}, siendo M el número de muestras de retardo. Sin embargo, la realización real de M muestras de retardo se puede hacer de forma general empleando M retardos unidad. Si la realización utiliza circuitos integrados, los retardos unidad podrían hacerse empleando un registro de desplazamiento temporizado con la frecuencia de muestreo de la señal de entrada. En una implementación software, M retardos unidad en cascada se realizarían con M registros de memoria consecutivos.

Ejemplo 6.1 Representación mediante diagramas de bloques de una ecuación en diferencias

Como ejemplo de la representación de una ecuación en diferencias utilizando los elementos de la Figura 6.1, consideremos la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]. \tag{6.5}$$

La correspondiente función de transferencia es

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}. \tag{6.6}$$

La Figura 6.2 muestra la representación mediante diagramas de bloques de la realización del sistema representado por la Ecuación (6.5). Este diagrama muestra una representación gráfica de un algoritmo computacional para realizar el sistema. Cuando el sistema se realiza en un computador de propósito general o con un chip para tratamiento digital de señales, las estructuras de redes como la que muestra la Figura 6.2 sirven como base de un programa que implementa el sistema. Si el sistema se realiza con componentes discretos o como un sistema completo mediante tecnología VLSI (*Very Large-Scale Integration*), el diagrama de bloques es la base para determinar la arquitectura hardware del sistema. En ambos casos, los diagramas como el que se muestra en la Figura 6.2 indican explícitamente que hay que proporcionar espacio de almacenamiento para las variables de retardo (en este caso, $y[n-1]$ e $y[n-2]$) y también para los coeficientes de la ecuación en diferencias (en este caso, a_1, a_2 y b_0). Además, en la Figura 6.2 podemos ver que la secuencia de salida $y[n]$ se calcula formando en primer lugar los productos $a_1y[n-1]$ y $a_2y[n-2]$, sumándolos y finalmente, sumando este resultado con $b_0x[n]$. Por tanto, la Figura 6.2 muestra de forma conveniente la complejidad del algoritmo computacional asociado, los pasos de dicho algoritmo y el hardware necesario para realizar el sistema.

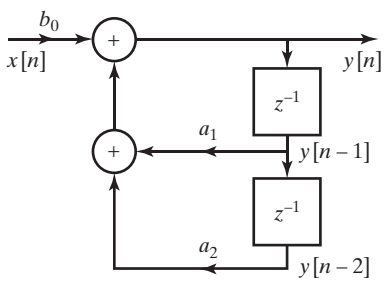


Figura 6.2 Ejemplo de representación mediante un diagrama de bloques de una ecuación en diferencias.

El Ejemplo 6.1 se puede generalizar a ecuaciones en diferencias de orden superior de la forma[2]

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \tag{6.7}$$

cuya función de transferencia correspondiente es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{6.8}$$

[2]La forma utilizada en capítulos anteriores de una ecuación general en diferencias con coeficientes constantes era

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

En el resto del libro resultará más conveniente utilizar la forma de la Ecuación (6.7) donde el coeficiente de $y[n]$ está normalizado a la unidad y los coeficientes asociados con la salida retardada aparecen con signo positivo cuando se desplazan al miembro derecho de la ecuación (véase la Ecuación (6.9)).

Reescribiendo la Ecuación (6.7) como una fórmula de recurrencia para obtener $y[n]$ en función de una combinación lineal de valores anteriores de la secuencia de salida y del valor actual y los valores anteriores de la secuencia de entrada se llega a la relación

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{6.9}$$

El diagrama de bloques de la Figura 6.3 es una representación gráfica de la Ecuación (6.9). Más concretamente, representa la pareja de ecuaciones

$$v[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \tag{6.10a}$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n]. \tag{6.10b}$$

Al utilizar sólo sumadores con dos entradas, se está suponiendo que las sumas se realizan en un orden específico. Es decir, la Figura 6.3 indica que deben calcularse los productos $a_N y[n-N]$ y $a_{N-1} y[n-N+1]$ sumarlos posteriormente y la suma resultante añadírsela a $a_{N-2} y[n-N+2]$, y así sucesivamente. Tras calcular $y[n]$, las variables de retardo se deben actualizar introduciendo $y[n-N+1]$ en el registro que tiene $y[n-N]$, y así sucesivamente, de forma que el valor $y[n]$ recién calculado se transformará en el valor $y[n-1]$ en la siguiente iteración.

Los diagramas de bloques se pueden reestructurar o modificar de diversas maneras sin cambiar la función de transferencia global. Cada reestructuración representa un algoritmo computacional *diferente* para realizar el *mismo* sistema. Por ejemplo, el diagrama de bloques de la Figura 6.3 se puede ver como una combinación en cascada de dos sistemas. El primero de ellos realiza el cálculo de $v[n]$ a partir de $x[n]$ y el segundo representa el cálculo de $y[n]$ a partir de $v[n]$. Como cada uno de los dos sistemas es lineal e invariante con el tiempo (suponiendo que los registros de retardo están en condiciones de reposo inicial), es posible invertir el orden en el que los dos sistemas se encadenan, como muestra la Figura 6.4, sin afectar a la función de transferencia global. En la Figura 6.4 hemos supuesto que $M = N$. Esto no supone pérdida de generalidad, puesto que si $M \neq N$, algunos de los coeficientes a_k o b_k de la figura serían cero, y el diagrama se podría simplificar.

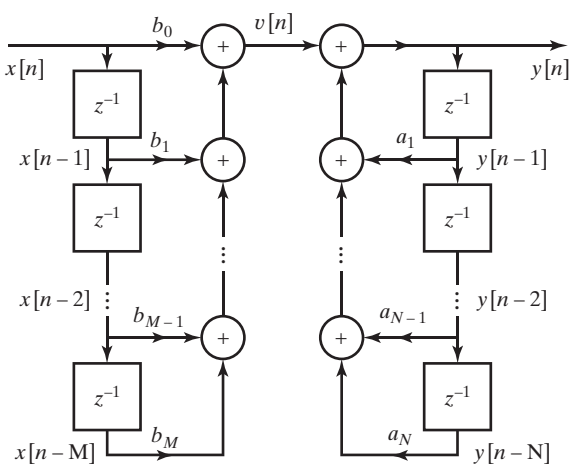


Figura 6.3 Representación mediante diagrama de bloques de una ecuación en diferencias general de orden N.

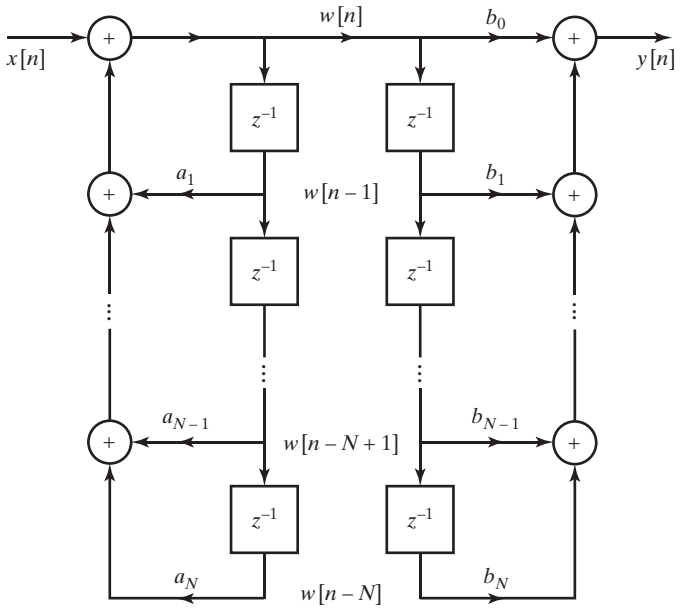


Figura 6.4 Reordenación del diagrama de bloques de la Figura 6.3. Se supone que $N = M$. Si $N \neq M$, algunos de los coeficientes serán cero.

En términos de la función de transferencia $H(z)$ de la Ecuación (6.8), la Figura 6.3 se puede ver como una realización de $H(z)$ mediante la descomposición

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \right) \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right) \tag{6.11}$$

o, de forma equivalente, mediante la pareja de ecuaciones

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right) X(z), \tag{6.12a}$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \right) V(z). \tag{6.12b}$$

Por otra parte, la Figura 6.4 representa $H(z)$ como

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \right) \tag{6.13}$$

o, lo que es lo mismo, mediante las ecuaciones

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \right) X(z), \tag{6.14a}$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right) W(z). \tag{6.14b}$$

En el dominio del tiempo, la Figura 6.4 y, equivalentemente, las Ecuaciones (6.14a) y (6.14b) se pueden representar mediante la pareja de ecuaciones

$$w[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n], \tag{6.15a}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k]. \tag{6.15b}$$

Los diagramas de bloques de las Figuras 6.3 y 6.4 tienen varias diferencias importantes. En la Figura 6.3, se realizan primero los ceros de $H(z)$, representados por $H_1(z)$, y después los polos, representados por $H_2(z)$. En la Figura 6.4 los polos se realizan primero, seguidos por los ceros. Teóricamente, el orden de realización no afecta a la función de transferencia global. Sin embargo, como veremos, cuando una ecuación en diferencias se realiza utilizando aritmética de precisión finita, puede haber diferencias significativas entre dos sistemas que son teóricamente equivalentes bajo el supuesto de aritmética de precisión infinita del sistema de los números reales. Otro punto importante está relacionado con el número de elementos de retardo de los dos sistemas. Como puede verse en los esquemas, los sistemas de las Figuras 6.3 y 6.4 tienen en total $(N+M)$ elementos de retardo. Sin embargo, el diagrama de bloques de la Figura 6.4 se puede modificar si tenemos en cuenta que es la misma señal, $w[n]$, la que se almacena en las dos cadenas de elementos de retardo de la figura. En consecuencia las dos cadenas pueden convertirse en una sola como indica la Figura 6.5.

El número total de elementos de retardo en la Figura 6.5 es menor que en las Figuras 6.3 o 6.4, y de hecho es el mínimo necesario para realizar un sistema con la función de transferencia de la Ecuación (6.8). Concretamente, el mínimo número necesario de elementos de retardo es, en general, $\max(N,M)$. Una realización que utiliza el mínimo número de elementos de retardo se denomina comúnmente realización en *forma canónica*. La realización del diagrama de bloques en forma no canónica que muestra la Figura 6.3 se denomina realización en *forma directa I* del sistema, ya que es una realización directa de la ecuación en diferencias que satisfacen la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$. Esta realización se puede obtener directamente de la función de transferencia por simple inspección. La Figura 6.5 se denomina realización en *forma directa II* o en *forma canónica directa*. Sabiendo que la Figura 6.5 es una estructura de realización apropiada de la función de transferencia $H(z)$ dada por la Ecuación (6.8), podemos pasar de forma directa de la función de transferencia al diagrama de bloques (o ecuación en diferencias equivalente), y viceversa.

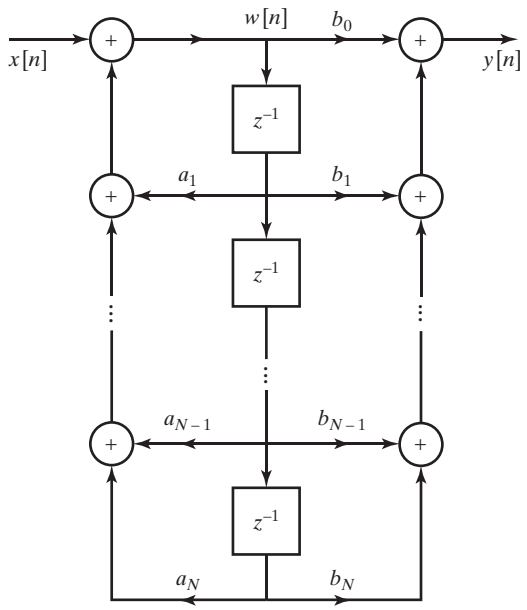


Figura 6.5 Combinación de retardos en la Figura 6.4.

Ejemplo 6.2 Realización en forma directa I y forma directa II de un sistema lineal e invariante con el tiempo

Consideremos un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}9z^{-2}}. \tag{6.16}$$

Comparando esta función de transferencia con la Ecuación (6.8) podemos ver que $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $a_1 = +1{,}5$ y $a_2 = -0{,}9$, por lo que de la Figura 6.3 se desprende que se puede realizar el sistema en forma directa I como se muestra en la Figura 6.6. Teniendo en cuenta la Figura 6.5, se puede realizar también la función de transferencia en forma directa II, como se muestra en la Figura 6.7. En ambos casos, nótese que los coeficientes de las ramas de realimentación del diagrama de bloques tienen signos opuestos en los coeficientes correspondientes a z^{-1} y z^{-2} de la Ecuación (6.16). Aunque este cambio de signo resulte a veces confuso, es esencial recordar que los coeficientes de realimentación $\{a_k\}$ siempre tienen signo opuesto en la ecuación en diferencias respecto a su signo en la función de transferencia.

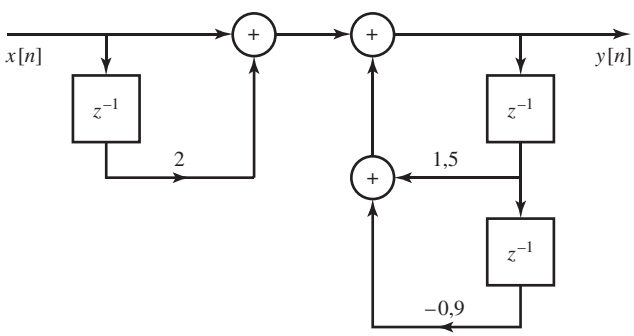


Figura 6.6 Realización en forma directa I de la Ecuación (6.16).

Observe también que la forma directa II requiere sólo dos retardos para implementar $H(z)$, uno menos que en la realización en forma directa I.

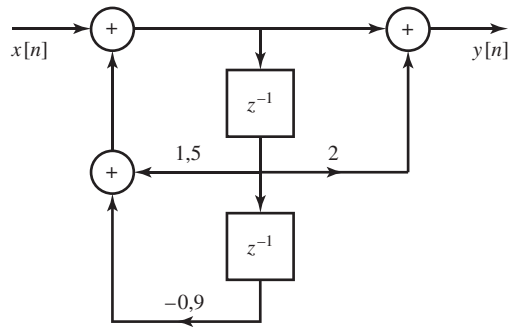


Figura 6.7 Realización en forma directa II de la Ecuación (6.16).

En la exposicion anterior, hemos desarrollado dos diagramas de bloques equivalentes para realizar un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia dada por la Ecuación (6.8). Estos diagramas de bloques, que representan diferentes algoritmos computacionales para implementar el mismo sistema, se han obtenido mediante operaciones basadas en la linealidad del sistema y en propiedades algebraicas de la función de transferencia. De hecho, como las ecuaciones en diferencias básicas que representan a los sistemas lineales e invariantes con el tiempo son lineales, se pueden obtener conjuntos diferentes de ecuaciones en diferencias, simplemente realizando transformaciones lineales de las variables de dichas ecuaciones. Por tanto, existe un número ilimitado de realizaciones equivalentes de un sistema dado. En la Sección 6.3, utilizando un método similar al empleado en esta sección, desarrollaremos otras estructuras equivalentes importantes y útiles para implementar un determinado sistema cuya función de transferencia tiene la forma de la Ecuación (6.8). Antes de presentar estas otras formas, sin embargo, es conveniente presentar los grafos de flujo de señales como una alternativa a los diagramas de bloques para representar ecuaciones en diferencias.

6.2. REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES MEDIANTE GRAFOS DE FLUJO DE SEÑALES

Una representación mediante un grafo de flujo de señales de una ecuación en diferencias es esencialmente la misma representación que un diagrama de bloques, excepto por unas pocas diferencias de notación. Formalmente, un grafo de flujo de señales es una red de arcos dirigidos que conectan nodos. Asociada a cada nodo existe una variable o valor del nodo. El valor asociado con el nodo k se puede indicar como w_k, o, como las variables de los nodos de los filtros digitales son generalmente secuencias, lo indicaremos explícitamente con la notación $w_k[n]$. El arco (j,k) se origina en el nodo j y termina en el nodo k, y la dirección de j a k se indica mediante una flecha en el arco. Todo esto se muestra en la Figura 6.8. Cada arco tiene una señal de entrada y una señal de salida. La señal de entrada del nodo j al arco (j,k) es el valor del nodo $w_j[n]$. En un grafo lineal de flujo de señales, que es el único tipo que consideraremos, la salida de un arco es una transformación lineal de la entrada a dicho arco. El ejemplo más simple es una ganancia constante, es decir, cuando la salida del arco es simplemente una constante multiplicada por la entrada del arco. La operación lineal representada por el arco se indica generalmente

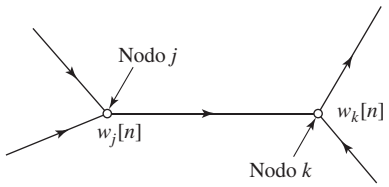


Figura 6.8 Ejemplo de nodos y arcos en un grafo de flujo de señales.

cerca de la flecha que marca la dirección de dicho arco. Cuando se omite una indicación explícita de la operación que realiza el arco, se entiende que se aplica una ganancia de transmisión unidad, o que se realiza la transformación identidad. Por definición, el valor en cada nodo del grafo es la suma de las salidas de todos los arcos que entran al nodo.

Para completar la definición de la notación de los grafos de flujo de señales, definimos dos tipos especiales de nodos. Los *nodos fuente* son aquellos que no tienen arcos de entrada. Se utilizan para representar la aplicación de entradas, o fuentes de señal, externas en el grafo. Los *nodos sumidero* son nodos que sólo tienen arcos entrantes y se utilizan para extraer las salidas de un grafo. El grafo de flujo de señales de la Figura 6.9 muestra los nodos fuente, los nodos sumidero y los arcos de ganancia simple. Las ecuaciones lineales que representa la figura son las siguientes:

$$\begin{aligned} w_1[n] &= x[n] + aw_2[n] + bw_2[n], \\ w_2[n] &= cw_1[n], \\ y[n] &= dx[n] + ew_2[n]. \end{aligned} \tag{6.17}$$

La suma, la multiplicación por una constante y el retardo son las operaciones básicas necesarias para implementar una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes. Como todas son operaciones lineales, es posible utilizar la notación basada en grafos de flujo de señales para la realización de sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo. Como un ejemplo de la forma en la que los conceptos de flujo de señales que se acaban de presentar se pueden aplicar a la representación de una ecuación en diferencias, consideremos el diagrama de bloques de la Figura 6.10(a), que es la realización en forma directa II del sistema con función de transferencia dada por la Ecuación (6.1). La Figura 6.10(b) muestra el grafo de flujo de señales correspondiente a este sistema. En la representación mediante la ecuación en diferencias las variables de los nodos son secuencias. En la Figura 6.10(b), el nodo 0 es un nodo fuente cuyo valor está determinado por la secuencia de entrada $x[n]$, y el nodo 5 es un nodo sumidero cuyo valor se denomina $y[n]$. Nótese que los nodos fuente y sumidero se conectan con el resto del grafo mediante arcos de ganancia unidad para indicar claramente la entrada y la salida al sistema. Obviamente, los nodos 3 y 5 tienen valores idénticos. El arco extra de ganancia unidad se utiliza simplemente para resaltar el hecho de que el nodo 3 es la salida del sistema. En la Figura 6.10(b) todos los arcos excepto uno (el arco de retardo (2,4)) se pueden representar mediante arcos de ganancia simple: es decir, la señal de salida es una constante multiplicada por la señal de entrada. Un retardo no se puede representar en el dominio del tiempo por un arco de ganancia. Sin embargo, la representación mediante la transformada Z de un retardo unidad es la multiplicación por el factor z^{-1}. Si representáramos las ecuaciones en diferencias mediante sus correspondientes ecuaciones en transformada Z, todos los arcos

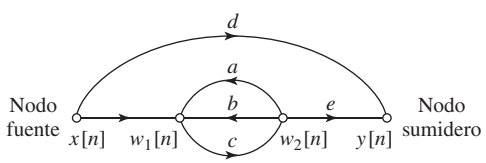


Figura 6.9 Ejemplo de diagrama de flujo de señales en el que se muestran nodos fuente y nodos sumidero.

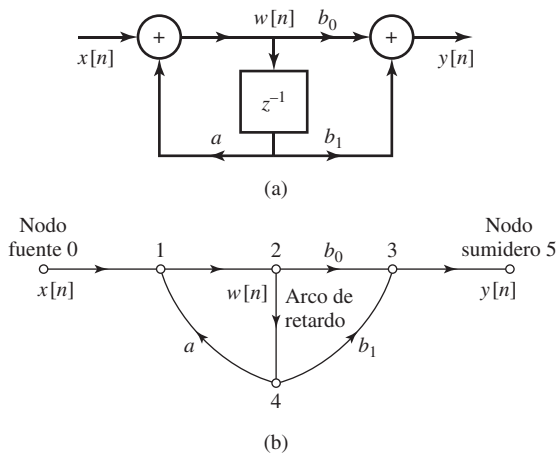


Figura 6.10 (a) Representación mediante diagrama de bloques de un filtro digital de primer orden. (b) Estructura del diagrama de flujo de señales correspondiente al diagrama de bloques de (a).

se caracterizarían por su función de transferencia. En este caso, la ganancia de cada arco sería una función de z, es decir, un retardo unidad tendría una ganancia de z^{-1}. Por convención, representaremos las variables de un grafo de flujo de señales como secuencias en vez de como transformadas Z de secuencias. Sin embargo, para simplificar la notación, indicaremos normalmente un arco de retardo como un arco con ganancia z^{-1}, pero entendiendo que la salida de ese arco es la señal de entrada con un retardo de una unidad. La Figura 6.11 muestra el grafo de la Figura 6.10(b) utilizando esta convención. Las ecuaciones que se representan en la Figura 6.11 son las siguientes:

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n], \tag{6.18a}$$

$$w_2[n] = w_1[n], \tag{6.18b}$$

$$w_3[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_4[n], \tag{6.18c}$$

$$w_4[n] = w_2[n-1], \tag{6.18d}$$

$$y[n] = w_3[n]. \tag{6.18e}$$

Comparando las Figuras 6.10(a) y 6.11 podemos ver que existe una correspondencia directa entre los arcos del diagrama de bloques y los arcos de grafo de flujo. De hecho, la diferencia más importante de los dos es que los nodos del grafo de flujo representan también sumadores, mientras que en el diagrama de bloques se utiliza un símbolo especial para los sumadores. Un punto de bifurcación se representa en el grafo de flujo de señales mediante un nodo que sólo tiene un arco de entrada y uno o más arcos de salida. Un sumador de un diagrama de bloques se representa en un grafo de flujo de señales con un nodo que tiene dos (o más) arcos de entrada. Por lo tanto, los grafos de flujo de señales son totalmente equivalentes a los diagramas de bloques como representación gráfica de las ecuaciones en diferencias. La ventaja es que son más simples de dibujar. Como los diagramas de bloques, se pueden

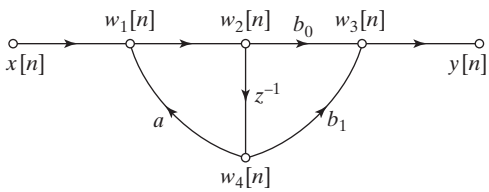


Figura 6.11 Diagrama de flujo de señales de la Figura 6.10(b) con el arco de retardo indicado mediante z^{-1}.

manejar gráficamente para poner de manifiesto las propiedades de un sistema dado. Existe una amplia teoría sobre los grafos de flujo de señales, que se puede aplicar directamente a los sistemas en tiempo discreto cuando se representan de esta forma (véase Mason y Zimmermann, 1960, Chow y Cassignol, 1962 y Phillips y Nagle, 1995). Aunque utilizaremos los grafos de flujo de señales fundamentalmente para propósitos de representación, emplearemos ciertos teoremas relacionados con ellos para examinar estructuras alternativas de realización de sistemas lineales.

Las Ecuaciones (6.18a)–(6.18e) definen un algoritmo multietapa para calcular la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo a partir de la secuencia de entrada $x[n]$. Este ejemplo ilustra la clase de relaciones de precedencia de datos que surgen generalmente en la realización de sistemas IIR. Las Ecuaciones (6.18a)–(6.18e) no se pueden calcular en orden arbitrario. Las Ecuaciones (6.18a) y (6.18c) requieren multiplicaciones y sumas, pero las Ecuaciones (6.18b) y (6.18e) simplemente cambian el nombre de las variables. La Ecuación (6.18d) representa la "actualización" de la memoria del sistema. Se puede implementar simplemente reemplazando el contenido del registro de memoria que representa a $w_4[n]$ por el valor de $w_2[n]$, pero esta operación se debe realizar de forma consistente *antes* o *después* de la evaluación de todas las demás ecuaciones. Las condiciones de reposo inicial se impondrían en este caso definiendo $w_2[-1] = 0$ o $w_4[0] = 0$. Resulta claro entonces que las Ecuaciones (6.18a)–(6.18e) se pueden calcular en el orden que se muestran, excepto que las dos últimas deberían intercambiarse, o la Ecuación (6.18d) evaluarse primero de forma consistente.

El grafo de flujo representa un conjunto de ecuaciones en diferencias. Cada ecuación se escribe en un nodo de la red. En el caso del grafo de flujo de la Figura 6.11, se pueden eliminar de forma sencilla algunas de las variables obteniéndose la pareja de ecuaciones

$$w_2[n] = aw_2[n-1] + x[n], \tag{6.19a}$$

$$y[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_2[n-1], \tag{6.19b}$$

con la misma forma de las Ecuaciones (6.15a) y (6.15b), es decir, en forma directa II. A menudo el manejo de las ecuaciones en diferencias de un grafo de flujo es difícil cuando se opera con las variables en el dominio del tiempo debido a las realimentaciones y los retardos. En estos casos siempre es posible trabajar con la representación mediante la transformada Z, donde todos los arcos son de ganancia simple. Los Problemas 6.1–6.26 ilustran la utilidad del análisis de grafos basado en transformada Z para obtener conjuntos diferentes de ecuaciones en diferencias.

Ejemplo 6.3 Determinación de la función de transferencia a partir de un grafo de flujo

Para ilustrar el uso de la transformada Z para determinar la función de transferencia a partir de un grafo de flujo, consideremos la Figura 6.12. El grafo de flujo de esta figura no está en forma directa. Por tanto, la función de transferencia no se puede escribir por simple inspección del grafo. Sin embargo, se puede escribir el conjunto de ecuaciones en diferencias representadas por dicho grafo escribiendo una ecuación para el valor de la variable de cada nodo en función de las variables de los demás nodos. Las cinco ecuaciones son:

$$w_1[n] = w_4[n] - x[n], \tag{6.20a}$$

$$w_2[n] = \alpha w_1[n], \tag{6.20b}$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n], \tag{6.20c}$$

$$w_4[n] = w_3[n-1], \tag{6.20d}$$

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n]. \tag{6.20e}$$

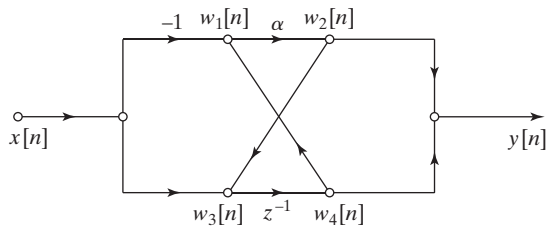


Figura 6.12 Grafo de flujo que no está en la forma directa estándar.

Ésas son las ecuaciones que se deberían utilizar para implementar el sistema de la forma descrita por el grafo de flujo. Las Ecuaciones (6.20a)–(6.20e) se pueden representar mediante las ecuaciones en transformadas Z

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z), \tag{6.21a}$$

$$W_2(z) = \alpha W_1(z), \tag{6.21b}$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z), \tag{6.21c}$$

$$W_4(z) = z^{-1} W_3(z), \tag{6.21d}$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z). \tag{6.21e}$$

En este conjunto de ecuaciones se pueden eliminar $W_1(z)$ y $W_3(z)$ sustituyendo la Ecuación (6.21a) en la (6.21b) y la (6.21c) en la (6.21d), con lo que se obtiene

$$W_2(z) = \alpha(W_4(z) - X(z)), \tag{6.22a}$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_2(z) + X(z)), \tag{6.22b}$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z). \tag{6.22c}$$

Las Ecuaciones (6.22a) y (6.22b) se pueden resolver despejando $W_2(z)$ y $W_4(z)$,

$$W_2(z) = \frac{\alpha(z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z), \tag{6.23a}$$

$$W_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z), \tag{6.23b}$$

y sustituyendo las Ecuaciones (6.23a) y (6.23b) en la (6.22c) se obtiene

$$Y(z) = \left(\frac{\alpha(z^{-1} - 1) + z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) = \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z). \tag{6.24}$$

Por tanto, la función de transferencia correspondiente al grafo de flujo de la Figura 6.12 es

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \tag{6.25}$$

de donde se deduce que la respuesta al impulso del sistema es

$$h[n] = \alpha^{n-1} u[n-1] - \alpha^{n+1} u[n]$$

y el grafo de flujo en forma directa I se muestra en la Figura 6.13.

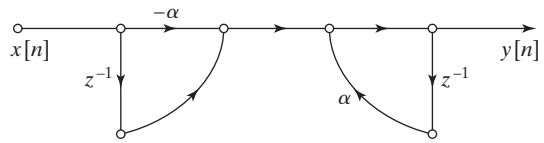


Figura 6.13 Forma directa I equivalente a la Figura 6.12.

El Ejemplo 6.3 muestra la forma en la que la transformada Z convierte expresiones en el dominio del tiempo, que involucran realimentaciones y son, por tanto, difíciles de resolver, en ecuaciones lineales que se pueden resolver mediante técnicas algebraicas. Este ejemplo ilustra también que diferentes representaciones de grafos de flujo definen algoritmos computacionales que requieren cantidades diferentes de recursos. Comparando las Figuras 6.12 y 6.13, vemos que la realización original sólo requiere una multiplicación y un elemento de retardo (memoria), mientras que la realización en forma directa I requeriría dos multiplicaciones y dos elementos de retardo. La realización en forma directa II requeriría un retardo menos, pero se seguirían necesitando dos multiplicaciones.

6.3. ESTRUCTURAS BÁSICAS DE SISTEMAS IIR

En la Sección 6.1 presentamos dos estructuras alternativas para realizar un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia tiene la forma de la Ecuación (6.8). En esta sección, veremos representaciones de esos sistemas basadas en grafos de flujo de señales, y presentaremos también algunas otras estructuras de redes de grafo de flujo que son equivalentes y que se utilizan ampliamente. Nuestra presentación dejará claro que, para cualquier función de transferencia racional, existe una amplia variedad de ecuaciones en diferencias o estructuras de redes equivalentes. Una consideración a tener en cuenta en la selección de una de ellas es la complejidad computacional. Por ejemplo, en algunas realizaciones digitales, son a menudo deseables estructuras que empleen el mínimo número de multiplicadores y el mínimo número de retardos. El motivo es que la realización de la multiplicación con hardware digital es una operación costosa en cuanto a tiempo de cómputo, y que cada elemento de retardo corresponde a un registro de memoria. Por tanto, la reducción del número de multiplicaciones por una constante implica un aumento de la velocidad, y la reducción del número de elementos de retardo implica una reducción de los requerimientos de memoria.

Otros compromisos más sutiles surgen en las implementaciones VLSI, en las que el tamaño de un chip es a menudo una medida importante de su eficiencia. La modularidad y la simplicidad de las transferencias en el chip son características muy deseables en esas realizaciones. En implementaciones basadas en multiprocesador las consideraciones más importantes están a menudo relacionadas con la segmentación del algoritmo y las necesidades de comunicación entre los procesadores. Otra consideración importante tiene que ver con los efectos de la longitud finita de los registros y con la aritmética de precisión finita. Estos efectos dependen de la forma en la que se organizan los cálculos, es decir, de la estructura del grafo de flujo de señales. A veces es deseable utilizar una estructura que no emplee el mínimo número de multiplicadores y elementos de retardo si esa estructura es menos sensible a los efectos de la longitud finita de los registros.

En esta sección desarrollaremos algunas formas de realización de sistemas IIR lineales e invariantes con el tiempo que se utilizan muy frecuentemente, y obtendremos su representación mediante grafos de flujo de señales.

6.3.1. Formas directas

En la Sección 6.1 obtuvimos representaciones mediante diagramas de bloques de la forma directa I (Figura 6.3) y de la forma directa II o forma directa canónica (Figura 6.5). Estas estructuras representan un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada y salida satisfacen una ecuación en diferencias de la forma

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \tag{6.26}$$

con la correspondiente función de transferencia racional

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{6.27}$$

En la Figura 6.14 se muestra la estructura en forma directa I de la Figura 6.3 utilizando un grafo de flujo de señales. La Figura 6.15 muestra el grafo de flujo de señales de la estructura en forma directa II que se muestra en la Figura 6.5. Hemos supuesto de nuevo por conveniencia que $N = M$. Observe que hemos dibujado el grafo de flujo de forma que cada nodo no tiene más que dos entradas. En un grafo de flujo de señales, un nodo puede tener cualquier número de entradas, pero como se dijo anteriormente, si se emplea el convenio de utilizar sólo dos entradas el grafo resultante se relaciona más estrechamente con los programas y las arquitecturas que se emplean en el cálculo de las ecuaciones en diferencias que representa el grafo.

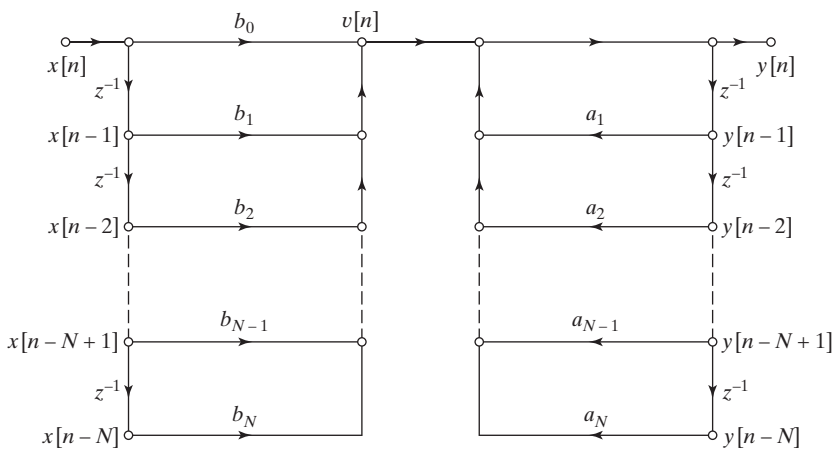


Figura 6.14 Diagrama de flujo de señales de la estructura en forma directa I de un sistema de orden N.

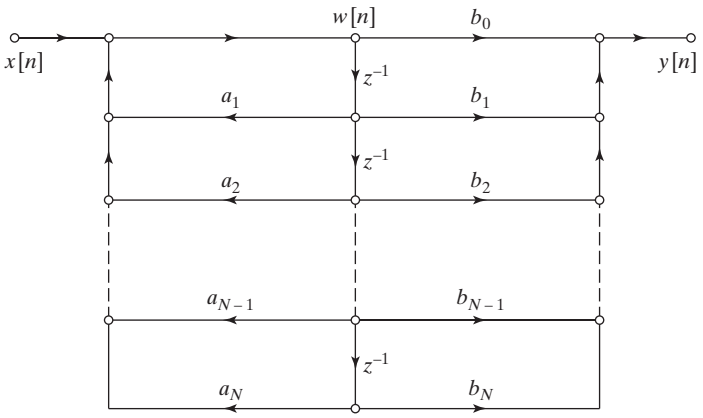


Figura 6.15 Diagrama de flujo de señales de la estructura en forma directa II de un sistema de orden N.

Ejemplo 6.4 Ilustración de estructuras en forma directa I y forma directa II

Consideremos la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}125z^{-2}}. \tag{6.28}$$

Como los coeficientes de las estructuras en forma directa se corresponden directamente con los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador (teniendo en cuenta el signo menos del denominador de la Ecuación (6.27)), podemos dibujar estas estructuras por simple inspección, en forma semejante a las Figuras 6.14 y 6.15. Las Figuras 6.16 y 6.17 muestran las estructuras en forma directa I y forma directa II de este ejemplo.

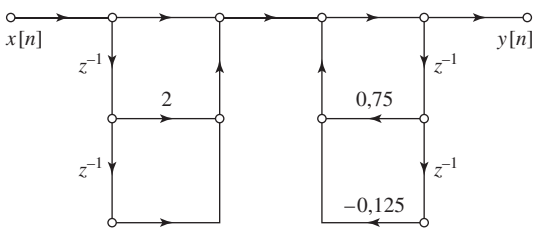


Figura 6.16 Estructura en forma directa I del Ejemplo 6.4.

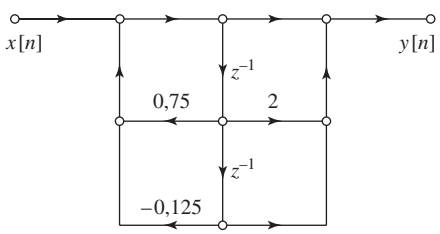


Figura 6.17 Estructura en forma directa II del Ejemplo 6.4.

6.3.2. Forma en cascada

Las estructuras en forma directa se obtienen directamente escribiendo la función de transferencia $H(z)$, como un cociente de polinomios en la variable z^{-1} como indica la Ecuación (6.27). Si factorizamos los polinomios del numerador y del denominador, podemos expresar $H(z)$ como

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-f_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_k z^{-1})(1-g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}, \tag{6.29}$$

siendo $M = M_1 + 2M_2$ y $N = N_1 + 2N_2$. En esta expresión, los factores de primer orden representan ceros reales en f_k y polos reales en c_k, y los factores de segundo orden representan parejas de ceros complejos conjugados en g_k y g_k^* y parejas de polos complejos conjugados en d_k y d_k^*. Esto representa la distribución más general de los polos y los ceros cuando todos los coeficientes de la Ecuación (6.27) son reales. La Ecuación (6.29) sugiere una clase de estructuras consistentes en una conexión en cascada de sistemas de primer y segundo orden. Existe una libertad considerable en la elección de la composición de los subsistemas y en el orden en el que se encadenan dichos subsistemas. Sin embargo, en la práctica, es a menudo deseable que la realización en cascada utilice el mínimo de almacenamiento y las mínimas necesidades de cómputo. Se puede obtener una estructura modular que es ventajosa en muchos tipos de realizaciones combinando pares de factores reales y pares de factores complejos conjugados para formar factores de segundo orden, de forma que la Ecuación (6.29) se expresa

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}, \tag{6.30}$$

siendo $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ el mayor entero inferior a $(N+1)/2$. Al escribir $H(z)$ de esta forma, hemos supuesto que $M \leq N$ y que los polos y ceros reales se han combinado en parejas. Si hay un número impar de ceros reales, uno de los coeficientes b_{2k} será cero. Asimismo, si hay un número impar de polos reales, uno de los coeficientes a_{2k} será cero. Cada una de las secciones de segundo orden se puede realizar utilizando cualquiera de las estructuras en forma directa. Sin embargo, la exposición anterior demuestra que se puede realizar una estructura en cascada con un mínimo número de multiplicaciones y elementos de retardo si realizamos cada sección de segundo orden en forma directa II. La Figura 6.18 muestra la estructura en cascada de un sistema de sexto orden que emplea tres secciones en forma directa II. Las ecuaciones en diferencias representadas de forma general por una combinación en cascada de secciones de segundo orden en forma directa II son

$$y_0[n] = x[n], \tag{6.31a}$$

$$w_k[n] = a_{1k}w_k[n-1] + a_{2k}w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1,2,\ldots,N_s, \tag{6.31b}$$

$$y_k[n] = b_{0k}w_k[n] + b_{1k}w_k[n-1] + b_{2k}w_k[n-2], \quad k = 1,2,\ldots,N_s, \tag{6.31c}$$

$$y[n] = y_{N_s}[n]. \tag{6.31d}$$

Es fácil ver que se pueden obtener diversos sistemas equivalentes simplemente emparejando los polos y los ceros de formas diferentes y ordenando las secciones de segundo orden de formas diferentes. De hecho, si hay N_s secciones de segundo orden, existen $N_s!$ (N_s factorial) emparejamientos de los polos con los ceros y $N_s!$ ordenamientos de las secciones de segundo orden resultantes, lo que da un total

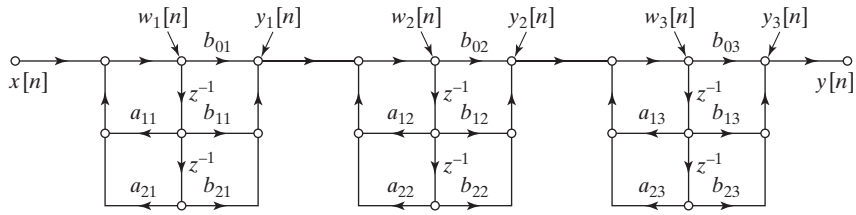


Figura 6.18 Estructura en cascada de un sistema de sexto orden realizando cada subsistema de segundo orden en forma directa II.

de $(N_s!)^2$ emparejamientos y ordenamientos diferentes. Aunque todos ellos tienen la misma función de transferencia y la misma relación entrada–salida cuando se usa aritmética de precisión infinita, su comportamiento cuando se utiliza aritmética de precisión finita puede ser bastante diferente, como veremos en las Secciones 6.8–6.10.

Ejemplo 6.5 Ilustración de estructuras en cascada

Consideremos de nuevo la función de transferencia de la Ecuación (6.28). Como se trata de un sistema de segundo orden, la realización en cascada utilizando secciones de segundo orden en forma directa II se reduce a la estructura de la Figura 6.17. Para ilustrar la estructura en cascada podemos utilizar alternativamente sistemas de primer orden expresando $H(z)$ como un producto de factores de primer orden:

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}} = \frac{(1+z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-0{,}5z^{-1})(1-0{,}25z^{-1})}. \tag{6.32}$$

Como todos los polos y los ceros son reales, la estructura en cascada con secciones de primer orden tiene coeficientes reales. Si los polos y/o los ceros fueran complejos, sólo las secciones de segundo orden tendrían coeficientes reales. La Figura 6.19 muestra dos estructuras en cascada equivalentes, las dos con la función de transferencia de la Ecuación (6.32). Las ecuaciones en diferencias representadas por los grafos de flujo de la figura se pueden obtener fácilmente. El Problema 6.22 considera la obtención de otras configuraciones equivalentes.

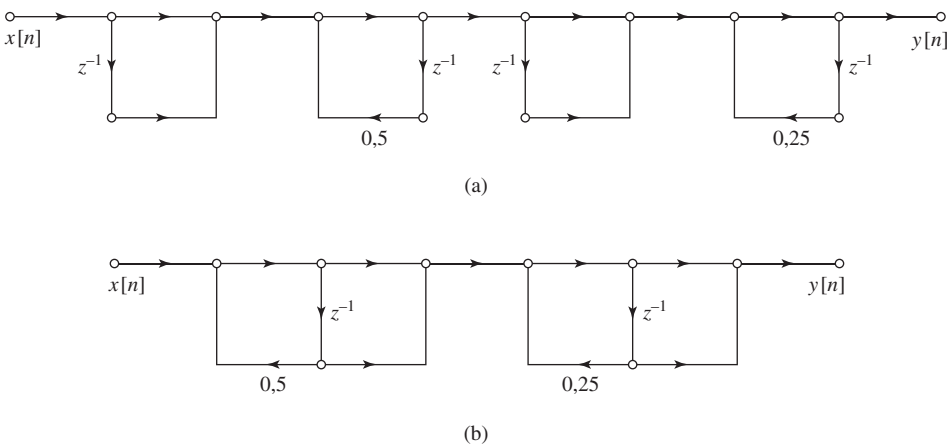


Figura 6.19 Estructuras en cascada del Ejemplo 6.5. (a) Subsecciones en forma directa I. (b) Subsecciones en forma directa II.

Debemos realizar un comentario final sobre nuestra definición de función de transferencia de una forma en cascada. Como se define en la Ecuación (6.30), cada sección de segundo orden emplea cinco multiplicadores por constantes. A efectos de comparación, supongamos que $M = N$ en $H(z)$ como indica la Ecuación (6.27) y supongamos también que N es un número entero par, de forma que $N_s = N/2$. Entonces, las estructuras en forma directa I y II tienen $2N+1$ multiplicaciones por constantes y la estructura en cascada que sugiere la Ecuación (6.30) tiene $5N/2$ multiplicaciones por constantes. En el sistema de sexto orden de la Figura 6.18 se requieren un total de 15 multiplicadores, mientras que las formas directas equivalentes requieren un total de 13 multiplicadores. Otra definición de la forma en cascada es

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + \tilde{b}_{1k} z^{-1} + \tilde{b}_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}, \tag{6.33}$$

siendo b_0 el primer coeficiente del polinomio del numerador de la Ecuación (6.27) y $\tilde{b}_{ik} = b_{ik}/b_{0k}$ para $i = 1,2$ y $k = 1,2,\ldots,N_s$. Esta forma de $H(z)$ sugiere una cascada de secciones de segundo orden con cuatro multiplicadores, con una ganancia global constante b_0. Esta forma en cascada tiene el mismo número de multiplicadores por constantes que las estructuras en forma directa. Como se indicará en la Sección 6.9, las secciones de segundo orden con cinco multiplicadores se utilizan comúnmente en las implementaciones con aritmética de coma fija, ya que posibilitan distribuir la ganancia del sistema y permiten por tanto controlar el tamaño de las señales en varios puntos críticos del sistema. Cuando se utiliza aritmética de coma flotante y el margen dinámico no es un problema, se pueden utilizar las secciones de segundo orden con cuatro multiplicadores para reducir la cantidad de cálculo. Si hay ceros en la circunferencia unidad, las cosas se pueden simplificar aún más. En este caso, $\tilde{b}_{2k} = 1$, y sólo se requieren tres multiplicadores por cada sección de segundo orden.

6.3.3. Forma en paralelo

Una alternativa a la factorización de los polinomios del numerador y del denominador de $H(z)$ es expresar una función de transferencia racional como indica las Ecuaciones (6.27) o (6.29) mediante una descomposición en fracciones simples de la forma

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}, \tag{6.34}$$

siendo $N = N_1 + 2N_2$. Si $M \geq N$, entonces $N_p = M - N$; Si no es así, no se incluye la primera suma en la Ecuación (6.34). Si en la Ecuación (6.27) los coeficientes a_k y b_k son reales, las cantidades A_k, B_k, C_k, c_k y e_k son todas reales. De esta forma, la función de transferencia se puede representar como una combinación en paralelo de sistemas IIR de primer y segundo orden, posiblemente con N_p pasos simples de retardo y escalado. Alternativamente, se pueden agrupar los polos reales en parejas, con lo que $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}, \tag{6.35}$$

siendo $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ el mayor entero inferior a $(N+1)/2$, como en el caso de la forma en cascada. Si $N_p = M - N$ es negativo la primera suma no está presente. La Figura 6.20 muestra un ejemplo típico

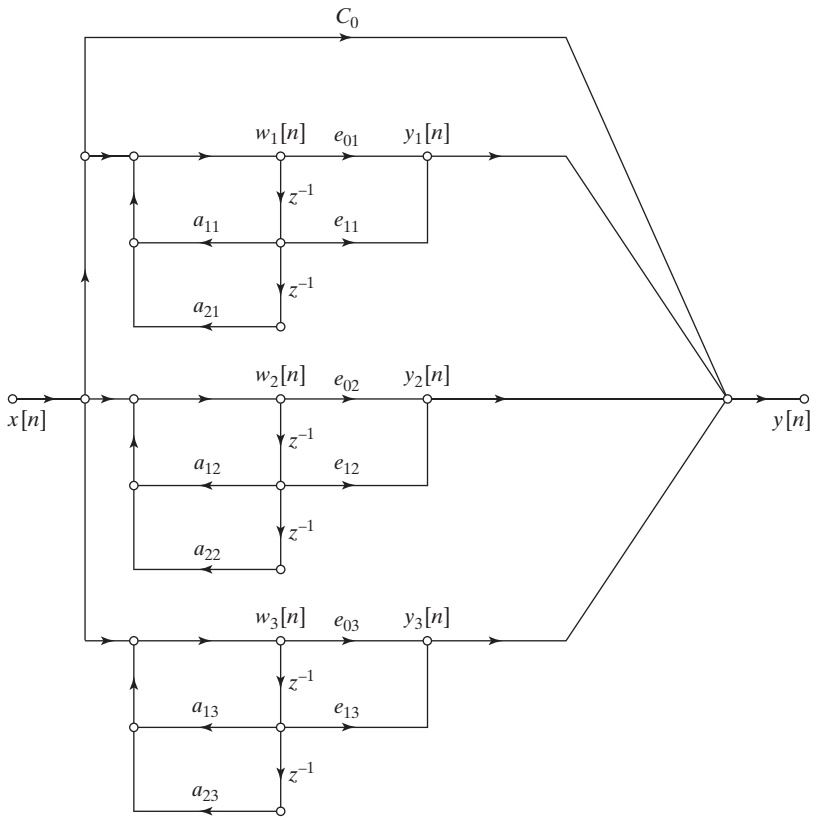


Figura 6.20 Estructura en forma paralelo de un sistema de sexto orden ($M = N = 6$) con los polos reales y complejos agrupados en parejas.

para $N = M = 6$. Las ecuaciones en diferencias generales para la forma en paralelo que utiliza secciones de segundo orden en forma directa II son

$$w_k[n] = a_{1k}w_k[n-1] + a_{2k}w_k[n-2] + x[n], \quad k = 1,2,\ldots,N_s, \tag{6.36a}$$

$$y_k[n] = e_{0k}w_k[n] + e_{1k}w_k[n-1], \qquad k = 1,2,\ldots,N_s, \tag{6.36b}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_p} C_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N_s} y_k[n]. \tag{6.36c}$$

Si $M < N$, la primera suma de la Ecuación (6.36c) no está incluida.

Ejemplo 6.6 Ilustración de estructuras en forma paralelo

Consideremos de nuevo la función de transferencia utilizada en los Ejemplos 6.4 y 6.5. Para la forma paralelo, debemos expresar $H(z)$ con la forma de la Ecuación (6.34) o de la (6.35). Si utilizamos secciones de segundo orden

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}} = 8 + \frac{-7+8z^{-1}}{1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}}. \tag{6.37}$$

La Figura 6.21 muestra la realización en forma paralelo de este ejemplo con secciones de segundo orden.

Como todos los polos son reales, se puede obtener una realización alternativa en forma paralelo descomponiendo $H(z)$

$$H(z) = 8 + \frac{18}{1-0{,}5z^{-1}} - \frac{25}{1-0{,}25z^{-1}}. \tag{6.38}$$

La Figura 6.22 muestra la forma paralelo resultante con secciones de primer orden. Como en el caso general, las ecuaciones en diferencias representadas por las Figuras 6.21 y 6.22 se pueden escribir de forma sencilla por simple inspección.

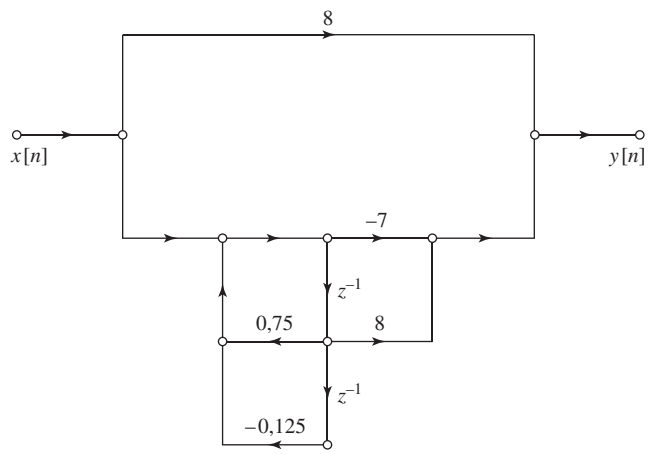


Figura 6.21 Estructura en forma paralelo para el Ejemplo 6.6 utilizando un sistema de segundo orden.

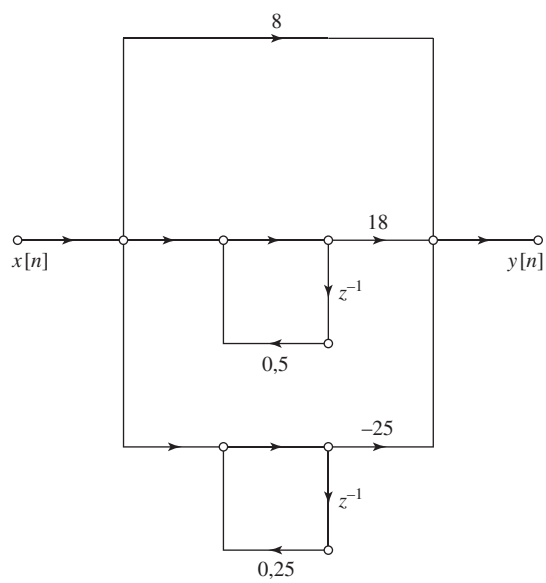


Figura 6.22 Estructura en forma paralelo para el Ejemplo 6.6 utilizando sistemas de primer orden.

6.3.4. Realimentación en sistemas IIR

Todos los grafos de flujo de esta sección presentan bucles de realimentación, es decir, tienen caminos cerrados que empiezan en un nodo y regresan a ese nodo atravesando arcos únicamente en la dirección marcada por sus flechas. Las estructuras de este tipo en los grafos de flujo implican que una variable de un nodo depende directa, o indirectamente, de sí misma. La Figura 6.23(a) muestra un ejemplo que representa la ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \tag{6.39}$$

Estos bucles son necesarios (pero no suficientes) para generar respuestas al impulso de longitud infinita. Esto lo podemos ver si consideramos una red sin bucles de realimentación. En este caso, cualquier camino desde la entrada a la salida sólo puede pasar una vez por cada elemento de retardo. Por tanto, el máximo retardo entre la entrada y la salida se produciría para un camino que atravesara todos los elementos de retardo de la red. Entonces, en una red sin bucles, la respuesta al impulso no puede tener una longitud mayor que el número total de elementos de retardo de la red. Entonces podemos concluir que, si una red no tiene bucles, la función de transferencia sólo tiene ceros (aunque puede tener polos en $z = 0$) y el número de ceros no puede ser superior al número de elementos de retardo en la red.

Volviendo al ejemplo simple de la Figura 6.23(a), podemos ver que cuando la entrada es la secuencia impulso unidad $\delta[n]$, la muestra de entrada cambia continuamente por el bucle de realimentación incrementándose (si $|a| > 1$) o reduciéndose (si $|a| < 1$) su amplitud debido a la multiplicación por la constante a. Por ello, la respuesta al impulso será $h[n] = a^n u[n]$. De esta forma podemos ver que la realimentación puede crear una respuesta al impulso de longitud infinita.

Si la función de transferencia tiene polos, el correspondiente diagrama de bloques o grafo de flujo de señales tendrá bucles de realimentación. Por otra parte, ni los polos de la función de transferencia ni los bucles de la red son suficientes para que la respuesta al impulso sea de longitud infinita. La Figura 6.23(b) muestra una red con un bucle pero con respuesta al impulso de longitud finita. Esto es debido a

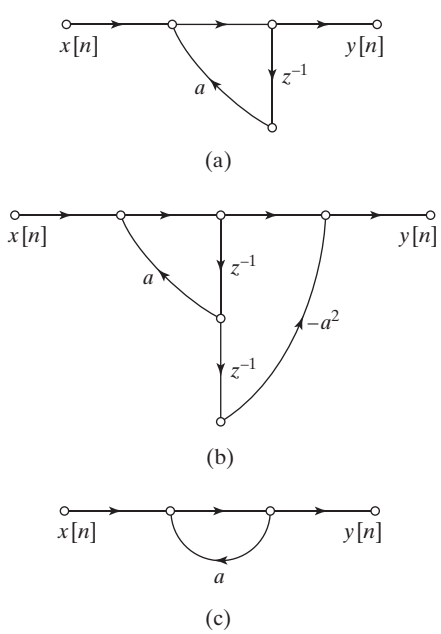


Figura 6.23 (a) Sistema con bucle de realimentación. (b) Sistema FIR con bucle de realimentación. (c) Sistema no computable.

que el polo del sistema se cancela con un cero, es decir, en la Figura 6.23(b),

$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1}. \tag{6.40}$$

La respuesta al impulso de este sistema es $h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$ y es un ejemplo simple de una clase general de sistemas denominada *sistemas de muestreo en frecuencia.* Esta clase de sistemas se considera con más detalle en los Problemas 6.39 y 6.51.

Los bucles plantean problemas especiales en la realización de los cálculos que la red debe efectuar. Como ya hemos comentado, debe ser posible calcular las variables de los nodos de una red en una secuencia tal que todos los valores necesarios estén disponibles cuando sea necesario. En algunos casos, no hay forma de ordenar los cálculos para que las variables de los nodos de un grafo de flujo se puedan calcular en forma de secuencia. Una red de este tipo se denomina *no computable* (Crochiere y Oppenheim, 1975). La Figura 6.23(c) muestra una red simple no computable. La ecuación en diferencias de esta red es

$$y[n] = ay[n] + x[n]. \tag{6.41}$$

Vemos que no es posible calcular $y[n]$ ya que en el miembro derecho de la ecuación interviene la cantidad que deseamos calcular. El hecho de que un grafo de flujo sea *no* computable no implica que las ecuaciones representadas por dicho grafo no se puedan resolver. De hecho, la solución de la Ecuación (6.41) es $y[n] = x[n]/(1-a)$. Simplemente significa que el grafo de flujo representa un conjunto de ecuaciones en diferencias que no se pueden resolver sucesivamente para las variables de los nodos. La clave para la posibilidad de calcular un grafo de flujo es que todos los bucles contengan al menos un elemento de retardo unidad. Por tanto, al manejar los grafos de flujo que representen implementaciones de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, hay que tener cuidado de no crear bucles sin retardos. El Problema 6.37 considera un sistema que tiene un bucle sin retardo, y el Problema 7.51 muestra cómo se puede presentar un bucle libre de retardo.

6.4. FORMAS TRASPUESTAS

La teoría de grafos lineales de flujo de señales proporciona diversos procedimientos para modificar la forma de esos grafos sin alterar la función de transferencia global entre la entrada y la salida. Uno de esos procedimientos, denominado *inversión* o *trasposición del grafo de flujo,* nos lleva a un conjunto de estructuras traspuestas de sistemas que pueden proporcionar alternativas útiles a las estructuras diseñadas en la sección anterior.

La trasposición de un grafo de flujo se realiza invirtiendo las direcciones de todos los arcos de la red manteniendo las ganancias de transmisión de dichos arcos, e invirtiendo los papeles de la entrada y la salida de manera que los nodos fuente se transforman en nodos sumidero y viceversa. En el caso de sistemas con una sola entrada y salida, si se invierten los papeles de la entrada y la salida, el grafo de flujo resultante tiene la misma función de transferencia que el grafo original. Aunque no demostraremos formalmente este resultado[3], verificaremos que es válido con dos ejemplos (Ejemplos 6.7 y 6.8).

En el Ejemplo 6.7 se puede ver directamente que el sistema original y su traspuesto tienen la misma función de transferencia. Sin embargo, en el caso de grafos más complicados, a menudo el resultado no es tan obvio. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

[3]El teorema se deduce directamente de la fórmula de ganancia de Mason, de teoría de grafos de flujo de señal (véanse Mason y Zimmermann, 1960; Chow y Cassignol, 1962 o Phillips y Nagle, 1995).

El teorema de trasposición se puede aplicar a cualquiera de las estructuras que hemos presentado hasta ahora. Por ejemplo, el resultado de aplicar el teorema a la estructura en forma directa I de la Figura 6.14 se muestra en la Figura 6.27, y de forma similar, la Figura 6.28 muestra el resultado de aplicar trasposición a la estructura en forma directa II de la Figura 6.15. Si la configuración de un grafo de flujo de señal se traspone, no varían ni el número de arcos de retardo ni el número de coeficientes. Las estructuras traspuestas derivadas de formas directas son también "directas" en el sentido de que se pueden obtener por simple inspección del numerador y del denominador de la función de transferencia.

Ejemplo 6.7 Forma traspuesta de un sistema de primer orden sin ceros

El sistema de primer orden correspondiente al grafo de flujo de la Figura 6.24(a) tiene como función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \tag{6.42}$$

Para obtener la forma traspuesta de este sistema invertiremos las direcciones de todas las flechas de los arcos, y tomaremos la salida donde estaba la entrada, y la entrada donde estaba la salida. El resultado se muestra en la Figura 6.24(b). Generalmente, es conveniente dibujar la red traspuesta con la entrada a la izquierda y la salida a la derecha, como muestra la Figura 6.24(c). Comparando las Figuras 6.24(a) y 6.24(c) vemos que la única diferencia es que en la Figura 6.24(a) se multiplica la secuencia de salida *retardada* $y[n-1]$ por el coeficiente a, mientras que en la Figura 6.24 se multiplica la salida $y[n]$ por el coeficiente a y se retarda el producto resultante. Como las dos operaciones se pueden intercambiar, puede concluirse por simple inspección que el sistema de la Figura 6.24(a) y el correspondiente sistema traspuesto de la Figura 6.24(c) tienen la misma función de transferencia.

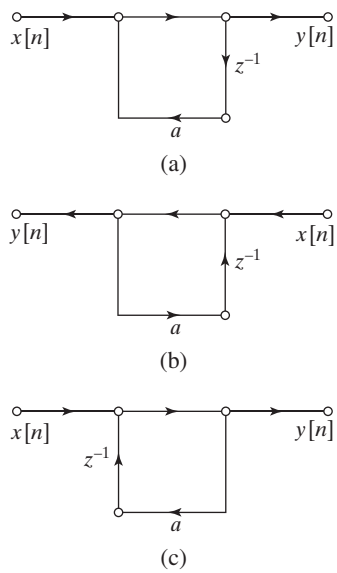


Figura 6.24 (a) Grafo de flujo de un sistema simple de primer orden. (b) Forma traspuesta de (a). Estructura de (b) dibujada con la entrada a la izquierda.

Ejemplo 6.8 Forma traspuesta de una sección básica de segundo orden

Consideremos la sección básica de segundo orden que se muestra en la Figura 6.25. La correspondiente ecuación en diferencias para este sistema es

$$w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n], \tag{6.43a}$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]. \tag{6.43b}$$

El grafo de flujo traspuesto se muestra en la Figura 6.26, y sus correspondientes ecuaciones en diferencias son

$$v_0[n] = b_0 x[n] + v_1[n-1], \tag{6.44a}$$

$$y[n] = v_0[n], \tag{6.44b}$$

$$v_1[n] = a_1 y[n] + b_1 x[n] + v_2[n-1], \tag{6.44c}$$

$$v_2[n] = a_2 y[n] + b_2 x[n]. \tag{6.44d}$$

Las Ecuaciones (6.43a)–(6.43b) y (6.44a)–(6.44d) son formas diferentes de organizar los cálculos de las muestras de salida $y[n]$ a partir de las muestras de entrada $x[n]$, y no es inmediato ver que los dos conjuntos de ecuaciones en diferencias son equivalentes. Una forma de demostrar la equivalencia es utilizar las representaciones en el dominio de la transformada Z de ambos conjuntos de ecuaciones, despejar el cociente $Y(z)/X(z) = H(z)$ en ambos casos, y comparar los resultados. Otra forma es sustituir la Ecuación (6.44d) en la (6.44c), sustituir el resultado en la Ecuación (6.44a), y finalmente, sustituir en la Ecuación (6.44b). El resultado final es

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]. \tag{6.45}$$

Como la red de la Figura 6.25 es una estructura en forma directa II, se puede ver fácilmente que la entrada y la salida del sistema de dicha figura cumplen también la ecuación en diferencias (6.45). Por tanto, en condiciones de reposo inicial, los sistemas de las Figuras 6.25 y 6.26 son equivalentes.

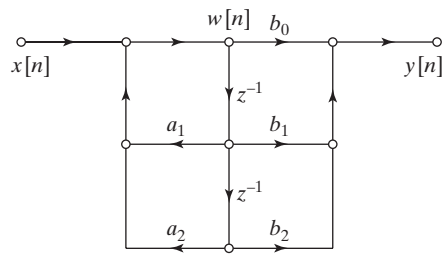


Figura 6.25 Estructura en forma directa II del Ejemplo 6.8.

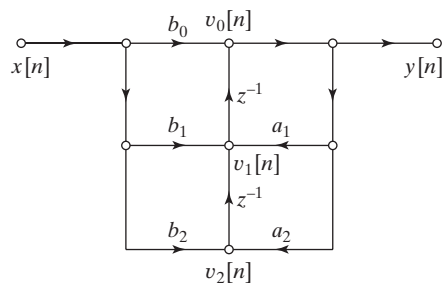


Figura 6.26 Estructura traspuesta en forma directa II del Ejemplo 6.8.

Si comparamos las Figuras 6.15 y 6.28 resulta evidente que mientras que la estructura en forma directa II realiza primero los polos y después los ceros, la estructura en forma directa II traspuesta realiza primero los ceros y después los polos. Estas diferencias pueden ser importantes si se emplea cuantificación o cuando las realizaciones digitales tienen precisión finita, o también en presencia de ruido en las implementaciones analógicas en tiempo discreto.

Cuando se aplica el teorema de trasposición a estructuras en paralelo o en cascada, las secciones de segundo orden se sustituyen por sus estructuras traspuestas. Por ejemplo, si se aplica el teorema de trasposición a la Figura 6.18, resulta una cascada de tres secciones en forma directa II traspuesta (cada una como la del Ejemplo 6.8) con los mismos coeficientes que en la Figura 6.18, pero con el orden de la cascada invertido. Lo mismo se puede decir sobre la trasposición de la Figura 6.20.

El teorema de trasposición resalta aun más que, dada cualquier función de transferencia racional, existe una variedad infinita de estructuras para su implementación. El teorema de trasposición proporciona un procedimiento simple para generar nuevas estructuras. Los problemas de realización de sistemas con aritmética de precisión finita han motivado el desarrollo de muchas más clases de estructuras

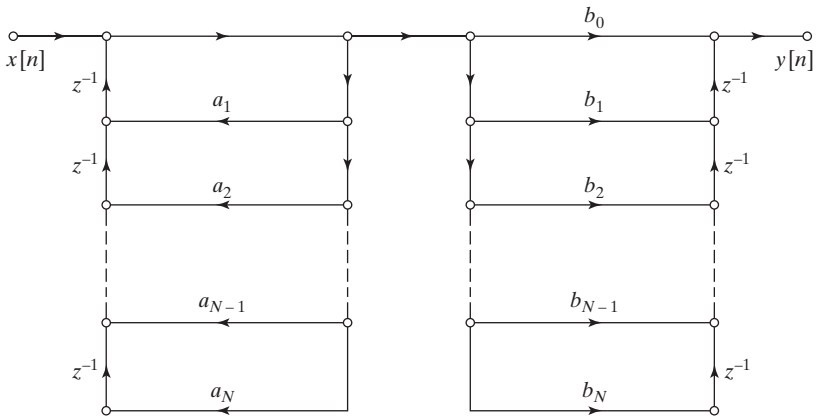


Figura 6.27 Grafo de flujo general resultante de aplicar el teorema de transposición a la estructura en forma directa I de la Figura 6.14.

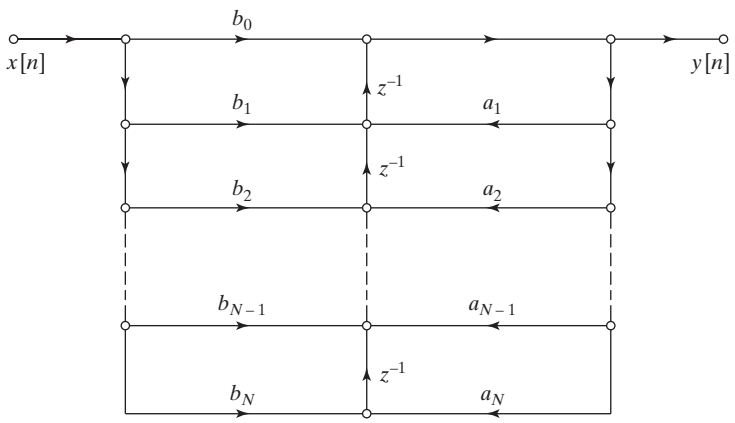


Figura 6.28 Grafo de flujo general resultante de aplicar el teorema de transposición a la estructura en forma directa II de la Figura 6.15.

equivalentes que las que podemos presentar aquí. Por tanto, nos concentraremos sólo en las estructuras más comúnmente utilizadas.

6.5. ESTRUCTURAS BÁSICAS DE REDES PARA SISTEMAS FIR

Las estructuras en forma directa, en cascada y en paralelo presentadas en las Secciones 6.3 y 6.4 son las estructuras básicas más comunes para sistemas IIR. Estas estructuras se han desarrollado bajo el supuesto de que la función de transferencia tiene polos y ceros. Aunque las formas directa y en cascada de los sistemas IIR incluyen a los sistemas FIR como un caso especial, existen formas adicionales específicas para los sistemas FIR.

6.5.1. Forma directa

En sistemas FIR causales, la función de transferencia tiene sólo ceros (excepto por posibles polos en $z = 0$), y como los coeficientes a_k son todos cero, la ecuación en diferencias (6.9) se reduce a

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{6.46}$$

La expresión anterior se puede identificar como la convolución discreta de $x[n]$ con la respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \ldots, M, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{6.47}$$

En este caso, las estructuras en forma directa I y en forma directa II de las Figuras 6.14 y 6.15 se reducen ambas a la estructura FIR en la forma directa que se muestra en la Figura 6.29. Debido a la cadena de elementos de retardo de la parte superior del diagrama, la estructura se denomina también estructura de *línea de retardo* o estructura de *filtro transversal*. Como se puede ver en la Figura 6.29, la señal es ponderada en cada etapa de la cadena por el coeficiente apropiado (el valor de la respuesta al impulso) y los productos resultantes se suman para formar la salida $y[n]$.

La forma directa traspuesta en el caso FIR se obtiene aplicando el teorema de trasposición a la Figura 6.29, o equivalentemente, poniendo a cero los coeficientes a_k en la Figura 6.27 o en la 6.28. La Figura 6.30 muestra el resultado.

6.5.2. Forma en cascada

La forma en cascada de los sistemas FIR se obtiene factorizando el polinomio de la función de transferencia. Es decir, si representamos $H(z)$ como

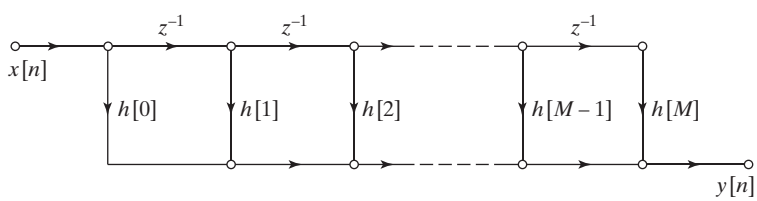


Figura 6.29 Realización en forma directa de un sistema FIR.

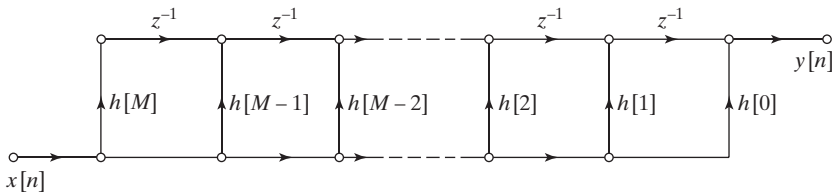


Figura 6.30 Transposición de la red de la Figura 6.29.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s}(b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), \tag{6.48}$$

siendo $M_s = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$ el máximo entero no superior a $(M+1)/2$. Si M es impar, uno de los coeficientes b_{2k} será cero, ya que en ese caso $H(z)$ tendría un número impar de ceros reales. La Figura 6.31 muestra el grafo de flujo que representa la Ecuación (6.48). Dicha figura tiene forma idéntica a la Figura 6.18 con los coeficientes a_{1k} y a_{2k} iguales a cero. Cada una de las secciones de segundo orden de la Figura 6.31 utiliza la estructura en forma directa que se muestra en la Figura 6.29. Otra alternativa es utilizar secciones de segundo orden en forma directa traspuesta o bien aplicar el teorema de trasposición a la Figura 6.31.

6.5.3. Estructuras de sistemas FIR de fase lineal

En el Capítulo 5 demostramos que los sistemas FIR causales tienen fase lineal generalizada si la respuesta al impulso satisface la condición de simetría

$$h[M-n] = h[n] \qquad n = 0, 1, \ldots, M \tag{6.49a}$$

o

$$h[M-n] = -h[n] \qquad n = 0, 1, \ldots, M. \tag{6.49b}$$

Si se cumple cualquiera de esas condiciones, el número de multiplicadores por coeficientes se puede reducir esencialmente a la mitad. Para verlo, consideremos los siguientes cambios en la ecuación de la convolución en tiempo discreto, suponiendo que M es un número entero par, lo que corresponde a los sistemas de tipo I y de tipo III:

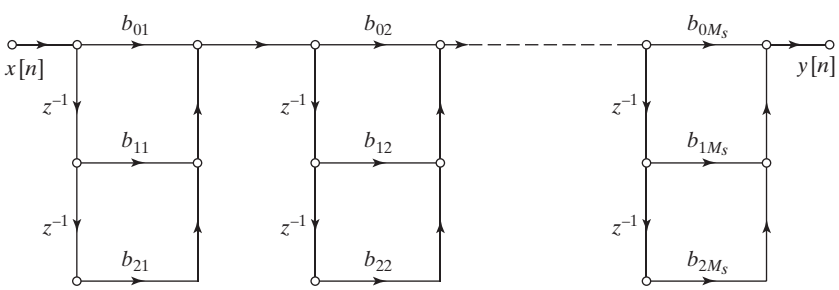


Figura 6.31 Realización de un sistema FIR mediante la forma en cascada.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=M/2+1}^{M} h[k]x[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k].
\end{aligned}
$$

Para los sistemas de tipo I, si utilizamos la Ecuación (6.49a) obtenemos

$$
y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2]. \tag{6.50}
$$

Para sistemas de tipo III se puede utilizar la Ecuación (6.49b), con lo que resulta

$$
y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]). \tag{6.51}
$$

Si M es un número entero impar, las ecuaciones correspondientes son, para sistemas de tipo II,

$$
y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) \tag{6.52}
$$

y para sistemas de tipo IV,

$$
y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]). \tag{6.53}
$$

Las Ecuaciones (6.50)–(6.53) implican estructuras con $M/2+1$, $M/2$ o $(M+1)/2$ multiplicadores por coeficientes, en lugar de los M multiplicadores por coeficientes de la estructura en forma directa general de la Figura 6.31. La Figura 6.32 muestra la estructura que se obtiene de la Ecuación (6.50), y la Figura 6.33 la estructura que se obtiene a partir de la Ecuación (6.52)

En nuestra exposición de los sistemas de fase lineal de la Sección 5.7.3, demostramos que las condiciones de simetría de las Ecuaciones (6.49a) y (6.49b) hacen que los ceros de $H(z)$ aparezcan en parejas que son imágenes especulares. Es decir, si z_0 es un cero de $H(z)$, $1/z_0$ es también un cero de $H(z)$. Es más, si $h[n]$ es real, los ceros de $H(z)$ aparecen en pares complejos conjugados.

Como consecuencia, los ceros reales en la circunferencia unidad aparecen en parejas inversas. Los ceros complejos que no están en la circunferencia unidad aparecen en grupos de cuatro que incluye los complejos conjugados y los inversos. Si hay un cero en la circunferencia unidad, su inverso es también su conjugado. Por consiguiente, los ceros complejos en la circunferencia unidad se pueden agrupar convenientemente en parejas. Los ceros en $z = \pm 1$ son sus propios inversos y conjugados. La Figura 6.34 resume los cuatro casos, donde por ejemplo los ceros en z_1, z_1^*, $1/z_1$ y $1/z_1^*$ se consideran un grupo de cuatro. Los ceros en z_2 y $1/z_2$ se consideran un grupo de dos, como los ceros en z_3 y z_3^*. El cero

en z_4 se considera solo. Si $H(z)$ tiene los ceros como muestra la Figura 6.34, se puede expresar como un producto de factores de primer, segundo y cuarto orden. Cada uno de esos factores es un polinomio cuyos coeficientes presentan la misma simetría que los coeficientes de $H(z)$; es decir, cada factor es un polinomio de fase lineal en z^{-1}. Por tanto, el sistema se puede realizar como una cascada de sistemas de primer, segundo y cuarto orden. Por ejemplo, la función de transferencia correspondiente a los ceros de la Figura 6.34 se puede expresar como

$$\begin{aligned} H(z) = h[0](1+z^{-1})(1+az^{-1}+z^{-2})(1+bz^{-1}+z^{-2}) \\ \times(1+cz^{-1}+dz^{-2}+cz^{-3}+z^{-4}), \end{aligned} \tag{6.54}$$

siendo

$$a=(z_2+1/z_2), \qquad b=2\mathscr{R}e\{z_3\}, \qquad c=-2\mathscr{R}e\{z_1+1/z_1\}, \qquad d=2+|z_1+1/z_1|^2.$$

Esta representación sugiere una estructura en cascada consistente en elementos de fase lineal. Se puede ver que el orden del polinomio de la función de transferencia es $M=9$ y que el número de multiplicadores por coeficientes diferentes es de cinco. Este número es el mismo número $((M+1)/2=5)$ de multiplicadores por constantes necesario para la realización del sistema en la forma directa de fase lineal que se muestra en la Figura 6.32. Por tanto, sin multiplicaciones adicionales, se obtiene una estructura modular en forma de una cascada de sistemas FIR simples de fase lineal.

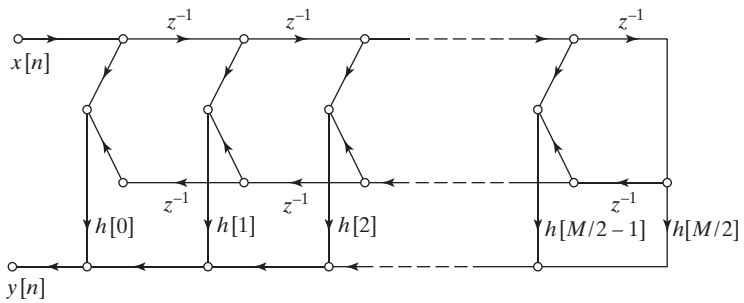


Figura 6.32 Estructura en forma directa de un sistema FIR de fase lineal cuando M es un número entero par.

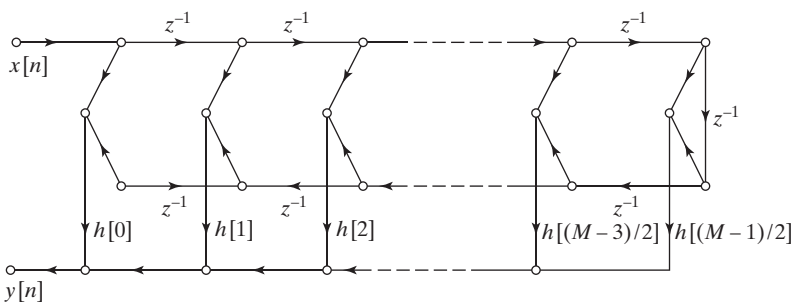


Figura 6.33 Estructura en forma directa de un sistema FIR de fase lineal cuando M es un número entero impar.

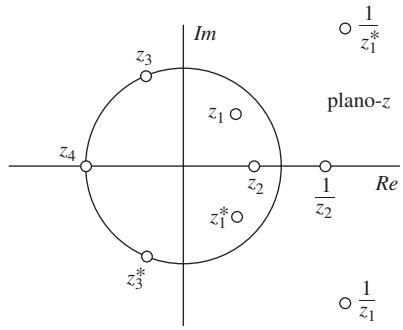


Figura 6.34 Simetría de los ceros de un filtro FIR de fase lineal.

6.6. FILTROS EN CELOSÍA

En las Secciones 6.3.2 y 6.5.2 hemos presentado las formas en cascada de sistemas IIR y FIR, obtenidas factorizando sus funciones de transferencia en secciones de primer y segundo orden. Otra interesante y útil estructura en cascada está basada en la interconexión (salida con entrada) de la estructura básica que se muestra en la Figura 6.35(a). En el caso de dicha figura, el sistema que forma el bloque básico tiene dos entradas y dos salidas, y se denomina grafo de flujo de dos puertos. La Figura 6.35(b) muestra el grafo de flujo equivalente. La Figura 6.36 muestra una cascada de M elementos básicos como los anteriores con una "terminación" en cada extremo, de forma que el sistema completo presenta una sola entrada y una sola salida. La entrada $x[n]$ alimenta ambas entradas del bloque de dos puertos (1) y la salida $y[n]$ se define como $a^{(M)}[n]$, la salida superior del último bloque de dos puertos M. (La salida inferior de la etapa M-ésima generalmente se ignora). Aunque una estructura como ésta puede tomar diferentes formas dependiendo de la definición de cada bloque básico, limitaremos nuestra atención a la estructura concreta de la Figura 6.35(b), que conduce a una clase de estructuras de filtros FIR e IIR conocida como *filtros en celosía*.

6.6.1. Filtros FIR en celosía

Si la forma e mariposa básica del bloque de dos puertos de la Figura 6.35(b) se utiliza en la conexión en cascada que muestra la Figura 6.36, se obtiene un grafo de flujo como el de la Figura 6.37, cuya forma motiva el nombre de *filtro en celosía*. Los coeficientes $k_1, k_2, \ldots, k_M$, se denominan en general parámetros k de la estructura en celosía. En el Capítulo 11 veremos que los parámetros k tienen un especial

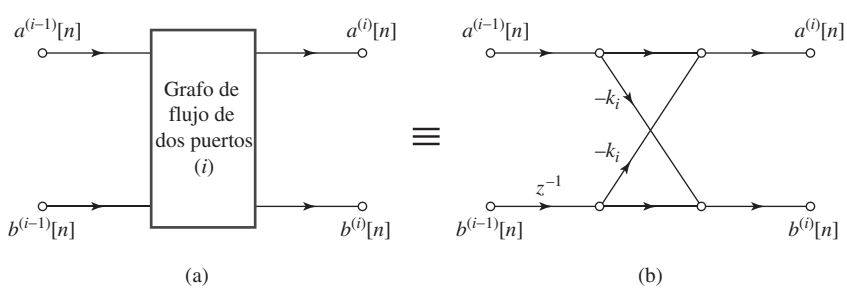


Figura 6.35 Una sección de la estructura de los filtros FIR en celosía. (a) Diagrama de bloques de un bloque básico de dos puertos. (b) Grafo de flujo equivalente.

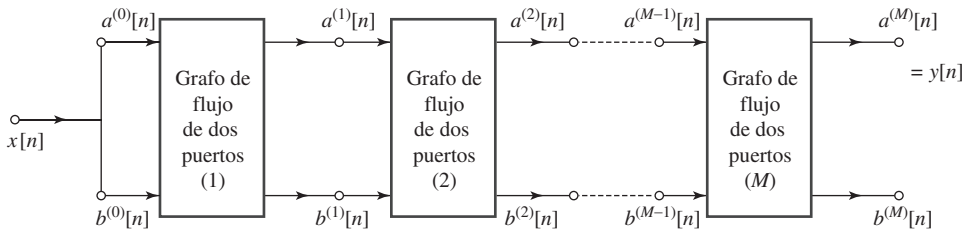


Figura 6.36 Conexión en cascada de M bloques básicos.

significado en el modelado de señales todo polos, y el filtro en celosía de la Figura 6.37 es una estructura de implementación para realizar predicción lineal de muestras de señales. En el presente capítulo, sólo nos centraremos en el uso de los filtros en celosía para implementar funciones de transferencia FIR e IIR todo–polos.

Las variables de nodo $a^{(i)}[n]$ y $b^{(i)}[n]$ de la Figura 6.37 son secuencias intermedias que dependen de la entrada $x[n]$ a través del siguiente conjunto de ecuaciones en diferencias:

$$a^{(0)}[n] = b^{(0)}[n] = x[n] \tag{6.55a}$$

$$a^{(i)}[n] = a^{(i-1)}[n] - k_i b^{(i-1)}[n-1] \quad i = 1,2,\ldots,M \tag{6.55b}$$

$$b^{(i)}[n] = b^{(i-1)}[n-1] - k_i a^{(i-1)}[n] \quad i = 1,2,\ldots,M \tag{6.55c}$$

$$y[n] = a^{(M)}[n]. \tag{6.55d}$$

Como podemos ver, los parámetros k son coeficientes en las M ecuaciones en diferencias acopladas representadas por la Figura 6.37 y por las Ecuaciones (6.55a)–(6.55d). Resulta claro que estas ecuaciones se deben calcular en el orden que se muestra ($i = 0,1,\ldots,M$) ya que como entrada a la etapa $(i+1)$ se necesita la salida de la etapa (i), y así sucesivamente.

La estructura en celosía de la Figura 6.37 es claramente un sistema lineal e invariante con el tiempo, ya que es un grafo lineal de flujo de señales que sólo tiene retardos y coeficientes constantes en los arcos. Observe además que no existen bucles de realimentación, lo que implica que el sistema tiene una respuesta al impulso de duración finita. De hecho, un argumento directo es suficiente para demostrar que la respuesta al impulso desde la entrada hasta cualquier nodo interno es de longitud finita. Concretamente, consideremos la respuesta al impulso desde la entrada $x[n]$ hasta la variable de nodo $a^{(i)}[n]$, es decir, desde la entrada hasta el i-ésimo nodo superior. Resulta claro que

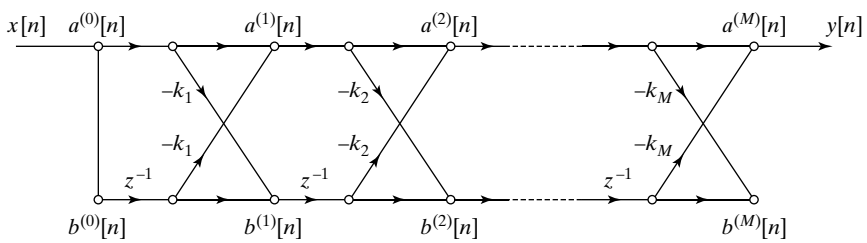


Figura 6.37 Grafo de flujo en celosía de un sistema FIR basado en una conexión en cascada de M bloques básicos de dos puertos como los de la Figura 6.35(b).

si $x[n] = \delta[n]$, entonces $a^{(i)}[0] = 1$ para todo i, ya que el impulso se propaga sin retardo por los arcos superiores de todas las etapas. Todos los otros caminos a cualquier variable de nodo $a^{(i)}[n]$ o $b^{(i)}[n]$ pasan, al menos, por un retardo, correspondiendo el máximo retardo al camino por todos los nodos inferiores hasta la variable de nodo $a^{(i)}[n]$ a través del coeficiente $-k_i$. Este será el último impulso que llega al nodo $a^{(i)}[n]$, por lo que la respuesta al impulso tendrá una longitud de $i+1$ muestras. Todos los otros caminos a un nodo interno evolucionan en zig-zag entre la parte superior y la inferior del grafo, pasando por tanto al menos por uno, pero no por todos, los retardos posibles antes de la sección (i).

Nótese que en nuestra introducción a los filtros en celosía, $a^{(i)}[n]$ y $b^{(i)}[n]$ se han utilizado en la Figura 6.37 y en las Ecuaciones (6.55a)–(6.55d) para indicar las variables de nodo del bloque básico (i) para *cualquier* entrada $x[n]$. Sin embargo, en el resto de nuestra presentación, es conveniente asumir específicamente que $x[n] = \delta[n]$ de forma que $a^{(i)}[n]$ y $b^{(i)}[n]$ sean las respuestas al impulso resultantes en los nodos asociados, y que las correspondientes transformadas Z, $A^{(i)}(z)$ y $B^{(i)}(z)$ sean las funciones de transferencia entre la entrada y los nodos i-ésimos. E consecuencia, la función de transferencia entre la entrada y el nodo i-ésimo superior es

$$A^{(i)}(z) = \sum_{n=0}^{i} a^{(i)}[n]z^{-n} = 1 - \sum_{m=1}^{i} \alpha_m^{(i)} z^{-m}, \tag{6.56}$$

donde en la segunda forma, los coeficientes $\alpha_m^{(i)}$ están compuestos de sumas de productos de los coeficientes k_j para $j \leq m$. Como hemos visto, el coeficiente del retardo máximo desde la entrada al nodo superior i es $\alpha_i^{(i)} = k_i$. Con esta notación, la respuesta al impulso desde $x[n]$ hasta la variable de nodo $a^{(i)}[n]$ es

$$a^{(i)}[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -\alpha_n^{(i)} & 1 \leq n \leq i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \tag{6.57}$$

De forma similar, la función de transferencia desde la entrada al nodo inferior i se denomina $B^{(i)}(z)$. Por tanto, de la Figura 6.35(b) o de las Ecuaciones (6.55b) y (6.55c), podemos ver que

$$A^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z) - k_i z^{-1} B^{(i-1)}(z) \tag{6.58a}$$

$$B^{(i)}(z) = -k_i A^{(i-1)}(z) + z^{-1} B^{(i-1)}(z). \tag{6.58b}$$

Notemos además que en el extremo de la entrada ($i = 0$)

$$A_0(z) = B_0(z) = 1. \tag{6.59}$$

Utilizando las Ecuaciones (6.58a) y (6.58b) y empezando con la Ecuación (6.59), podemos calcular recursivamente $A^{(i)}(z)$ y $B^{(i)}(z)$ hasta cualquier valor de i. El patrón que surge como relación entre $B^{(i)}(z)$ y $A^{(i)}(z)$ es

$$B^{(i)}(z) = z^{-i} A^{(i)}(1/z) \tag{6.60a}$$

o sustituyendo z por $1/z$ en la Ecuación (6.60a), obtenemos la relación equivalente

$$A^{(i)}(z) = z^{-i} B^{(i)}(1/z). \tag{6.60b}$$

Podemos verificar formalmente estas relaciones equivalentes por inducción, es decir, verificando que si son ciertas para algún valor $i-1$ entonces serán ciertas para i. Concretamente, es inmediato comprobar a partir de la Ecuación (6.59) que las Ecuaciones (6.60a) y (6.60b) son ciertas para $i=0$. Observemos ahora que para $i=1$,

$$\begin{aligned}
A^{(1)}(z) &= A^{(0)}(z) - k_1 z^{-1} B^{(0)}(z) = 1 - k_1 z^{-1} \\
B^{(1)}(z) &= -k_1 A^{(0)}(z) + z^{-1} B^{(0)}(z) = -k_1 + z^{-1} \\
&= z^{-1}(1 - k_1 z) \\
&= z^{-1} A^{(1)}(1/z)
\end{aligned}$$

y para $i=2$,

$$\begin{aligned}
A^{(2)}(z) &= A^{(1)}(z) - k_2 z^{-1} B^{(1)}(z) = 1 - k_1 z^{-1} - k_2 z^{-2}(1 - k_1 z) \\
&= 1 - k_1(1-k_2) z^{-1} - k_2 z^{-2} \\
B^{(2)}(z) &= -k_2 A^{(1)}(z) + z^{-1} B^{(1)}(z) = -k_2(1 - k_1 z^{-1}) + z^{-2}(1 - k_1 z) \\
&= z^{-2}(1 - k_1(1-k_2) z - k_2 z^2) \\
&= z^{-2} A^{(2)}(1/z).
\end{aligned}$$

Podemos demostrar ahora el resultado general suponiendo que la Ecuación (6.60a) y la Ecuación (6.60b) son ciertas para $i-1$, y sustituir a continuación en la Ecuación (6.58b), obteniendo

$$\begin{aligned}
B^{(i)}(z) &= -k_i z^{-(i-1)} B^{(i-1)}(1/z) + z^{-1} z^{-(i-1)} A^{(i-1)}(1/z) \\
&= z^{-i} \left[A^{(i-1)}(1/z) - k_i z B^{(i-1)}(1/z) \right].
\end{aligned}$$

A partir de la Ecuación (6.58a), se deduce que el término entre corchetes es $A^{(i)}(1/z)$, por lo que en general,

$$B^{(i)}(z) = z^{-i} A^{(i)}(1/z),$$

como en la Ecuación (6.60a). Por tanto, hemos demostrado que las Ecuaciones (6.60a) y (6.60b) se cumplen para cualquier $i \geq 0$.

Como se indicó anteriormente, las funciones de transferencia $A^{(i)}(z)$ y $B^{(i)}(z)$ se pueden calcular recursivamente utilizando las Ecuaciones (6.58a) y (6.58b). Estas funciones de transferencia son polinomios de orden i, y resulta de particular utilidad obtener una relación directa entre los coeficientes de los polinomios. Con este fin, observemos que el miembro derecho de la Ecuación (6.57) define los coeficientes de $A^{(i)}(z)$ como $-\alpha_m^{(i)}$, para $m = 1, 2, \ldots, i$ con el primer coeficiente igual a uno, es decir, como en la Ecuación (6.56),

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{m=1}^{i} \alpha_m^{(i)} z^{-m}, \tag{6.61}$$

y, de forma similar se tiene

$$A^{(i-1)}(z) = 1 - \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m^{(i-1)} z^{-m}. \tag{6.62}$$

Para obtener una relación recursiva directa de los coeficientes $\alpha_m^{(i)}$ en función de los coeficientes $\alpha_m^{(i-1)}$ y k_i, combinaremos las Ecuaciones (6.60a) y (6.62), obteniéndose que

$$B^{(i-1)}(z) = z^{-(i-1)}A^{(i-1)}(1/z) = z^{-(i-1)}\left[1 - \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m^{(i-1)} z^{+m}\right]. \tag{6.63}$$

Sustituyendo las Ecuaciones (6.62) y (6.63) en la Ecuación (6.58a), $A^{(i)}(z)$ se puede expresar como

$$A^{(i)}(z) = \left(1 - \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m^{(i-1)} z^{-m}\right) - k_i z^{-1}\left(z^{-(i-1)}\left[1 - \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m^{(i-1)} z^{+m}\right]\right). \tag{6.64}$$

Reindexando la segunda suma mediante la inversión del orden de los términos (es decir, sustituyendo m por $i-m$ y sumando de nuevo), y combinando los términos de la Ecuación (6.64) se llega a

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{m=1}^{i-1} \left[\alpha_m^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-m}^{(i-1)}\right] z^{-m} - k_i z^{-i}, \tag{6.65}$$

donde podemos ver que, como se indicó anteriormente, el coeficiente de z^{-i} es $-k_i$. La comparación de las Ecuaciones (6.65) y (6.61) muestra que

$$\alpha_m^{(i)} = \left[\alpha_m^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-m}^{(i-1)}\right] \quad m = 1, \ldots, i-1 \tag{6.66a}$$

$$\alpha_i^{(i)} = k_i. \tag{6.66b}$$

Las Ecuaciones (6.66) proporcionan la recursión directa deseada entre los coeficientes de $A^{(i)}(z)$ y los coeficientes de $A^{(i-1)}(z)$. Estas ecuaciones, junto con la Ecuación (6.60a), determinan también la función de transferencia $B^{(i)}(z)$.

La recursión de las Ecuaciones (6.66) se puede expresar también en forma matricial compacta. Denominaremos $\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$ al vector con los coeficientes de la función de transferencia de $A^{(i-1)}(z)$ y α_{i-1} al vector con esos coeficientes en orden inverso, es decir,

$$\alpha_{i-1} = \left[\alpha_1^{(i-1)} \; \alpha_2^{(i-1)} \; \cdots \; \alpha_{i-1}^{(i-1)}\right]^T$$

y

$$\alpha_{i-1} = \left[\alpha_{i-1}^{(i-1)} \; \alpha_{i-2}^{(i-1)} \; \cdots \; \alpha_1^{(i-1)}\right]^T .$$

Entonces las Ecuaciones (6.66) se pueden expresar como sigue

$$\alpha_i = \begin{matrix} \alpha_{i-1} \\ \ldots\ldots \\ 0 \end{matrix} \quad - k_i \quad \begin{matrix} \alpha_{i-1} \\ \ldots\ldots \\ -1 \end{matrix} \quad . \tag{6.67}$$

Las Ecuaciones (6.66) o las Ecuaciones (6.67) son la base de un algoritmo de análisis de una estructura FIR en celosía para obtener su función de transferencia. Comenzaremos con el grafo de flujo

especificado, como indica la Figura 6.37, por el conjunto de parámetros $\{k_1, k_2, \ldots, k_M\}$. Podemos utilizar recursivamente las Ecuaciones (6.66) para calcular la función de transferencia de filtros FIR de órdenes sucesivamente mayores hasta llegar al final de la cascada, obteniendo

$$A(z) = 1 - \sum_{m=1}^{M} \alpha_m z^{-m} = \frac{Y(z)}{X(z)}, \tag{6.68a}$$

con

$$\alpha_m = \alpha_m^{(M)} \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{6.68b}$$

La Figura 6.38 representa los pasos de este algoritmo.

También resulta de interés obtener los parámetros k de la estructura FIR en celosía que producen una determinada función de transferencia de la entrada $x[n]$ hasta la salida $y[n] = a^{(M)}[n]$. Es decir, deseamos ir desde la función especificada como un polinomio en las Ecuaciones (6.68a) y (6.68b) hasta el conjunto de parámetros k de la estructura en celosía de la Figura 6.37. Esto se puede hacer invirtiendo la recursión de las Ecuaciones (6.66) y (6.67) para obtener sucesivamente la función de transferencia $A^{(i-1)}(z)$ en función de $A^{(i)}(z)$ para $i = M, M-1, \ldots, 2$. Los parámetros k se obtienen como un resultado parcial en esta recursión.

Concretamente, suponemos que los coeficientes $\alpha_m^{(M)} = \alpha_m$ para $m = 1, \ldots, M$ están especificados y deseamos obtener los parámetros $k_1, \ldots, k_M$ que producen esa función de transferencia utilizando una forma en celosía. Comenzaremos con la última etapa de la celosía FIR, es decir, con $i = M$. De la Ecuación (6.66b),

$$k_M = \alpha_M^{(M)} = \alpha_M \tag{6.69}$$

estando $A^{(M)}(z)$ definida en función de los coeficientes especificados, en la forma

$$A^{(M)}(z) = 1 - \sum_{m=1}^{M} \alpha_m^{(M)} z^{-m} = 1 - \sum_{m=1}^{M} \alpha_m z^{-m}. \tag{6.70}$$

Invirtiendo las Ecuaciones (6.66) o, equivalentemente, la Ecuación (6.67) con $i = M$ y $k_M = \alpha_M^{(M)}$ se determina entonces $\boldsymbol{\alpha_{M-1}}$, el vector de coeficientes de la transformada de la penúltima etapa $i = M - 1$. El proceso se repite hasta alcanzar $A^{(1)}(z)$.

Para obtener una fórmula general de recursión para $\alpha_m^{(i-1)}$ en función de $\alpha_m^{(i)}$ partiendo de la Ecuación (6.66a), nótese que debe eliminarse $\alpha_{i-m}^{(i-1)}$. Para ello, se sustituye m por $i - m$ en la Ecuación (6.66a) y se multiplican los dos miembros de la ecuación resultante por k_i, con lo que se obtiene

Algoritmo de conversión de parámetros k en coeficientes

```
Dados k_1, k_2, ..., k_M
for  i = 1, 2, ..., M
   α_i^(i) = k_i                                  Ec. (6.66b)
   if i > 1 then for  j = 1, 2, ..., i − 1
      α_j^(i) = α_j^(i−1) − k_i α_(i−j)^(i−1)     Ec. (6.66a)
   end
end
α_j = α_j^(M)   j = 1, 2, ..., M                  Ec. (6.68b)
```

Figura 6.38 Algoritmo de conversión de los parámetros k en coeficientes del filtro FIR.

Algoritmo de conversión de coeficientes en parámetros k

Dados $\alpha_j^{(M)} = \alpha_j \quad j = 1, 2, \ldots, M$

$k_M = \alpha_M^{(M)}$ Ec. (6.69)

for $i = M, M-1, \ldots, 2$

  for $j = 1, 2, \ldots, i-1$

    $\alpha_j^{(i-1)} = \dfrac{\alpha_j^{(i)} + k_i \alpha_{i-j}^{(i)}}{1 - k_i^2}$ Ec. (6.71a)

  end

  $k_{i-1} = \alpha_{i-1}^{(i-1)}$ Ec. (6.71b)

end

Figura 6.39 Algoritmo de conversión de los coeficientes del filtro FIR en parámetros k.

$$k_i \alpha_{i-m}^{(i)} = k_i \alpha_{i-m}^{(i-1)} - k_i^2 \alpha_m^{(i-1)}.$$

Sumando esta ecuación a la Ecuación (6.66a),

$$\alpha_m^{(i)} + k_i \alpha_{i-m}^{(i)} = \alpha_m^{(i-1)} - k_i^2 \alpha_m^{(i-1)}$$

de donde se deduce que

$$\alpha_m^{(i-1)} = \frac{\alpha_m^{(i)} + k_i \alpha_{i-m}^{(i)}}{1 - k_i^2} \quad m = 1, 2, \ldots, i-1. \tag{6.71a}$$

Una vez calculado $\alpha_m^{(i-1)}$ para $m = 1, 2, \ldots, i-1$ y teniendo en cuenta la Ecuación (6.66b):

$$k_{i-1} = \alpha_{i-1}^{(i-1)}. \tag{6.71b}$$

Por tanto, empezando por $\alpha_m^{(M)} = \alpha_m$, $m = 1, 2, \ldots M$ podemos utilizar las Ecuaciones (6.71a) y (6.71b) y calcular $\alpha_m^{(M-1)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M-1$ y k_{M-1}, y repetir después recursivamente este proceso para obtener todas las funciones de transferencia $A^{(i)}(z)$ y, como un resultado lateral, todos los parámetros k necesarios en la estructura en celosía. El algoritmo correspondiente se representa en la Figura 6.39.

Ejemplo 6.9 Parámetros k de un sistema FIR de primer orden

Consideremos el sistema FIR que se muestra en la Figura (6.40a) cuya función de transferencia es

$$A(z) = 1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}64z^{-2} - 0{,}576z^{-3}.$$

Por consiguiente, $M = 3$ y los coeficientes $\alpha_k^{(3)}$ en la Ecuación (6.70) son

$$\alpha_1^{(3)} = 0{,}9 \quad \alpha_2^{(3)} = 0{,}64 \quad \alpha_3^{(3)} = 0{,}576.$$

Comenzamos observando que $k_3 = \alpha_3^{(3)} = 0{,}576$.

A continuación deseamos calcular los coeficientes de la función de transferencia $A^{(2)}(z)$ utilizando la Ecuación (6.71a). Concretamente, aplicando dicha ecuación obtenemos (redondeando a tres cifras decimales):

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{\alpha_1^{(3)} + k_3\alpha_2^{(3)}}{1-k_3^2} = 0{,}795$$
$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\alpha_2^{(3)} + k_3\alpha_1^{(3)}}{1-k_3^2} = -0{,}182$$

A partir de la Ecuación (6.71b) podemos identificar $k_2 = \alpha_2^{(2)} = -0{,}182$

Para obtener $A^{(1)}(z)$ aplicamos de nuevo la Ecuación (6.71a) obteniendo

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\alpha_1^{(2)} + k_2\alpha_1^{(2)}}{1-k_2^2} = 0{,}673.$$

Identificamos entonces $k_1 = \alpha_1^{(1)} = 0{,}673$. La estructura en celosía resultante se muestra en la Figura 6.40b.

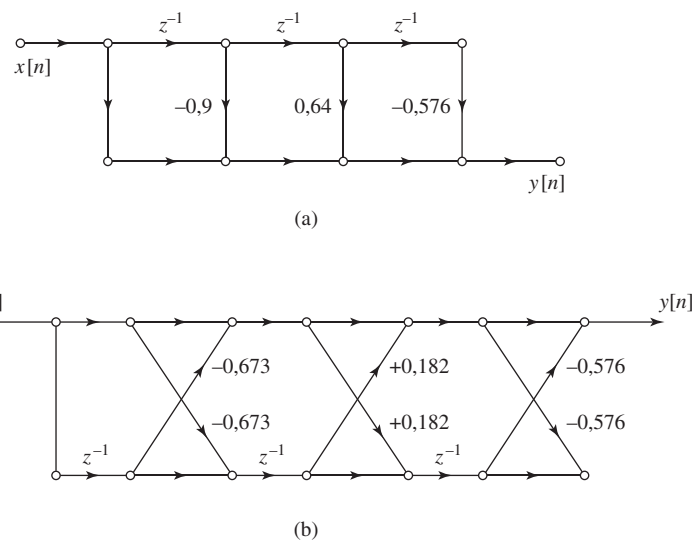


Figura 6.40 Grafos de flujo del ejemplo. (a) Forma directa. (b) Estructura en celosía (con los coeficientes redondeados).

6.6.2. Estructura en celosía todo polos

Se puede desarrollar una estructura en celosía para implementar la función de transferencia todo polos $H(z) = 1/A(z)$ a partir de la estructura en celosía FIR de la sección anterior teniendo en cuenta que $H(z)$ es el filtro inverso de la función de transferencia FIR $A(z)$. Para obtener la estructura en celosía todo polos supongamos que tenemos $y[n] = a^{(M)}[n]$, y deseamos calcular la entrada $a^{(0)}[n] = x[n]$. Esto se puede hacer trabajando de izquierda a derecha para invertir los cálculos en la Figura 6.37. De forma más concreta, si despejamos en la Ecuación (6.58a) $A^{(i-1)}(z)$ en función de $A^{(i)}(z)$ y de $B^{(i-1)}(z)$ y dejamos la Ecuación (6.58b) como está, obtenemos la siguiente pareja de ecuaciones

$$A^{(i-1)}(z) = A^{(i)}(z) + k_i z^{-1} B^{(i-1)}(z) \tag{6.72a}$$

$$B^{(i)}(z) = -k_i A^{(i-1)}(z) + z^{-1} B^{(i-1)}(z), \tag{6.72b}$$

cuya representación en forma de grafo de flujo se muestra en la Figura 6.41. Nótese que en este caso, el flujo de señal es desde i hasta $i-1$ por la parte superior del diagrama y desde $i-1$ hasta i por la parte inferior. La conexión sucesiva de M etapas con la forma de la Figura 6.41 con los valores de k_i apropiados en cada sección lleva la entrada $a^{(M)}[n]$ a la salida $a^{(0)}[n]$ como se muestra en el grafo de flujo de la Figura 6.42. Finalmente, la condición $x[n] = a^{(0)}[n] = b^{(0)}[n]$ en los extremos de la última etapa de la Figura 6.42 produce una realimentación que proporciona las secuencias $b^{(i)}[n]$ que se propagan en dirección inversa. Tal realimentación es, por supuesto, necesaria en un sistema IIR.

El conjunto de ecuaciones en diferencias representadas en la Figura 6.42 es[4]

$$a^{(M)}[n] = y[n] \tag{6.73a}$$

$$a^{(i-1)}[n] = a^{(i)}[n] + k_i b^{(i-1)}[n-1] \quad i = M, M-1, \ldots, 1 \tag{6.73b}$$

$$b^{(i)}[n] = b^{(i-1)}[n-1] - k_i a^{(i-1)}[n] \quad i = M, M-1, \ldots, 1 \tag{6.73c}$$

$$x[n] = a^{(0)}[n] = b^{(0)}[n]. \tag{6.73d}$$

Debido a la realimentación inherente en la Figura 6.42 y a sus ecuaciones correspondientes, deben especificarse las condiciones iniciales de todas las variables de nodo asociadas a los retardos. Generalmente deberemos especificar $b^{(i)}[-1] = 0$ para conseguir condiciones de reposo inicial. Entonces, si se evalúa primero la Ecuación (6.73b), $a^{(i-1)}[n]$ estará disponible en los instantes $n \geq 0$ para la evaluación de la Ecuación (6.73c), con los valores $b^{(i-1)}[n-1]$ suministrados por la iteración anterior.

Ahora podemos plantear que todo el análisis de la Sección 6.6.1 se puede aplicar al sistema en celosía todo polos de la Figura 6.42. Si deseamos obtener una implementación en celosía de un sistema todo polos con función de transferencia $H(z) = 1/A(z)$, podemos utilizar simplemente los algoritmos de las Figuras 6.39 y 6.38, obteniendo los parámetros k de los coeficientes del polinomio del denominador y viceversa.

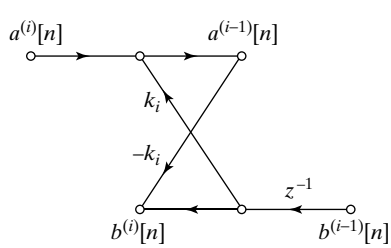


Figura 6.41 Etapa de cálculo de un sistema en celosía todo–polos.

[4]Observe que basando la obtención de la celosía todo polos en la celosía FIR de la Figura 6.37, hemos terminado denominando $y[n]$ a la entrada y $x[n]$ a la salida, al contrario que nuestro convenio habitual. Esta denominación es, por supuesto, arbitraria una vez que se ha completado la obtencion.

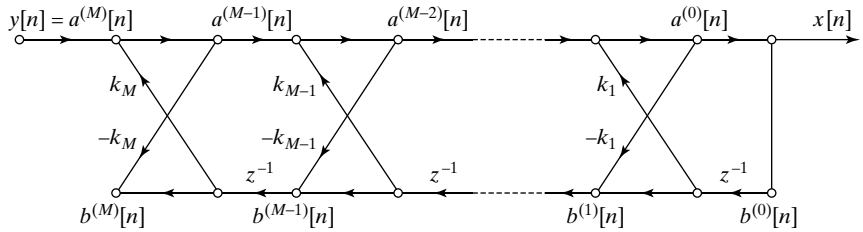


Figura 6.42 Sistema en celosía todo–polos.

Ejemplo 6.10 Implementación en celosía de un sistema IIR

Como ejemplo de sistema IIR, consideremos la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1-0{,}9z^{-1}+0{,}64z^{-2}-0{,}576z^{-3}} \tag{6.74a}$$

$$= \frac{1}{(1-0{,}8jz^{-1})(1+0{,}8jz^{-1})(1-0{,}9z^{-1})} \tag{6.74b}$$

que es el sistema inverso del sistema del Ejemplo 6.9. La Figura 6.43(a) muestra la realización en forma directa de este sistema, mientras que la Figura 6.43(b) muestra el sistema IIR en celosía equivalente utilizando los parámetros k calculados en el Ejemplo 6.9. Nótese que la estructura en celosía tiene el mismo número de retardos (registros de memoria) que la estructura en forma directa. Sin embargo, el número de multiplicadores es dos veces el de la forma directa. Esto es obviamente cierto para cualquier orden M.

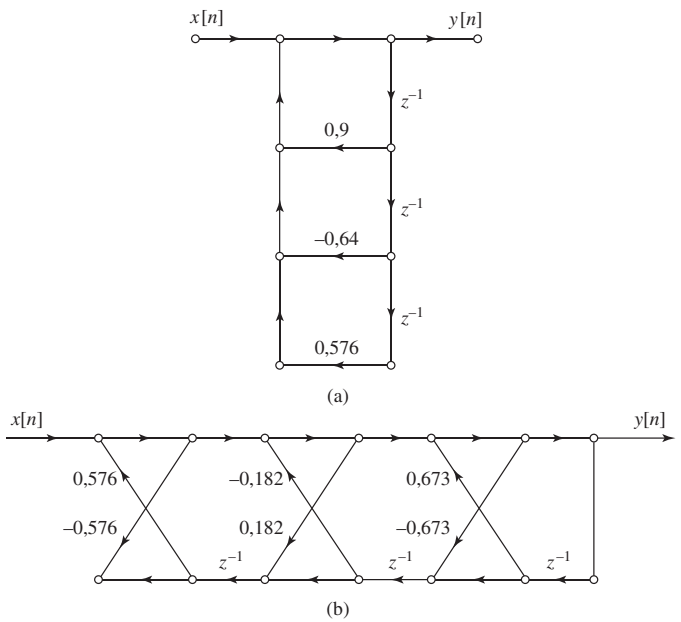


Figura 6.43 Grafo de flujo de señales de un filtro IIR. (a) Forma directa. (b) Forma en celosía.

Como la estructura en celosía de la Figura 6.42 es un sistema IIR, debemos considerar su estabilidad. En el Capítulo 13 veremos que una condición necesaria y suficiente para que todos los ceros del polinomio $A(z)$ estén en el interior de la circunferencia unidad es que $|k_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, M$ (véase Markel y Gray, 1976). El Ejemplo 6.10 confirma este hecho ya que, como se muestra en la Ecuación (6.74b), los polos de $H(z)$ (ceros de $A(z)$) están localizados en el interior de la circunferencia unidad del plano z y todos los parámetros k tienen módulo menor que la unidad. En el caso de sistemas IIR, la garantía de estabilidad inherente a la condición $|k_i| < 1$ es particularmente importante. Incluso aunque la estructura en celosía requiera dos veces más multiplicadores por muestra de salida que la forma directa, es insensible a los efectos de la cuantificación de los parámetros k. Esta propiedad es la causa de la popularidad de los filtros en celosía en aplicaciones de síntesis de voz (véanse Quatieri, 2002 y Rabiner y Schafer, 1978).

6.6.3. Generalización de sistemas en celosía

Hemos demostrado que los sistemas FIR y los sistemas IIR todo polos admiten una representación como estructuras en celosía. Cuando la función de transferencia tiene polos y ceros, es todavía posible obtener una estructura en celosía basándose en una modificación de la estructura todo polos de la Figura 6.42. El desarrollo no se incluirá aquí (véase Gray y Markel, 1973, 1976), pero se esboza en el Problema 11.27.

6.7. REVISIÓN DE LOS EFECTOS NUMÉRICOS DE PRECISIÓN FINITA

Hemos visto que los sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo se pueden implentar utilizando una amplia variedad de estructuras computacionales. Un motivo para considerar alternativas a las estructuras en forma directa simple es que diferentes estructuras que son teóricamente equivalentes se pueden comportar de forma distinta cuando se realizan empleando aritmética de precisión finita. En esta sección daremos una breve introducción a los principales problemas numéricos que aparecen al implementar sistemas en tiempo discreto. En las Secciones 6.8–6.10 se presenta un análisis más detallado de estos efectos de longitud de palabra finita.

6.7.1. Representaciones numéricas

En el análisis teórico de sistemas en tiempo discreto suponemos generalmente que los valores de las señales y de los coeficientes del sistema se representan utilizando números reales. Sin embargo, al utilizar sistemas analógicos en tiempo discreto, la precisión limitada de los componentes de los circuitos hace difícil realizar de forma exacta los coeficientes. De forma similar, al implementar sistemas de tratamiento digital de señales es necesario representar las señales y los coeficientes utilizando algún sistema numérico digital que siempre tiene que ser de precisión finita.

El problema de la precisión numérica finita ya se ha presentado en la Sección 4.8.2 en el contexto de la conversión A/D. Allí demostramos que las muestras de salida de un conversor A/D se cuantifican y, por tanto, se pueden representar mediante números binarios en coma fija. Por motivos de compacidad y de simplicidad en la implementación de la aritmética, uno de los bits del número binario se supone que indica el signo algebraico del número. Son posibles formatos como *módulo y signo, complemento a uno* y *complemento a dos* pero el más común es el complemento a dos.[5] Un número real se puede representar con precisión infinita en formato de complemento a dos como

[5]Una descripción detallada de los sistemas de numeración binaria y la aritmética correspondiente se presenta en Knuth (1997).

$$x = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \right), \tag{6.75}$$

siendo X_m un factor de escala arbitrario y los coeficientes b_i valen 0 o 1. La cantidad b_0 se denomina *bit de signo*. Si $b_0 = 0$, entonces $0 \leq x \leq X_m$, y si $b_0 = 1$, entonces $-X_m \leq x < 0$. Por tanto, cualquier número real cuyo módulo sea menor o igual que X_m se puede representar mediante la Ecuación (6.75). Un número real arbitrario x podría requerir un número infinito de bits para su representación binaria exacta. Como vimos en el caso de la conversión A/D, si utilizamos sólo un número finito de bits $(B+1)$, la representación de la Ecuación (6.75) se puede modificar convirtiéndose en

$$\hat{x} = Q_B[x] = X_m \left(-b_0 + \sum_{i=1}^{B} b_i 2^{-i} \right) = X_m \hat{x}_B. \tag{6.76}$$

La representación binaria resultante está cuantificada, de modo que la mínima diferencia entre números es

$$\Delta = X_m 2^{-B}. \tag{6.77}$$

En este caso, los números cuantificados están en el intervalo $-X_m \leq \hat{x} < X_m$. La parte fraccionaria de $\hat{x}$ se puede representar con la notación posicional

$$\hat{x}_B = b_{0\diamond} b_1 b_2 b_3 \cdots b_B, \tag{6.78}$$

donde $\diamond$ representa la coma binaria.

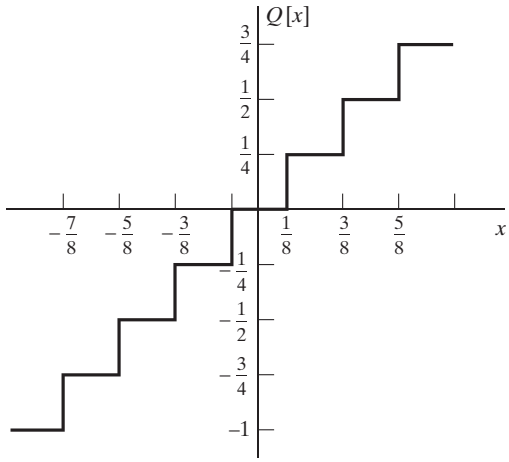
La operación de cuantificar un número utilizando $(B+1)$ bits se puede realizar mediante redondeo o mediante truncamiento, pero en cualquier caso la cuantificación es una operación no lineal sin memoria. Las Figuras 6.44(a) y 6.44(b) muestran la relación entrada-salida para el complemento a dos con redondeo y con truncamiento, respectivamente, para el caso de $B = 2$. Al considerar los efectos de la cuantificación, se define a menudo el *error de cuantificación* como

$$e = Q_B[x] - x. \tag{6.79}$$

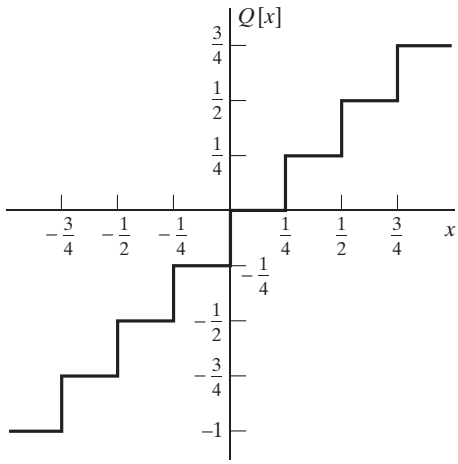
Para el caso de complemento a dos con redondeo, $-\Delta/2 < e \leq \Delta/2$, y para el caso de complemento a dos con truncamiento, $-\Delta < e \leq 0$.[6]

Si un número es mayor que X_m (situación que se conoce como desbordamiento), es necesario implementar algún método para determinar el resultado cuantificado. En el sistema aritmético de complemento a dos, esta necesidad surge cuando se suman dos números cuya suma es mayor que X_m. Por ejemplo, consideremos el número en complemento a dos de cuatro bits 0111, que en forma decimal es 7. Si sumamos el número 0001, el acarreo se propaga hasta el bit de signo, con lo que el resultado es 1000, que en forma decimal es -8. Por tanto, el error resultante puede ser muy grande si hay desbordamiento. La Figura 6.45(a) muestra un cuantificador en complemento a dos incluyendo el efecto del desbordamiento en la aritmética regular de complemento a dos. La Figura 6.45(b) muestra una alternativa, que se denomina *desbordamiento de saturación* o *corte*, Este método de gestión del desbordamiento es el que se realiza generalmente en la conversión A/D, y algunas veces se realiza también en microprocesadores especializados para tratamiento digital de señales, para realizar la suma de números en complemento a dos. Con el desbordamiento de saturación el tamaño del error no crece abruptamente al aparecer el desbordamiento. Sin embargo, una desventaja del método es que no cumple esta interesante y útil propiedad de la aritmética en complemento a dos: Si se suman varios números en complemento a dos cuyo

[6] Nótese que la Ecuación (6.76) representa también el resultado de redondear o truncar cualquier representación binaria de (B_1+1) bits, con $B_1 > B$. En este caso Δ se debe sustituir por $(\Delta - X_m 2^{-B_1})$ en los límites del tamaño del error de cuantificación.



(a)



(b)

Figura 6.44 Relaciones no lineales que representan el complemento a dos. (a) Redondeo y (b) truncamiento, para $B = 2$.

resultado final no produce desbordamiento, el resultado de sumar en complemento a dos cada uno de esos números es correcto aunque en las sumas intermedias pueda producirse desbordamiento.

Tanto la cuantificación como el desbordamiento introducen errores en las representaciones digitales de números. Desafortunadamente, si queremos minimizar el desbordamiento manteniendo constante el número de bits, debemos aumentar X_m e incrementar entonces proporcionalmente el tamaño de los errores de cuantificación. Por tanto, para conseguir simultáneamente mayor margen dinámico y menor error de cuantificación, hay que aumentar al número de bits de la representación binaria.

Hasta ahora, simplemente hemos dicho que la cantidad X_m es un factor de escala arbitrario. Sin embargo, este factor tiene varias interpretaciones de utilidad. En la conversión A/D consideramos que X_m era el margen dinámico del conversor A/D. En este caso, X_m representaría probablemente una tensión o corriente en la parte analógica del sistema. Por tanto, X_m actúa como una constante de calibración que relaciona los números binarios en el intervalo $-1 \leq \hat{x}_B < 1$ con la amplitud de la señal analógica.

En estructuras de tratamiento digital de señales es habitual suponer que todas las variables de señal y todos los coeficientes son fracciones binarias. Por tanto, si multiplicamos una variable de señal de

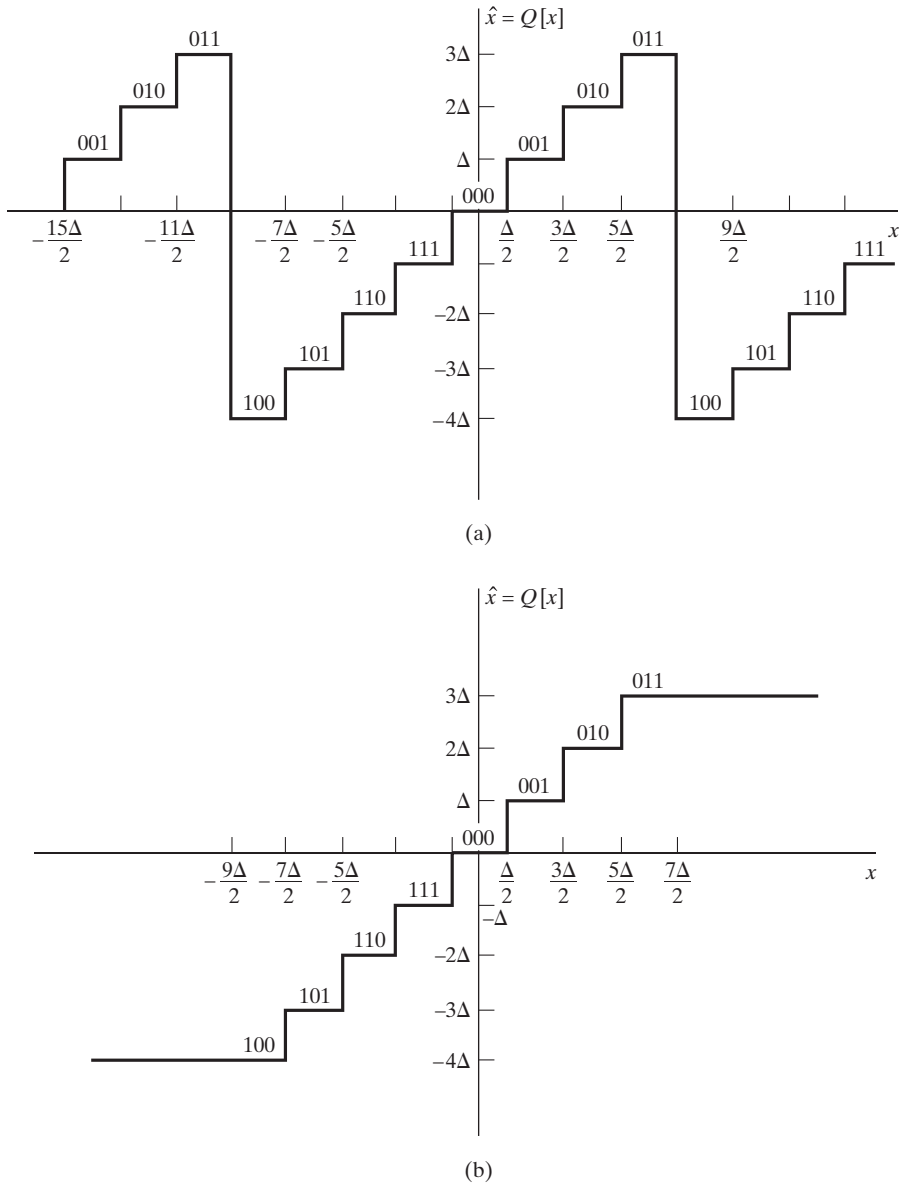


Figura 6.45 Redondeo en complemento a dos. (a) Desbordamiento natural. (b) Saturación.

$(B+1)$ bits por un coeficiente de $(B+1)$ bits, el resultado será una fracción de $(2B+1)$ bits que se puede reducir a una de $(B+1)$ bits mediante redondeo o mediante truncamiento de los bits menos significativos. Procediendo de esta forma, X_m se puede ver como un factor de escala que permite representaciones de números mayores que la unidad en módulo. Por ejemplo, en cálculos en coma fija, es habitual suponer que cada número binario tiene aplicado un factor de escala de la forma $X_m = 2^c$. Entonces, un valor de $c = 2$ implica que la coma binaria está situada realmente entre los bits b_2 y b_3 en la palabra binaria de la Ecuación (6.78). Muchas veces, este factor de escala no se representa explícitamente, sino que está implícito en el programa de realización o en la arquitectura hardware.

Existe todavía otra forma de interpretar el factor de escala X_m que conduce a las *representaciones en coma flotante*. En estas representaciones, el exponente c del factor de escala se denomina *característica* y la parte fraccionaria $\hat{x}_B$ se denomina *mantisa*. En los sistemas de aritmética en coma flotante, tanto la característica como la mantisa se representan explícitamente como números binarios. Las representaciones en coma flotante resultan de utilidad para conseguir tanto un margen dinámico grande como un ruido de cuantificación pequeño. Sin embargo, el ruido de cuantificación se manifiesta de una forma algo diferente.

6.7.2. Efectos de la cuantificación en la realización de sistemas

La cuantificación numérica afecta de varias formas a la realización de sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo. Veamos un ejemplo simple, consideremos la Figura 6.46(a), que muestra un diagrama de bloques de un sistema en el que una señal en tiempo continuo de banda limitada $x_c(t)$ se muestrea y se obtiene la secuencia $x[n]$, que es la entrada a un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia es

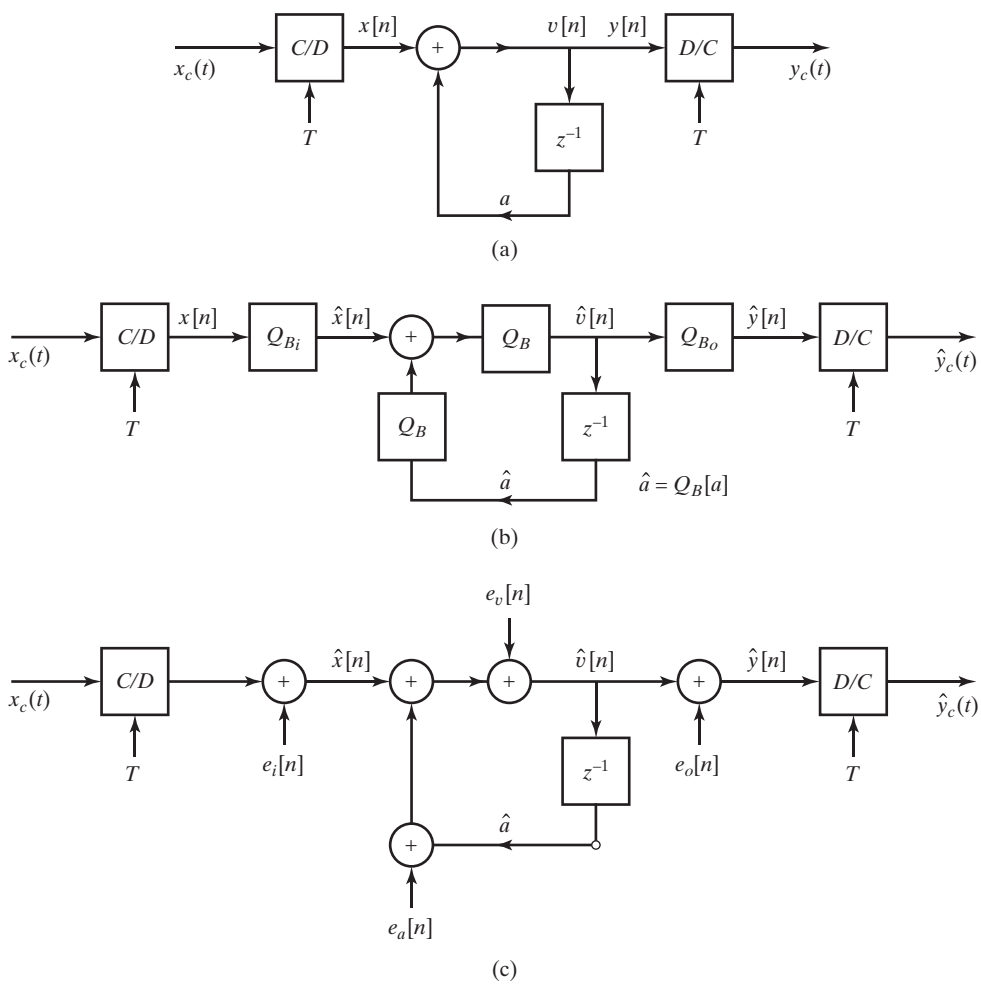


Figura 6.46 Realización del filtrado en tiempo discreto de una señal analógica. (a) Sistema ideal. (b) Modelo no lineal. (c) Modelo linealizado.

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \tag{6.80}$$

La salida de este sistema, $y[n]$, se convierte en la señal de banda limitada $y_c(t)$ mediante interpolación lineal de banda limitada.

La Figura 6.46(b) muestra un modelo más realista. En la práctica, el muestreo se realizaría con un conversor A/D de precisión finita, $(B_i + 1)$ bits. El sistema se realizaría con aritmética binaria de $(B + 1)$ bits, y el coeficiente a de la Figura 6.46(a) se representaría con $(B + 1)$ bits de precisión. Además, la variable retardada $\hat{v}[n-1]$ se almacenaría en un registro de $(B + 1)$ bits, y al multiplicar el número de $(B + 1)$ bits $\hat{v}[n-1]$ por el número de $(B + 1)$ bits $\hat{a}$, el producto resultante tendría $(2B + 1)$ bits de longitud. Si suponemos que se utiliza un sumador de $(B + 1)$ bits, el producto $\hat{a}\hat{v}[n-1]$ debería ser cuantificado (es decir, truncado o redondeado) con $(B + 1)$ bits, antes de ser sumado a la muestra de entrada $\hat{x}[n]$ cuantificada con $(B_i + 1)$ bits. Si $B_i < B$, los $(B_i + 1)$ bits de las muestras de entrada se pueden situar en cualquier parte de la palabra binaria de $(B + 1)$ bits con la apropiada extensión del signo. Las diferentes posibilidades corresponden a diferentes escalados de la entrada. El coeficiente a ha sido cuantificado, por lo que dejando aparte los otros errores de cuantificación, la respuesta del sistema no puede, en general, ser la misma que en la Figura 6.46(a). Finalmente, las muestras de $(B + 1)$ bits de $\hat{v}[n]$, calculadas iterando la ecuación en diferencias que representa el diagrama de bloques, se transformarían en una señal analógica mediante un conversor D/A de $(B_o + 1)$ bits. Si $B_o < B$, las muestras de salida se deben cuantificar antes de su conversión D/A.

Aunque el modelo de la Figura 6.46(b) podría ser una representación precisa de un sistema real, sería difícil de analizar. El sistema es no lineal debido a los cuantificadores y a la posibilidad de desbordamiento en el sumador. Además, los errores de cuantificación se introducen en muchos puntos del sistema. Los efectos de esos errores son imposibles de analizar de forma precisa, ya que dependen de la señal de entrada, que por lo general será desconocida. Por tanto, nos vemos obligados a adoptar varias aproximaciones diferentes para simplificar el análisis de estos sistemas.

El efecto de la cuantificación de los parámetros del sistema, como el coeficiente a de la Figura 6.46(a), se determina en general de forma separada al efecto de cuantificación en la conversión de datos o en la realización de ecuaciones en diferencias. Es decir, los coeficientes ideales de una función de transferencia se sustituyen por sus valores cuantificados, y las funciones de transferencia resultantes se prueban para ver si, en ausencia de otra cuantificación en la aritmética, la cuantificación de los coeficientes del filtro ha degradado las prestaciones del sistema hasta límites inaceptables. En el ejemplo de la Figura 6.46, si el número real a se cuantifica con $(B + 1)$ bits, hay que considerar si el sistema resultante, con función de transferencia

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}z^{-1}} \tag{6.81}$$

está lo suficientemente cercano a la función de transferencia deseada $H(z)$ dada en la Ecuación (6.80). Dado que sólo existen 2^{B+1} números binarios diferentes de $(B + 1)$ bits, el polo de $H(z)$ sólo puede aparecer en 2^{B+1} posiciones diferentes del eje real del plano z. Este tipo de análisis se presentará de forma más general en la Sección 6.8.

La no linealidad del sistema de la Figura 6.46(b) produce un comportamiento que no puede ocurrir en sistemas lineales. Concretamente, los sistemas como éste pueden presentar ciclos límite con entrada cero, es decir, la salida puede oscilar periódicamente cuando la entrada se hace cero después de haber sido distinta de cero. Los ciclos límite pueden ser causados tanto por la cuantificación como por el desbordamiento. Aunque el análisis de esos fenómenos es difícil, se han obtenido resultados aproximados útiles. En la Sección 6.10 se comentan brevemente los ciclos límite.

Si se tiene cuidado en el diseño de la implementación digital, podremos asegurar que los desbordamientos ocurrirán sólo en raras ocasiones y que los errores de cuantificación serán pequeños. Bajo esas condiciones, el sistema de la Figura 6.46(b) se comporta de forma muy semejante a un sistema lineal (con coeficientes cuantificados), en el que los errores de cuantificación se inyectan en la entrada, en la salida y en puntos internos de la red, allí donde se produce redondeo o truncamiento. Por tanto, el modelo de la Figura 6.46(b) se puede reemplazar por el modelo linealizado de la Figura 6.46(c), en el que los cuantificadores se han sustituido por fuentes de ruido aditivo (véanse Glod y Rader, 1969 y Jackson, 1970a, 1970b). La Figura 6.46(c) es equivalente a la Figura 6.46(b) si conocemos exactamente cada una de las fuentes de ruido. Sin embargo, como se expuso en la Sección 4.8.3, se pueden obtener resultados útiles si suponemos un modelo de ruido aleatorio para el ruido de cuantificación de la conversión A/D. Este mismo planteamiento se puede utilizar para analizar los efectos de la cuantificación aritmética en las implementaciones digitales de sistemas lineales. Como puede verse en la Figura 6.46(c), cada fuente de ruido inyecta una señal aleatoria que es procesada por una parte diferente del sistema, pero como suponemos que todas las partes del sistema son lineales, se puede calcular el efecto global mediante superposición. En la Sección 6.9 ilustraremos esta forma de análisis para varios sistemas importantes.

En el ejemplo sencillo de la Figura 6.46, hay poca flexibilidad en la elección de la estructura. Sin embargo, en sistemas de orden superior hemos visto que existe una amplia variedad de posibilidades. Algunas estructuras son menos sensibles a la cuantificación de coeficientes que otras. Además, como estructuras diferentes tienen fuentes de ruido de cuantificación diferentes, y debido a que esas fuentes de ruido son filtradas de diferentes maneras por el sistema, veremos que estructuras que son teóricamente equivalentes pueden comportarse algunas veces de forma bastante diferente cuando en su realización se emplea aritmética de precisión finita.

6.8. EFECTOS DE LA CUANTIFICACIÓN DE COEFICIENTES

Los sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo se usan generalmente para realizar operaciones de filtrado. En el Capítulo 7 se presentarán métodos para diseñar filtros FIR e IIR. Esos métodos de diseño suponen generalmente una forma particular de la función de transferencia. El resultado del proceso de diseño del filtro es una función de transferencia para la que se debe escoger una determinada estructura de realización (un conjunto de ecuaciones en diferencias). La selección debe hacerse entre una serie de infinitas realizaciones posibles teóricamente equivalentes. Aunque casi siempre estaremos interesados en realizaciones que requieran la mínima complejidad hardware o software, no es siempre posible basar la selección de la estructura de implementación únicamente en ese criterio. Como veremos en la Sección 6.9, la estructura de realización determina el ruido de cuantificación generado internamente en el sistema. Además, algunas estructuras son más sensibles que otras a perturbaciones en los coeficientes. Como explicamos en la Sección 6.7, la forma estándar de considerar estos efectos es tratarlos independientemente. En esta sección consideraremos los efectos de la cuantificación de los parámetros del sistema.

6.8.1. Efectos de la cuantificación de coeficientes en sistemas IIR

Cuando se cuantifican los parámetros de una función de transferencia racional o de la correspondiente ecuación en diferencias, los polos y los ceros se mueven a posiciones nuevas del plano z. De forma equivalente, la respuesta en frecuencia resulta perturbada con respecto a su valor original. Si la estructura de realización del sistema es altamente sensible a perturbaciones en los coeficientes, el sistema resultante puede no cumplir en absoluto las especificaciones originales de diseño, y un sistema IIR puede incluso convertirse en inestable.

El análisis detallado de sensibilidad en el caso general es complejo y su valor generalmente está limitado a casos específicos de realización de filtros digitales. Generalmente es más fácil utilizar herramientas potentes de simulación para cuantificar los coeficientes de las ecuaciones en diferencias empleadas en la realización del sistema. Se calcula después la respuesta en frecuencia y se compara con la respuesta en frecuencia deseada. Incluso aunque la simulación del sistema sea necesaria en casos específicos, merece todavía la pena considerar en general cómo afecta la cuantificación de los coeficientes de la ecuación en diferencias a la función de transferencia. Por ejemplo, la representación de la función de transferencia correspondiente a ambas formas directas (y a sus correspondientes formas traspuestas) es el cociente de polinomios

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}. \tag{6.82}$$

Los conjuntos de coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son los coeficientes ideales con precisión infinita en ambas estructuras de realización en forma directa (y en sus correspondientes estructuras traspuestas). Si cuantificamos los coeficientes, obtenemos la función de transferencia

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k z^{-k}}, \tag{6.83}$$

siendo $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ y $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ los coeficientes cuantificados que difieren de los coeficientes originales en los errores de cuantificación Δa_k y Δb_k.

Consideremos ahora de qué forma las raíces de los polinomios del numerador y del denominador, los polos y los ceros de $H(z)$, resultan afectados por los errores de los coeficientes. Claramente, cada una de las raíces del polinomio resulta afectada por *todos* los errores de los coeficientes del polinomio, ya que cada raíz es función de todos los coeficientes del polinomio. Por tanto, cada polo y cada cero resultará afectado por todos los errores de cuantificación de los polinomios del numerador y del denominador, respectivamente. De forma más específica, Kaiser (1966) demostró que si los polos (o ceros) están agrupados estrechamente, es posible que pequeños errores en los coeficientes del denominador (numerador) puedan causar grandes desplazamientos en los polos (ceros) en las estructuras en forma directa. Por tanto, si los polos (ceros) están agrupados estrechamente, cosa que ocurre en filtros paso banda o paso bajo de banda estrecha, se puede esperar que los polos de una estructura en forma directa sean bastante sensibles a los errores de cuantificación de los coeficientes. Además, el análisis de Kaiser demostró que cuanto mayor es el número de polos (ceros) agrupados, mayor es la sensibilidad.

Las funciones de transferencia de las formas en paralelo y en cascada, dadas por las Ecuaciones (6.30) y (6.35), respectivamente, consisten en combinaciones de sistemas de segundo orden en forma directa. Sin embargo, en ambos casos, cada pareja de polos complejos conjugados se realiza de forma independiente de los otros polos. Por tanto, el error de una pareja de polos concreta es independiente de su distancia a los otros polos de la función de transferencia. Para la forma en cascada, se mantiene el mismo argumento para los ceros, ya que se realizan como factores independientes de segundo orden. Por tanto, la forma en cascada es generalmente mucho menos sensible a la cuantificación de los coeficientes que la realización en forma directa equivalente.

Como vimos en la Ecuación (6.35), los ceros de la función de transferencia en forma paralelo se realizan implícitamente, mediante la combinación de secciones de segundo orden cuantificadas para

obtener un denominador común. Por tanto, un cero concreto resulta afectado por los errores de cuantificación de los coeficientes del numerador y del denominador de *todas* las secciones de segundo orden. Sin embargo, en la mayoría de los diseños prácticos de filtros, se encuentra que la forma paralela es mucho menos sensible a la cuantificación de los coeficientes que las formas directas equivalentes debido a que los subsistemas de segundo orden no son extremadamente sensibles a la cuantificación. En muchos filtros prácticos, los ceros se distribuyen ampliamente por la circunferencia unidad, o en algunos casos pueden estar todos situados en $z = \pm 1$. En esta última situación, los ceros proporcionan una atenuación mucho mayor que la especificada alrededor de las frecuencias $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ y por tanto, los movimientos de los ceros fuera del punto $z = \pm 1$ no degradan de forma significativa las prestaciones del sistema.

6.8.2. Ejemplo de la cuantificación de coeficientes en un filtro elíptico

Para ilustrar el efecto de la cuantificación de coeficientes, consideremos el ejemplo de un filtro IIR elíptico paso banda diseñado utilizando las técnicas de aproximación que se presentarán en el Capítulo 7. El filtro se diseña para cumplir las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 0{,}99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1{,}01, &\qquad 0{,}3\pi \le |\omega| \le 0{,}4\pi, \\ |H(e^{j\omega})| \le 0{,}01 (\text{es decir, } -40\,\text{dB}), &\qquad |\omega| \le 0{,}29\pi, \\ |H(e^{j\omega})| \le 0{,}01 (\text{es decir, } -40\,\text{dB}), &\qquad 0{,}41\pi \le |\omega| \le \pi. \end{aligned}$$

Es decir, el filtro debe aproximarse a uno en su banda de paso, $0{,}3\pi \le |\omega| \le 0{,}4\pi$, y a cero en el resto de frecuencias. Como una concesión necesaria para la posibilidad de realización computacional (no preocuparse por esto), se admite una región de transición de amplitud $0{,}01\pi$ a cada lado de la banda de paso. En el Capítulo 7 veremos que las especificaciones de los algoritmos de diseño de filtros selectivos en frecuencia se representan a menudo de esta forma. La función de MATLAB para el diseño de filtros elípticos proporciona los coeficientes de una representación en forma directa de orden 12 de la función de transferencia con la forma de la Ecuación (6.82), donde los coeficientes a_k y b_k se calculan con aritmética en coma flotante de 64 bits y se muestran en la Tabla 6.1 con precisión de 15 dígitos decimales completos. Denominaremos "no cuantificada" a esta representación del filtro.

La respuesta en frecuencia $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ del filtro no cuantificado se muestra en la Figura 6.47(a), que muestra que el filtro cumple las especificaciones en las bandas eliminadas (al menos 40 dB de atenuación). Además, la línea continua de la Figura 6.47(b), que es una ampliación de la región de la banda de paso $0{,}3\pi \le |\omega| \le 0{,}4\pi$ del filtro no cuantificado, muestra que el filtro cumple también las especificaciones en la banda de paso.

Factorizando los polinomios del numerador y del denominador correspondientes a los coeficientes de la Tabla 6.1 en la Ecuación (6.82) se llega a la representación

$$H(z) = \prod_{k=1}^{12} \frac{b_0(1 - c_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})}. \tag{6.84}$$

en función de los ceros y los polos, que se presentan en la Tabla 6.2.

Los polos y los ceros del filtro sin cuantificar que están en el semiplano superior del plano z se muestran en la Figura 6.48(a). Nótese que todos los ceros están en la circunferencia unidad, y su posición angular corresponde a los nulos profundos que se observan en la Figura 6.47(a). Los ceros se sitúan estratégicamente por el método de diseño del filtro a cada lado de la banda de paso, de forma que proporcionan la atenuación deseada en la banda eliminada y un corte abrupto. Nótese también que los

polos se agrupan en la banda de paso estrecha y dos de los pares de polos conjugados tiene un radio mayor que 0,99. Este ajuste fino de las posiciones de los ceros y los polos es necesario para obtener la respuesta en frecuencia del filtro de banda estrecha y corte abrupto que se muestra en la Figura 6.47(a).

Un vistazo a los coeficientes de la Tabla 6.1 sugiere que la cuantificación en forma directa puede presentar problemas importantes. Recuérdese que con un cuantificador fijo el error de cuantificación es el mismo independientemente del tamaño del número cuantificado. Es decir, el error de cuantificación del coeficiente $a_{12} = 0{,}62628586102551$ puede ser tan grande como el error del coeficiente $a_6 = 88{,}67462886449437$, si utilizamos el mismo número de bits y el mismo factor de escala para ambos. Por esta razón, cuando se cuantifican con una precisión de 16 bits los coeficientes de la forma directa

TABLA 6.1 COEFICIENTES NO CUANTIFICADOS DE LA FORMA EN CASCADA DE UN FILTRO ELÍPTICO DE ORDEN 12.

k	b_k	a_k
0	0,01075998066934	1,00000000000000
1	-0,05308642937079	-5,22581881365349
2	0,16220359377307	16,78472670299535
3	-0,34568964826145	-36,88325765883139
4	0,57751602647909	62,39704677556246
5	-0,77113336470234	-82,65403268814103
6	0,85093484466974	88,67462886449437
7	-0,77113336470234	-76,47294840588104
8	0,57751602647909	53,41004513122380
9	-0,34568964826145	-29,20227549870331
10	0,16220359377307	12,29074563512827
11	-0,05308642937079	-3,53766014466313
12	0,01075998066934	0,62628586102551

TABLA 6.2 CEROS Y POLOS DE UN FILTRO ELIPTICO DE ORDEN 12 SIN CUANTIFICAR.

k	$\lvert c_k \rvert$	$\angle c_k$	$\lvert d_k \rvert$	$\angle d_{1k}$
1	1.0	$\pm$ 1,65799617112574	0,92299356261936	$\pm$1,15956955465354
2	1.0	$\pm$ 0,65411612347125	0,92795010695052	$\pm$1,02603244134180
3	1.0	$\pm$ 1,33272553462313	0,96600955362927	$\pm$1,23886921536789
4	1.0	$\pm$ 0,87998582176421	0,97053510266510	$\pm$0,95722682653782
5	1.0	$\pm$ 1,28973944928129	0,99214245914242	$\pm$1,26048962626170
6	1.0	$\pm$ 0,91475122405407	0,99333628602629	$\pm$0,93918174153968

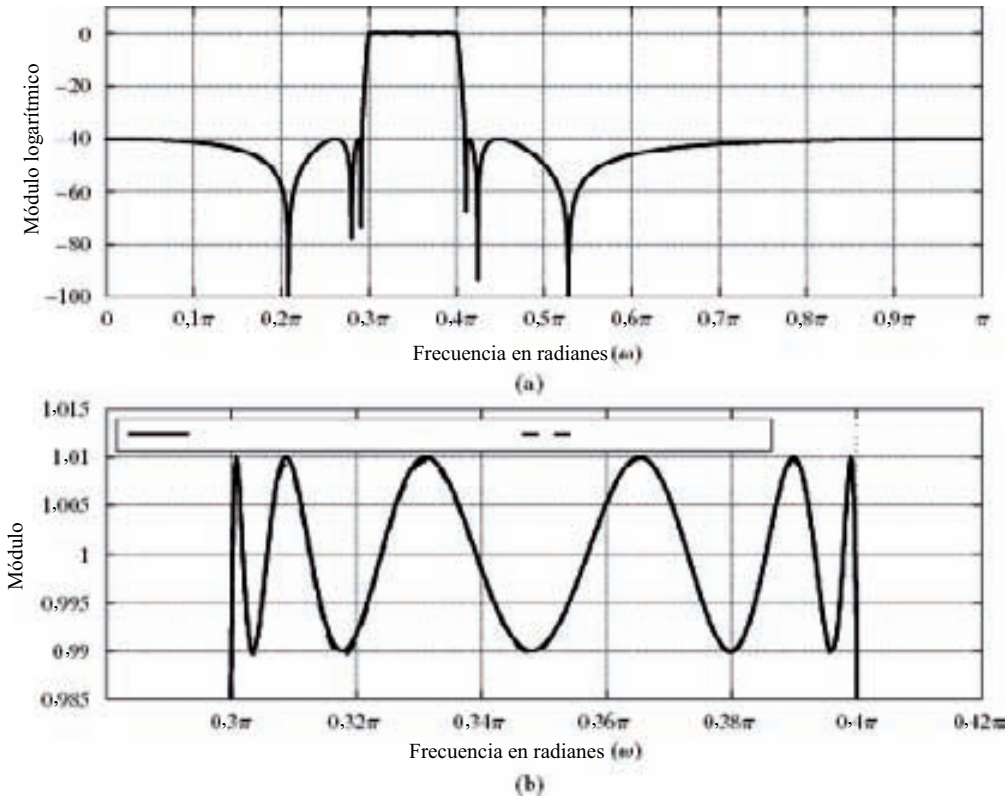


Figura 6.47 Ejemplo de cuantificación de coeficientes IIR. (a) Logaritmo del módulo de un filtro elíptico paso banda no cuantificado. (b) Módulo en la banda de paso para el caso en cascada no cuantificado (línea continua) y de la forma en cascada cuantificada con 16 bits (línea discontinua).

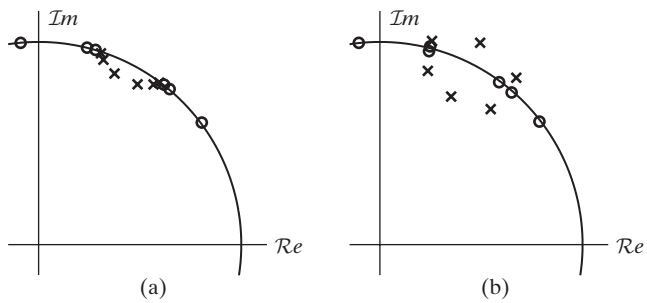


Figura 6.48 Ejemplo de cuantificación de coeficientes IIR. (a) Polos y ceros de $H(z)$ para coeficientes sin cuantificar. (b) Polos y ceros para coeficientes de la forma directa con cuantificación de 16 bits.

de la Tabla 6.1, cada coeficiente se cuantifica independientemente de los demás, con objeto de maximizar la precisión en cada coeficiente. Es decir, cada coeficiente de 16 bits requiere su propio factor de escala.[7] Con esta opción conservativa, los polos y los ceros resultantes se muestran en la Figura 6.48(b). Nótese que los ceros se han desplazado de forma apreciable, pero no exageradamente. En particular, la

[7]Para simplificar la implementación, sería deseable, pero mucho menos preciso, si todos los coeficientes tuvieran el mismo factor de escala.

pareja de ceros cercanos situados en la parte superior de la circunferencia permanece aproximadamente en el mismo ángulo, pero se han desplazado fuera de la circunferencia unidad en un grupo de cuatro ceros inversos conjugados, mientras que los otros ceros se han desplazado angularmente pero permanecen en la circunferencia unidad. Este movimiento restringido es consecuencia de la simetría de los coeficientes del polinomio del numerador, que se conserva con la cuantificación. Sin embargo, los polos estrechamente cercanos, que no tienen restricciones de simetría, se trasladan a posiciones muy diferentes y, como se puede observar claramente, algunos polos se han desplazado al exterior de la circunferencia unidad. Por tanto, el sistema en forma directa no se puede implementar utilizando coeficientes de 16 bits, debido a que sería inestable.

Por otra parte, la forma en cascada es mucho menos sensible a la cuantificación de los coeficientes. La forma en cascada del presente ejemplo se puede obtener agrupando los pares de polos y ceros complejos conjugados en la Ecuación (6.84) y en la Tabla 6.2, para formar seis factores de segundo orden:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{6} \frac{b_{0k}(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} = \prod_{k=1}^{6} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}. \tag{6.85}$$

Los ceros c_k y los polos d_k junto con los coeficientes b_{ik} y a_{ik} de la forma en cascada se pueden calcular con precisión en coma flotante de 64 bits, de forma que dichos coeficientes se pueden considerar sin cuantificar. La Tabla 6.3 presenta los coeficientes de las seis secciones de segundo orden (tal como se definen en la Ecuación (6.85). El emparejamiento y ordenamiento de los polos y los ceros sigue un procedimiento que se presentará en la Sección 6.9.3.

TABLA 6.3 COEFICIENTES SIN CUANTIFICAR DE LA FORMA EN CASCADA DE UN FILTRO ELÍPTICO DE ORDEN 12.

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	0,737904	-0,851917	0,137493	0,023948	0,137493
2	0,961757	-0,861091	0,281558	-0,446881	0,281558
3	0,629578	-0,933174	0,545323	-0,257205	0,545323
4	1,117648	-0,941938	0,706400	-0,900183	0,706400
5	0,605903	-0,984347	0,769509	-0,426879	0,769509
6	1,173028	-0,986717	0,937657	-1,143918	0,937657

Para ilustrar cómo se cuantifican y se representan los coeficientes como números en coma fija, se cuantifican los coeficientes de la Tabla 6.3 con una precisión de 16 bits. Los coeficientes resultantes se presentan en la Tabla 6.4. Los coeficientes en coma fija se presentan como enteros decimales multiplicados por un factor de escala que es potencia de 2. La representación binaria se obtendría transformando el entero decimal en un número binario. En una implementación en coma fija, el factor de escala sólo se representaría implícitamente, mediante los desplazamientos de datos que serían necesarios para alinear las comas binarias de los productos, previamente a su suma con otros productos. Nótese que las comas binarias de los coeficientes no están situados en la misma posición. Por ejemplo, todos los coeficientes con factor de escala 2^{-15} tienen su coma binaria situada entre el bit de signo, b_0, y el bit fraccionario más significativo, b_1, como se muestra en la Ecuación (6.78). Sin embargo, los números que no son superiores en módulo a 0,5, como el coeficiente b_{02}, se pueden desplazar a la izquierda una o más posi-

TABLA 6.4 CUANTIFICACIÓN CON 16 BITS DE LOS COEFICIENTES DE LA FORMA EN CASCADA DE UN FILTRO ELÍPTICO DE ORDEN 12.

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	24196×2^{-15}	-27880×2^{-15}	17805×2^{-17}	3443×2^{-17}	17805×2^{-17}
2	31470×2^{-15}	-28180×2^{-15}	18278×2^{-16}	-29131×2^{-16}	18278×2^{-16}
3	20626×2^{-15}	-30522×2^{-15}	17556×2^{-15}	-8167×2^{-15}	17556×2^{-15}
4	18292×2^{-14}	-30816×2^{-15}	22854×2^{-15}	-29214×2^{-15}	22854×2^{-15}
5	19831×2^{-15}	-32234×2^{-15}	25333×2^{-15}	-13957×2^{-15}	25333×2^{-15}
6	19220×2^{-14}	-32315×2^{-15}	15039×2^{-14}	-18387×2^{-14}	15039×2^{-14}

ciones.[8] Así, el punto binario para b_{02} está realmente a la izquierda del bit de signo como si la longitud de la palabra se hubiera ampliado a 17 bits. Por otra parte, los números cuyo módulo supera a 1 pero es menor que 2, como a_{16}, deben desplazar su coma binaria una posición a la derecha, es decir, entre b_1 y b_2 en la Ecuación (6.78).

La línea de puntos en la Figura 6.47(b) muestra la respuesta en amplitud en la banda de paso de la implementación en forma en cascada cuantificada. La respuesta en frecuencia sólo está ligeramente degradada en la región de la banda de paso y la degradación es inapreciable en la banda eliminada.

Para obtener otras estructuras equivalentes, la función de transferencia de la forma en cascada se debe disponer de otra forma. Por ejemplo, si se determina una estructura en forma paralelo (mediante descomposición en fracciones simples de la función de transferencia no cuantificada), y los coeficientes resultantes se cuantifican con 16 bits como antes, la respuesta en frecuencia en la banda de paso es tan cercana a la respuesta en frecuencia sin cuantificar que la diferencia no es observable en la Figura 6.47(a) y apenas apreciable en la Figura 6.47(b).

El ejemplo que acabamos de presentar ilustra la robustez a efectos de la cuantificación de los coeficientes de las formas en cascada y en paralelo, y también ilustra la extrema sensibilidad de las formas directas para filtros de orden alto. Debido a esta sensibilidad, raramente se usan las formas directas para implementar algo que no sean sistemas de segundo orden.[9] Como las formas en paralelo y en cascada se pueden configurar de forma que requieran la misma cantidad de memoria y la misma (o sólo ligeramente superior) cantidad de cómputo que la forma directa canónica, se utilizan más frecuentemente esas estructuras modulares. Algunas estructuras más complejas pueden ser más robustas para longitudes de palabra muy pequeñas, pero su coste computacional para sistemas del mismo orden es sensiblemente superior.

6.8.3. Polos de secciones de segundo orden cuantificadas

Incluso en los sistemas de segundo orden que se utilizan para realizar las formas en paralelo o en cascada, existe cierta flexibilidad para mejorar la robustez frente a la cuantificación de coeficientes. Con-

[8] El uso de diferentes posiciones de la coma binaria permite retener mayor precisión en los coeficientes, pero complica la programación o la arquitectura del sistema.

[9] Una excepción son los sistemas de síntesis de voz, en los que se implementan de forma rutinaria sistemas de orden 10 o superior utilizando la forma directa. Esto es posible porque en síntesis de voz los polos de la función de transferencia están ampliamente separados (váse Rabiner y Schafer, 1978).

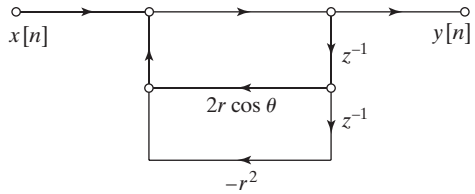


Figura 6.49 Realización en forma directa de una pareja de polos complejos conjugados.

sideremos una pareja de polos conjugados que se realiza utilizando la forma directa, como se indica en la Figura 6.49. Con coeficientes de precisión infinita, esta red tiene polos en $z = re^{j\theta}$ y $z = re^{-j\theta}$. Sin embargo, si los coeficientes $2r\cos\theta$ y $-r^2$ se cuantifican, sólo es posible un número finito de posiciones diferentes de los polos. Los polos deben estar en una rejilla del plano z definida por la intersección de circunferencias concéntricas (correspondientes a la cuantificación de r^2) y líneas verticales (correspondientes a la cuantificación de $2r\cos\theta$). La Figura 6.50(a) ilustra esa rejilla para una cuantificación de 4 bits (3 bits más un bit de signo). Es decir, r^2 puede tomar siete valores positivos y cero, y $2r\cos\theta$ puede tomar siete valores positivos, ocho valores negativos y cero. La Figura 6.50(b) muestra una rejilla más densa que se obtiene con cuantificación de 7 bits (6 bits mas uno de signo). Los puntos de la Figura 6.50 se reflejan especularmente, por supuesto, en los otros cuadrantes del plano z. Nótese que para la forma directa, la rejilla es poco densa en los alrededores del eje real. Por lo tanto, los polos localizados alrededor de $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ se pueden desplazar más que los situados en los alrededores de $\theta = \pi/2$. Por supuesto, siempre es posible que la posición de los polos con precisión infinita esté muy cerca de una de las posiciones permitidas para los polos cuantificados. En este caso, la cuantificación no causa problemas, pero en general debe esperarse que la cuantificación degrade las prestaciones.

La Figura 6.51 muestra una estructura alternativa de segundo orden para realizar polos en $z = re^{j\theta}$ y $z = re^{-j\theta}$. Esta estructura se denomina *forma acoplada* del sistema de segundo orden (véase Rader y Gold, 1967). Se puede verificar fácilmente que los sistemas de las Figuras 6.49 y 6.51 tienen los mismos polos para el caso de coeficientes con precisión infinita. Para implementar el sistema de la Figura 6.51, debemos cuantificar $r\cos\theta$ y $r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Como esas cantidades son, respectivamente, la parte real e imaginaria de las posiciones de los polos, las posiciones cuantificadas de los polos están en la intersección de líneas verticales y horizontales equiespaciadas en el plano complejo. Las Figuras 6.52(a) y 6.52(b) muestran las posibles posiciones de los polos para el caso de cuantificación con 4 bits y con 7 bits, respectivamente. En este caso, la densidad de las posiciones de los polos es uniforme hacia el interior de la circunferencia unidad. Para obtener esta densidad uniforme se requiere el doble de multiplicadores por constantes. En algunas situaciones, este coste computacional extra podría estar justificado para lograr una posición más precisa de los polos con menor longitud de palabra.

6.8.4. Efectos de la cuantificación de coeficientesen sistemas FIR

Para sistemas FIR, sólo nos interesan las posiciones de los ceros de la función de transferencia, ya que para sistemas FIR causales, todos los polos están en $z = 0$. Aunque acabamos de ver que la estructura en forma directa se debe evitar en sistemas IIR de orden alto, en cambio es utilizada habitualmente en sistemas FIR. Para comprender el por qué, expresaremos la función de transferencia de un sistema FIR en forma directa como

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n}. \tag{6.86}$$

Supongamos ahora que los coeficientes $\{h[n]\}$ se cuantifican, con lo que se obtiene un nuevo conjunto de coeficientes $\{\hat{h}[n] = h[n] + \Delta h[n]\}$. La función de transferencia del sistema cuantificado es entonces

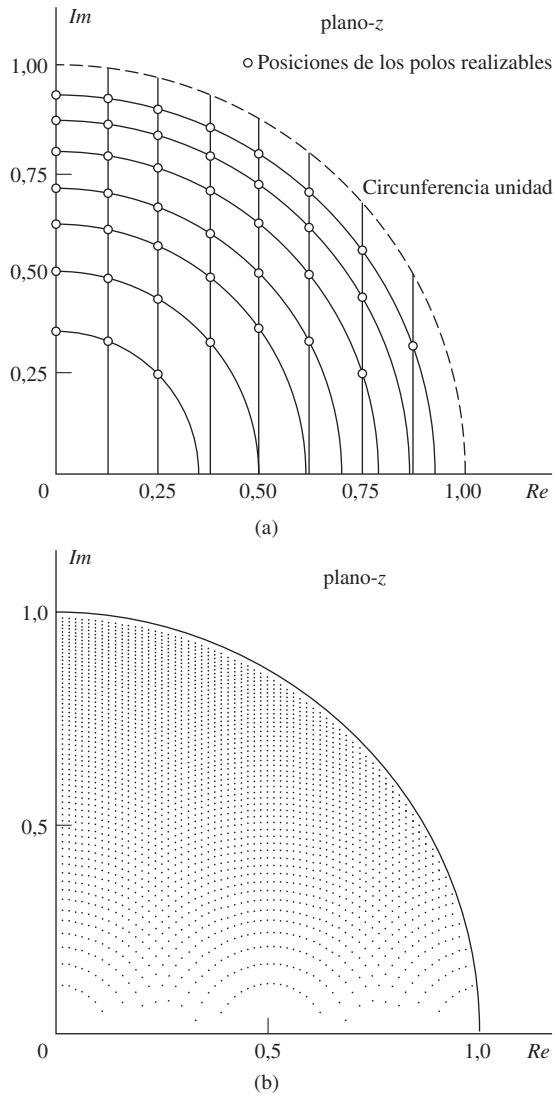


Figura 6.50 Localizaciones de los polos del sistema IIR de segundo orden en forma directa de la Figura 6.49. (a) Cuantificación de los coeficientes con cuatro bits. (b) Cuantificación de siete bits.

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{M} \hat{h}[n]z^{-n} = H(z) + \Delta H(z), \tag{6.87}$$

siendo

$$\Delta H(z) = \sum_{n=0}^{M} \Delta h[n]z^{-n}. \tag{6.88}$$

Por tanto, la función de transferencia (y entonces, también la respuesta en frecuencia), del sistema cuantificado se relaciona linealmente con los errores de cuantificación de los coeficientes de la respuesta al impulso. Por este motivo, el sistema cuantificado se puede representar como indica la Figura 6.53, que muestra el sistema no cuantificado en paralelo con un sistema de error cuya respuesta al impulso es la secuencia de las muestras del error de cuantificación $\{\Delta h[n]\}$ y cuya función de transferencia es la correspondiente transformada z, $\Delta H(z)$.

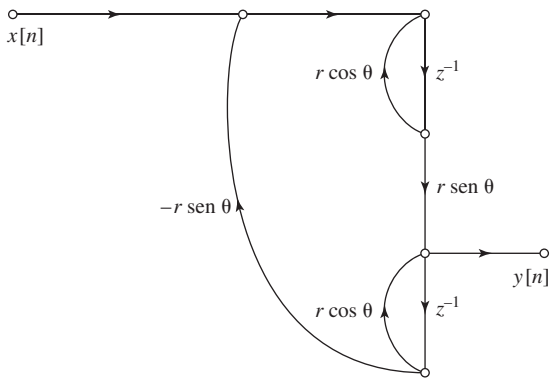


Figura 6.51 Realización en forma acoplada de una pareja de polos complejos conjugados.

Otra forma de estudiar la sensibilidad de la estructura FIR en forma directa sería examinar la sensibilidad de los ceros a los errores de cuantificación de los coeficientes de la respuesta al impulso que son, por supuesto, los coeficientes del polinomio $H(z)$. Si los ceros de $H(z)$ están estrechamente agrupados, sus posiciones serán muy sensibles a los errores de cuantificación de los coeficientes de la respuesta al impulso. La razón de que el sistema FIR en forma directa sea tan ampliamente utilizado es que, para la mayoría de los sistemas FIR de fase lineal, los ceros están distribuidos de forma más o menos uniforme en el plano z. Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo.

6.8.5. Ejemplo de cuantificación de un filtro FIR óptimo

Como ejemplo de cuantificación de coeficientes en el caso FIR, consideremos un filtro paso bajo de fase lineal diseñado para cumplir las siguientes especificaciones:

$$0{,}99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1{,}01, \qquad 0 \leq |\omega| \leq 0{,}4\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0{,}001 \,(\text{es decir, } -60\,\text{dB}), \qquad 0{,}6\pi \leq |\omega| \leq \pi.$$

Este filtro se ha diseñado utilizando la técnica de diseño de Parks-McClellan, que presentaremos en la Sección 7.7.3. Los detalles del diseño de este ejemplo se comentan en la sección 7.8.1.

La Tabla 6.5 muestra los coeficientes de la respuesta al impulso del sistema sin cuantificar, junto con los coeficientes cuantificados para el caso de cuantificación con 16, 14, 13 y 8 bits. La Figura 6.54 presenta una comparación de las respuestas en frecuencia de varios sistemas. La Figura 6.54(a) muestra el logaritmo del módulo en dB de la respuesta en frecuencia para coeficientes sin cuantificar. Las Figuras 6.54(b), (c), (d), (e) y (f) muestran los errores de aproximación en la banda de paso y en la banda eliminada (errores en la aproximación a la unidad en la banda de paso y a cero en la banda eliminada), para los casos sin cuantificar y con cuantificación de 16, 14, 13 y 8 bits, respectivamente. Observando la Figura 6.54 podemos ver que el sistema cumple las especificaciones para el caso sin cuantificar y con cuantificación de 16 bits y 14 bits. Sin embargo, con cuantificación de 13 bits el error de aproximación en la banda eliminada se hace mayor que 0,001, y con cuantificación de 8 bits el error de aproximación en la banda eliminada es más de 10 veces el especificado. Vemos, por tanto, que en la realización del sistema en forma directa se requiere cuantificar los coeficientes al menos con 14 bits. Sin embargo, esto no es una limitación seria, ya que los coeficientes de 14 bits o de 16 bits se ajustan bastante bien a muchas de las tecnologías que se podrían utilizar en la realización de este filtro.

La Figura 6.55 muestra el efecto de la cuantificación de los coeficientes en las posiciones de los ceros del filtro. Nótese que en el caso de no usar cuantificación, que se muestra en la Figura 6.55(a), los

ceros están dispersos por el plano z, aunque existe un cierto agrupamiento en la circunferencia unidad. Los ceros en la circunferencia unidad son los principales responsables de la atenuación en la banda eliminada, mientras que los situados en posiciones inversas conjugadas fuera de la circunferencia unidad son los principales responsables de formar la banda de paso. Obsérvese que se aprecia poca diferencia

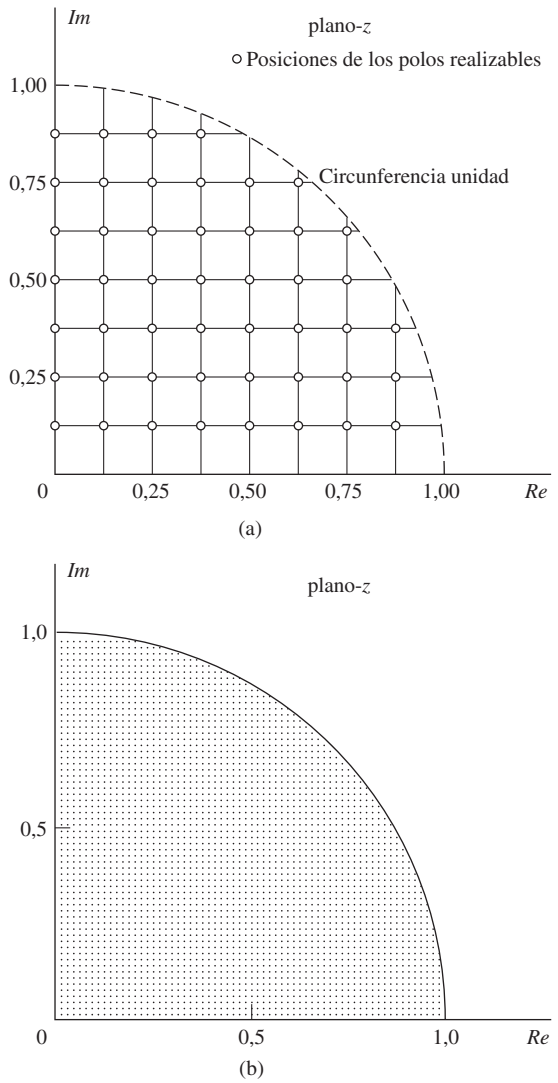


Figura 6.52 Localizaciones de los polos de la forma acoplada del sistema IIR de segundo orden que se muestra en la Figura 6.51. (a) Cuantificación de los coeficientes con cuatro bits. (b) Cuantificación de los coeficientes con siete bits.

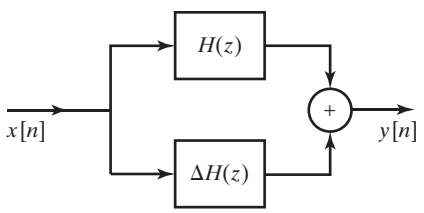


Figura 6.53 Representación de la cuantificación de coeficientes en sistemas FIR.

TABLA 6.5 COEFICIENTES CUANTIFICADOS Y NO CUANTIFICADOS DE UN FILTRO PASO BAJO FIR ÓPTIMO ($M = 27$)

Coeficiente	Sin cuantificar	16 bits	14 bits	13 bits	8 bits
$h[0] = h[27]$	$1{,}359657 \times 10^{-3}$	45×2^{-15}	11×2^{-13}	6×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[1] = h[26]$	$-1{,}616993 \times 10^{-3}$	-53×2^{-15}	-13×2^{-13}	-7×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[2] = h[25]$	$-7{,}738032 \times 10^{-3}$	-254×2^{-15}	-63×2^{-13}	-32×2^{-12}	-1×2^{-7}
$h[3] = h[24]$	$-2{,}686841 \times 10^{-3}$	-88×2^{-15}	-22×2^{-13}	-11×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[4] = h[23]$	$1{,}255246 \times 10^{-2}$	411×2^{-15}	103×2^{-13}	51×2^{-12}	2×2^{-7}
$h[5] = h[22]$	$6{,}591530 \times 10^{-3}$	216×2^{-15}	54×2^{-13}	27×2^{-12}	1×2^{-7}
$h[6] = h[21]$	$-2{,}217952 \times 10^{-2}$	-727×2^{-15}	-182×2^{-13}	-91×2^{-12}	-3×2^{-7}
$h[7] = h[20]$	$-1{,}524663 \times 10^{-2}$	-500×2^{-15}	-125×2^{-13}	-62×2^{-12}	-2×2^{-7}
$h[8] = h[19]$	$3{,}720668 \times 10^{-2}$	1219×2^{-15}	305×2^{-13}	152×2^{-12}	5×2^{-7}
$h[9] = h[18]$	$3{,}233332 \times 10^{-2}$	1059×2^{-15}	265×2^{-13}	132×2^{-12}	4×2^{-7}
$h[10] = h[17]$	$-6{,}537057 \times 10^{-2}$	-2142×2^{-15}	-536×2^{-13}	-268×2^{-12}	-8×2^{-7}
$h[11] = h[16]$	$-7{,}528754 \times 10^{-2}$	-2467×2^{-15}	-617×2^{-13}	-308×2^{-12}	-10×2^{-7}
$h[12] = h[15]$	$1{,}560970 \times 10^{-1}$	5115×2^{-15}	1279×2^{-13}	639×2^{-12}	20×2^{-7}
$h[13] = h[14]$	$4{,}394094 \times 10^{-1}$	14399×2^{-15}	3600×2^{-13}	1800×2^{-12}	56×2^{-7}

en la Figura 6.55(b), utilizando cuantificación con 16 bits, pero en la Figura 6.55(c), con cuantificación de 13 bits, los ceros en la circunferencia unidad se han desplazado de forma significativa. Finalmente, en la Figura 6.55(d) puede verse que la cuantificación con 8 bits causa que varios ceros de la circunferencia unidad se emparejen y se muevan fuera de dicha circunferencia para ocupar posiciones inversas conjugadas. Este comportamiento de los ceros es completamente consistente con el comportamiento de la respuesta en frecuencia que se muestra en la Figura 6.54.

Merece la pena mencionar un aspecto final de este ejemplo. Todos los coeficientes no cuantificados tienen módulo menor que 0,5. Por tanto, si todos los coeficientes (es decir, la respuesta al impulso) se multiplican por dos previamente a la cuantificación, se hará un uso más eficiente de los bits disponibles, efecto resultante de aumentar B en 1. En la Tabla 6.5 y en la Figura 6.54 no hemos tenido en cuenta esta posibilidad de aumentar la precisión.

6.8.6. Mantenimiento de la fase lineal

Hasta ahora no hemos hecho suposiciones sobre la respuesta de fase del sistema FIR. Sin embargo, la posibilidad de tener fase lineal generalizada es una de las principales ventajas de los sistemas FIR. No debe olvidarse que los sistemas FIR de fase lineal tienen una respuesta al impulso simétrica ($h[M-n] = h[n]$) o antisimétrica ($h[M-n] = -h[n]$). Estas condiciones de fase lineal se conservan fácilmente en el sistema en forma directa cuantificado. Por tanto, todos los subsistemas presentados en el ejemplo de la subsección anterior tienen fase lineal, independientemente de la cuantificación. Esto se puede ver en el modo en el que se conservan las posiciones inversas conjugadas de la Figura 6.55.

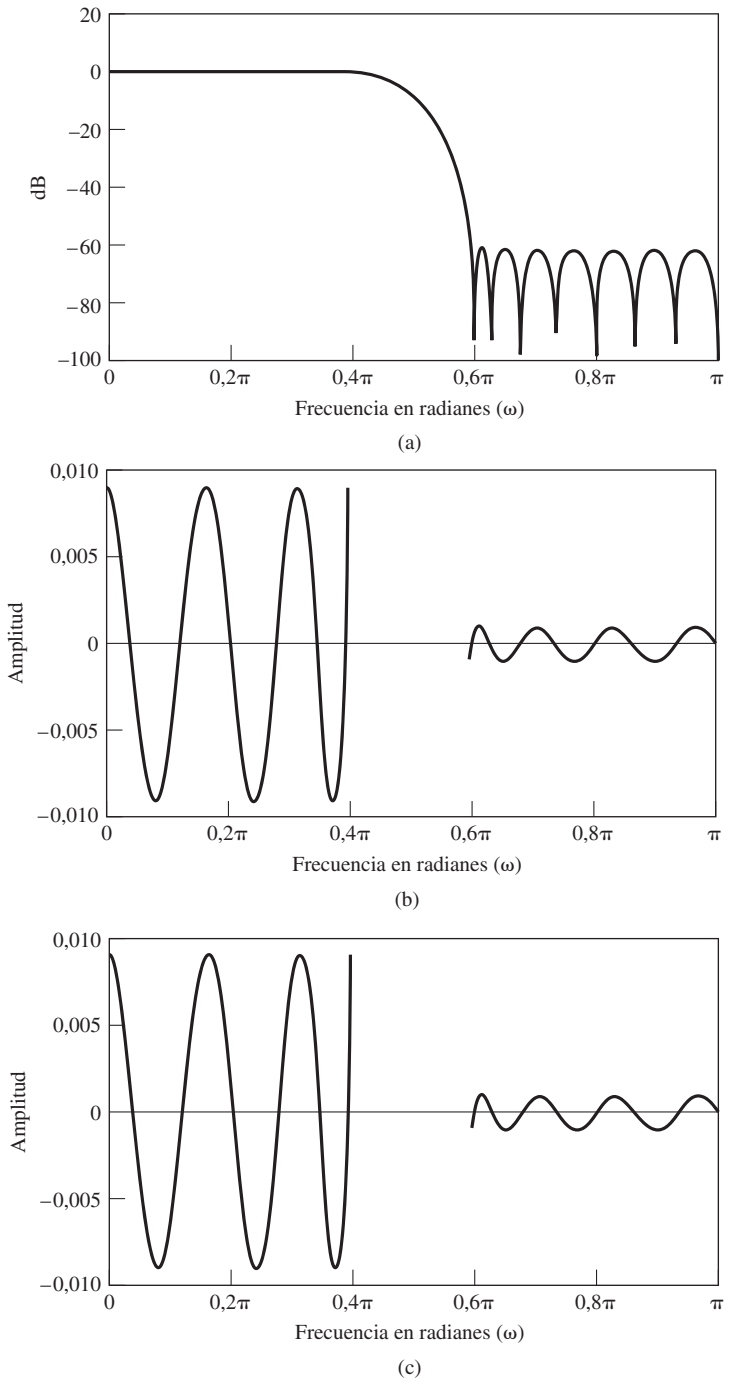
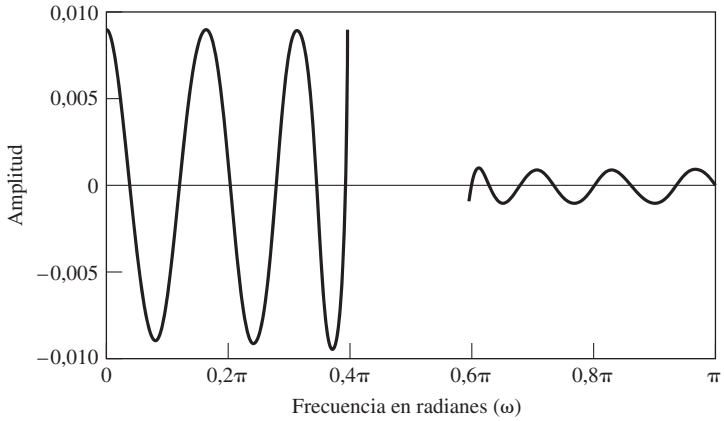
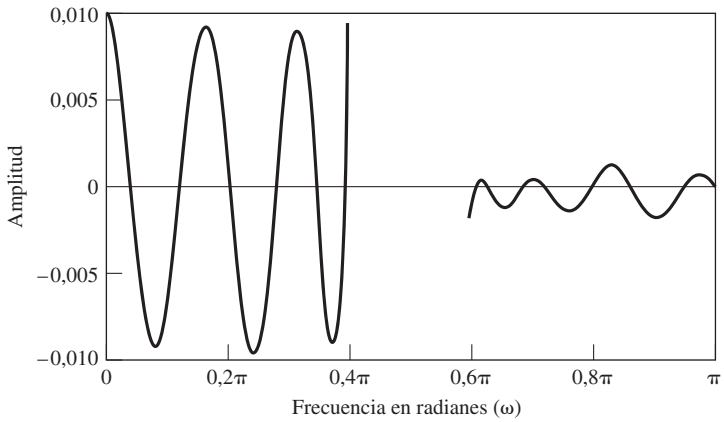


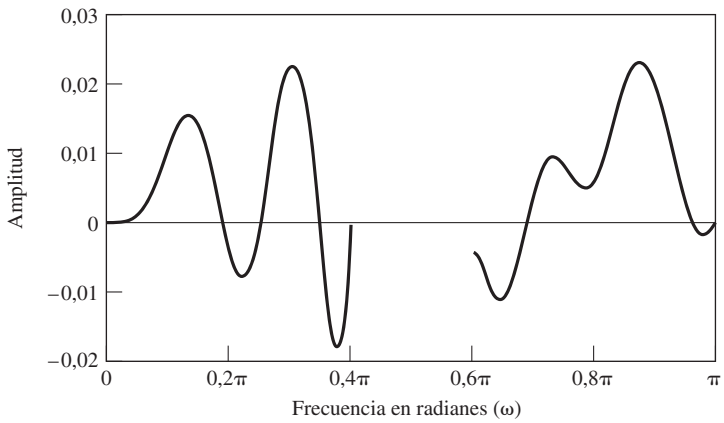
Figura 6.54 Ejemplo de cuantificación en un filtro FIR. (a) Logaritmo del módulo para el caso no cuantificado. (b) Error de aproximación para el caso no cuantificado (el error no está definido en la banda de transición). (c) Error de aproximación para cuantificación con 16 bits.



(d)



(e)



(f)

Figura 6.54 (*Continuación*) (d) Error de aproximación para cuantificación con 14 bits (e) Error de aproximación para cuantificación con 13 bits. (f) Error de aproximación para cuantificación con 8 bits.

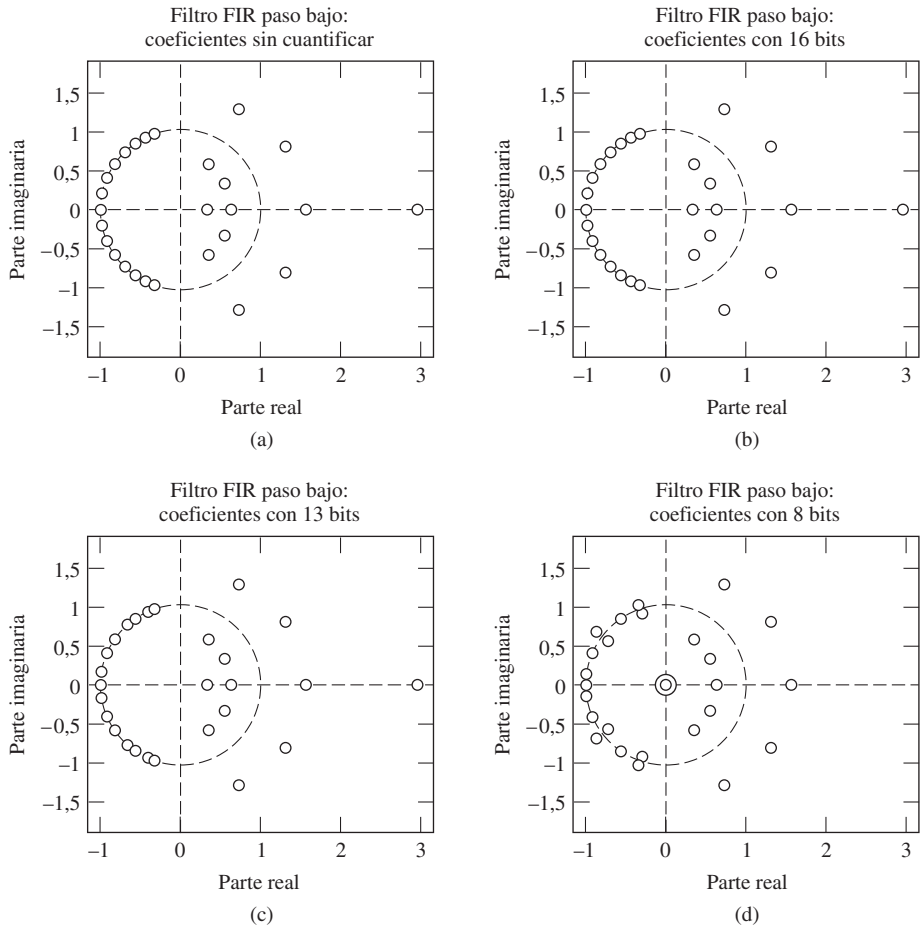


Figura 6.55 Efecto de la cuantificación de la respuesta al impulso en los ceros de $H(z)$. (a) Sin cuantificación (b) Cuantificación con 16 bits. (c) Cuantificación con 13 bits. (d) Cuantificación con 8 bits.

La Figura 6.55(d) sugiere que, en situaciones donde la cuantificación es muy gruesa o en sistemas de orden alto con ceros muy cercanos entre sí, puede merecer la pena realizar independientemente pequeños conjuntos de ceros mediante un sistema FIR con forma en cascada. Para que se mantenga la fase lineal cada una de las secciones de la cascada debe ser también de fase lineal. No olvidemos que los ceros de un sistema con fase lineal deben aparecer como indica la Figura 6.34. Por ejemplo, si utilizamos secciones de segundo orden de la forma $(1 + az^{-1} + z^{-2})$ para realizar cada pareja de ceros complejos conjugados en la circunferencia unidad, cuando se cuantifica el coeficiente a el cero sólo puede moverse por la circunferencia unidad. Esto evita que los ceros se salgan de la circunferencia unidad y se disminuya su efecto de atenuación. De la misma forma, los ceros reales en el interior de la circunferencia unidad y en la posición inversa en el exterior de la circunferencia unidad seguirían siendo reales. Además, los ceros en $z = \pm 1$ se pueden realizar de forma exacta mediante sistemas de primer orden. Si una pareja de ceros complejos conjugados en el interior de la circunferencia unidad se realiza mediante un sistema de segundo orden, en vez de mediante un sistema de cuarto orden, hay que asegurar que para cada cero complejo en el interior de la circunferencia unidad existe un cero inverso conjugado en el exterior de de dicha circunferencia. Esto se puede hacer expresando el factor de cuarto orden correspondiente a los ceros en $z = re^{j\theta}$ y $z = r^{-1}e^{-j\theta}$ como

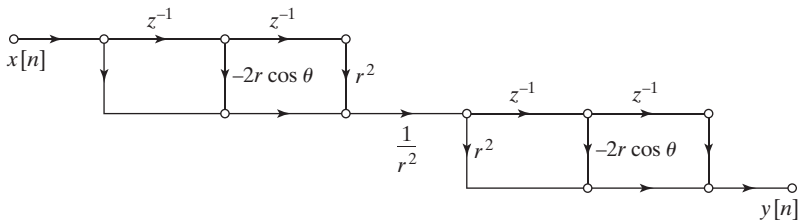


Figura 6.56 Subsistema para implementar factores de cuarto orden en un sistema FIR de fase lineal, de forma que la linealidad de la fase se mantenga independientemente de la cuantificación de los parámetros.

$$\begin{aligned} &1 + cz^{-1} + dz^{-2} + cz^{-3} + z^{-4} \\ &\quad = (1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2})\frac{1}{r^2}(r^2 - 2r\cos\theta z^{-1} + z^{-2}). \end{aligned} \tag{6.89}$$

Esta condición se refleja en el subsistema de la Figura 6.48, que utiliza los mismos coeficientes, $-2r\cos\theta$ y r^2, para realizar los ceros en el interior de la circunferencia unidad y los ceros inversos conjugados en el exterior de la circunferencia unidad. Por tanto, la condición de fase lineal se mantiene tras la cuantificación. Nótese que el factor $(1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2})$ es idéntico al denominador del sistema IIR en segunda forma directa que se muestra en la Figura 6.49. Por tanto, el conjunto de ceros cuantificados es como se muestra en la Figura 6.50. En Herrmann y Schüssler (1970b) se pueden encontrar más detalles sobre las realizaciones en cascada de sistemas FIR.

6.9. EFECTOS DEL RUIDO DE REDONDEO EN FILTROS DIGITALES

Las ecuaciones en diferencias, cuando se realizan con aritmética de precisión finita, son sistemas no lineales. Aunque en general es importante entender cómo afecta esta no linealidad a las prestaciones de los sistemas en tiempo discreto, en general no se requiere un análisis preciso de los efectos de la cuantificación aritmética en aplicaciones prácticas, donde el interés radica en las prestaciones de un equipo específico. De hecho, como ocurría con la cuantificación de coeficientes, la solución más efectiva es a menudo simular el sistema y medir sus prestaciones. Por ejemplo, un objetivo habitual en el análisis del error de cuantificación es escoger la longitud de palabra de forma que el sistema digital sea una realización lo suficientemente precisa del sistema lineal deseado y que al mismo tiempo tenga la mínima complejidad hardware o software. Por supuesto, la longitud de palabra sólo puede cambiar en pasos de 1 bit, y como ya hemos visto en la Sección 4.8.2, añadir 1 bit a la longitud de palabra reduce el tamaño de los errores de cuantificación en un factor de 2. Por tanto, la selección de la longitud de palabra es insensible a inexactitudes en el análisis del error de cuantificación. De hecho, un análisis correcto dentro de un 30–40 por ciento es a menudo suficiente. Por este motivo, muchos de los efectos importantes de la cuantificación se pueden estudiar utilizando modelos lineales del ruido aditivo. En esta sección desarrollaremos estos modelos e ilustraremos su uso con varios ejemplos. Una excepción es el fenómeno de los ciclos límite con entrada cero, que es un fenómeno estrictamente no lineal. Restringiremos nuestro estudio de modelos no lineales de filtros digitales a una breve introducción a los ciclos límite con entrada cero que realizaremos en la Sección 6.10.

6.9.1. Análisis de estructuras IIR en forma directa

Para presentar las ideas básicas, consideremos la estructura en forma directa de un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo. El grafo de flujo de un sistema de segundo orden en forma

directa I se muestra en la Figura 6.57(a). La ecuación en diferencias general de orden N para la estructura en forma directa I es

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \tag{6.90}$$

y la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{6.91}$$

Supongamos que todos los valores de señal y los coeficientes se representan como números binarios en coma fija de $(B+1)$ bits. Entonces, al implementar la Ecuación (6.90) con un sumador de $(B+1)$

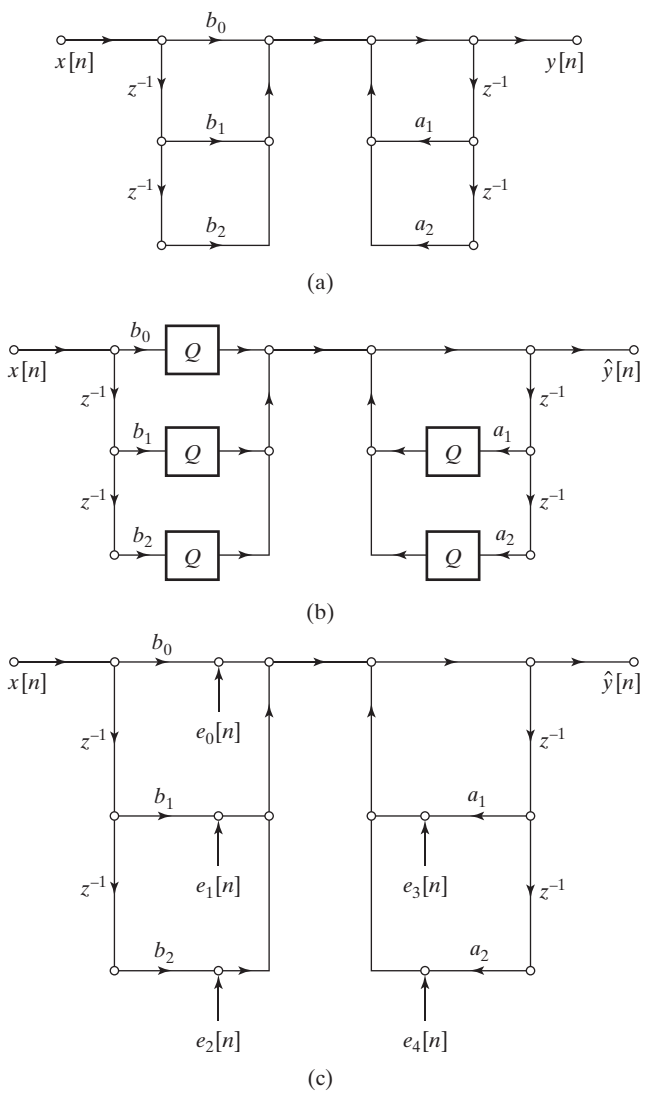


Figura 6.57 Modelos de sistema en forma directa I. (a) Modelo de precisión infinita. (b) Modelo con cuantificación no lineal. (c) Modelo lineal de ruido.

bits, es necesario reducir a $(B+1)$ bits la longitud de $(2B+1)$ bits resultantes de la multiplicación de dos números de $(B+1)$ bits. Como todos los números se tratan como fracciones, deberíamos descartar los B bits menos significativos mediante redondeo o truncamiento. Esto se representa sustituyendo cada arco de multiplicación por una constante, de la Figura 6.57(a), por un multiplicador por una constante seguido de un cuantificador, como se indica en el modelo no lineal de la Figura 6.57(b). La ecuación en diferencias correspondiente a la Figura 6.57(b) es la ecuación no lineal

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{N} Q[a_k \hat{y}[n-k]] + \sum_{k=0}^{M} Q[b_k x[n-k]]. \tag{6.92}$$

La Figura 6.57(c) muestra una representación alternativa en la que los cuantificadores han sido sustituidos por fuentes de ruido que reflejan el error de cuantificación a la salida de cada cuantificador. Por ejemplo, el redondeo o el truncamiento de un producto $bx[n]$ se representa por una fuente de ruido como sigue

$$e[n] = Q[bx[n]] - bx[n]. \tag{6.93}$$

Si las fuentes de ruido se conocen exactamente, la Figura 6.57(c) equivale exactamente a la Figura 6.57(b). Sin embargo, la Figura 6.57(c) es más útil si suponemos que las fuentes de ruido de cuantificación poseen las siguientes propiedades:

1. Cada fuente de ruido de cuantificación $e[n]$ es un proceso de ruido blanco estacionario en sentido amplio.
2. Las amplitudes de las fuentes de ruido de cuantificación tienen distribución uniforme en cada intervalo de cuantificación.
3. Cada fuente de ruido de cuantificación está *incorrelada* con su correspondiente entrada, con todas las otras fuentes de ruido de cuantificación y con la entrada al sistema.

Estas suposiciones son idénticas a las realizadas en el análisis de la conversión A/D de la Sección 4.8. Estrictamente hablando, estos supuestos no pueden ser válidos, ya que el error de cuantificación depende directamente de la entrada al cuantificador. Este hecho resulta aparente si la entrada es constante o una señal sinusoidal. Sin embargo, diversos análisis teóricos y experimentales (véanse Bennett, 1948; Widrow, 1956, 1961 y Widrow y Kollár, 2008) han demostrado que en muchas ocasiones el modelo descrito conduce a predicciones precisas de los promedios estadísticos como la media, la varianza y la función de correlación. Esto es cierto cuando la señal de entrada es una señal complicada de banda ancha, como la voz, con fluctuaciones rápidas entre los niveles de cuantificación de forma que se atraviesan muchos niveles de una muestra a otra (véase Gold y Rader, 1969). El modelo lineal simple presentado aquí nos permite caracterizar el ruido generado por el sistema en términos de promedios como la media y la varianza, y determinar cómo modifica el sistema a esos promedios.

Para una cuantificación con $(B+1)$ bits, demostramos en la Sección 6.7.1 que si se utiliza redondeo,

$$-\frac{1}{2}2^{-B} < e[n] \leq \frac{1}{2}2^{-B}, \tag{6.94a}$$

y si se usa truncamiento en complemento a dos,

$$-2^{-B} < e[n] \leq 0. \tag{6.94b}$$

Por tanto, de acuerdo con nuestra segunda suposición, las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias que representan los errores de cuantificación son uniformes, como se muestra en la

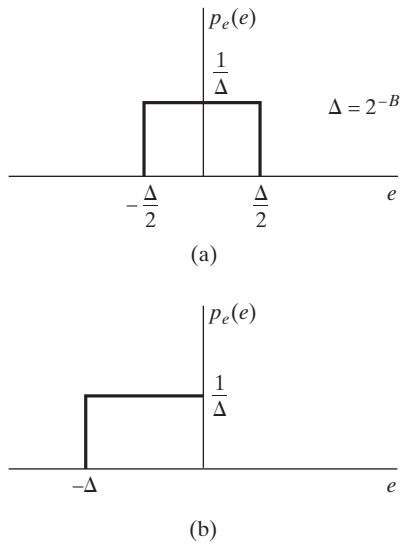


Figura 6.58 Función de densidad de probabilidad de los errores de cuantificación. (a) Redondeo. (b) Truncamiento.

Figura 6.58(a) para el caso de redondeo y en la Figura 6.58(b) para el caso de truncamiento. La media y la varianza para el caso de redondeo son, respectivamente,

$$m_e = 0, \tag{6.95a}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}. \tag{6.95b}$$

Para el caso de truncamiento en complemento a dos, la media y la varianza son

$$m_e = -\frac{2^{-B}}{2}, \tag{6.96a}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}. \tag{6.96b}$$

En general, la secuencia de autocorrelación de una fuente de ruido de cuantificación es, de acuerdo con nuestro primer supuesto,

$$\phi_{ee}[n] = \sigma_e^2\,\delta[n] + m_e^2. \tag{6.97}$$

En el caso de redondeo, que supondremos por conveniencia de aquí en adelante, $m_e = 0$, por lo que la función de autocorrelación es $\phi_{ee}[n] = \sigma_e^2\,\delta[n]$, y el espectro de potencia es $\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$ para $|\omega| \leq \pi$. En este caso, la varianza y la potencia media son idénticas. En el caso de truncamiento, la media no es cero, por lo que el resultado de potencia media obtenido para el caso de redondeo debería corregirse calculando la media de la señal y sumando su cuadrado al resultado de la potencia media para el caso del redondeo.

Utilizando este modelo para cada una de las fuentes de ruido de la Figura 6.57(c), podemos ahora proceder a determinar el efecto del ruido de cuantificación en la salida del sistema. Para ayudarnos en esta tarea, es útil observar que todas las fuentes de ruido en la figura se inyectan entre la parte del sistema que realiza los ceros y la que realiza los polos. Por tanto, la Figura 6.59 es equivalente a la Figura 6.57(c) si el valor de $e[n]$ en la Figura 6.51 es

$$e[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n] + e_3[n] + e_4[n]. \tag{6.98}$$

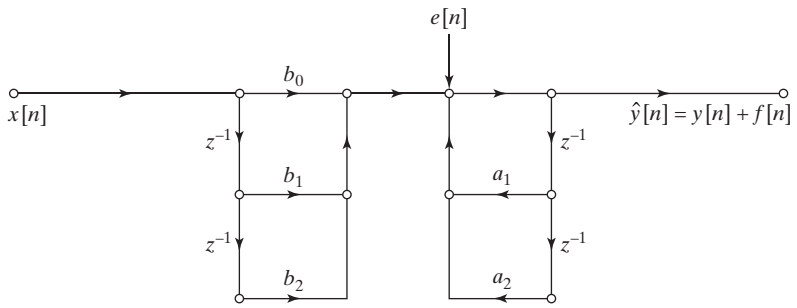


Figura 6.59 Modelo lineal de ruido para la forma directa I con las fuentes de ruido combinadas.

Como suponemos que todas las fuentes de ruido son independientes de la entrada e independientes entre sí, la varianza de las fuentes de ruido combinadas para el caso del sistema de segundo orden en forma directa I es

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e_0}^2 + \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e_2}^2 + \sigma_{e_3}^2 + \sigma_{e_4}^2 = 5 \cdot \frac{2^{-2B}}{12}, \tag{6.99}$$

y para el caso de la forma directa I general será

$$\sigma_e^2 = (M + 1 + N)\frac{2^{-2B}}{12}. \tag{6.100}$$

Para obtener una expresión del ruido de salida, podemos observar en la Figura 6.59 que el sistema tiene dos entradas, $x[n]$ y $e[n]$, y como se supone que el sistema es lineal, la salida se puede representar como $\hat{y}[n] = y[n] + f[n]$, siendo $y[n]$ la respuesta del sistema ideal sin cuantificación a la entrada $x[n]$ y $f[n]$ la respuesta del sistema a la entrada $e[n]$. La salida $y[n]$ está determinada por la ecuación en diferencias (6.90), pero como $e[n]$ se inyecta después de los ceros y antes de los polos, el ruido de salida satisface la ecuación en diferencias

$$f[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k f[n-k] + e[n]; \tag{6.101}$$

Es decir, las propiedades del ruido de salida en una realización en forma directa I dependen sólo de los polos del sistema.

Para determinar la media y la varianza de la secuencia de ruido de salida, podemos utilizar algunos resultados de la Sección 2.10. Consideremos un sistema lineal con función de transferencia $H_{ef}(z)$ con una entrada de ruido blanco $e[n]$ y la correspondiente salida $f[n]$. Entonces, utilizando las Ecuaciones (2.184) y (2.185) la media de la salida es

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{ef}[n] = m_e H_{ef}(e^{j0}). \tag{6.102}$$

Como $m_e = 0$ para el caso de redondeo, la media de la salida será cero, por lo que si utilizamos redondeo, no nos importará el valor medio del ruido. Utilizando las Ecuaciones (6.97) y (2.190) se deduce que, dado que para el caso de redondeo $e[n]$ es una secuencia de ruido blanco de media cero, la densidad espectral de potencia de la salida es simplemente

$$P_{ff}(\omega) = \Phi_{ff}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 |H_{ef}(e^{j\omega})|^2. \tag{6.103}$$

Utilizando la Ecuación (2.192), se puede demostrar que la varianza del ruido de salida es

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{ff}(\omega)d\omega = \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_{ef}(e^{j\omega})|^2 d\omega. \tag{6.104}$$

Mediante el teorema de Parseval en la forma que indica la Ecuación (2.162), σ_f^2 se puede expresar también como

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{ef}[n]|^2. \tag{6.105}$$

Cuando la función de transferencia correspondiente a $h_{ef}[n]$ es racional, como siempre ocurrirá para las ecuaciones en diferencias del tipo que consideramos en este capítulo, se puede utilizar la Ecuación (A.66) del Apéndice A para calcular una suma infinita de cuadrados en la forma de la Ecuación (6.105).

Utilizaremos a menudo los resultados que se resumen en las Ecuaciones (6.102)–(6.105) en nuestro análisis del ruido de cuantificación en sistemas lineales. Por ejemplo, para el sistema en forma directa I de la Figura 6.59, $H_{ef}(z) = 1/A(z)$; es decir, la función de transferencia desde el punto donde se inyectan todas las fuentes de ruido hasta la salida consta sólo de los polos de la función de transferencia $H(z)$ en la Ecuación (6.91). Por tanto, podemos concluir que en general, la varianza total de la salida debido al redondeo o al truncamiento interno es

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= (M+1+N)\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\omega}{|A(e^{j\omega})|^2}\\ &= (M+1+N)\frac{2^{-2B}}{12}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_{ef}[n]|^2,\end{aligned} \tag{6.106}$$

siendo $h_{ef}[n]$ la respuesta al impulso correspondiente a $H_{ef}(z) = 1/A(z)$. Los ejemplos que siguen ilustran el uso de los resultados anteriores.

Ejemplo 6.11 Ruido de redondeo en un sistema de primer orden

Supongamos que deseamos implementar un sistema estable con función de transferencia

$$H(z) = \frac{b}{1-az^{-1}}, \qquad |a| < 1. \tag{6.107}$$

La Figura 6.60 muestra el grafo de flujo del modelo lineal de ruido para la implementación en la que los productos se cuantifican antes de la suma. Cada una de las fuentes de ruido desde $e[n]$ a la salida es filtrada por el sistema cuya respuesta al impulso es $h_{ef}[n] = a^n u[n]$. Como en este ejemplo $M = 0$ y $N = 1$, utilizando la Ecuación (6.103) se obtiene que la densidad espectral de potencia del ruido de salida es

$$P_{ff}(\omega) = 2\frac{2^{-2B}}{12}\left(\frac{1}{1+a^2-2a\cos\omega}\right), \tag{6.108}$$

y la varianza total del ruido a la salida es

$$\sigma_f^2 = 2\frac{2^{-2B}}{12}\sum_{n=0}^{\infty}|a|^{2n} = 2\frac{2^{-2B}}{12}\left(\frac{1}{1-|a|^2}\right). \tag{6.109}$$

A partir de la Ecuación (6.109), podemos ver que la varianza del ruido de salida aumenta a medida que el polo en $z = a$ se acerca a la circunferencia unidad. Por tanto, para mantener la varianza del ruido

por debajo de un nivel especificado a medida que $|a|$ se aproxima a la unidad, debemos usar mayores longitudes de palabra. El siguiente ejemplo ilustra también este punto.

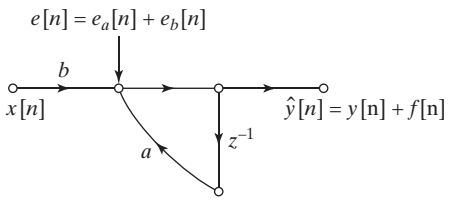


Figura 6.60 Modelo lineal de ruido de primer orden.

Ejemplo 6.12 Ruido de redondeo en un sistema de segundo orden

Consideremos un sistema estable de segundo orden en forma directa I cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - re^{j\theta} z^{-1})(1 - re^{-j\theta} z^{-1})}. \tag{6.110}$$

El modelo lineal de ruido de este sistema se muestra en la Figura 6.57(c), y también en la Figura 6.59 con $a_1 = 2r\cos\theta$ y $a_2 = -r^2$. En este caso, la potencia de ruido total a la salida se puede expresar de la forma

$$\sigma_f^2 = 5\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|(1 - re^{j\theta} e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta} e^{-j\omega})|^2}. \tag{6.111}$$

Utilizando la Ecuación (A.66) del Apéndice A, se puede obtener que la potencia de ruido a la salida es

$$\sigma_f^2 = 5\frac{2^{-2B}}{12}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2\cos 2\theta}. \tag{6.112}$$

Como en el Ejemplo 6.11, vemos que a medida que los polos complejos conjugados se acercan a la circunferencia unidad ($r \to 1$), la varianza total del ruido de salida crece, con lo que se requiere mayor longitud de palabra para mantener la varianza dentro de un nivel especificado.

Las técnicas de análisis desarrolladas hasta el momento para la estructura en forma directa I se pueden aplicar también a la estructura en forma directa II. Las ecuaciones en diferencias no lineales para la estructura en forma directa II son de la forma

$$\hat{w}[n] = \sum_{k=1}^{N} Q[a_k \hat{w}[n-k]] + x[n], \tag{6.113a}$$

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=0}^{M} Q[b_k \hat{w}[n-k]]. \tag{6.113b}$$

La Figura 6.61(a) muestra el modelo lineal de ruido para un sistema de segundo orden en forma directa II. Se ha introducido una fuente de ruido después de cada multiplicación, indicando que los productos se cuantifican con $(B+1)$ bits antes de la suma. La Figura 6.53(b) muestra el modelo lineal equivalente en donde se han movido las fuentes de ruido resultantes de la realización de los polos y se han combinado en una sola fuente de ruido $e_a[n] = e_3[n] + e_4[n]$ en la entrada. Asimismo, las fuentes de ruido debidas

a la realización de los ceros se han combinado en una sola fuente de ruido $e_b[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n]$ que se suma directamente a la salida. Utilizando este modelo equivalente, se deduce que para el caso de M ceros, N polos y redondeo ($m_e = 0$), la densidad espectral de potencia del ruido de salida es

$$P_{ff}(\omega) = N\frac{2^{-2B}}{12}|H(e^{j\omega})|^2 + (M+1)\frac{2^{-2B}}{12}, \tag{6.114}$$

y la varianza del ruido de salida es

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= N\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2 d\omega + (M+1)\frac{2^{-2B}}{12}\\ &= N\frac{2^{-2B}}{12}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 + (M+1)\frac{2^{-2B}}{12}.\end{aligned} \tag{6.115}$$

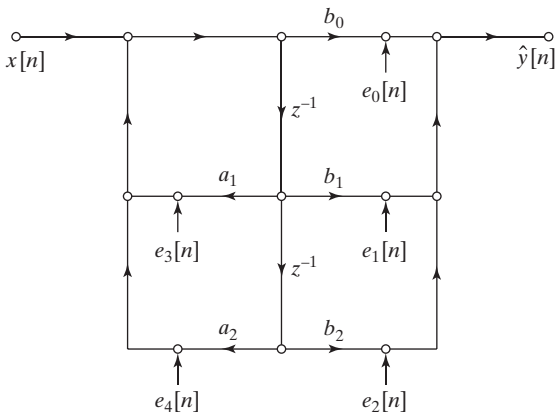
Es decir, el ruido blanco producido al implementar los polos es filtrado por el sistema completo, mientras que el ruido blanco producido al implementar los ceros se suma directamente a la salida del sistema. Al plantear la Ecuación (6.115), hemos supuesto que las N fuentes de ruido de la entrada son independientes, de forma que la varianza de su suma es N veces la varianza de cada fuente de ruido de cuantificación. La misma suposición se realiza para las $(M+1)$ fuentes de ruido a la salida. Estos resultados se pueden modificar fácilmente para el caso de truncamiento en complemento a dos. De acuerdo con las Ecuaciones (6.95a)–(6.95b) y (6.96a)–(6.96b), la varianza del ruido de truncamiento es igual que la varianza del ruido de redondeo, pero la media de la fuente de ruido de truncamiento no es cero. En consecuencia, las fórmulas de las Ecuaciones (6.106) y (6.115) para obtener la varianza total del ruido de salida son también válidas para el caso de truncamiento. Sin embargo, en este caso el ruido de salida tendrá una media distinta de cero que se podrá calcular utilizando la Ecuación (6.102).

Comparando la Ecuación (6.106) con la Ecuación (6.115), se puede ver que las estructuras en forma directa I y en forma directa II resultan afectadas de forma diferente por la cuantificación de los productos de la realización de las correspondientes ecuaciones en diferencias. En general, otras estructuras diferentes como las formas en cascada, en paralelo y traspuesta tendrán varianzas del ruido total de salida diferentes de las varianzas de las estructuras en forma directa. Sin embargo, aunque las Ecuaciones (6.106) y (6.115) sean diferentes, no es posible decir a priori qué sistema tendrá menor varianza del ruido de salida a menos que conozcamos los valores específicos de los coeficientes del sistema. En otras palabras, no es posible concluir que una determinada estructura producirá en todos los casos el mínimo ruido de salida.

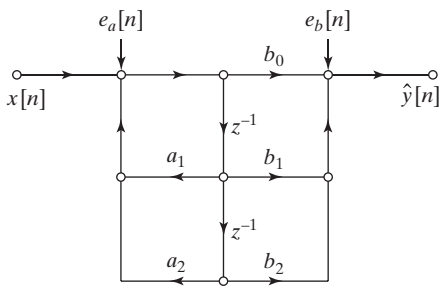
Es posible mejorar las prestaciones frente al ruido en los sistemas en forma directa (y por lo tanto también en las formas en paralelo y en cascada) utilizando un sumador de $(2B+1)$ bits para acumular las sumas de productos en ambas formas directas. Por ejemplo, para el caso de una realización en forma directa I, podríamos utilizar una ecuación en diferencias de la forma

$$\hat{y}[n] = Q\left[\sum_{k=1}^{N} a_k\hat{y}[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right]; \tag{6.116}$$

Es decir, las sumas de productos se acumulan con precisión de $(2B+1)$ o de $(2B+2)$ bits, y el resultado se cuantifica con $(B+1)$ bits para la salida y el almacenamiento en la memoria de retardo. En el caso de la forma directa I, esto significa que el ruido de cuantificación está todavía filtrado por los polos, pero el factor $(M+1+N)$ de la Ecuación (6.106) es ahora la unidad. De forma similar, para el caso de una realización en forma directa II, las ecuaciones en diferencias (6.91a)–(6.91b) se pueden sustituir



(a)



(b)

Figura 6.61 Modelos lineales de ruido para la forma directa II. (a) Muestra la cuantificación de cada producto. (b) Con las fuentes de ruido combinadas.

respectivamente por

$$\hat{w}[n] = Q\left[\sum_{k=1}^{N} a_k \hat{w}[n-k] + x[n]\right] \tag{6.117a}$$

y

$$\hat{y}[n] = Q\left[\sum_{k=0}^{M} b_k \hat{w}[n-k]\right]. \tag{6.117b}$$

Esto implica una sola fuente de ruido tanto a la entrada como a la salida, de forma que los factores N y $(M+1)$ de la Ecuación (6.115) se pueden sustituir por la unidad. Por tanto, el acumulador de doble longitud de palabra que se incluye en muchos chips para tratamiento digital de señales se puede utilizar para reducir significativamente el ruido de cuantificación en las estructuras en forma directa.

6.9.2. Escalado en implementaciones en coma fija de sistemas IIR

La posibilidad de que se produzca desbordamiento es otra consideración importante en la realización de sistemas IIR utilizando aritmética en coma fija. Si seguimos el convenio de que cada número en coma fija representa una fracción (posiblemente multiplicada por un factor de escala conocido) para evitar el desbordamiento, cada nodo de la red debe tener un módulo inferior a la unidad. Si $w_k[n]$ indica el valor

de la variable del nodo k-ésimo y $h_k[n]$ indica la respuesta al impulso del sistema desde la entrada $x[n]$ a la variable del nodo $w_k[n]$, entonces

$$|w_k[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h_k[m] \right|. \tag{6.118}$$

El límite

$$|w_k[n]| \leq x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \tag{6.119}$$

se obtiene sustituyendo $x[n-m]$ por su valor máximo $x_{\text{máx}}$ y utilizando el hecho de que el módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos de los sumandos. Por lo tanto, una condición suficiente para que $|w_k[n]| < 1$ es

$$x_{\text{máx}} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|} \tag{6.120}$$

para todos los nodos del grafo de flujo. Si $x_{\text{máx}}$ no satisface la Ecuación (6.120), podemos multiplicar $x[n]$ por un factor de escala s a la entrada del sistema, de forma que $sx_{\text{máx}}$ satisfaga dicha ecuación para todos los nodos del grafo de flujo, es decir, que

$$sx_{\text{máx}} < \frac{1}{\operatorname*{máx}_k \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]| \right]}. \tag{6.121}$$

Escalando la entrada de esta forma se garantiza que nunca se produce desbordamiento en los nodos de la red. La Ecuación (6.120) es condición necesaria y suficiente, ya que siempre existe una entrada tal que la Ecuación (6.119) se cumple con igualdad (véase la Ecuación (2.70) en la exposición sobre estabilidad de la Sección 2.4). Sin embargo, la Ecuación (6.120) produce un escalado muy conservativo de la entrada para la mayoría de las señales.

Otro planteamiento del problema del escalado es suponer que la entrada es una señal de banda estrecha, que se modela como $x[n] = x_{\text{máx}} \cos \omega_0 n$. En este caso las variables de nodo serán

$$w_k[n] = |H_k(e^{j\omega_0})| x_{\text{máx}} \cos(\omega_0 n + \angle H_k(e^{j\omega_0})). \tag{6.122}$$

Por tanto, se puede evitar el desbordamiento para *cualquier* señal sinusoidal si

$$\operatorname*{máx}_{k,|\omega|\leq\pi} |H_k(e^{j\omega})| x_{\text{máx}} < 1 \tag{6.123}$$

o si la entrada se multiplica por un factor de escala s tal que

$$sx_{\text{máx}} < \frac{1}{\operatorname*{máx}_{k,|\omega|\leq\pi} |H_k(e^{j\omega})|}. \tag{6.124}$$

Otra posible solución se basa en la energía $E = \Sigma_n |x[n]|^2$ de la señal de entrada. El factor de escala en este caso se puede deducir aplicando la desigualdad de Schwarz (véase Bartle, 2000) para obtener la

siguiente desigualdad que relaciona el cuadrado de la señal en el nodo con las energías de la señal de entrada y la respuesta al impulso en dicho nodo:

$$|w_k[n]|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_k(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right|^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \right).$$

Por tanto, escalando por un factor s los valores de la secuencia y aplicando el teorema de Parseval, podemos ver que $|w_k[n]|^2 < 1$ para todos los nodos k si

$$s^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \right) = s^2 E < \frac{1}{\operatorname*{máx}_k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2 \right]}. \tag{6.125}$$

Como se puede demostrar que para el nodo k-ésimo,

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2 \right\}^{1/2} \leq \operatorname*{máx}_{\omega} |H_k(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|, \tag{6.126}$$

Se deduce que (para la mayoría de las señales de entrada) las Ecuaciones (6.121), (6.124) y (6.126) proporcionan tres formas, de más a menos conservadora, de obtener factores de escala para aplicar a la entrada de un filtro digital (o, de forma equivalente, disminuir la ganancia del filtro). De las tres, la Ecuación (6.126) es generalmente la más fácil de evaluar analíticamente, porque puede emplearse el método de descomposición en fracciones simples del Apéndice A. Sin embargo, el uso de la Ecuación (6.121) requiere una suposición sobre el valor cuadrático medio de la señal, E. Por otra parte, la Ecuación (6.121) es difícil de evaluar analíticamente, excepto para los sistemas más simples. Por supuesto, para sistemas específicos con coeficientes conocidos, el factor de escala se puede estimar calculando numéricamente la respuesta al impulso o la respuesta en frecuencia.

Si hay que escalar para reducir la entrada ($s < 1$), la relación señal-ruido a la salida del sistema se reducirá debido a que la potencia de la señal se reduce, pero la potencia de ruido depende sólo de la operación de redondeo. La Figura 6.62 muestra los sistemas en forma directa I y en forma directa II de segundo orden con multiplicadores de factor de escala a su entrada. Para determinar el factor de escala de estos sistemas no es necesario examinar cada nodo del grafo de flujo. Algunos nodos no representan sumas y, por tanto, no pueden causar desbordamiento. Otros nodos representan sumas parciales. Si utilizamos aritmética en complemento a dos sin saturación, se puede permitir desbordamiento en esos nodos si en ciertos nodos clave no se produce. Por ejemplo, en la Figura 6.62(a), podemos fijarnos en el nodo encerrado por la circunferencia de línea de puntos. En dicha figura, el factor de escala se muestra combinado con los coeficientes b_k, de forma que la fuente de ruido es la misma que en la Figura 6.59, es decir, tiene cinco veces la potencia de una sola fuente de ruido de cuantificación.[10] Como la fuente de ruido es filtrada de nuevo por los polos, la potencia de ruido de salida es la misma en las Figuras 6.59 y 6.62(a). Sin embargo, la función de transferencia completa del sistema de la Figura 6.62(a) es $sH(z)$

[10]Esto permite eliminar el tratamiento separado de la multiplicación por un factor de escala y la fuente de ruido de cuantificación. Sin embargo, al multiplicar por un factor de escala (y cuantificar) los coeficientes b_k se puede cambiar la respuesta en frecuencia del sistema. Si el multiplicador por un factor de escala precede de forma separada a la realización de los ceros en la Figura 6.62(a), habría una fuente de ruido de cuantificación adicional que contribuiría al ruido de salida tras atravesar el sistema completo $H(z)$.

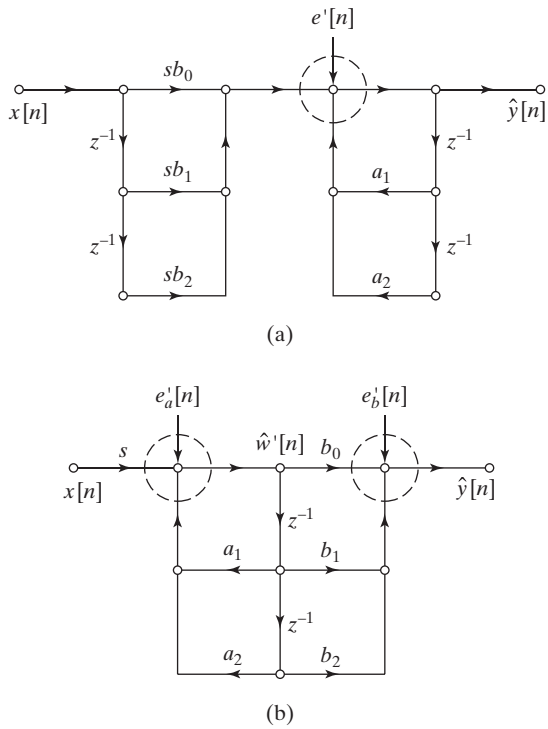


Figura 6.62 Aplicación de factores de escala en sistemas en forma directa. (a) Forma directa I. (b) Forma directa II.

en lugar de $H(z)$, por lo que la componente no cuantificada de la salida $\hat{y}[n]$ es $sy[n]$ en lugar de $y[n]$. Como el ruido se introduce después de la aplicación del factor de escala, la relación de potencia de señal a potencia de ruido en el sistema escalado es s^2 veces la relación señal-ruido de la Figura 6.59. Como $s < 1$ si se requiere escalado para evitar el desbordamiento, la relación señal ruido se reducirá.

Las mismas ideas son ciertas para el sistema en forma directa II de la Figura 6.62(b). En este caso debemos determinar el factor de escala para evitar el desbordamiento en los nodos marcados con una circunferencia. La ganancia total del sistema es de nuevo s veces la ganancia del sistema de la Figura 6.61(b), pero en este caso puede ser necesario realizar de forma explícita la multiplicación por el factor de escala para evitar el desbordamiento en el nodo de la izquierda. Este factor de escala añade una componente de ruido adicional a $e_a[n]$, por lo que la potencia de ruido a la entrada es, en general, $(N+1)2^{-2B}/12$. Por lo demás, las fuentes de ruido se filtran exactamente de la misma manera en la Figura 6.61(b) y en la Figura 6.62(b). Por tanto, la potencia de señal se multiplica por s^2 y la potencia de ruido a la salida viene dada de nuevo por la Ecuación (6.115), sustituyendo N por $(N+1)$. La relación señal-ruido se reduce de nuevo si se requiere la aplicación de un factor de escala para evitar el desbordamiento.

Ejemplo 6.13 Interacción entre el escalado y el ruido de redondeo

Para ilustrar la interacción entre el escalado y el ruido de redondeo, consideremos el sistema del Ejemplo 6.11 con la función de transferencia dada por la Ecuación (6.107). Si el factor de escala se combina con el coeficiente b, se obtiene el sistema cuyo grafo de flujo se puede ver en la Figura 6.63. Supongamos que la entrada es ruido blanco con amplitudes distribuidas uniformemente entre -1 y $+1$. Entonces la varianza total de la señal es $\sigma_x^2 = 1/3$. Para garantizar que no se produce desbordamiento al calcular $\hat{y}[n]$, utilizamos la Ecuación (6.121) para determinar el factor de escala

$$s = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |b|\,|a|^n} = \frac{1-|a|}{|b|}. \tag{6.127}$$

La varianza del ruido de salida se ha obtenido en el Ejemplo 6.11 y es

$$\sigma_f^2 = 2\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{1-a^2} \tag{6.128}$$

y como tenemos de nuevo dos operaciones de redondeo con $(B+1)$ bits, la potencia de ruido a la salida es la misma, es decir, $\sigma_{f'}^2 = \sigma_f^2$. La varianza de la salida $y'[n]$ debida a la entrada escalada $sx[n]$ es

$$\sigma_{y'}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{s^2b^2}{1-a^2} = s^2\sigma_y^2. \tag{6.129}$$

Por tanto, la relación señal-ruido a la salida es

$$\frac{\sigma_{y'}^2}{\sigma_{f'}^2} = s^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2} = \left(\frac{1-|a|}{|b|}\right)^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2}. \tag{6.130}$$

Cuando el polo del sistema se aproxima a la circunferencia unidad, la relación señal-ruido decrece debido a que el ruido de cuantificación es amplificado por el sistema y debido también a que la alta ganancia del sistema fuerza a que haya que escalar disminuyendo la entrada para evitar el desbordamiento. Vemos de nuevo que el desbordamiento y el ruido de cuantificación trabajan conjuntamente para reducir las prestaciones del sistema.

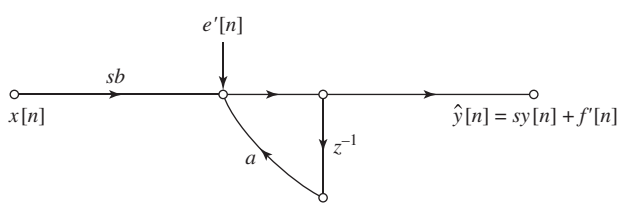


Figura 6.63 Sistema de primer orden con la aplicación de un factor de escala.

6.9.3. Ejemplo de análisis de una estructura IIR en cascada

Los resultados anteriores de esta sección se pueden aplicar directamente al análisis de estructuras en cascada o en paralelo compuestas por subsistemas de segundo orden en forma directa. La interacción entre el escalado y la cuantificación es particularmente interesante en la forma en cascada. Nuestros comentarios generales sobre los sistemas en cascada se presentarán haciendo uso de un ejemplo concreto.

Se desea diseñar un filtro elíptico paso bajo que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 0{,}99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1{,}01, &\qquad |\omega| \le 0{,}5\pi, \\ |H(e^{j\omega})| \le 0{,}01, &\qquad 0{,}56\pi \le |\omega| \le \pi. \end{aligned}$$

La función de transferencia del sistema resultante es

$$H(z) = 0{,}079459 \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{1 + b_{1k} z^{-1} + z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \right) = 0{,}079459 \prod_{k=1}^{3} H_k(z), \tag{6.131}$$

cuyos coeficientes se muestran en la Tabla 6.6. Observe que todos los ceros de $H(z)$ están en este ejemplo en la circunferencia unidad. Sin embargo, esto puede no ocurrir en un caso general.

TABLA 6.6 COEFICIENTES DEL FILTRO ELÍPTICO PASO BAJO EN CASCADA.

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{1k}
1	0,478882	−0,172150	1,719454
2	0,137787	−0,610077	0,781109
3	−0,054779	−0,902374	0,411452

La Figura 6.64(a) muestra un grafo de flujo de una posible realización de este sistema como una cascada de subsistemas de segundo orden en forma directa II traspuesta. La constante de ganancia, 0,079459, es tal que la ganancia total del sistema es aproximadamente la unidad en la banda de paso, y se supone que esto garantiza que no hay desbordamiento a la salida del sistema. La Figura 6.64(a) muestra la ganancia constante situada a la entrada del sistema. Con este planteamiento se reduce la amplitud de la señal inmediatamente, con el resultado de que las secciones posteriores del filtro deben tener una ganancia alta para obtener una ganancia total unidad. Como las fuentes de ruido de cuantificación se introducen después de la ganancia de 0,079469, pero son de igual forma amplificadas por el resto del sistema, esta solución no es buena. Idealmente, la ganancia constante global, menor que la unidad, se debería situar muy al principio de la estructura en cascada, de forma que la señal y el ruido se atenuaran en la misma cantidad. Sin embargo, esto crea la posibilidad de que produzca desbordamiento en la cascada. Por tanto, una mejor solución es distribuir la ganancia en las tres etapas del sistema, de modo que se evite el desbordamiento en cada etapa. Esta distribución se puede representar como

$$H(z) = s_1 H_1(z) s_2 H_2(z) s_3 H_3(z), \tag{6.132}$$

siendo $s_1 s_2 s_3 = 0{,}079459$. Los factores de escala se pueden incorporar en los coeficientes de los numeradores de cada una de las funciones de transferencia $H'_k(z) = s_k H_k(z)$:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \right) = \prod_{k=1}^{3} H'_k(z), \tag{6.133}$$

siendo $b'_{0k} = b'_{2k} = s_k$ y $b'_{1k} = s_k b_{1k}$. La Figura 6.64(b) muestra el sistema resultante con la aplicación del escalado.

La Figura 6.64(b) muestra también las fuentes de ruido de cuantificación que representan la cuantificación de los productos antes de las sumas. La Figura 6.64(c) muestra un modelo de ruido equivalente, en el que se puede ver que todas las fuentes de ruido de una sección particular son filtradas sólo por los polos de esa sección (y los subsistemas posteriores). La Figura 6.64(c) usa también el hecho de que las fuentes de ruido blanco retardadas son también ruido blanco y son independientes de todas las otras fuentes de ruido, de forma que las cinco fuentes de una subsección se pueden combinar en una sola

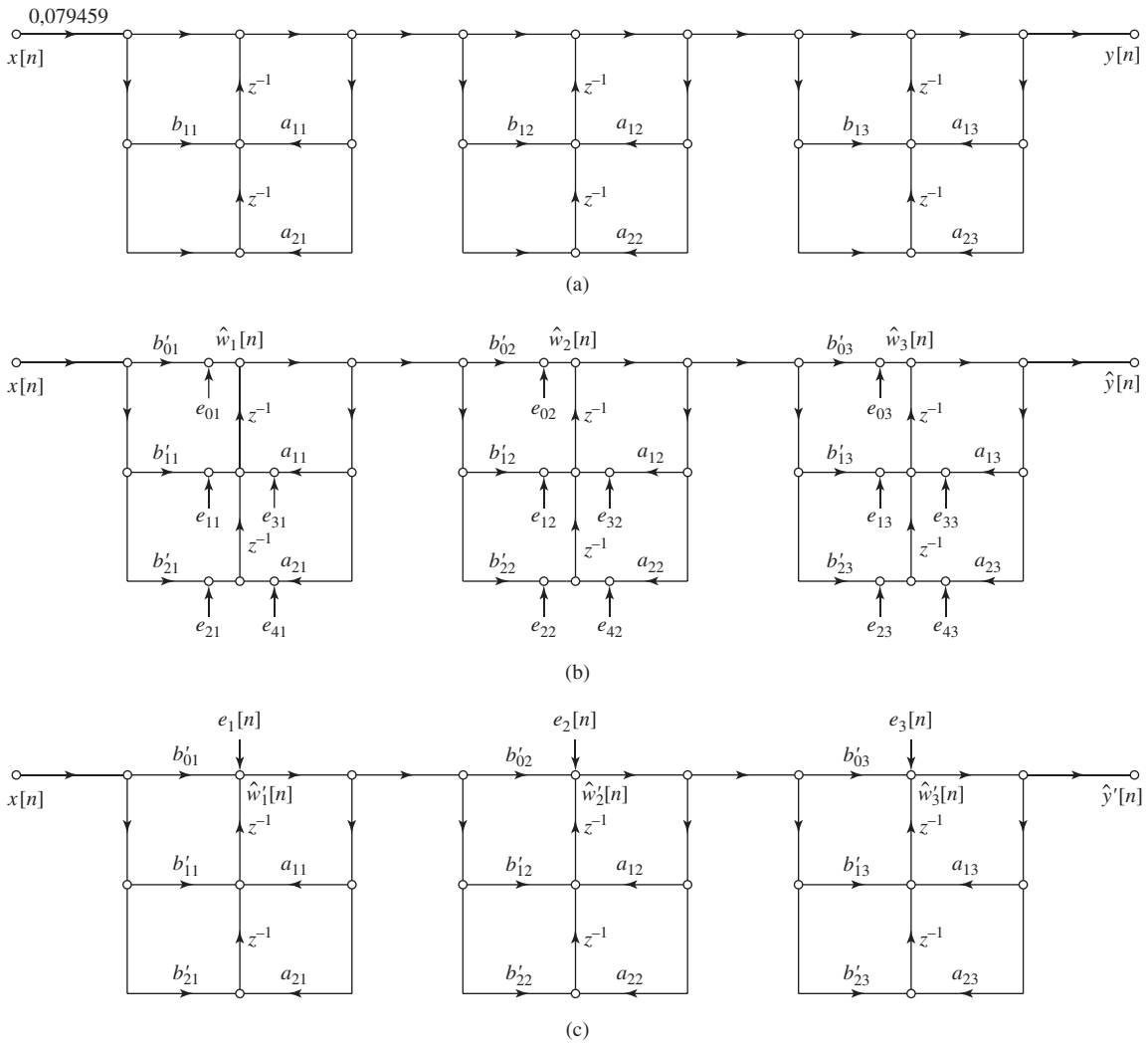


Figura 6.64 Modelos del sistema en cascada de sexto orden con subsistemas en forma directa II traspuesta. (a) Modelo de precisión infinita. (b) Modelo lineal de ruido del sistema escalado, mostrando la cuantificación de cada multiplicación. (c) Modelo lineal de ruido con las fuentes de ruido combinadas.

fuente de ruido cuya varianza es cinco veces la varianza de una sola fuente de ruido de cuantificación.[11] Como las fuentes de ruido se supone que son independientes, la varianza del ruido de salida es la suma de las varianzas de las tres fuentes de ruido de la Figura 6.64(c). Por tanto, para el caso de redondeo, la densidad espectral de potencia del ruido de salida es

$$P_{f'f'}(\omega) = 5\frac{2^{-2B}}{12}\left[\frac{s_2^2|H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2|H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} + \frac{s_3^2|H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} + \frac{1}{|A_3(e^{j\omega})|^2}\right], \tag{6.134}$$

[11] Esta exposición se puede generalizar para demostrar que la forma directa II traspuesta tiene el mismo comportamiento respecto al ruido que el sistema en forma directa I.

y la varianza total del ruido de salida es

$$\sigma_{f'}^2 = 5\frac{2^{-2B}}{12}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{s_2^2|H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2|H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2}d\omega \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{s_3^2|H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|A_3(e^{j\omega})|^2}d\omega\right]. \tag{6.135}$$

Si se dispone de un acumulador de doble longitud de palabra, solo sería necesario cuantificar las sumas que son entradas a los elementos de retardo de la Figura 6.64(b). En este caso el factor de 5 en las Ecuaciones (6.135) y (6.136) debería cambiarse por 3. Además, si se usa un registro de doble longitud para realizar los elementos de retardo, sólo habría que cuantificar las variables $\hat{w}_k[n]$ y sólo habría una fuente de cuantificación por subsistema. En ese caso, el factor de 5 en las Ecuaciones (6.135) y (6.136) se debería cambiar por la unidad.

Los factores de escala s_k se escogen para evitar los desbordamientos en puntos del sistema en cascada. Utilizaremos el convenio para el escalado de la Ecuación (6.124). Por tanto, los factores de escala se escogen de forma que cumplan

$$s_1 \max_{|\omega|\leq\pi} |H_1(e^{j\omega})| < 1, \tag{6.136a}$$

$$s_1 s_2 \max_{|\omega|\leq\pi} |H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})| < 1, \tag{6.136b}$$

$$s_1 s_2 s_3 = 0{,}079459. \tag{6.136c}$$

La última condición asegura que no habrá desbordamiento en la salida del sistema para entradas sinusoidales de amplitud unidad, ya que la ganancia máxima global del filtro es la unidad. Para los coeficientes de la Tabla 6.6, los factores de escala resultantes son $s_1 = 0{,}186447$, $s_2 = 0{,}529236$ y $s_3 = 0{,}805267$.

Las Ecuaciones (6.135) y (6.136) muestran que la forma de la densidad espectral de potencia del ruido de salida y su varianza total dependen de la forma en que se emparejen los ceros y los polos para formar las secciones de segundo orden, y también del orden en que se colocan las secciones de segundo orden de la realización en cascada. De hecho, se puede ver fácilmente que para N secciones, hay $(N!)$ formas de emparejar los polos y los ceros, y hay también $(N!)$ formas de ordenar las secciones de segundo orden resultantes, lo que da un total de $(N!)^2$ sistemas diferentes. Además, para la realización de las secciones de segundo orden, podemos escoger la forma directa I o la forma directa II (o sus traspuestas). En nuestro ejemplo, esto implica que hay 144 sistemas en cascada diferentes a considerar si lo que deseamos es encontrar el sistema con la mínima varianza de ruido a la salida. Para cinco secciones en cascada habría ¡57600 sistemas diferentes! Es evidente que el análisis completo de sistemas, incluso de orden bajo, es una tarea tediosa, ya que habría que evaluar una expresión como la Ecuación (6.136) para cada posible emparejamiento y ordenamiento. Hwang (1974) ha utilizado programación dinámica, y Liu y Peled (1975) un método heurístico para reducir el coste computacional.

A pesar de la dificultad de obtener el emparejamiento y la ordenación óptima, Jackson (1970a, 1970b, 1996) ha encontrado que casi siempre se pueden obtener buenos resultados si se aplican reglas simples como las siguientes:

1. El polo que esté más cercano a la circunferencia unidad se debe emparejar con el cero que esté más cercano a él en el plano z.
2. Se debe repetir la regla 1 hasta que todos los polos y los ceros se hayan emparejado.

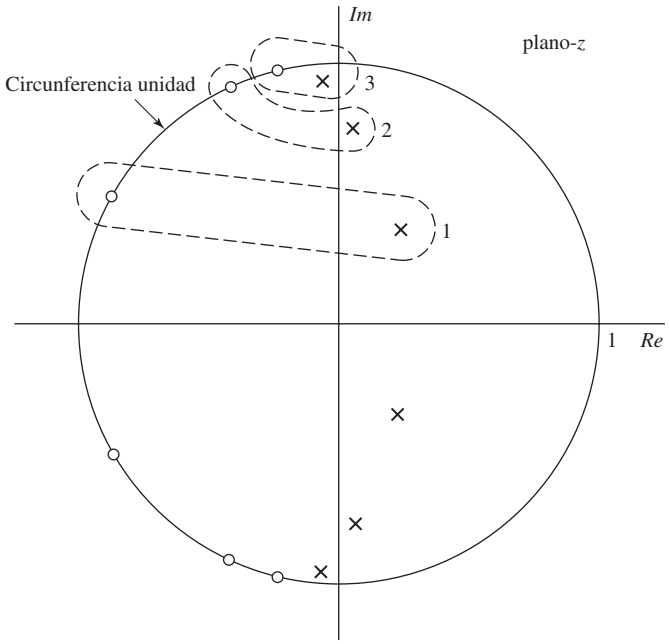


Figura 6.65 Diagrama polo–cero del sistema de sexto orden de la Figura 6.64, mostrando el emparejamiento de polos y ceros.

3. Las secciones de segundo orden resultantes se deben ordenar de acuerdo con un criterio de cercanía creciente o de cercanía decreciente a la circunferencia unidad.

Las reglas de emparejamiento se basan en la observación de que los subsistemas con ganancias de pico altas no son deseables, ya que pueden causar desbordamientos y amplificar el ruido de cuantificación. El emparejamiento de un polo cercano a la circunferencia unidad con un cero adyacente tiende a reducir la ganancia de pico de esa sección. Estas reglas heurísticas están implementadas en herramientas de análisis y diseño como la función `zp2sos` de MATLAB.

Una motivación de la regla 3 la sugiere la Ecuación (6.135). Vemos que las respuestas en frecuencia de algunos subsistemas aparecen más de una vez en la ecuación de la densidad espectral de potencia del ruido de salida. Si no deseamos que la densidad espectral de potencia del ruido de salida tenga un pico grande alrededor de un polo cercano a la circunferencia unidad, es ventajoso que la componente de la respuesta en frecuencia debida a ese polo no aparezca frecuentemente en la Ecuación (6.135). Esto sugiere mover los polos de "alto Q" al principio de la cascada. Por otra parte, la respuesta en frecuencia desde la entrada a un nodo particular de la red involucrará el producto de las respuestas en frecuencia de los subsistemas que preceden al nodo. Por tanto, para evitar una reducción excesiva del nivel de la señal en las primeras etapas de la cascada, se deberían situar los polos cercanos a la circunferencia unidad los últimos en la ordenación. Claramente, la cuestión del ordenamiento depende de una variedad de consideraciones, entre las que se incluyen la varianza total del ruido de salida y la forma del espectro de ruido a la salida. Jackson (1970a, 1970b) utilizó normas L_p para cuantificar el análisis del problema de emparejamiento y ordenación, y dio una serie mucho más detallada de reglas heurísticas para obtener buenos resultados sin tener que evaluar todas las posibilidades.

La Figura 6.65 muestra el diagrama polo-cero para el sistema de nuestro ejemplo. Los polos y los ceros que se emparejan se encierran con línea discontinua. En este caso, hemos escogido ordenar las secciones de la respuesta en frecuencia más picuda a la menos picuda. La Figura 6.66 ilustra la forma en que se combinan las respuestas en frecuencia de cada una de las secciones para formar la respuesta en frecuencia global. Las Figuras 6.66(a)-(c) muestran las respuestas en frecuencia de cada uno de los

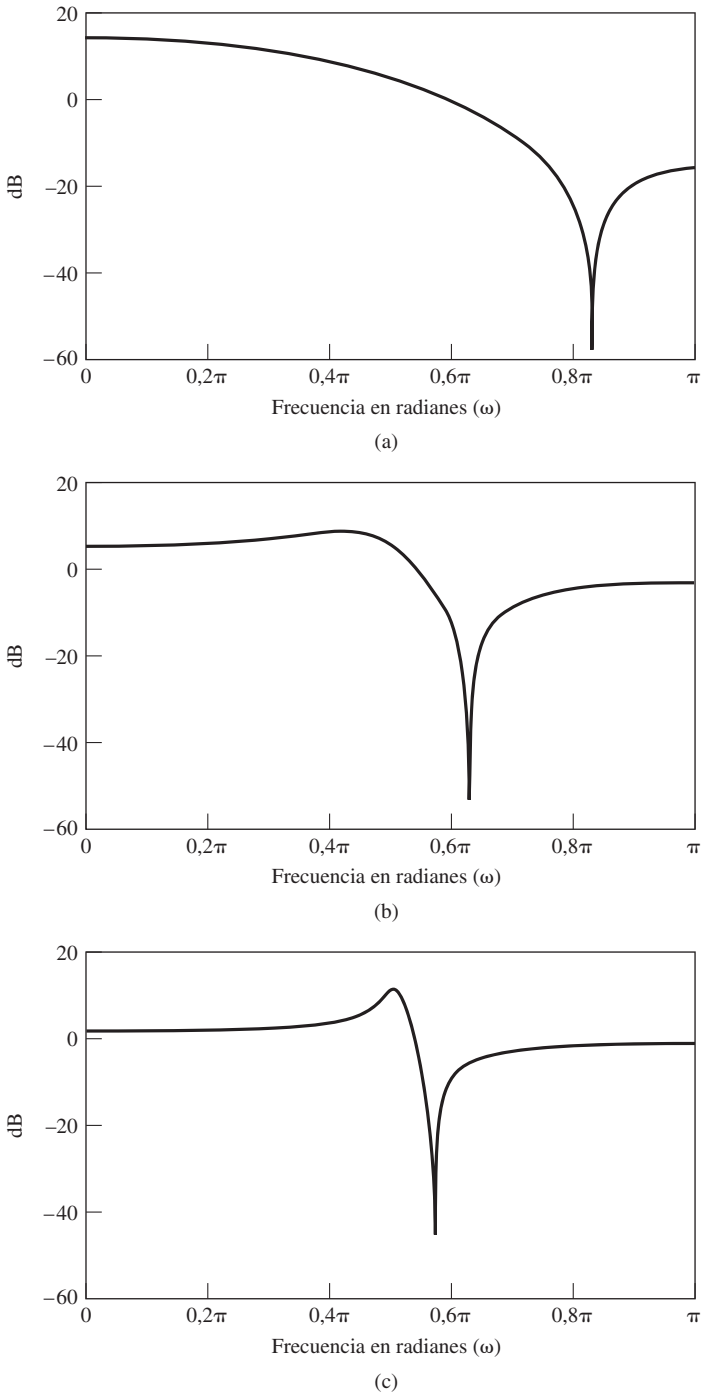
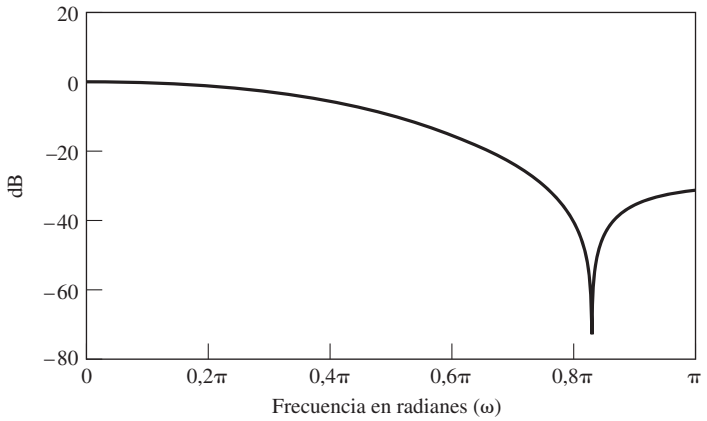
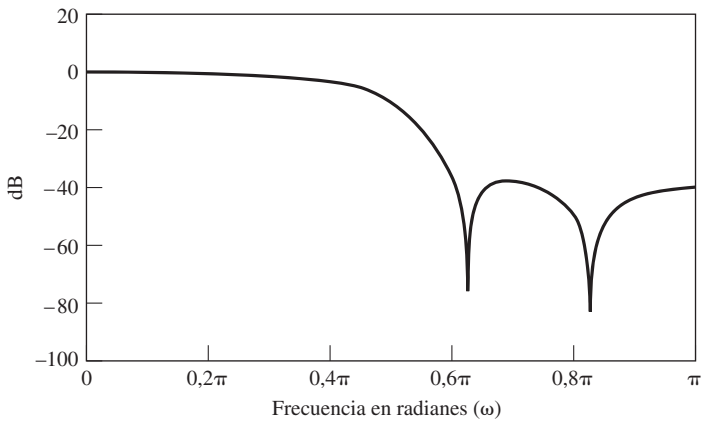


Figura 6.66 Respuestas en frecuencia del sistema ejemplo.
(a) $20\log_{10}|H_1(e^{j\omega})|$.
(b) $20\log_{10}|H_2(e^{j\omega})|$.
(c) $20\log_{10}|H_3(e^{j\omega})|$.

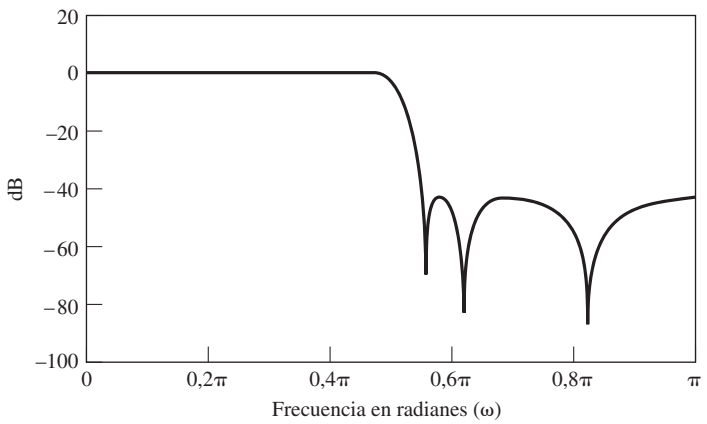
subsistemas sin escalar. Las Figuras 6.66(d)–(f) muestran que las ecuaciones de Escalado (6.137a)–(6.137c) aseguran que la máxima ganancia desde la entrada a la salida de cualquier subsistema es menor que la unidad. La línea continua de la Figura 6.67 muestra la densidad espectral de potencia del ruido de



(d)



(e)



(f)

Figura 6.66 (*Continuación*)
(d) $20\log_{10}|H_1'(e^{j\omega})|$.
(e) $20\log_{10}|H_1'(e^{j\omega})H_2'(e^{j\omega})|$.
(f) $20\log_{10}|H_1'(e^{j\omega})H_2'(e^{j\omega})H_3'(e^{j\omega})|$
$= 20\log_{10}|H'(e^{j\omega})|$.

salida para la ordenación 123 (de menos picuda a más picuda). En dicha figura se supone que $B+1=16$. Observe que el espectro tiene un pico en la vecindad del polo más cercano a la circunferencia unidad. La curva de puntos muestra la densidad espectral de potencia del ruido de salida cuando se invierte el

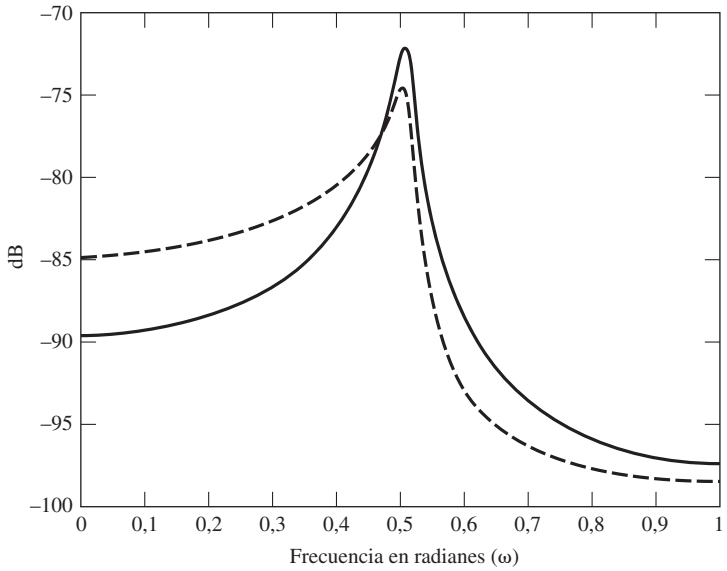


Figura 6.67 Densidad espectral de potencia del ruido de salida para ordenación 123 (línea continua) y ordenación 321 (línea discontinua) de secciones de segundo orden.

orden de las secciones (es decir, 321). Como la sección 1 tiene una ganancia alta a bajas frecuencias, el espectro del ruido es apreciablemente mayor a frecuencias bajas y ligeramente más bajo alrededor del pico. El polo de alto Q filtra todavía las fuentes de ruido de la primera sección de la cascada, con lo que todavía tiende a dominar el espectro. La potencia total de ruido en las dos ordenaciones resulta ser en este caso casi la misma.

El ejemplo que hemos presentado demuestra la complejidad de los aspectos que surgen en la realización en coma fija de sistemas IIR en cascada. La forma paralelo es algo más simple debido a que no surge el problema del emparejamiento y la ordenación. Sin embargo, el escalado es todavía necesario para evitar el desbordamiento en cada una de las secciones de segundo orden y cuando se suman las salidas de los subsistemas para producir la salida global. Por tanto, las técnicas que hemos presentado se pueden aplicar también a la forma paralelo. Jackson (1996) presenta en detalle el análisis de la forma paralelo y concluye que la potencia de ruido total es típicamente comparable a la de los mejores emparejamientos y ordenaciones de la forma en cascada. Incluso así, la forma en cascada es más común, debido a que en el caso de filtros IIR ampliamente utilizados que se caracterizan por tener los ceros en la circunferencia unidad, la forma en cascada se puede realizar con menos multiplicaciones y con más control sobre las posiciones de los ceros.

6.9.4. Análisis de sistemas FIR en forma directa

Como los sistemas IIR en forma directa I y II incluyen a los sistemas FIR en forma directa como un caso especial (es decir, el caso en el que todos los coeficientes a_k de las Figuras 6.14 y 6.15 son cero), los resultados y las técnicas de análisis de las Secciones 6.9.1 y 6.9.2 se pueden aplicar a sistemas FIR si eliminamos toda referencia a los polos de la función de transferencia y eliminamos las vías de realimentación en todos los grafos de flujo de señales.

El sistema FIR en forma directa I es simplemente la convolución discreta

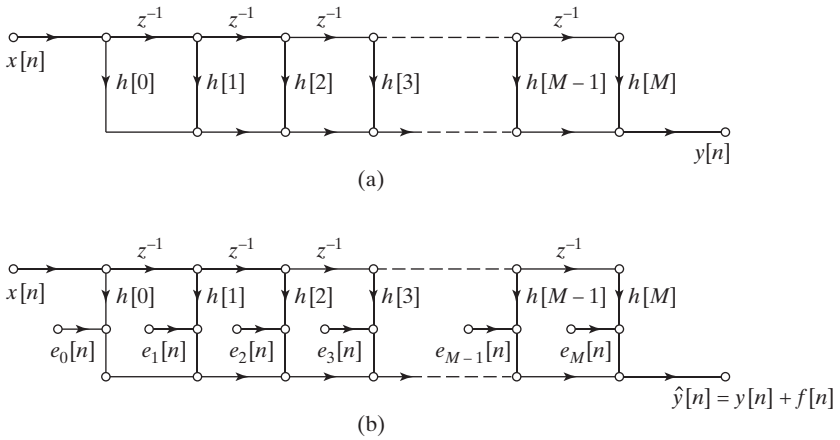


Figura 6.68 Realización en forma directa de un sistema FIR. (a) Modelo de precisión infinita. (b) Modelo lineal de ruido.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]. \tag{6.137}$$

La Figura 6.68(a) muestra el sistema FIR ideal en forma directa sin cuantificación y la Figura 6.68(b) muestra el modelo lineal de ruido del sistema, suponiendo que todos los productos se cuantifican antes de realizar las sumas. El efecto es introducir $(M+1)$ fuentes de ruido blanco directamente en la salida del sistema, con lo que la varianza total a la salida es

$$\sigma_f^2 = (M+1)\frac{2^{-2B}}{12}. \tag{6.138}$$

Éste es exactamente el resultado que obtendríamos si hiciéramos $N = 0$ y $h_{ef}[n] = \delta[n]$ en las Ecuaciones (6.106) y (6.115). Si se dispusiera de un acumulador de doble longitud, sólo sería necesario cuantificar la salida, y el factor $(M+1)$ de la Ecuación (6.139) se sustituiría por la unidad. Esto hace que el acumulador de doble longitud sea una característica hardware muy atractiva para la implementación de sistemas FIR.

El desbordamiento también es un problema en las realizaciones en coma fija de sistemas FIR en forma directa. En el caso de aritmética en complemento a dos, sólo nos interesará el tamaño de la salida, ya que todas las demás sumas de la Figura 6.68(b) son sumas parciales. Por tanto, los coeficientes de la respuesta al impulso se pueden escalar para reducir la posibilidad de desbordamiento. Los factores de escala se pueden determinar utilizando cualquiera de las alternativas presentadas en la Sección 6.9.2. Por supuesto, el escalado de la respuesta al impulso reduce la ganancia del sistema y, en consecuencia, la relación señal-ruido a la salida se reduce tal como se indica en esa sección.

Ejemplo 6.14 Consideraciones de escalado para el sistema FIR de la Sección 6.8.5

Los coeficientes de la respuesta al impulso del sistema de la Sección 6.8.5 se muestran en la Tabla 6.5. Unos simples cálculos muestran que (como además puede verse en la Figura 6.54(b))

$$\sum_{n=0}^{27} |h[n]| = 1{,}751352,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{27} |h[n]|^2\right)^{1/2} = 0{,}679442,$$

$$\max_{|\omega|\leq\pi} |H(e^{j\omega})| \approx 1{,}009.$$

Estos valores satisfacen las relaciones de la Ecuación (6.127). Por tanto, el sistema dado resulta escalado de forma que teóricamente es posible que se produzca desbordamiento para una señal sinusoidal cuya amplitud sea mayor que $1/1{,}009 = 0{,}9911$, pero incluso en este caso, es muy improbable que se produzca desbordamiento para la mayor parte de las señales. De hecho, como el filtro es de fase lineal, para señales de banda ancha la señal de salida debe ser menor que la señal de entrada, ya que la ganancia en la banda de paso es la unidad y en el resto de la banda es menor que la unidad.

En la Sección 6.5.3 demostramos que los sistemas de fase lineal como el del Ejemplo 6.14 se pueden realizar empleando aproximadamente la mitad de multiplicaciones que en el caso de un sistema FIR general. Esto resulta evidente observando los grafos de flujo de señales de las Figuras 6.32 y 6.33. En esos casos, se puede ver claramente que la varianza del ruido de salida se debe reducir a la mitad si los productos se cuantifican antes de las sumas. Sin embargo, la utilización de esas estructuras requiere un algoritmo de indexación más complicado que la forma directa. La arquitectura de la mayoría de los chips para tratamiento digital de señales combina un sumador de doble longitud de palabra con operaciones multiplicación-suma en estructura *pipeline* eficiente y un control de bucles simple, optimizándose así el caso de un sistema FIR en forma directa. Por este motivo, las realizaciones FIR en forma directa resultan a menudo más atractivas, comparadas incluso con filtros IIR que pueden cumplir las especificaciones de respuesta en frecuencia con menos multiplicaciones, ya que las estructuras en cascada, o en paralelo, no permiten secuencias largas de operaciones multiplicación-acumulación.

En la Sección 6.5.3 presentamos las realizaciones en cascada de sistemas FIR. Los resultados y las técnicas de análisis que se han comentado en la Sección 6.9.3 se pueden aplicar a esas realizaciones. Pero en el caso de sistemas FIR sin polos, el problema del emparejamiento y el ordenamiento queda reducido sólo a un problema de ordenamiento. Como en el caso de sistemas IIR en cascada, el análisis de todas las ordenaciones posibles puede ser muy difícil si el sistema se compone de muchos subsistemas. Chan y Rabiner (1973a, 1973b) estudiaron este problema y encontraron experimentalmente que las prestaciones respecto al ruido son relativamente insensibles al ordenamiento. Sus resultados sugieren que una buena ordenación es aquella en la que la respuesta en frecuencia a la salida para cada fuente de ruido es relativamente plana y la ganancia de pico es pequeña.

6.9.5. Realizaciones en coma flotante de sistemas en tiempo discreto

Los resultados de las subsecciones anteriores indican que el margen dinámico limitado de las realizaciones con aritmética en coma fija hace necesario escalar cuidadosamente la entrada y los niveles de señal intermedios en las realizaciones digitales en coma fija de sistemas en tiempo discreto. La necesidad de aplicar factores de escala se puede eliminar utilizando representaciones numéricas y aritmética en coma flotante.

En las representaciones en coma flotante, un número real x se representa mediante el número binario $2^c\hat{x}_M$, donde el exponente c del factor de escala se denomina *característica* y $\hat{x}_M$ es la parte fraccionaria denominada *mantisa.* En los sistemas de aritmética en coma flotante, tanto la característica como la mantisa se representan explícitamente como números binarios en coma fija. Las representaciones en coma flotante permiten mantener un amplio margen dinámico y un ruido de cuantificación bajo. Sin embargo, el error de cuantificación se manifiesta de forma diferente. La aritmética en coma flotante

consigue una alta precisión y un amplio margen dinámico ajustando las características y normalizando la mantisa para que se cumpla que $0{,}5 \leq \hat{x}_M < 1$. Cuando se multiplican números en coma flotante, se suman sus características y se multiplican sus mantisas. Por tanto, la mantisa debe estar cuantificada. Para sumar dos números en coma flotante, sus características deben ajustarse para que sean iguales moviendo la coma binaria de la mantisa del número menor. Por tanto, en la suma también aparece la cuantificación. Si suponemos que el margen de la característica es lo suficientemente amplio como para que no aparezcan números mayores que 2^c, la cuantificación afectará sólo a la mantisa, pero el error de la mantisa se multiplicará también por 2^c. Por tanto, una representación conveniente de un número en coma flotante cuantificado es

$$\hat{x} = x(1+\varepsilon) = x + \varepsilon x. \tag{6.139}$$

Representando el error de cuantificación como una fracción ε de x, estamos representando automáticamente el hecho de que el error de cuantificación se escala automáticamente en función del nivel de señal.

Las propiedades de la aritmética en coma flotante mencionadas anteriormente complican el análisis del error de cuantificación de las realizaciones en coma flotante de sistemas en tiempo discreto. En primer lugar, las fuentes de ruido se deben insertar después de cada multiplicación y de cada suma. Una consecuencia importante de esto es que, a diferencia de la aritmética en coma fija, el *orden* en que se realizan las multiplicaciones y las sumas puede marcar una diferencia importante. Y lo que es más importante para el análisis, ya no se puede justificar la suposición de que las fuentes de ruido de cuantificación son ruido blanco independiente de la señal. De hecho, en la Ecuación (6.140), el ruido se expresa explícitamente en términos de la señal. Por tanto, ya no podemos analizar el ruido sin hacer suposiciones adicionales sobre la naturaleza de la señal de entrada. Si se supone que la entrada es conocida, por ejemplo ruido blanco, una suposición razonable es que el error relativo ε es independiente de x y es ruido blanco de distribución uniforme.

Bajo este tipo de supuestos, Sandberg (1967), Liu y Kaneko (1969), Weinstein y Oppenheim (1969), y Kan y Aggarwal (1971) han obtenido resultados útiles. Concretamente, Weinstein y Oppenheim, comparando realizaciones en coma fija y en coma flotante de sistemas IIR de primer y segundo orden demostraron que si el número de bits que representa la mantisa en coma flotante es igual que la longitud de palabra en coma fija, la aritmética en coma flotante produce relaciones señal–ruido más altas a la salida. Como era de esperar, se encontró una mayor diferencia cuando los polos estaban cercanos a la circunferencia unidad. Sin embargo, se requieren bits adicionales para representar la característica y cuanto mayor es el margen dinámico deseado, más bits se requieren para la característica. Además, el hardware para realizar la aritmética en coma flotante es mucho más complicado que para la aritmética en coma fija. Por tanto, el uso de aritmética en coma flotante requiere una longitud de palabra más grande y una mayor complejidad de la unidad aritmética. Su principal ventaja es que elimina prácticamente el problema del desbordamiento, y si se utiliza una mantisa suficientemente grande, la cuantificación es un problema mucho menor. Esto se traduce en una mayor simplicidad en el diseño y realización de sistemas.

Hoy día, el filtrado digital de señales multimedia se realiza a menudo en computadores personales o en estaciones de trabajo que poseen representaciones numéricas en coma flotante muy precisas y unidades aritméticas de alta velocidad. En estos casos, los aspectos de la cuantificación presentados en las Secciones 6.7–6.9 tienen en general poca o ninguna relevancia. Sin embargo, en sistemas que requieren altos volúmenes de fabricación se requiere en general aritmética de coma fija debido a su menor coste.

6.10. CICLOS LÍMITE CON ENTRADA CERO EN REALIZACIONES EN COMA FIJA DE FILTROS DIGITALES IIR

En sistemas IIR en tiempo discreto estables realizados con aritmética de precisión infinita, si la excitación pasa a valer cero y permanece en cero para n mayor que algún valor n_0, la salida para $n > n_0$ tenderá hacia cero asintóticamente. En el caso del mismo sistema realizado con aritmética de longitud de registro finita, la salida puede quedar oscilando indefinidamente siguiendo un patrón periódico aunque la entrada permanezca igual a cero. Este efecto se denomina comúnmente *comportamiento de ciclo límite con entrada cero* y es una consecuencia directa del uso de cuantificadores no lineales en los bucles de realimentación o del desbordamiento en las sumas. El comportamiento de ciclo límite de un filtro digital es complejo y difícil de analizar, por lo que no intentaremos considerarlo en sentido general. Sin embargo, para ilustrarlo vamos a ver dos ejemplos simples que mostrarán cómo pueden aparecer los ciclos límite.

6.10.1. Ciclos límite debidos al truncamiento y el redondeo

El redondeo o truncamiento sucesivo de los productos de una ecuación en diferencias que se resuelve por iteración puede crear patrones repetitivos. Ilustraremos este hecho con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6.15 Comportamiento de ciclo límite de un sistema de primer orden

Consideremos el sistema de primer orden caracterizado por la ecuación en diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \qquad |a| < 1. \tag{6.140}$$

La Figura 6.69(a) muestra el grafo de flujo de señales de este sistema. Supongamos que la longitud del registro que almacena el coeficiente a, la entrada $x[n]$ y la variable de nodo del filtro $y[n-1]$ es de 4 bits (es decir, un bit de signo a la izquierda de la coma binaria y 3 bits a la derecha de la coma binaria). Debido a los registros de longitud finita, el producto $ay[n-1]$ se debe redondear o truncar a 4 bits antes de sumarlo a $x[n]$. La Figura 6.69(b) muestra el grafo de flujo que representa la realización real basada

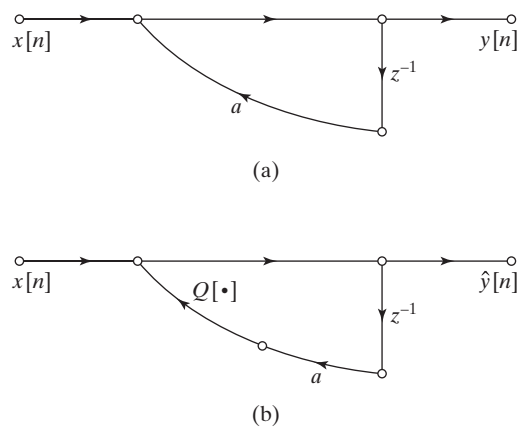


Figura 6.69 Sistema IIR de primer orden. (a) Sistema lineal con precisión infinita. (b) Sistema no lineal debido a la cuantificación.

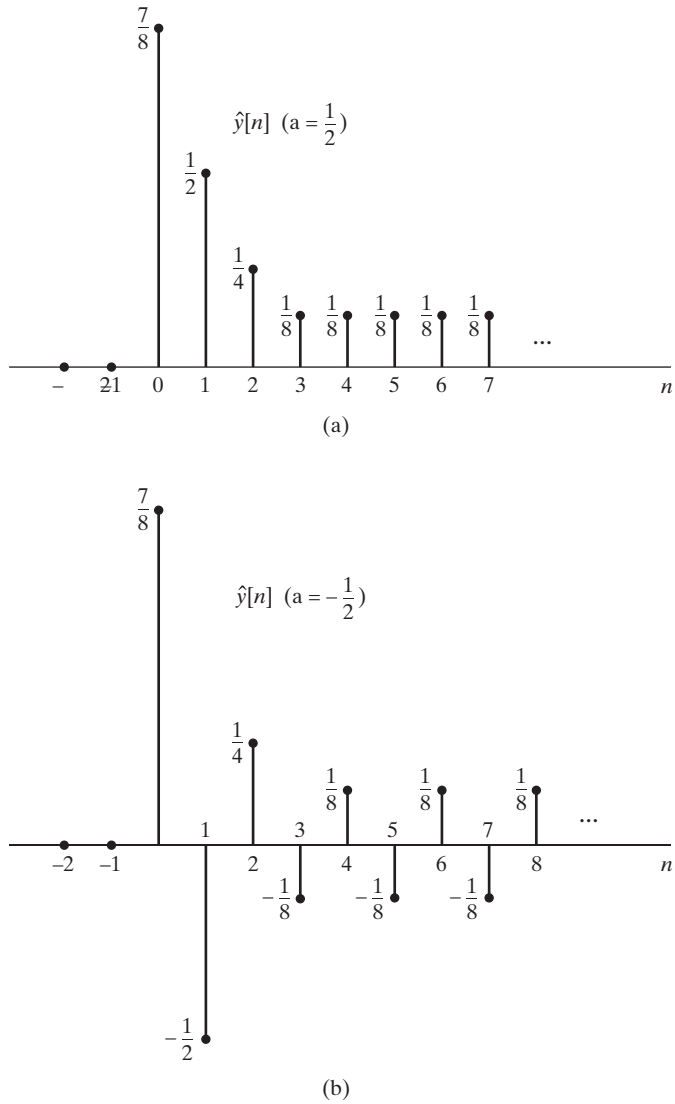


Figura 6.70 Respuesta del sistema de primer orden de la Figura 6.69 a un impulso. (a) $a = \frac{1}{2}$. (b) $a = -\frac{1}{2}$.

en la Ecuación (6.141). Suponiendo que el producto se redondea, la salida real $\hat{y}[n]$ satisface la ecuación en diferencias no lineal

$$\hat{y}[n] = Q[a\hat{y}[n-1]] + x[n], \tag{6.141}$$

donde $Q[\cdot]$ representa la operación de redondeo. Supongamos que $a = 1/2 = 0_\diamond 100$ y que la entrada es $x[n] = (7/8)\delta[n] = (0_\diamond 111)\delta[n]$. Utilizando la Ecuación (6.142) podemos ver que para $n = 0, \hat{y}[0] = 7/8 = 0_\diamond 111$. Para obtener $\hat{y}[1]$, multiplicamos $\hat{y}[0]$ por a, obteniéndose el resultado $\hat{a}y[0] = 0_\diamond 011100$, un número de 7 bits que se debe redondear a 4 bits. Este número, $7/16$, está exactamente en la mitad de los niveles de cuantificación $4/8$ y $3/8$. Si en esos casos escogemos siempre redondear hacia arriba, entonces el número $0_\diamond 011100$ redondeado a 4 bits será $0_\diamond 100 = 1/2$. Como $x[1] = 0$, $\hat{y}[1] = 0_\diamond 100 = 1/2$. Si continuamos iterando la ecuación en diferencias obtenemos que $\hat{y}[2] = Q[a\hat{y}[1]] = 0_\diamond 010 = 1/4$ e $\hat{y}[3] = 0_\diamond 001 = 1/8$. En ambos casos no es necesario redondear. Sin embargo, para obtener $\hat{y}[4]$,

hay que redondear el número de 7 bits $a\hat{y}[3] = 0_{\diamond}000100$ a $0_{\diamond}001$. Se obtiene el mismo resultado para todos los valores de $n \geq 3$. La Figura 6.70(a) muestra la secuencia de salida para este ejemplo. Si $a = -1/2$, se podrían realizar de nuevo los cálculos anteriores para demostrar que la salida es tal como se muestra en la Figura 6.70(b). Es decir, debido al redondeo del producto $a\hat{y}[n-1]$, la salida alcanza un valor constante de $1/8$ cuando $a = 1/2$ y una oscilación periódica en estado estacionario entre $+1/8$ y $-1/8$ cuando $a = -1/2$. Se trata de salidas periódicas similares a las que se obtendrían con un polo de primer orden en $z = \pm 1$ en lugar de en $z = \pm 1/2$.

Cuando $a = +1/2$, el periodo de la oscilación es 1 y cuando $a = -1/2$, el periodo de la oscilación es 2. Estas salidas periódicas en estado estacionario se denominan *ciclos límite,* y su existencia fue apuntada en primer lugar por Blackman (1965), que denominó *bandas muertas* a los intervalos de amplitud en los que esos ciclos límite estaban confinados. En este caso la banda muerta es $-2^{-B} \leq \hat{y}[n] \leq +2^{-B}$, con $B = 3$.

El ejemplo anterior ha ilustrado que en un sistema IIR de primer orden puede aparecer un ciclo límite con entrada cero debido al redondeo. En el caso de truncamiento se puede obtener un resultado similar. Los sistemas de segundo orden pueden presentar también un comportamiento de ciclo límite. En el caso de realizaciones en paralelo de sistemas de orden superior, las salidas de cada uno de los sistemas de segundo orden son independientes cuando la entrada es cero. En este caso, algunas secciones de segundo orden podrían contribuir con ciclos límite a la suma de la salida. En el caso de realizaciones en cascada, sólo la primera sección tiene entrada cero y las secciones siguientes pueden exhibir su propio comportamiento de ciclo límite característico, o puede parecer que simplemente están filtrando la salida del ciclo límite de una sección anterior. En el caso de sistemas de orden alto realizados mediante otras estructuras de filtros, el comportamiento de ciclo límite se hace más complicado, y por tanto su análisis también.

Además de proporcionar una explicación de los efectos de los ciclos límite en filtros digitales, los resultados anteriores son útiles cuando la respuesta de ciclo límite para entrada cero de un determinado sistema es la respuesta que se desea. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se diseñan osciladores sinusoidales para la generación de señales o para la generación de coeficientes en el cálculo de la transformada discreta de Fourier.

6.10.2. Ciclos límite debidos al desbordamiento

Además de las clases de ciclos límite presentadas en la sección anterior, puede aparecer un tipo de ciclo límite más severo debido al desbordamiento. El efecto que tiene el desbordamiento es el de insertar un error grande en la salida y, en algunos casos, la salida del filtro puede oscilar entre límites de amplitud grandes. Estos ciclos límite se han denominado *oscilación por desbordamiento*. El problema de las oscilaciones causadas por el desbordamiento se presenta en detalle en Ebert et al. (1969). El siguiente ejemplo ilustra las oscilaciones por desbordamiento.

Ejemplo 6.16 Oscilaciones por desbordamiento en un sistema de segundo orden

Consideremos un sistema de segundo orden realizado mediante la ecuación en diferencias

$$\hat{y}[n] = x[n] + Q[a_1\hat{y}[n-1]] + Q[a_2\hat{y}[n-2]], \tag{6.142}$$

donde $Q[\cdot]$ representa el redondeo en complemento a dos utilizando una longitud de palabra de 3 bits más uno de signo. El desbordamiento puede aparecer al realizar la suma en complemento a dos de los

productos redondeados. Supongamos que $a_1 = 3/4 = 0_\diamond 110$ y que $a_2 = -3/4 = 1_\diamond 010$, y supongamos también que $x[n]$ permanece igual a cero para $n \geq 0$. Supongamos además que $\hat{y}[-1] = 3/4 = 0_\diamond 110$ y que $\hat{y}[-2] = -3/4 = 1_\diamond 010$. La salida en la muestra $n = 0$ es

$$\hat{y}[0] = 0_\diamond 110 \times 0_\diamond 110 + 1_\diamond 010 \times 1_\diamond 010.$$

Si evaluamos el producto utilizando aritmética en complemento a dos, obtenemos que

$$\hat{y}[0] = 0_\diamond 100100 + 0_\diamond 100100,$$

y si tomamos la opción de redondear hacia arriba cuando un número está en la mitad de dos niveles de cuantificación, el resultado de la suma en complemento a dos es

$$\hat{y}[0] = 0_\diamond 101 + 0_\diamond 101 = 1_\diamond 010 = -\tfrac{3}{4}.$$

En este caso el acarreo binario se desborda en el bit de signo, cambiando el resultado positivo de la suma a un número negativo. Si se repite el proceso obtenemos

$$\hat{y}[1] = 1_\diamond 011 + 1_\diamond 011 = 0_\diamond 110 = \tfrac{3}{4}.$$

El acarreo binario resultante de la suma de los bits de signo se pierde, y la suma negativa se convierte en un número positivo. Podemos ver claramente que $\hat{y}[n]$ continuará oscilando entre $+3/4$ y $-3/4$ hasta que se aplique una entrada. Es decir, $\hat{y}[n]$ ha entrado en un ciclo límite periódico con periodo de 2 y amplitud casi el margen dinámico completo de la implementación.

El ejemplo anterior ilustra la forma en que pueden aparecer oscilaciones por desbordamiento. Los sistemas de orden mayor pueden presentar comportamientos mucho más complejos y pueden aparecer otras frecuencias. Existen algunos resultados para predecir si las oscilaciones por desbordamiento pueden ser admitidas por una ecuación en diferencias (véase Ebert et al., 1969). Las oscilaciones por desbordamiento se pueden evitar utilizando la característica de desbordamiento por saturación que se muestra en la Figura 6.45(b) (véase Ebert et al., 1969).

6.10.3. Cómo evitar los ciclos límite

La posible existencia de ciclos límite con entrada cero es importante en aplicaciones en las que un filtro digital está en continuo funcionamiento, ya que generalmente es deseable que la salida se aproxime a cero cuando la entrada es cero. Por ejemplo, supongamos que se muestrea una señal de voz, se filtra mediante un filtro digital y se transforma de nuevo en una señal acústica mediante un conversor D/A. En una situación como ésta, sería muy poco deseable que el filtro entrara en un ciclo límite con entrada cero, ya que dicho comportamiento produciría un tono audible.

Una solución al problema general de los ciclos límite es buscar estructuras que no admitan este tipo de oscilaciones. Se han obtenido estructuras de ese tipo utilizando representaciones en el espacio de estados (véanse Barnes y Fam, 1977; Mills, Mullis y Roberts, 1978) y mediante conceptos análogos a la pasividad de circuitos analógicos (véanse Rao y Kailath, 1984; Fettweis, 1986). Sin embargo, estas estructuras generalmente tienen un mayor coste computacional que las realizaciones equivalentes en cascada o en paralelo. Añadiendo más bits a la longitud de palabra se puede evitar generalmente el desbordamiento. También, como los ciclos límite debidos al redondeo están limitados generalmente a los bits menos significativos de la palabra binaria, se pueden utilizar bits adicionales para reducir la amplitud efectiva del ciclo límite. Claasen et al. (1973) han demostrado que si se utiliza un acumulador de doble longitud, de forma que la cuantificación se produzca después de sumar los productos, es mucho menos

probable que aparezcan ciclos límite debidos al redondeo en sistemas de segundo orden. Por tanto, el compromiso entre longitud de palabra y complejidad del algoritmo computacional aparece también para los ciclos límite, como en el caso de la cuantificación de coeficientes y el ruido de redondeo.

Finalmente, es importante apuntar que los ciclos límite con entrada cero debidos al desbordamiento y al redondeo son un fenómeno único de los sistemas IIR. Los sistemas FIR no pueden tener ciclos límite con entrada cero, ya que no tienen vías de realimentación. La salida de un sistema FIR será cero no más tarde de $(M + 1)$ muestras después de que la entrada se haga cero y permanecerá así. Esta es una importante ventaja de los sistemas FIR en aplicaciones donde no se pueden admitir las oscilaciones debidas a ciclos límite.

6.11. RESUMEN

En este capítulo hemos considerado muchos aspectos del problema de implementar un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo. La primera mitad del capítulo ha estado dedicada a las estructuras básicas de realización. Tras presentar los diagramas de bloques y los grafos de flujo de señales como representaciones gráficas de las ecuaciones en diferencias, se han presentado algunas estructuras básicas para sistemas en tiempo discreto FIR e IIR como la forma directa I, la forma directa II, la forma en cascada, la forma en paralelo y la forma traspuesta. Hemos demostrado que todas esas formas son equivalentes cuando se realizan con aritmética de precisión infinita. Sin embargo, las diferentes estructuras resultan más significativas en el contexto de las realizaciones de precisión finita. Por tanto, el resto del capítulo se ha ocupado de los problemas asociados con la precisión finita o la cuantificación presente en las realizaciones digitales de las estructuras básicas.

Hemos comenzado la exposición de los efectos de la precisión finita con una breve revisión de la representación digital de números y una presentación que ha mostrado que los efectos de la cuantificación que son importantes en el muestreo (presentado en el Capítulo 4) son también importantes al representar los coeficientes de un sistema en tiempo discreto y en la realización de sistemas con aritmética de precisión finita. Hemos ilustrado con diversos ejemplos los efectos de la cuantificación de los coeficientes de una ecuación en diferencias. Este aspecto se ha tratado de forma independiente de los efectos de la aritmética de precisión finita, que se ha demostrado que introduce no linealidad en los sistemas. Hemos visto que en algunos casos esta no linealidad es la responsable de la aparición de ciclos límite que pueden persistir después de que la entrada de un sistema se lleve a cero. Hemos demostrado también que los efectos de la cuantificación se pueden modelar mediante fuentes aleatorias independientes de ruido blanco que se introducen en la red internamente. Estos modelos lineales de ruido se han desarrollado para las estructuras en forma directa y en cascada. En toda nuestra presentación de los efectos de la cuantificación, el tema subyacente ha sido el conflicto entre el deseo de tener una cuantificación fina y el de mantener un margen amplio de posibles amplitudes de señal. Hemos visto que en las realizaciones en coma fija, uno de ellos se puede mejorar a expensas del otro, pero si se desea mejorar uno sin alterar al otro se debe aumentar el número de bits utilizado para representar los coeficientes y las amplitudes de las señales. Esto se puede conseguir aumentando la longitud de palabra en coma fija o adoptando una representación en coma flotante.

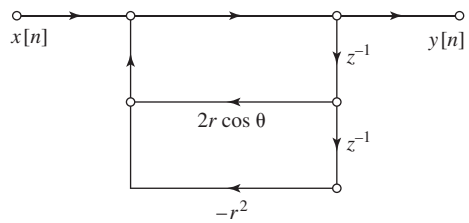
Nuestra presentación de los efectos de la cuantificación ha tenido dos finalidades. Primero, hemos desarrollado algunos resultados que pueden ser útiles para guiar el diseño de realizaciones prácticas. Hemos determinado que los efectos de la cuantificación dependen en gran manera de la estructura utilizada y de los parámetros específicos del sistema que se realiza. Incluso aunque pueda ser necesaria una simulación del sistema para evaluar sus prestaciones, muchos resultados presentados son útiles para tomar decisiones inteligentes en el proceso de diseño. Un segundo objetivo igualmente importante de esta parte del capítulo ha sido ilustrar un estilo de análisis que se puede aplicar para estudiar los efectos de la cuantificación en una variedad de algoritmos de tratamiento digital de señales. Los ejemplos presentados

en este capítulo indican los tipos de supuestos y de aproximaciones que se suelen hacerse al estudiar los efectos de la cuantificación. En el Capítulo 9 aplicaremos las técnicas de análisis desarrolladas en este capítulo al estudio de la cuantificación en el cálculo de la transformada discreta de Fourier.

Problemas

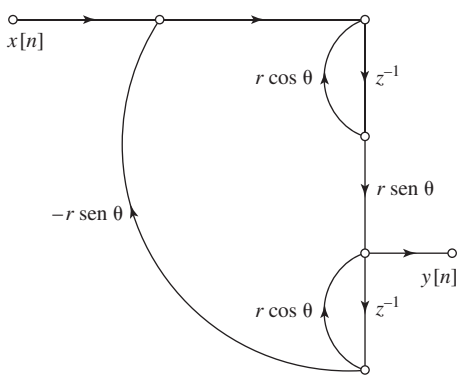
Problemas básicos con respuestas

6.1. Determine la función de transferencia de las dos redes de la Figura P6.1 y demuestre que tienen los mismos polos.



Red 1

(a)



Red 2

(b)

Figura P6.1

6.2. El grafo de flujo de señal de la Figura P6.2 representa una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes. Determine la ecuación en diferencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.

6.3. La Figura P6.3 muestra seis sistemas. Determine cuál de los últimos cinco, (b)–(f), tiene la misma función de transferencia que el (a). Debería poder eliminar algunas posibilidades por simple inspección.

6.4. Considere el sistema de la Figura P6.3(d).

(a) Obtenga la función de transferencia que relaciona las transformadas Z de la entrada y la salida.

(b) Escriba la ecuación en diferencias que satisfacen la secuencia de entrada $x[n]$ y la secuencia de salida $y[n]$.

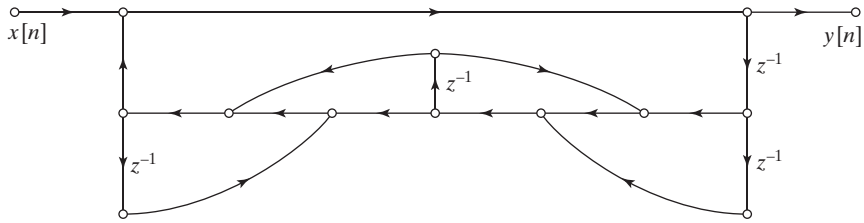
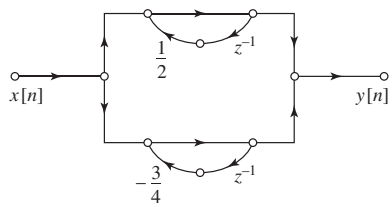
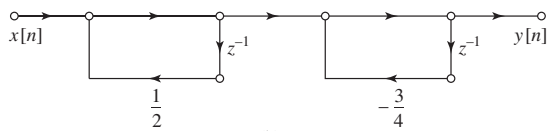


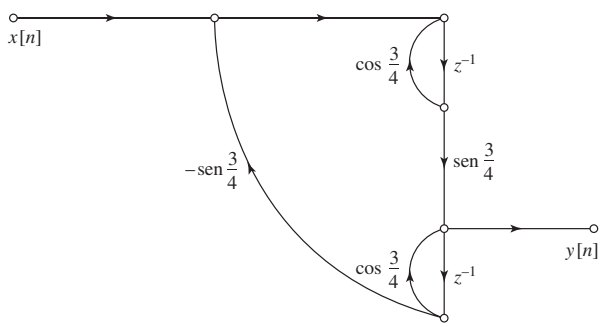
Figura P6.2



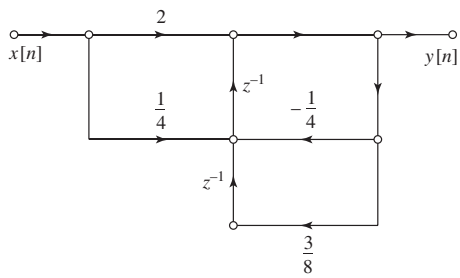
(a)



(b)

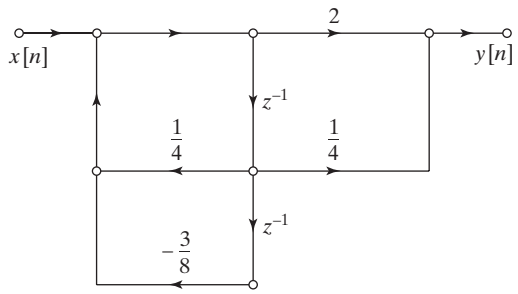


(c)

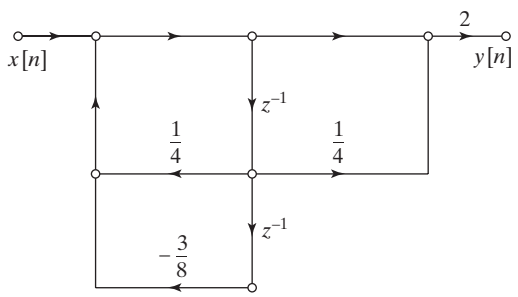


(d)

Figura P6.3



(e)



(f)

Figura P6.3 (*Continuación*)

6.5. Un sistema lineal e invariante con el tiempo se realiza mediante el grafo de flujo que se muestra en la Figura P6.5.

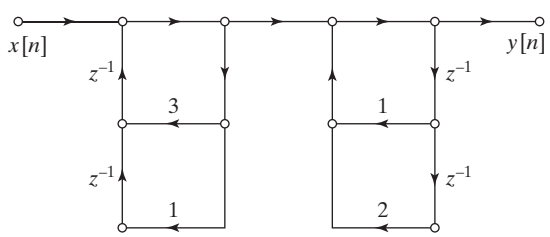


Figura P6.5

(a) Escriba para este grafo de flujo la ecuación en diferencias que relaciona $x[n]$ e $y[n]$.

(b) ¿Cuál es la función de transferencia del sistema?

(c) En la realización que se muestra en la Figura P6.5, ¿cuántas multiplicaciones y sumas reales se requieren para calcular cada muestra de la salida? (Suponga que $x[n]$ es real y que las multiplicaciones por 1 no cuentan en el total).

(d) La realización de la Figura P6.5 requiere cuatro registros de almacenamiento (elementos de retardo). ¿Es posible reducir el número de registros de almacenamiento utilizando una estructura diferente? Si lo es, dibuje el grafo de flujo. Si no lo es, explique por qué no se puede reducir el número de registros de almacenamiento.

6.6. Determine la respuesta al impulso de cada uno de los sistemas que se muestran en la Figura P6.6.

6.7. Sean $x[n]$ e $y[n]$ secuencias relacionadas por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n].$$

Dibuje un grafo de flujo de señales en forma directa II del sistema lineal, invariante con el tiempo y causal correspondiente a esta ecuación en diferencias.

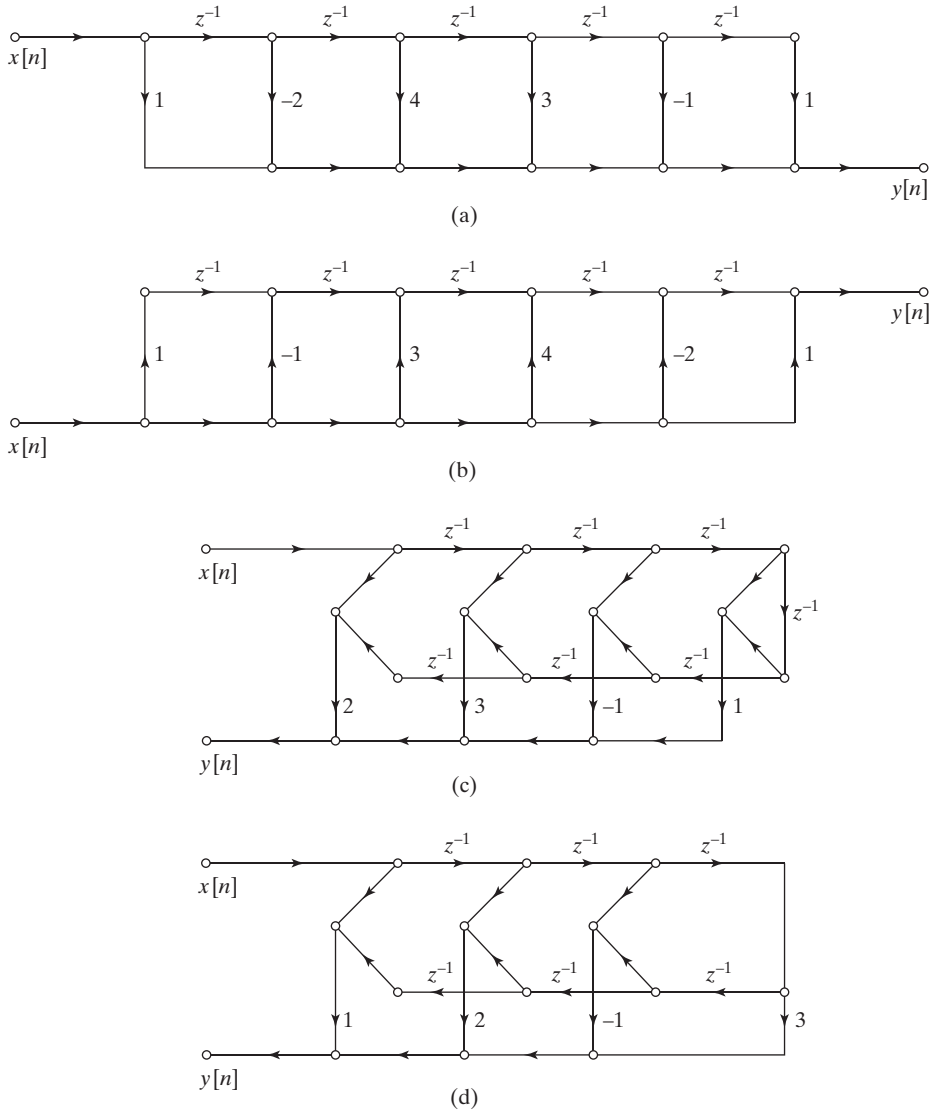


Figura P6.6

6.8. El grafo de flujo de señales de la Figura P6.8 representa un sistema lineal e invariante con el tiempo. Determine una ecuación en diferencias que exprese la relación entre la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de este sistema. Como es habitual, todos los arcos del grafo de flujo de señales tienen ganancia unidad a menos que se indique específicamente lo contrario.

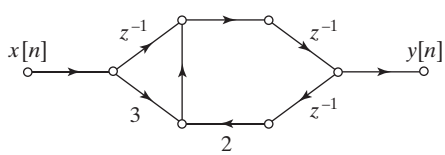


Figura P6.8

6.9. La Figura P6.9 muestra el grafo de flujo de señales de un sistema en tiempo discreto lineal, invariante con el tiempo y causal. Los arcos que no tienen explícitamente indicado un valor de ganancia tienen ganancia unidad.

(a) Siguiendo el recorrido de un impulso por el grafo de flujo, determine $h[1]$, la respuesta al impulso en $n = 1$.

(b) Determine la ecuación en diferencias que relaciona $x[n]$ e $y[n]$.

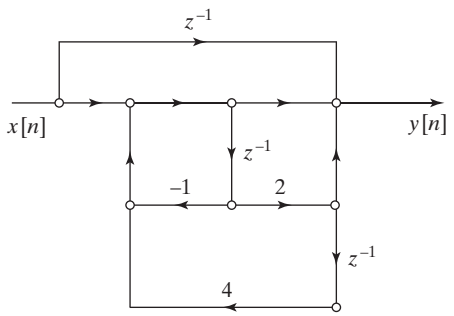


Figura P6.9

6.10. Considere el grafo de flujo de señales que se muestra en la Figura P6.10.

(a) Utilizando las variables de nodo indicadas, escriba el conjunto de ecuaciones en diferencias que representa este grafo de flujo.

(b) Dibuje el grafo de flujo de un sistema equivalente que sea la combinación en cascada de dos sistemas de primer orden.

(c) ¿Es estable el sistema? Explique su respuesta.

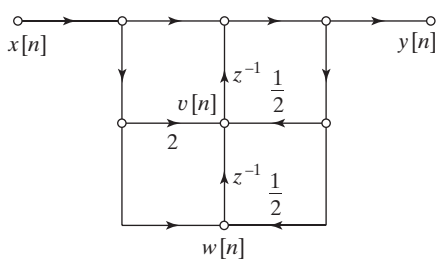


Figura P6.10

6.11. Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal con respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}{z\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

(a) Dibuje el grafo de flujo del sistema en forma directa II.

(b) Dibuje la forma traspuesta del grafo de flujo del apartado (a).

6.12. Dado el sistema lineal e invariante con el tiempo cuyo grafo de flujo se muestra en la Figura P6.12, determine la ecuación en diferencias que relaciona la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$.

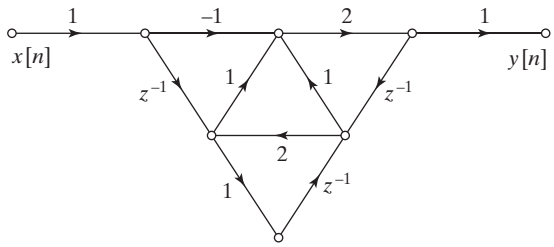


Figura P6.12

6.13. Dibuje el grafo de flujo de señales para la realización en forma directa I del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

6.14. Dibuje el grafo de flujo de señales para la realización en forma directa II del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

6.15. Dibuje el grafo de flujo de señales para la realización en forma directa II traspuesta del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

6.16. Considere el grafo de flujo de señales que se muestra en la Figura P6.16.

(a) Dibuje el grafo de flujo de señales que resulta al aplicar el teorema de trasposición a este grafo.

(b) Confirme que el grafo de flujo de señales traspuesto obtenido en (a) tiene la misma función $H(z)$ que el sistema original de la figura.

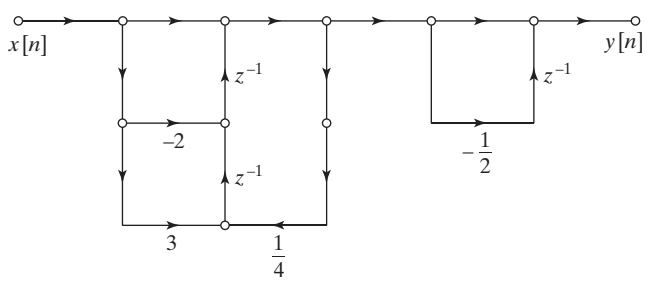


Figura P6.16

6.17. Considere el sistema lineal, invariante con el tiempo y causal con función de transferencia

$$H(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-3}.$$

(a) Dibuje el grafo de flujo de señales de la realización en forma directa de este sistema.

(b) Dibuje el grafo de flujo de señales de la realización en forma directa traspuesta del sistema.

6.18. El grafo de flujo de señales que muestra la Figura P6.18 se puede sustituir, para algunos valores distintos de cero del parámetro a, por un grafo de flujo de señales de un sistema de segundo orden en forma directa II, de forma que se realiza la misma función de transferencia. Proporcione uno de esos valores de a y obtenga la función de transferencia $H(z)$ resultante.

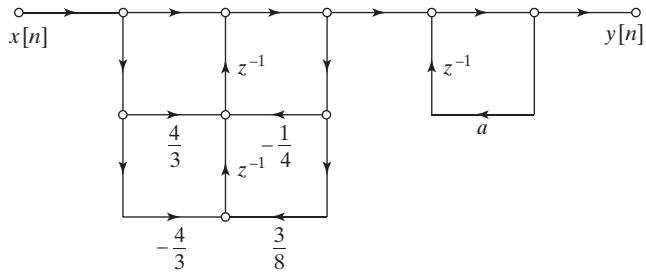


Figura P6.18

6.19. Considere el sistema lineal, invariante con el tiempo y causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{2 - \frac{8}{3}z^{-1} - 2z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}.$$

Dibuje un grafo de flujo de señales que realice este sistema en forma de una combinación en paralelo de secciones de primer orden en forma directa II traspuesta.

6.20. Dibuje un grafo de flujo de señales que realice la función de transferencia

$$H(z) = \frac{(1+(1-j/2)z^{-1})(1+(1+j/2)z^{-1})}{(1+(j/2)z^{-1})(1-(j/2)z^{-1})(1-(1/2)z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

como una cascada de secciones de segundo orden en forma directa II traspuesta con coeficientes reales.

Problemas básicos

6.21. En muchas aplicaciones es de utilidad disponer de un sistema que genere una secuencia sinusoidal. Una forma posible de realizarlo es con un sistema cuya respuesta al impulso sea $h[n] = e^{j\omega_0 n}u[n]$. Las partes real e imaginaria de $h[n]$ son respectivamente por tanto $h_r[n] = (\cos\omega_0 n)u[n]$ y $h_i[n] = (\operatorname{sen}\omega_0 n)u[n]$.

Al realizar un sistema cuya respuesta al impulso es compleja, las partes real e imaginaria se tratan como salidas separadas. Dibuje un grafo de flujo que realice este sistema escribiendo primero la ecuación en diferencias compleja que se requiere para producir la respuesta al impulso deseada y separándola después en sus partes real e imaginaria. El grafo de flujo resultante sólo debe tener coeficientes reales. Esta realización se denomina algunas veces *oscilador en forma acoplada*, ya que cuando la entrada se excita con un impulso, las salidas son sinusoidales.

6.22. Dada la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}125z^{-2}},$$

dibuje los grafos de flujo de todas las posibles realizaciones de este sistema en forma de cascada de sistemas de primer orden.

6.23. Se desea implementar un sistema causal $H(z)$ con el diagrama polo–cero que se muestra en la Figura P6.23. En todos los apartados del problema, z_1, z_2, p_1 y p_2 son reales, y una posible ganancia constante independiente de la frecuencia se puede absorber en forma de un coeficiente de ganancia en el arco de salida de cada grafo de flujo.

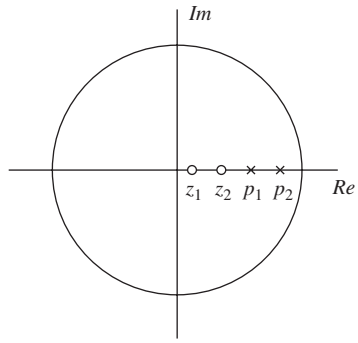


Figura P6.23

(a) Dibuje el grafo de flujo de la implementación en forma directa II. Determine expresiones para cada una de las ganancias de los arcos en función de las variables z_1, z_2, p_1 y p_2.

(b) Dibuje el grafo de flujo de una implementación en cascada de secciones en forma directa II de segundo orden. Determine expresiones para cada una de las ganancias de los arcos en función de las variables z_1, z_2, p_1 y p_2.

(c) Dibuje el diagrama de flujo de una implementación en forma paralelo con secciones en forma directa I de primer orden. Especifique un sistema de ecuaciones lineales que pueda ser resuelto para expresar las ganancias de los arcos en función de las variables z_1, z_2, p_1 y p_2.

6.24. Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{10}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{\left(1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{1}{5}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{5}z^{-1}}$$

(a) Dibuje el grafo de flujo de señales correspondiente a la realización del sistema en cada una de las siguientes formas:

(i) Forma directa I.
(ii) Forma directa II
(iii) Forma en cascada utilizando secciones de primer y segundo orden en forma directa II.
(iv) Forma en paralelo utilizando secciones de primer y segundo orden en forma directa I.
(v) Forma directa II traspuesta.

(b) Escriba la ecuación en diferencias correspondiente al grafo de flujo del caso (v) del apartado (a), y demuestre que el sistema tiene la función de transferencia correcta.

6.25. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal está definido mediante el grafo de flujo de señales que se muestra en la Figura P6.25, que representa al sistema como una combinación en cascada de un sistema de segundo orden con un sistema de primer orden.

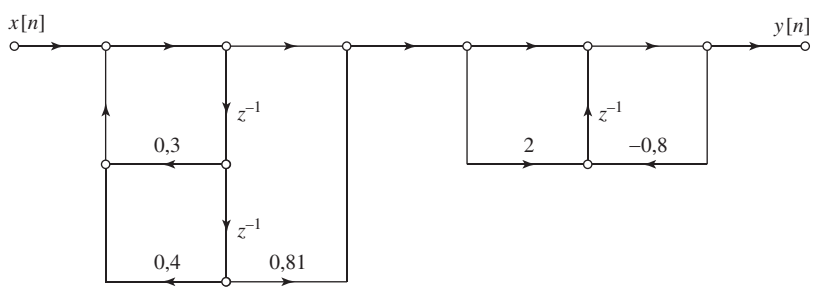


Figura P6.25

(a) ¿Cuál es la función de transferencia del sistema en cascada total?
(b) ¿Es el sistema total estable? Explique brevemente su respuesta.
(c) ¿Es el sistema total de fase mínima? Explique brevemente su respuesta.
(d) Dibuje el grafo de flujo de señales de una implementación de este sistema en forma directa II traspuesta.

6.26. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene una función de transferencia con la siguiente expresión:

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+0{,}8z^{-2}}$$

(a) ¿Es estable este sistema? Explique brevemente su respuesta.
(b) Dibuje el grafo de flujo de señales de la implementación en forma paralelo de este sistema.
(c) Dibuje el diagrama de flujo de señales de la implementación este sistema en forma de una cascada de un sistema de primer orden y un sistema de segundo orden. Para el sistema de segundo orden, utilice la implementación en forma directa II.

6.27. Un sistema lineal en invariante con el tiempo con función de transferencia

$$H(z) = \frac{0{,}2(1+z^{-1})^6}{\left(1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}\right)\left(1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}\right)}$$

se implementa mediante un grafo de flujo que se muestra en la Figura P6.27.

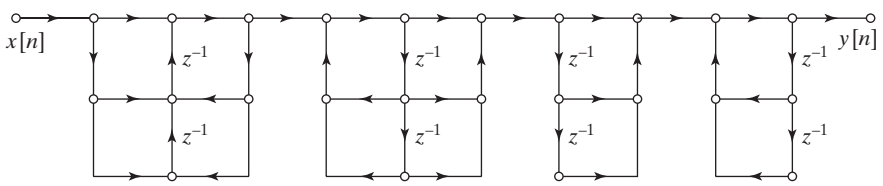


Figura P6.27

(a) Rellene todos los coeficientes que faltan en la Figura P6.27. ¿Es única su solución?
(b) Defina en la Figura P6.27 variables de nodo apropiadas, y escriba el conjunto de ecuaciones en diferencias representado por este grafo de flujo.

6.28. **(a)** Determine la función de transferencia $H(z)$, desde $x[n]$ hasta $y[n]$ para el grafo de flujo que se muestra en la Figura P6.28-1 (nótese que la posición donde se cruzan las líneas diagonales no es un nodo).

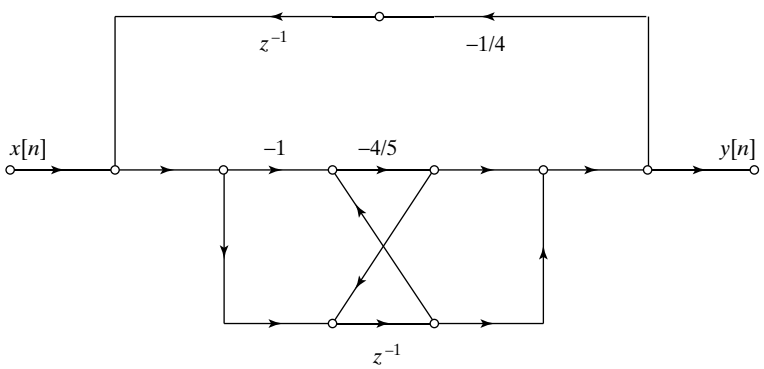


Figura P6.28-1

(b) Dibuje el grafo en las formas directas (I y II) de sistemas que tengan la función de transferencia $H(z)$.

(c) Diseñe $H_1(z)$ de forma que $H_2(z)$ en la Figura P6.28-2 tenga inverso causal y estable y que $|H_2(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$. Nota: se permite la cancelación cero-polo.

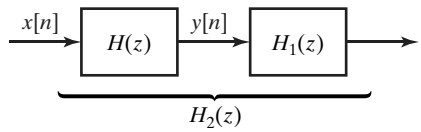


Figura P6.28-2

(d) Dibuje el grafo de flujo en forma directa II traspuesta de $H_2(z)$.

6.29. **(a)** Determine la función de transferencia $H(z)$ que relaciona la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$ para el filtro FIR en celosía que se muestra en la Figura P6.29.

(b) Dibuje la estructura de filtro en celosía del filtro todo polos $1/H(z)$.

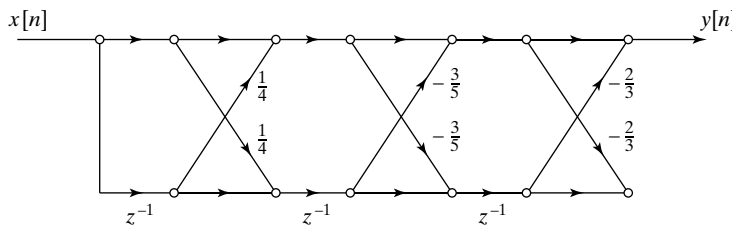


Figura P6.29

6.30. Determine y dibuje la implementación en celosía de la siguiente función de transferencia causal todo polos:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3} + 2z^{-4}}$$

¿Es estable el sistema?

6.31. La Figura P6.31 muestra un filtro IIR en celosía.

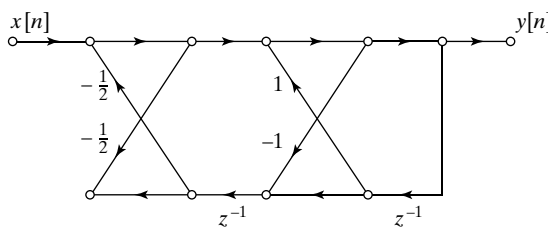


Figura P6.31

(a) Siguiendo el camino de un impulso por el grafo de flujo, determine $y[1]$ para la entrada $x[n] = \delta[n]$.

(b) Determine el grafo de flujo del correspondiente filtro inverso.

(c) Determine la función de transferencia del filtro IIR de la Figura P6.31.

6.32. El grafo de flujo que se muestra en la Figura P6.32 es una implementación de un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal.

(a) Dibuje el traspuesto de este grafo de flujo de señales.

(b) Para el sistema original o su traspuesto, determine la ecuación en diferencias que relaciona la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$. (*Nota:* las ecuaciones en diferencias serán las mismas en ambas estructuras).

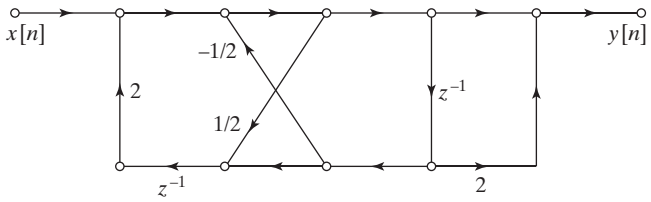


Figura P6.32

(c) ¿Es el sistema estable en sentido BIBO?
(d) Determine $y[2]$ si $x[n] = (1/2)^n u[n]$.

Problemas avanzados

6.33. Considere el sistema lineal e invariante con el tiempo representado por la estructura FIR en celosía de la Figura P6.33-1.

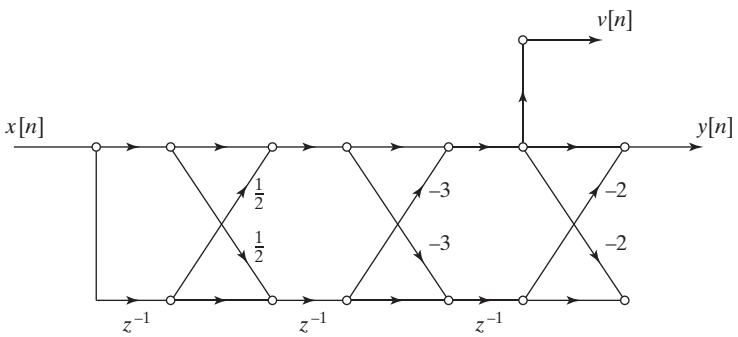


Figura P6.33-1

(a) Determine la función de transferencia desde la entrada $x[n]$ hasta la salida $v[n]$ (NO $y[n]$).
(b) Sea $H(z)$ la función de transferencia desde la entrada $x[n]$ hasta la salida $y[n]$, y sea $g[n]$ el resultado de expandir por 2 la respuesta al impulso $h[n]$ asociada, como se muestra en la Figura P6.33-2.

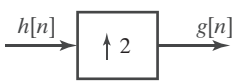


Figura P6.33-2

La respuesta al impulso $g[n]$ define un nuevo sistema con función de transferencia $G(z)$. Utilizando una estructura FIR en celosía, determine los parámetros k necesarios para la implementación en celosía de $G(z)$. *Nota:* debe pensar cuidadosamente antes de iniciar un cálculo largo.

6.34. La Figura P6.34-1 muestra una respuesta al impulso $h[n]$, especificada como

$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/4} u[n], & \text{para } n \text{ entero múltiplo de 4} \\ \text{constante entre dos múltiplos de 4 consecutivos} \end{cases} .$$

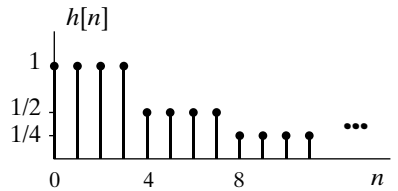


Figura P6.34-1

(a) Determine $h_1[n]$ y $h_2[n]$ de forma que

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n],$$

siendo $h_1[n]$ un filtro FIR y sabiendo que $h_2[n] = 0$ cuando $n/4$ no es entero. ¿Es $h_2[n]$ un filtro FIR o IIR?

(b) La respuesta al impulso $h[n]$ se utiliza en un sistema con submuestreo como se indica en la Figura P6.34-2.

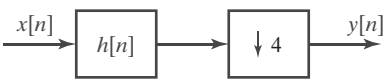


Figura P6.34-2

Dibuje el grafo de flujo de una implementación del sistema de la Figura P6.34-2 que requiera el mínimo número de multiplicadores por coeficientes distintos de cero y de la unidad. Puede utilizar elementos de retardo unidad, multiplicadores por coeficientes, sumadores y compresores (la multiplicación por cero o uno no requiere un multiplicador).

(c) Indique cuántas multiplicaciones por muestra de entrada y por muestra de salida requiere su sistema, dando una breve explicación.

6.35. Considere el sistema que se muestra en la Figura P6.35-1.

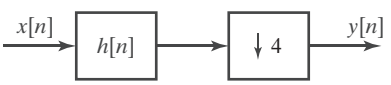


Figura P6.35-1

Se desea implementar este sistema utilizando la estructura polifásica que se muestra en la Figura P6.35-2.

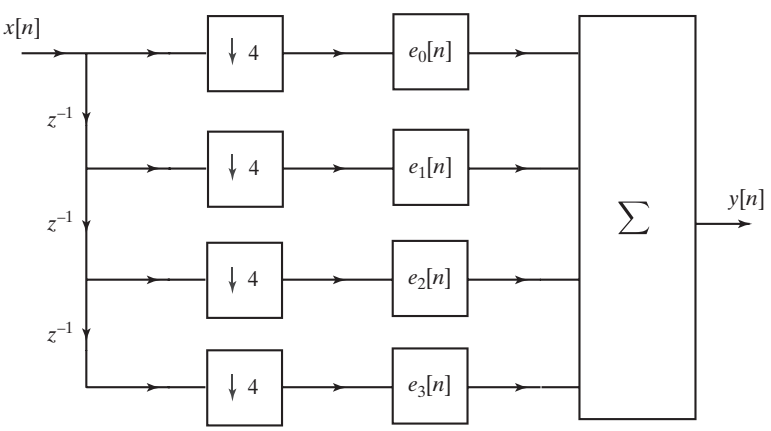


Figura P6.35-2 Estructura polifásica del sistema.

Sólo en los apartados (a) y (b), suponga que $h[n]$ está definida en la Figura P6.35-3.

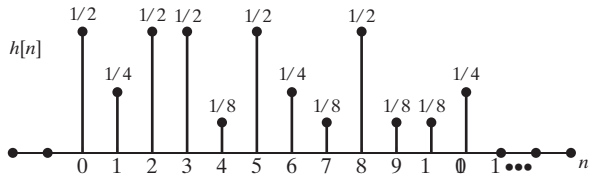


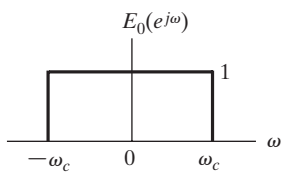
Figura P6.35-3

($h[n] = 0$ para todo $n < 0$ y $n \geq 12$).

(a) Proporcione las secuencias $e_0[n]$, $e_1[n]$, $e_2[n]$ y $e_3[n]$ que produzcan una implementación correcta.

(b) Se desea minimizar el número total de multiplicaciones por muestra de salida en la implementación de la estructura de la Figura P6.35-2. Utilizando los valores apropiados de $e_0[n]$, $e_1[n]$, $e_2[n]$ y $e_3[n]$ del apartado (a), determine el mínimo número de multiplicaciones por muestra de entrada en el sistema total. Explique su respuesta.

(c) En vez de utilizar las secuencias $e_0[n]$, $e_1[n]$, $e_2[n]$ y $e_3[n]$ identificadas en el apartado (a), suponga ahora que $E_0(e^{j\omega})$ y $E_2(e^{j\omega})$ las transformadas de Fourier en tiempo discreto de $e_0[n]$ y $e_2[n]$, respectivamente, son como se muestra en la Figura P6.35-4, y que $E_1(e^{j\omega}) = E_3(e^{j\omega}) = 0$.



$$E_2(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi r)$$

Figura P6.35-4

Dibuje y etiquete $H(e^{j\omega})$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

6.36. Considere un grafo de flujo general (denominado red A) formado por multiplicadores por coeficientes y elementos de retardo, como se muestra en la Figura P6.36-1. Si el sistema está inicialmente en reposo, su comportamiento queda completamente especificado por su respuesta al impulso $h[n]$. Se desea modificar el sistema para crear un nuevo grafo de flujo (que se denomina red A_1), cuya respuesta al impulso sea $h_1[n] = (-1)^n h[n]$.

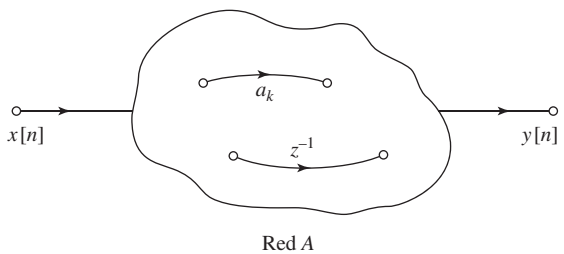


Figura P6.36-1

(a) Si $H(e^{j\omega})$ es como indica la Figura P6.36-2, dibuje $H_1(e^{j\omega})$.

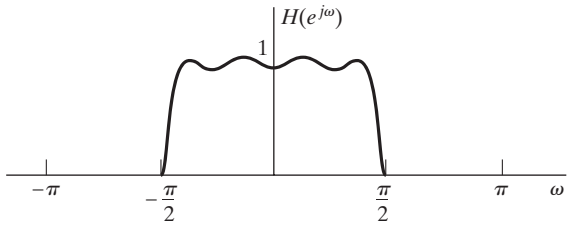


Figura P6.36-2

(b) Explique cómo modificar la red A mediante cambios simples en los multiplicadores por coeficientes y en los arcos de retardo para formar la nueva red A_1 con respuesta al impulso $h_1[n]$.

(c) Si la red A es como muestra la Figura P6.36-3, indique cómo modificarla mediante cambios simples *únicamente a los multiplicadores por coeficientes* de forma que la red resultante A_1 tenga como respuesta al impulso $h_1[n]$.

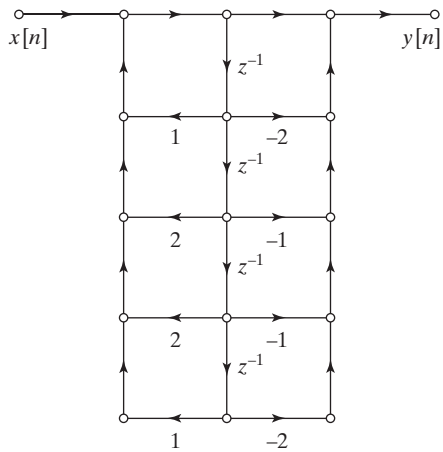


Figura P6.36-3

6.37. El grafo de flujo que se muestra en la Figura P6.37 es no computable, es decir, no es posible calcular la salida utilizando las ecuaciones en diferencias que representa debido a que contiene un bucle cerrado sin elementos de retardo.

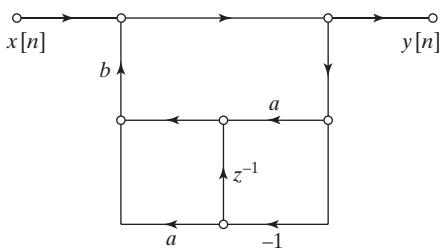


Figura P6.37

(a) Escriba las ecuaciones en diferencias del sistema de la Figura P6.37, y a partir de ellas, obtenga la función de transferencia de la red.

(b) A partir de la función de transferencia, obtenga un grafo de flujo que sea computable.

6.38. La respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo es

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le 7, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(a) Dibuje el grafo de flujo de una realización del sistema en forma directa no recursiva.
(b) Demuestre que la función de transferencia correspondiente se puede expresar como

$$H(z) = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

(c) Dibuje el grafo de flujo de una implementación de $H(z)$, expresada como indica el apartado (b), correspondiente a una cascada de un sistema FIR (numerador) y un sistema IIR (denominador).
(d) La realización del apartado (c), ¿es recursiva o no recursiva? El sistema completo ¿es FIR o IIR?
(e) Indique qué realización del sistema requiere:
(i) Más memoria (elementos de retardo)?
(ii) Más cálculos aritméticos (multiplicaciones y sumas por muestra de salida).

6.39. Considere un sistema FIR cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{15}(1 + \cos[(2\pi/15)(n - n_0)]), & 0 \le n \le 14, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Este sistema es un ejemplo de una clase de filtros conocida como filtros de muestreo en frecuencia. El Problema 6.51 presenta estos filtros con detalle. En este problema consideraremos sólo un caso específico.

(a) Dibuje la respuesta al impulso del sistema para los casos $n_0 = 0$ y $n_0 = 15/2$.
(b) Demuestre que la función de transferencia del sistema se puede expresar como

$$H(z) = (1 - z^{-15}) \cdot \frac{1}{15} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} e^{-j2\pi n_0/15}}{1 - e^{j2\pi/15} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} e^{j2\pi n_0/15}}{1 - e^{-j2\pi/15} z^{-1}} \right].$$

(c) Demuestre que si $n_0 = 15/2$, la respuesta en frecuencia del sistema se puede expresar como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{15} e^{-j\omega 7} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\omega 15/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}[(\omega - 2\pi/15)15/2]}{\operatorname{sen}[(\omega - 2\pi/15)/2]} \right.$$
$$\left. \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}[(\omega + 2\pi/15)15/2]}{\operatorname{sen}[(\omega + 2\pi/15)/2]} \right\}.$$

Utilice esta expresión para dibujar el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema para $n_0 = 15/2$. Obtenga una expresión similar para $n_0 = 0$. Dibuje la respuesta en amplitud para $n_0 = 0$. ¿Para qué valores de n_0 el sistema tiene fase lineal generalizada?
(d) Dibuje un grafo de flujo de señales correspondiente a una realización del sistema como una cascada de un sistema FIR con función de transferencia $1 - z^{-15}$ con una combinación en paralelo de sistemas IIR de primer y segundo orden.

6.40. Considere el sistema en tiempo discreto que muestra la Figura P6.40-1.

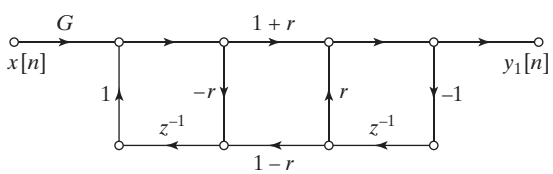


Figura P6.40-1

(a) Escriba el conjunto de ecuaciones en diferencias representado por el grafo de flujo de la Figura P6.40-1.

(b) Determine la función de transferencia $H_1(z) = Y_1(z)/X(z)$ del sistema de la Figura P6.40-2, y determine también los módulos y las fases de los polos de $H_1(z)$ en función de r para $-1 < r < 1$.

(c) La Figura P6.40-2 muestra un grafo de flujo diferente obtenido a partir del grafo de flujo de la Figura P6.40-1 moviendo los elementos de retardo al arco superior opuesto. ¿Cómo se relaciona la función de transferencia $H_2(z) = Y_2(z)/X(z)$ con $H_1(z)$?

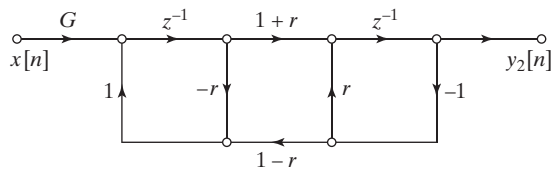


Figura P6.40-2

6.41. Los tres grafos de flujo de la Figura P6.41 son realizaciones equivalentes del mismo sistema lineal e invariante con el tiempo con dos entradas y dos salidas.

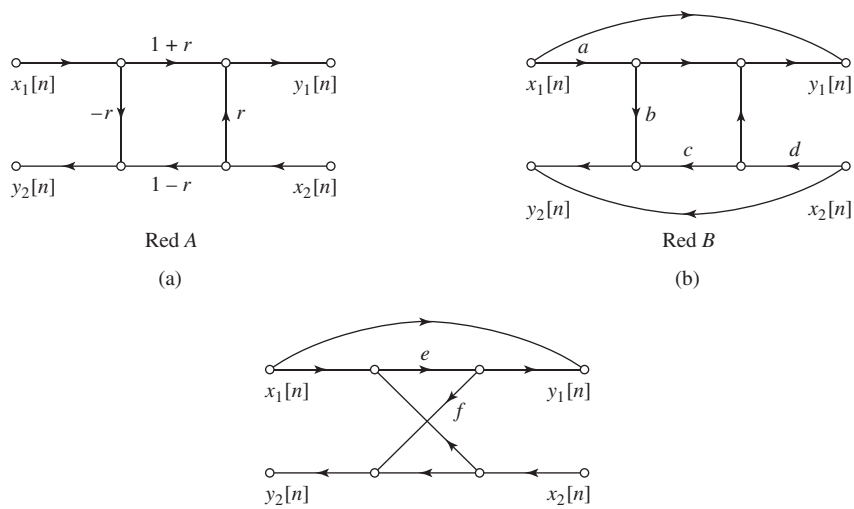


Figura P6.41

(a) Escriba la ecuación en diferencias de la red A.

(b) Obtenga los valores de los parámetros a, b, c y d de la red B en función del parámetro r de la red A de forma que los dos sistemas sean equivalentes.

(c) Obtenga los valores de los parámetros e y f de la red C en función del parámetro r de la red A de forma que los dos sistemas sean equivalentes.

(d) ¿Por qué podrían ser preferibles las redes B o C a la red A? ¿Qué posible ventaja podría tener la red A sobre la B o C?

6.42. Considere un sistema paso todo con función de transferencia

$$H(z) = -0{,}54\frac{1-(1/0{,}54)z^{-1}}{1-0{,}54z^{-1}}.$$

La Figura P6.42 muestra el grafo de flujo de una realización de este sistema.

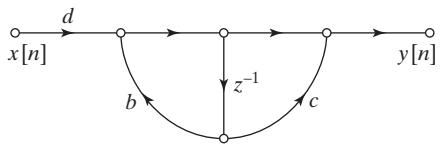


Figura P6.42

(a) Determine los coeficientes b, c y d de forma que el grafo de flujo de la Figura P6.42 sea una realización de $H(z)$.

(b) En una realización práctica de la red de la Figura P6.42, los coeficientes b, c y d se podrían cuantificar redondeando el valor exacto a la décima más cercana (por ejemplo, 0,54 se redondearía a 0,5 y 1,8518 se redondearía a 1,9) ¿Sería todavía el sistema resultante un sistema paso todo?

(c) La ecuación en diferencias que relaciona la entrada y la salida del sistema paso todo cuya función de transferencia es $H(z)$ se puede expresar como

$$y[n] = 0{,}54(y[n-1] - x[n]) + x[n-1].$$

Dibuje el grafo de flujo de una red que implemente dicha ecuación en diferencias utilizando dos elementos de retardo, pero que requiera sólo una multiplicación por una constante distinta de ± 1.

(d) Cuantificando los coeficientes ¿seguiría siendo la red del apartado (c) un sistema paso todo?

La principal desventaja de la realización del apartado (c) comparada con la del apartado (a) es que necesita dos elementos de retardo. Sin embargo, para sistemas de orden superior es necesario realizar una cascada de sistemas paso todo. Dadas N secciones paso todo en cascada es posible utilizar secciones paso todo con la forma determinada en al apartado (c) de forma que sólo se requieran $(N+1)$ elementos de retardo. Esto se puede hacer compartiendo elementos de retardo entre diferentes secciones.

(e) Considere el sistema paso todo cuya función de transferencia es

$$H(z) = \left(\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}\right).$$

Dibuje el grafo de flujo de una realización en "cascada" compuesta por dos secciones con la forma obtenida en el apartado (c) y con un elemento de retardo compartido entre las secciones. La red resultante deberá tener sólo tres elementos de retardo.

(f) Si se cuantifican los coeficientes a y b, ¿seguiría siendo la red del apartado (e) un sistema paso todo?

6.43. Todos los arcos de los grafos de flujo de señales de este problema tienen ganancia unidad a menos que se especifique lo contrario.

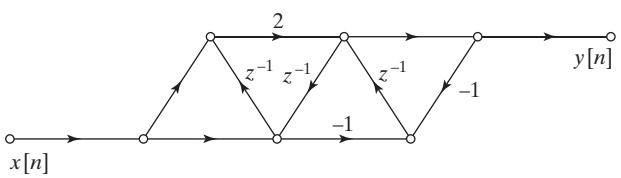


Figura P6.43-1

(a) El grafo de flujo de señales del sistema A, que se muestra en la Figura P6.43-1 representa un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal. ¿Es posible realizar la misma relación entrada-salida utilizando menos retardos? Si es posible, ¿cuál es el mínimo número de retardos necesario para realizar un sistema equivalente? Si no es posible, explicar por qué no.

(b) ¿Representa el sistema B, que se muestra en la Figura P6.43-2, la misma relación entrada–salida que el sistema A de la Figura P6.43-1? Explique claramente su respuesta.

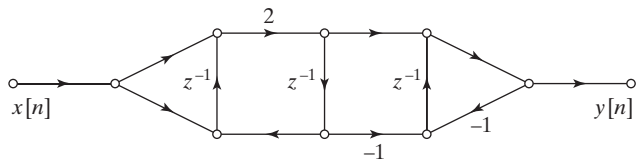


Figura P6.43-2

6.44. Considere un sistema paso todo cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

(a) Dibuje el grafo de flujo de señales del sistema en forma directa I. ¿Cuántos retardos y multiplicaciones son necesarias? (No cuente las multiplicaciones por ± 1.)

(b) Dibuje un grafo de flujo de señales del sistema que utilice un multiplicador. Minimice el número de retardos.

(c) Considere ahora otro sistema paso todo cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{(z^{-1} - \frac{1}{3})(z^{-1} - 2)}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

Determine y dibuje un grafo de flujo de señales de este sistema con dos multiplicadores y tres retardos.

6.45. Con aritmética de precisión infinita, los grafos de flujo que se muestran en la Figura P6.45 tienen la misma función de transferencia, pero con aritmética cuantificada en coma fija se comportan de forma diferente. Suponga que a y b son números reales y que $0 < a < 1$.

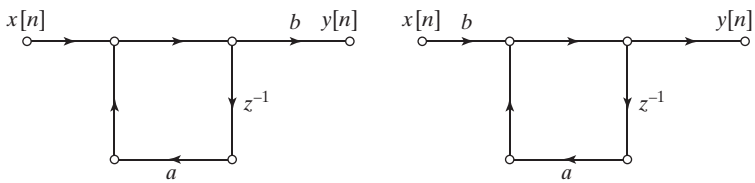


Figura P6.45

(a) Determine x_{max}, la amplitud máxima de las muestras de entrada de forma que se garantice que el máximo valor de la salida $y[n]$ de cualquiera de los dos sistemas es menor que uno.

(b) Suponga que los dos sistemas anteriores se implementan utilizando aritmética de coma fija en complemento a dos, y que en ambos casos los productos se redondean inmediatamente a $B+1$ bits (*antes* de que se realicen las sumas). Inserte fuentes de ruido de redondeo en las posiciones adecuadas de los diagramas anteriores para modelar el error de redondeo. Suponga que cada una de las fuentes de ruido insertadas tiene una potencia media igual a $\sigma_B^2 = 2^{-2B}/12$.

(c) Si los productos se redondean como se indica en el apartado (b), las salidas de los dos sistemas serán diferentes. Es decir, la salida del primer sistema será $y_1[n] = y[n] + f_1[n]$ y la salida del segundo sistema será $y_2[n] = y[n] + f_2[n]$, siendo $f_1[n]$ y $f_2[n]$ las salidas debidas a las fuentes de ruido. Determine la densidad espectral de potencia $\Phi_{f_1 f_1}(e^{j\omega})$ y $\Phi_{f_2 f_2}(e^{j\omega})$ del ruido de salida de ambos sistemas.

(d) Determine las potencias totales de ruido $\sigma_{f_1}^2$ y $\sigma_{f_2}^2$ a la salida de ambos sistemas.

6.46. Se desea implementar un sistema paso todo con aritmética de coma fija. Si la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{(z^{-1} - a^*)(z^{-1} - a)}{(1 - az^{-1})(1 - a^* z^{-1})}$$

siendo $a = re^{j\theta}$.

(a) Dibuje el grafo de flujo de señales de las implementaciones en forma directa I y forma directa II de este sistema como un sistema de segundo orden utilizando solamente coeficientes reales.

(b) Suponiendo que cada producto se redondea *antes* de realizar las sumas, inserte fuentes de ruido apropiadas en las redes dibujadas en el apartado (a), combinando las fuentes de ruido donde sea posible, e indicando la potencia de cada fuente de ruido en función de σ_B^2, la potencia de una única fuente de ruido de redondeo.

(c) Rodee con una circunferencia los nodos de sus diagramas de red donde puede producirse desbordamiento.

(d) Especifique si la potencia del ruido de salida del sistema en forma directa II es independiente o no de r, mientras que la potencia del ruido de salida del sistema en forma directa cuando $r \to 1$. Proporcione un argumento convincente para sostener su respuesta. Intente responder a la pregunta *sin* calcular la potencia de ruido de salida de cada sistema. Por supuesto, ese cálculo resolvería la cuestión, pero debe ser capaz de responder sin calcular dicha potencia.

(e) Determine ahora la potencia del ruido de salida de ambos sistemas.

6.47. Suponga que a en los grafos de flujo de la Figura P6.47 es un número real y que $0 < a < 1$. Nótese que bajo aritmética de precisión infinita, ambos sistemas son equivalentes.

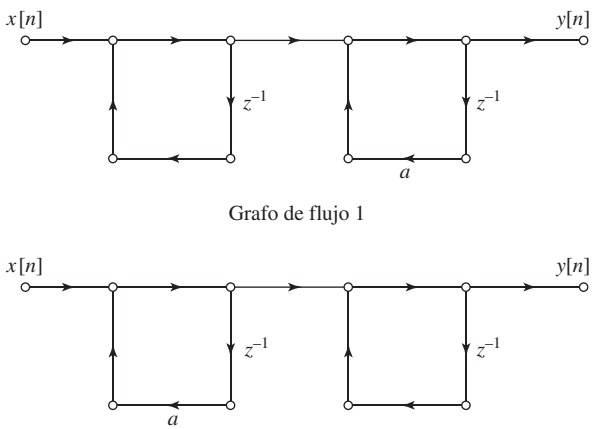


Figura P6.47

(a) Suponga que los dos sistemas se implementan con aritmética de coma fija en complemento a dos, y que en ambos casos los productos se redondean inmediatamente (*antes* de realizar ninguna suma). Inserte fuentes de ruido de redondeo en las posiciones apropiadas de ambos grafos de flujo para modelar el error de redondeo (las multiplicaciones por la unidad no introducen ruido). Suponga que cada una de las fuentes de ruido insertadas tiene una potencia media igual a $\sigma_B^2 = 2^{-2B}/12$.

(b) Si los productos se redondean como se indica en el apartado (a), las salidas de los dos sistemas serán diferentes. Es decir, la salida del primer sistema será $y_1[n] = y[n] + f_1[n]$ y la salida del segundo sistema será $y_2[n] = y[n] + f_2[n]$, siendo $f_1[n]$ y $f_2[n]$ las salidas debidas a las fuentes de ruido. Determine la densidad espectral de potencia $\Phi_{f_1 f_1}(e^{j\omega})$ y $\Phi_{f_2 f_2}(e^{j\omega})$ del ruido de salida de ambos sistemas. Determine también la potencia de ruido a la salida del grafo de flujo 1. Es decir, determine $\sigma_{f_1}^2$.

(c) Sin calcular realmente la potencia del ruido de salida del grafo de flujo 2, ¿podría determinar qué sistema tiene mayor potencia total de ruido a la salida? Proporcione una breve explicación de su respuesta.

6.48. Considere el grafo de flujo de la forma paralelo que se muestra en la Figura P6.48.

(a) Suponga que los dos sistemas se implementan con aritmética de coma fija en complemento a dos, y que en ambos casos los productos se redondean inmediatamente (*antes* de realizar ninguna suma). Inserte

fuentes de ruido de redondeo en las posiciones apropiadas de ambos grafos de flujo para modelar el error de redondeo. Indique el tamaño (potencia media) de cada fuente de ruido en función de σ_B^2, la potencia media de una operación de redondeo con $(B+1)$ bits.

(b) Si los productos se redondean como se indica en el apartado (a), la salida se puede representar como $\hat{y}[n] = y[n] + f[n]$ siendo $y[n]$ la salida debida únicamente a la actuación de $x[n]$ y $f[n]$ la potencia total debida a todas las fuentes de ruido que actúan independientemente. Determine la densidad espectral de potencia del ruido de salida $\Phi_{ff}(e^{j\omega})$.

(c) Determine también la potencia total de ruido σ_f^2 de la componente de ruido a la salida.

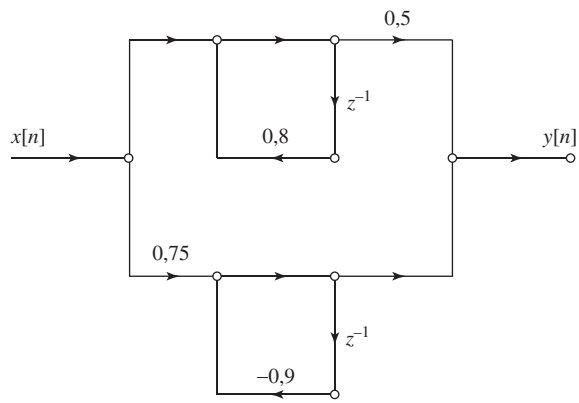


Figura P6.48

6.49. Considere el sistema que se muestra en la Figura P6.49, que consiste en un conversor A/D de 16 bits cuya salida es la entrada de un filtro digital FIR implementado con aritmética de coma fija con 16 bits.

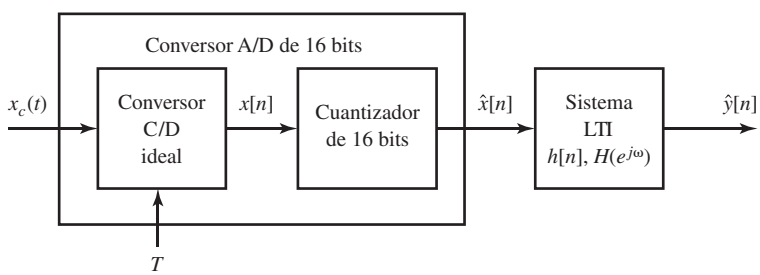


Figura P6.49

La respuesta al impulso del filtro digital es

$$h[n] = -0{,}375\delta[n] + 0{,}75\delta[n-1] - 0{,}375\delta[n-2].$$

Este sistema se implementa utilizando aritmética en complemento a dos con 16 bits. Los productos se redondean a 16 bits *antes* de ser acumulados para producir la salida. Se va a utilizar el modelo lineal de ruido para analizar este sistema, por lo que se define $\hat{x}[n] = x[n] + e[n]$ y $\hat{y}[n] = y[n] + f[n]$, siendo $e[n]$ el error de cuantificación que introduce el conversor A/D y $f[n]$ el ruido *total* de cuantificación a la salida del filtro.

(a) Determine la magnitud máxima de $\hat{x}[n]$ de forma que posiblemente no ocurra desbordamiento al implementar el filtro digital. Es decir, determine $x_{\max}$ tal que $\hat{y}[n] < 1$ para todo $-\infty < n < \infty$ cuando $\hat{x}[n] < x_{\max}$ para todo $-\infty < n < \infty$.

(b) Dibuje el modelo lineal de ruido del sistema completo. (incluyendo el modelo lineal del conversor A/D). Incluya un grafo de flujo detallado del filtro digital incluyendo todas las fuentes de ruido debido a la cuantificación.

(c) Determine la potencia total de ruido a la salida. Denomínela σ_f^2.

(d) Determine la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del filtro. Es decir, determine $\Phi_{ff}(e^{j\omega})$. Dibuje su resultado.

Problemas de ampliación

6.50. En este problema consideramos la implementación de un filtro causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{(1-0{,}63z^{-1})(1-0{,}83z^{-1})} = \frac{1}{1-1{,}46z^{-1}+0{,}5229z^{-2}}$$

Este sistema se va a implementar utilizando aritmética con redondeo en complemento a dos con $B+1$ bits. Los productos se redondean antes de realizar las sumas. La entrada al sistema es un proceso aleatorio estacionario, blanco y de media cero, con valores distribuidos uniformemente entre $-x_{\max}$ y $+x_{\max}$.

(a) Dibuje el grafo de flujo de la implementación en forma directa del filtro, redondeando todos los coeficientes de los multiplicadores a la décima más cercana.

(b) Dibuje el grafo de flujo de una implementación de este sistema como una combinación en cascada de dos sistemas de primer orden, redondeando todos los coeficientes de los multiplicadores a la décima más cercana.

(c) Sólo una de las implementaciones de los apartados (a) y (b) es utilizable. ¿Cuál? Explique su respuesta.

(d) Para prevenir que se produzca desbordamiento en el nodo de salida, debemos escoger cuidadosamente el parámetro $x_{\max}$. Para la implementación seleccionada en el apartado (c), determine el valor de $x_{\max}$ que garantiza que la salida permanecerá entre -1 y 1. (Ignore cualquier desbordamiento potencial en nodos que no sean el de salida.)

(e) Vuelva a dibujar el grafo de flujo seleccionado en el apartado (c), incluyendo esta vez los modelos linealizados de ruido que representan el error de cuantificación por redondeo.

(f) Tanto si se escogió en el apartado (c) la implementación en forma directa o en cascada, todavía existe una alternativa más de diseño:

(I) Si se escogió la forma directa, se puede utilizar también la forma traspuesta.

(II) Si se escogió la forma en cascada, se puede implementar en primer lugar el polo más grande o el más pequeño.

Para el sistema elegido en el apartado (c), ¿qué alternativa (si existe) tiene menor potencia de ruido de cuantificación a la salida? Observe que no es necesario calcular explícitamente la potencia total del ruido de cuantificación a la salida, sino que debe ser posible justificar la respuesta después de algo de análisis.

6.51. En este problema desarrollaremos algunas propiedades de una clase de sistemas en tiempo discreto denominada filtros de muestreo en frecuencia. Esta clase de filtros tiene funciones de transferencia de la forma

$$H(z) = (1-z^{-N}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}[k]/N}{1-z_k z^{-1}},$$

siendo $z_k = e^{j(2\pi/N)k}$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

(a) Las funciones de transferencia con la forma de $H(z)$ se pueden implementar mediante una cascada de sistemas FIR cuya función de transferencia es $(1-z^{-N})$ con una combinación en paralelo de sistemas IIR de primer orden. Dibuje el grafo de flujo de señales de una realización de ese tipo.

(b) Demuestre que $H(z)$ es un polinomio de grado $(N-1)$ en z^{-1}. Para ello, es necesario demostrar que $H(z)$ no tiene polos, excepto en $z=0$, y que no tiene potencias de z^{-1} mayores que $(N-1)$. ¿Qué implican estas condiciones sobre la respuesta al impulso del sistema?

(c) Demuestre que la respuesta al impulso está dada por la expresión

$$h[n] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \right) (u[n] - u[n-N]).$$

Sugerencia: obtenga las respuestas al impulso de las partes FIR e IIR del sistema y convoluciónelas para obtener la respuesta al impulso completa.

(d) Utilice la regla de l'Hôpital para demostrar que

$$H(z_m) = H(e^{j(2\pi/N)m}) = \tilde{H}[m], \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1;$$

es decir, demuestre que las constantes $\tilde{H}[m]$ son muestras de la respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{j\omega})$, en las frecuencias equiespaciadas $\omega_m = (2\pi/N)m$ para $m = 0, 1, \ldots, N-1$. Esta propiedad es la causa del nombre de esta clase de sistemas FIR.

(e) En general, tanto los polos z_k de la parte IIR como las muestras de la respuesta en frecuencia $\tilde{H}[k]$ serán números complejos. Sin embargo, si $h[n]$ es real, se puede obtener una realización que utilice sólo números reales. Demuestre concretamente que si $h[n]$ es real y N es un entero par, $H(z)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} H(z) = (1 - z^{-N}) \Bigg\{ & \frac{H(1)/N}{1 - z^{-1}} + \frac{H(-1)/N}{1 + z^{-1}} \\ & + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \frac{2|H(e^{j(2\pi/N)k})|}{N} \cdot \frac{\cos[\theta(2\pi k/N)] - z^{-1}\cos[\theta(2\pi k/N) - 2\pi k/N]}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}} \Bigg\}, \end{aligned}$$

siendo $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$. Dibuje la representación mediante el grafo de flujo de señales del sistema cuando $N = 16$ y $H(e^{j\omega_k}) = 0$ para $k = 3, 4, \ldots, 14$.

6.52. En el Capítulo 4 demostramos que en general, la frecuencia de muestreo de una señal en tiempo discreto se puede reducir mediante una combinación de filtrado lineal y compresión temporal. La Figura P6.52 muestra el diagrama de bloques de un sistema de diezmado M a 1 que se puede usar para reducir la frecuencia de muestreo en un factor M. De acuerdo al modelo, el filtro lineal funciona a la frecuencia de muestreo alta. Sin embargo, si M es grande, la mayoría de las muestras de salida del filtro serán descartadas por el compresor. En algunos casos son posibles realizaciones más eficientes.

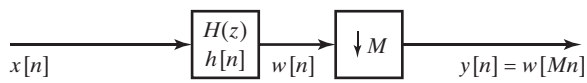


Figura P6.52

(a) Suponga que el filtro es un sistema FIR cuya respuesta al impulso es tal que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > 10$. Dibuje el sistema de la Figura P6.52, pero sustituya el filtro $h[n]$ con un grafo de flujo de señales equivalente basado en la información dada. Nótese que no es posible realizar un compresor M a 1 utilizando un grafo de flujo de señales, por lo que debe dejarse como una caja, tal como se indica en la Figura P6.52.

(b) Nótese que algunas de las operaciones de los arcos se pueden conmutar con la operación de compresión. Utilizando este hecho, dibuje el grafo de flujo de una realización más eficiente del sistema del apartado (a). ¿Por qué factor se ha disminuido el número total de operaciones necesario para obtener la salida $y[n]$?

(c) Suponga ahora que el filtro de la Figura P6.52 tiene como función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \tfrac{1}{2}.$$

Dibuje el grafo de flujo de la realización en forma directa del sistema completo de la figura. ¿Se puede reducir el número de cálculos necesario para obtener cada muestra de salida con este sistema para realizar el filtro lineal? Si es así, ¿por qué factor?

(d) (d) Finalmente, suponga que el filtro de la Figura P6.38-1 tiene como función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \tfrac{1}{2}.$$

Dibuje el grafo de flujo del sistema completo de la figura, utilizando las siguientes formas para realizar el filtro lineal:

(I) Forma directa I
(II) Forma directa II
(III) Forma directa I traspuesta.
(IV) Forma directa II traspuesta.

¿Con cuál de las cuatro formas se puede realizar el sistema de la Figura P6.52 de forma más eficiente conmutando operaciones con el compresor?

6.53. La producción de voz se puede modelar mediante un sistema lineal que representa la cavidad bucal, excitada por impulsos de aire que se liberan a través de las cuerdas vocales en vibración. Una posible forma de realizar síntesis de voz representa la cavidad bucal como una conexión de tubos acústicos cilíndricos de la misma longitud pero con diferente área de la sección cruzada, tal como se muestra en la Figura P6.53. Suponga que se desea simular el sistema en función de una velocidad volumétrica que represente el flujo de aire. La entrada se acopla al tracto vocal a través de una pequeña constricción, las cuerdas vocales. Suponga que la entrada se representa por cambios en la velocidad volumétrica en el extremo izquierdo, pero que la condición de contorno de las ondas que viajan al extremo izquierdo es que la velocidad volumétrica neta debe ser cero. Esto es análogo a una línea de transmisión eléctrica excitada por una fuente de corriente en un extremo y con un circuito abierto en el otro. La corriente en la línea de transmisión es análoga a la velocidad volumétrica en el tubo acústico, y la tensión es análoga a la presión acústica. La salida del tubo acústico es la velocidad volumétrica en el extremo derecho. Suponga que cada sección es una línea de transmisión acústica sin pérdidas.

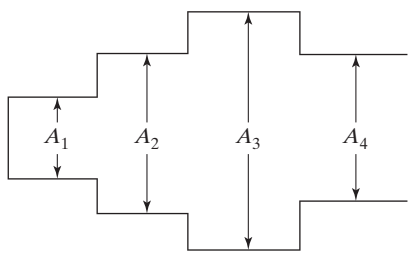


Figura P6.53

En cada interfaz entre secciones, se transmite a la sección siguiente una onda progresiva f^+ con un coeficiente y se refleja una onda regresiva f^- con un coeficiente diferente. Análogamente, una onda regresiva f^- que llega a una interfaz se transmite con un coeficiente y se refleja con un coeficiente diferente. Concretamente, si consideramos una onda progresiva f^+ en un tubo con sección cruzada de área A_1 que llega a una interfaz con un tubo con sección cruzada de área A_2, la onda progresiva que se transmite es $(1+r)f^+$ y la que se refleja es rf^+, siendo

$$r = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}.$$

Considere que la longitud de cada sección es de 3,4 cm, y que la velocidad del sonido en el aire es de 34.000 cm/s. Dibuje un grafo de flujo que implemente el modelo de cuatro secciones de la Figura P6.53, donde la salida se muestrea a 20.000 muestras/s.

A pesar de la larga introducción, se trata de un problema razonablemente sencillo. Si encuentra dificultades al pensar utilizando tubos acústicos, piense en términos de secciones de líneas de transmisión con diferentes impedancias características. Como en el caso de líneas de transmisión, es difícil expresar la respuesta al impulso en forma cerrada. Por tanto, dibuje el grafo de flujo partiendo directamente de las consideraciones físicas, en términos de pulsos que viajan hacia delante y hacia atrás en cada sección.

6.54. Al modelar los efectos del redondeo y del truncamiento en la realización de filtros digitales, las variables cuantificadas se representan como

$$\hat{x}[n] = Q[x[n]] = x[n] + e[n],$$

donde $Q[\cdot]$ indica redondeo o truncamiento con $(B+1)$ bits y $e[n]$ es el *error de cuantificación*. Se supone que el ruido de cuantificación es una secuencia de ruido blanco estacionario tal que

$$\mathscr{E}\{(e[n]-m_e)(e[n+m]-m_e)\} = \sigma_e^2\,\delta[m]$$

y además las amplitudes de la secuencia de ruido tienen distribución uniforme en el paso de cuantificación $\Delta = 2^{-B}$. Las funciones de densidad de probabilidad de primer orden para el caso de redondeo y truncamiento se muestran en las Figuras P6.54(a) y (b), respectivamente.

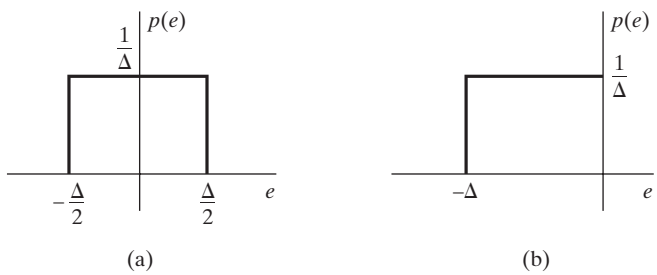


Figura P6.54

(a) Calcule la media m_e y la varianza σ_e^2 del ruido debido al redondeo.

(b) Calcule la media m_e y la varianza σ_e^2 del ruido debido al truncamiento.

6.55. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo con dos entradas, como se muestra en la Figura P6.55. Sean $h_1[n]$ y $h_2[n]$ las respuestas al impulso desde los nodos 1 y 2, respectivamente, hasta la salida, el nodo 3. Demuestre que si $x_1[n]$ y $x_2[n]$ están incorreladas, sus correspondientes salidas $y_1[n]$ e $y_2[n]$ estarán también incorreladas.

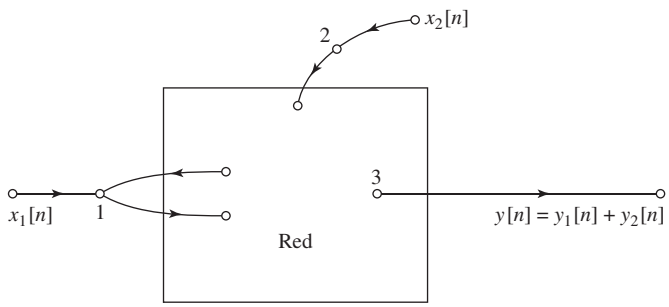


Figura P6.55

6.56. Los grafos de flujo de la Figura P6.56 tienen la misma función de transferencia. Suponga que todos los cálculos de los sistemas de la figura se realizan utilizando aritmética en coma fija de $(B+1)$ bits. Suponga también que todos los productos se redondean a $(B+1)$ bits *antes* de realizar las sumas.

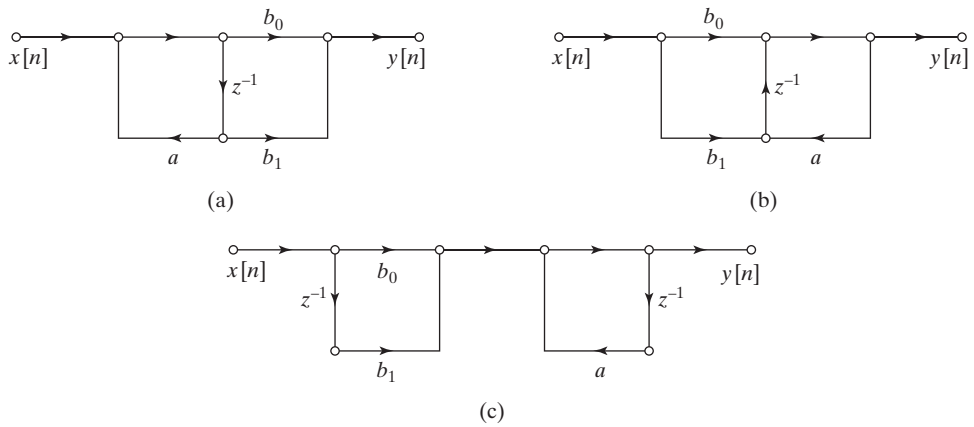


Figura P6.56

(a) Dibuje los modelos lineales de ruido para cada uno de los sistemas de la Figura P6.56.

(b) Dos de los grafos de flujo de la Figura P6.56 tienen la *misma* potencia total de ruido de salida debido al redondeo aritmético. Sin calcular explícitamente la potencia de ruido de salida, determine cuáles son.

(c) Determine la potencia de salida de los tres grafos de flujo de la Figura P6.56. Exprese la respuesta en función de σ_B^2, la potencia de ruido de redondeo de una sola fuente.

6.57. La Figura P6.57-1 muestra el grafo de flujo de un sistema de primer orden.

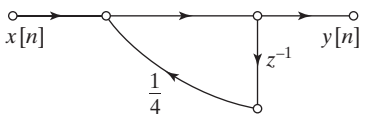


Figura P6.57

(a) Suponiendo que se utiliza aritmética de precisión infinita, calcule la respuesta del sistema a la entrada

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

¿Cuál es la respuesta del sistema para n grande?

Suponga ahora que el sistema se realiza con aritmética de coma fija. Los coeficientes de todas las variables de la red se representan en notación de módulo y signo con registros de cinco bits. Es decir, todos los números se consideran como fracciones con signo de la forma

$$b_0 b_1 b_2 b_3 b_4,$$

donde b_0, b_1, b_2, b_3 y b_4 son 0 ó 1 y

$$|\text{Valor del registro}| = b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + b_3 2^{-3} + b_4 2^{-4}.$$

Si $b_0 = 0$, la fracción es positiva, y si $b_0 = 1$, la fracción es negativa. El resultado de la multiplicación del valor de una secuencia por un coeficiente se trunca antes de realizar la suma. Es decir, sólo se retiene el bit de signo y los bits más significativos.

(b) Calcule la respuesta del sistema cuantificado a la entrada del apartado (a), y dibuje las respuestas del sistema cuantificado y no cuantificado para $0 \leq n \leq 5$. Compare las respuestas para n grande.

(c) Considere ahora el sistema que se muestra en la Figura P6.57-2, donde

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Repita los apartados (a) y (b) para este sistema y esa entrada.

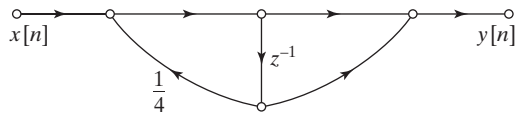


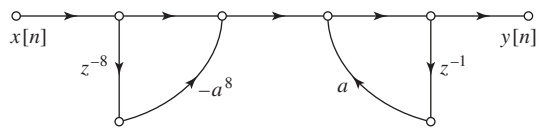
Figura P6.57

6.58. Un sistema lineal, invariante con el tiempo y causal tiene como función de transferencia

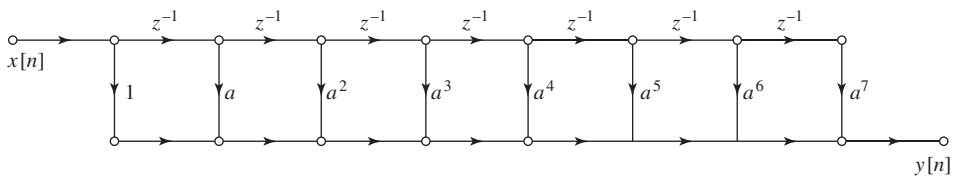
$$H(z) = \frac{1}{1 - 1{,}04z^{-1} + 0{,}98z^{-2}}.$$

(a) ¿Es el sistema estable?
(b) Si los coeficientes se redondean a la décima más cercana, ¿sería estable el sistema resultante?

6.59. Cuando se realizan con aritmética de precisión infinita, los grafos de flujo de la Figura P6.59 tienen la misma función de transferencia.



Red 1



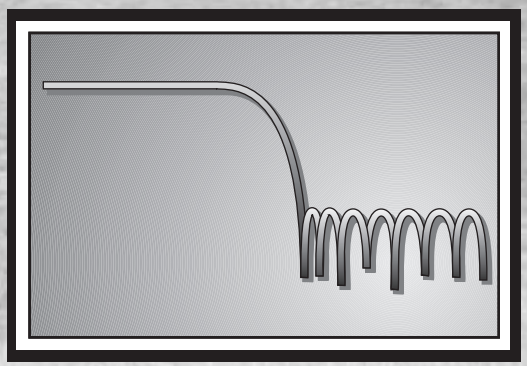
Red 2

Figura P6.59

(a) Demuestre que los dos sistemas tienen la misma función de transferencia global desde la entrada $x[n]$ hasta la salida $y[n]$.
(b) Suponga que los sistemas anteriores se realizan con aritmética de coma fija en complemento a dos y que los productos se redondean *antes* de realizar las sumas. Dibuje los grafos de flujo de señales que insertan las fuentes de ruido de redondeo en las posiciones adecuadas de la Figura P6.59.
(c) Rodee con círculos los nodos de la figura realizada en el apartado (b) donde pueda producirse desbordamiento.
(d) Determine el máximo tamaño de las muestras de la entrada de forma que en ninguno de los dos sistemas pueda producirse desbordamiento.
(e) Suponga que $|a| < 1$. Obtenga la potencia total de ruido de salida de cada sistema y determine el máximo valor de $|a|$ para que la Red 1 tenga menor potencia de ruido de salida que la Red 2.

7

Técnicas de diseño de filtros



7.0. INTRODUCCIÓN

Los filtros son una clase particularmente importante de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Estrictamente hablando, el término *filtro selectivo en frecuencia* nos sugiere un sistema que deja pasar ciertas componentes de frecuencia y rechaza completamente otras, pero en un contexto más amplio cualquier sistema que modifique ciertas frecuencias con respecto a otras se denomina también filtro. Aunque el objetivo principal de este capítulo es el diseño de filtros selectivos en frecuencia, algunas técnicas tienen una aplicación más amplia. Nos centraremos en el diseño de filtros causales, aunque en muchos casos no es necesario restringirse a este tipo de filtros. Muy a menudo se diseñan y realizan filtros no causales modificando diseños de filtros causales.

El diseño de filtros en tiempo discreto se refiere a la determinación de los parámetros de una función de transferencia o de una ecuación en diferencias que se aproxime a una respuesta al impulso o a una respuesta en frecuencia deseadas, dentro de unas tolerancias especificadas. Como se expuso en el Capítulo 2, los sistemas en tiempo discreto implementados mediante ecuaciones en diferencias se puede clasificar en dos categorías básicas: sistemas con respuesta al impulso infinita (IIR) y sistemas con respuesta al impulso finita (FIR). El diseño de filtros IIR requiere la obtención de una función de transferencia aproximada con la forma de una función racional de z. Por otra parte, el diseño de filtros FIR requiere la aproximación de polinomios. Las técnicas de diseño comúnmente utilizadas para esas dos clases toman diferentes formas. Cuando los fitros en tiempo discreto comenzaron a ser de uso común, sus diseños se basaban en la correspondencia de diseños de filtros en tiempo continuo bien conocidos y formulados mediante técnicas como la invarianza al impulso y la transformación bilineal, que presentaremos en las Secciones 7.2.1 y 7.2.2. Estas técnicas siempre dan como resultado filtros IIR y siguen siendo el núcleo del diseño de filtros IIR en tiempo discreto selectivos en frecuencia. Por el contrario, como no existe un cuerpo de doctrina sobre el diseño de filtros FIR en tiempo continuo que se pudiera adaptar al caso de tiempo discreto, las técnicas de diseño en este caso surgieron sólo cuando este tipo de filtros empezó a ser importante en sistemas prácticos. Las técnicas de diseño de filtros FIR más comunes son el uso de

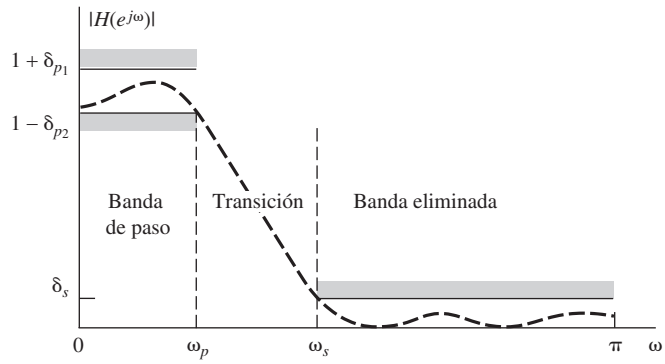


Figura 7.1 Esquema de tolerancia de un filtro paso bajo.

enventanado, que presentaremos en la Sección 7.7 y el conjunto de algoritmos iterativos expuestos en la Sección 7.7, que se conocen colectivamente como algoritmo de Parks–McClellan.

El diseño de filtros requiere realizar las siguientes etapas: especificación de las propiedades deseadas del sistema, aproximación de las especificaciones mediante un sistema causal en tiempo discreto y realización del sistema. Aunque estos tres pasos ciertamente no son independientes, nos centraremos fundamentalmente en el segundo. El primero es altamente dependiente de la aplicación y el tercero de la tecnología utilizada para la realización. En términos prácticos, el filtro deseado se realiza utilizando hardware digital y se emplea a menudo para filtrar una señal que proviene de una señal en tiempo continuo mediante muestreo periódico seguido por una conversión analógico-digital. Por este motivo se suelen denominar *filtros digitales* a los filtros en tiempo discreto, incluso aunque las técnicas de diseño que se utilizan se relacionan en la mayoría de los casos únicamente con la naturaleza de tiempo discreto de las señales y los sistemas que intervienen. Los aspectos relacionados con la cuantificación de los coeficientes del filtro y de las señales, inherentes a las representaciones digitales, se manejan separadamente, como ya se comentó en el Capítulo 6.

En este capítulo vamos a presentar un amplio conjunto de métodos para diseñar tanto filtros IIR como filtros FIR. En cualquier contexto práctico, aparecen una variedad de compromisos entre estas dos clases de filtros y deben considerarse muchos factores a la hora de elegir un determinado procedimiento de diseño o clase de filtros. Nuestro objetivo en este capítulo es presentar e ilustrar las técnicas de diseño más ampliamente utilizadas y comentar algunos de los compromisos que aparecen. Los proyectos y problemas del sitio web del libro proporcionan una oportunidad de explorar con mayor profudidad las características de los diversos tipos y clases de filtros y los aspectos y compromisos relacionados.

7.1. ESPECIFICACIONES DEL FILTRO

En esta presentación de técnicas de diseño de filtros, nos centraremos principalmente en los filtros paso bajo selectivos en frecuencia, aunque muchas técnicas y ejemplos se pueden generalizar a otros tipos de filtros. Además, como se verá en la Sección 7.4, los diseños de filtros paso bajo se transforman fácilmente en otros tipos de filtros selectivos en frecuencia.

La Figura 7.1 muestra la representación típica de los límites de tolerancia asociados con la aproximación a un filtro paso bajo en tiempo discreto que idealmente tiene ganancia unidad en la banda de paso y ganancia cero en la banda eliminada. El dibujo de la Figura 7.1 se denomina “esquema de tolerancia”.

Como la aproximación no puede tener una transición abrupta de la banda de paso a la banda eliminada, se permite la existencia de una región de transición desde la frecuencia límite de la banda de paso ω_p hasta el comienzo de la banda eliminada ω_s. En esa región la ganancia del filtro no tiene restricciones.

Dependiendo en parte de la aplicación, y también por razones históricas de las técnicas de diseño, los límites de tolerancia en la banda de paso varían simétricamente alrededor de la ganancia unidad, en cuyo caso $\delta_{p_1} = \delta_{p_2}$, o bien la banda de paso puede tener la restricción de ganancia máxima unidad, en cuyo caso $\delta_{p_1} = 0$.

Muchos filtros utilizados en la práctica se especifican mediante un esquema de tolerancia similar al presentado en el Ejemplo 7.1, sin otras restricciones en la respuesta de fase que las impuestas directamente por los requisitos de estabilidad y causalidad. Por ejemplo, los polos de la función de transferencia de un filtro IIR estable deben estar en el interior de la circunferencia unidad. Al diseñar filtros FIR, se impone a menudo la restricción de fase lineal. Esto elimina a la fase de la señal de su consideración en el proceso de diseño.

Ejemplo 7.1 Determinación de las especificaciones de un filtro en tiempo discreto

Consideremos un filtro paso bajo en tiempo discreto que se va a utilizar para filtrar una señal en tiempo continuo empleando la configuración básica de la Figura 7.2. Como se demostró en la Sección 4.4, si se usa un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo como el de la Figura 7.2, la entrada es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta como para evitar el solapamiento, el sistema completo se comporta como un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \tag{7.1a}$$

En estos casos es inmediato convertir las especificaciones del filtro efectivo en tiempo continuo en especificaciones del filtro en tiempo discreto mediante la relación $\omega = \Omega T$. Es decir, $H(e^{j\omega})$ se especifica sólo en un periodo mediante la ecuación

$$H(e^{j\omega}) = H_{\text{eff}}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi. \tag{7.1b}$$

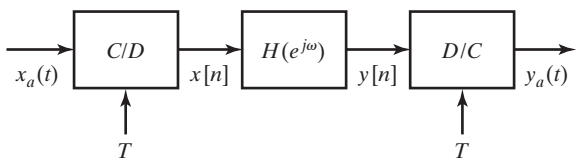


Figura 7.2 Sistema básico para el filtrado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo.

En este ejemplo, el sistema completo de la Figura 7.2 debe tener las siguientes propiedades cuando la frecuencia de muestreo es de 10^4 muestras/s ($T = 10^{-4}$ s):

1. La ganancia $|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ debe diferir de la unidad menos de un factor de $\pm 0{,}01$ en la banda $0 \leq \Omega \leq 2\pi(2000)$.
2. La ganancia no debe ser mayor que 0,001 en la banda de frecuencias $2\pi(3000) \leq \Omega$.

Como la Ecuación (7.1a) es una correspondencia entre las frecuencias de tiempo continuo y de tiempo discreto, sólo afecta a las frecuencias límite de la banda de paso y de la banda eliminada y no afecta a los límites de tolerancia del módulo de la respuesta en frecuencia. En este ejemplo concreto, los parámetros serían

$$\begin{aligned}\delta_{p_1} = \delta_{p_2} &= 0{,}01\\ \delta_s &= 0{,}001\\ \omega_p &= 0{,}4\pi \text{ radianes}\\ \omega_s &= 0{,}6\pi \text{ radianes.}\end{aligned}$$

Por tanto, en este caso, la ganancia ideal en la banda de paso es igual a la unidad y puede variar entre $(1+\delta_{p_1})$ y $(1-\delta_{p_2})$, y la ganancia en la banda eliminada varía entre 0 y δ_s. Es habitual expresar las máximas ganancias en la banda de paso y en la banda eliminada en decibelios. En este ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{ganancia ideal de la banda de paso en decibelios} &= 20\log_{10}(1) &&= 0 \text{ dB}\\ \text{ganancia máxima de la banda de paso en decibelios} &= 20\log_{10}(1{,}01) &&= 0{,}0864 \text{ dB}\\ \text{ganancia mínima en el límite de la banda de paso en decibelios} &= 20\log_{10}(0{,}99) &&= -0{,}873 \text{ dB}\\ \text{ganancia máxima de la banda de eliminada en decibelios} &= 20\log_{10}(0{,}001) &&= -60 \text{ dB}\end{aligned}$$

El Ejemplo 7.1 está situado en el contexto de utilizar un filtro en tiempo discreto para procesar una señal en tiempo continuo tras un muestreo periódico. Hay muchas aplicaciones en las que hay que filtrar una señal en tiempo discreto que no se ha obtenido partiendo de una señal en tiempo continuo, y existen además otras formas diferentes del muestreo periódico para representar señales en tiempo continuo en forma de secuencias. Además, en la mayor parte de las técnicas de diseño que vamos a presentar, el muestreo periódico no desempeña ningún papel en el procedimiento de aproximación. Por estas razones, adoptaremos el punto de vista de que el diseño de filtros comienza a partir de un conjunto de especificaciones expresadas en función de la variable de frecuencia en tiempo discreto ω. Dependiendo de la aplicación o contexto específicos, esas especificaciones podrán o no haberse obtenido en relación con un entorno de filtrado como el que muestra la Figura 7.2.

7.2. DISEÑO DE FILTROS IIR EN TIEMPO DISCRETO A PARTIR DE FILTROS EN TIEMPO CONTINUO

Históricamente, con el surgimiento del campo del tratamiento digital de señales, las técnicas de diseño de filtros IIR en tiempo discreto se basaron en la transformación de un filtro en tiempo continuo en un filtro en tiempo discreto que cumpla las especificaciones preestablecidas. Esta solución fue y todavía es razonable por varios motivos:

- El arte del diseño de filtros IIR en tiempo continuo está muy avanzado, y como se pueden obtener resultados útiles, es ventajoso utilizar los procedimientos de diseño que ya se han desarrollado para los filtros en tiempo continuo.
- Muchos métodos útiles de diseño de filtros IIR en tiempo continuo dan como resultado fórmulas de diseño simples en forma cerrada. Por tanto, los métodos de diseño de filtros IIR en tiempo discreto que se basan en esas fórmulas estándar de diseño de filtros IIR en tiempo continuo son fáciles de realizar.
- Los métodos de aproximación estándar que funcionan bien para el diseño de filtros IIR en tiempo continuo no producen fórmulas de diseño simples en forma cerrada cuando se aplican directamente al caso IIR en tiempo discreto, debido a que la respuesta en frecuencia de un filtro en tiempo discreto es periódica, y la de un filtro en tiempo continuo no lo es.

El hecho de que los diseños de filtros en tiempo continuo se puedan trasladar a diseños de filtros en tiempo discreto es totalmente independiente de que el filtro en tiempo discreto se vaya a utilizar en una configuración como la que indica la Figura 7.2 para procesar señales en tiempo continuo. Resaltamos de nuevo que el procedimiento de diseño del sistema en tiempo discreto comienza con un conjunto de especificaciones en tiempo discreto. Supondremos, por tanto, que esas especificaciones se han determinado apropiadamente. Utilizaremos métodos de aproximación de filtros en tiempo continuo sólo como una forma conveniente de determinar el filtro en tiempo discreto que cumpla las especificaciones deseadas. De hecho, el filtro en tiempo continuo sobre el que se basa la aproximación puede tener una respuesta en frecuencia muy diferente de la respuesta en frecuencia efectiva cuando el filtro en tiempo discreto se utiliza en una configuración como la de la Figura 7.2.

Al diseñar un filtro en tiempo discreto transformando un filtro prototipo en tiempo continuo, las especificaciones del filtro en tiempo continuo se obtienen mediante una transformación de las especificaciones del filtro en tiempo discreto deseado. Se obtienen a continuación la función de transferencia $H_c(s)$ o la respuesta al impulso $h_c(t)$ del filtro en tiempo continuo, utilizando uno de los métodos de aproximación establecidos para el diseño de filtros en tiempo continuo, como los que se presentan en el Apéndice B. Seguidamente, se obtiene la función de transferencia $H(z)$ o la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro en tiempo discreto aplicando a $H_c(s)$ o a $h_c(t)$ una transformación del tipo presentado en esta sección.

Al llevar a cabo esa transformación, se desea generalmente que la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto resultante conserve las propiedades esenciales de la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo continuo. Esto implica concretamente que desearemos que el eje imaginario del plano s se transforme en la circunferencia unidad del plano z. Una segunda condición es que un filtro estable en tiempo continuo se debe transformar en un filtro estable en tiempo discreto. Esto significa que si el sistema en tiempo continuo sólo tiene polos en el semiplano izquierdo del plano s, el sistema en tiempo discreto sólo debe tener polos en el interior de la circunferencia unidad del plano z. Estas restricciones son básicas para todas las técnicas que se presentan en esta sección.

7.2.1. Diseño de filtros mediante invarianza al impulso

En la Sección 4.4.2 presentamos el concepto de *invarianza al impulso*, por el que se define un sistema en tiempo discreto muestreando la respuesta al impulso de un sistema en tiempo continuo. Demostramos que la invarianza al impulso proporciona un método directo para calcular muestras de la salida de un sistema en tiempo continuo de banda limitada cuando las señales de entrada son de banda limitada. En algunos contextos, es particularmente apropiado y conveniente diseñar un filtro en tiempo discreto muestreando la respuesta al impulso de un filtro en tiempo continuo. Por ejemplo, si el objetivo global es simular un sistema en tiempo continuo en configuración de tiempo discreto, generalmente realizaremos la simulación mediante el esquema de la Figura 7.2, diseñando el sistema en tiempo discreto de forma que su respuesta al impulso corresponda a muestras del filtro en tiempo continuo que se simula. En otros contextos podría resultar deseable, en una configuración en tiempo discreto, obtener ciertas características en el dominio del tiempo de filtros en tiempo continuo bien diseñados, como una determinada sobreoscilación en el dominio temporal una determinada compactación de la energía un rizado controlado en el dominio del tiempo, etc. Alternativamente, en el contexto de diseño de filtros, podemos ver la invarianza al impulso como un método para obtener un sistema en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia está determinada por la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo continuo.

En el procedimiento de diseño de invarianza al impulso para transformar filtros en tiempo continuo en filtros en tiempo discreto, la respuesta al impulso del filtro en tiempo discreto es proporcional a muestras equiespaciadas de la respuesta al impulso del filtro en tiempo continuo. Es decir,

$$h[n] = T_d h_c(nT_d), \tag{7.2}$$

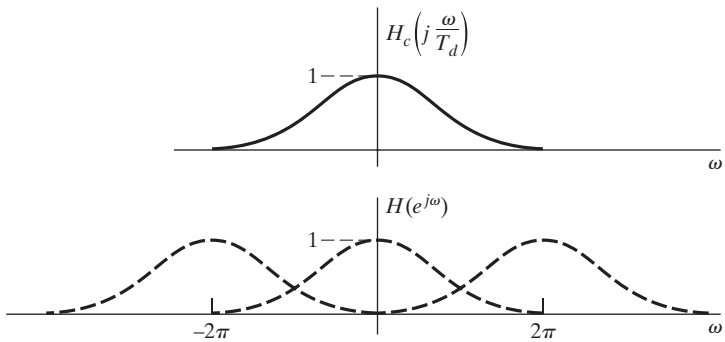


Figura 7.3 Ilustración del solapamiento en la técnica de diseño de invarianza al impulso.

siendo T_d el intervalo de muestreo. Como veremos posteriormente, debido a que el procedimiento de diseño comienza con las especificaciones del filtro en tiempo discreto, el parámetro T_d de la Ecuación (7.2) no juega ningún papel en el procedimiento de diseño ni en el filtro en tiempo discreto resultante. Sin embargo, como es obligatorio especificar este parámetro para definir el procedimiento, lo incluiremos en la exposición que sigue. Veremos que, incluso aunque el filtro se utilice en la configuración básica de la Figura 7.2, el periodo de muestreo de diseño T_d no tiene que coincidir con el periodo de muestreo T asociado con la conversión C/D o D/C

Cuando se utiliza el método de la invarianza al impulso para diseñar un filtro en tiempo discreto con una respuesta en frecuencia especificada, nuestro interés se centra especialmente en la relación entre las respuestas en frecuencia de los filtros en tiempo discreto y en tiempo continuo. De la presentación sobre el muestreo que realizamos en el Capítulo 4 se deduce que la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto obtenida utilizando la Ecuación (7.2) se relaciona con la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo continuo mediante la expresión

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right). \tag{7.3}$$

Si el filtro en tiempo continuo es de banda limitada, de modo que

$$H_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq \pi/T_d, \tag{7.4}$$

entonces

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \qquad |\omega| \leq \pi; \tag{7.5}$$

Es decir, las respuestas en frecuencia en tiempo continuo y en tiempo discreto se relacionan mediante un cambio de escala lineal de la frecuencia, concretamente $\omega = \Omega T_d$ para $|\omega| < \pi$. Lamentablemente, ningún filtro práctico en tiempo continuo puede ser de banda limitada y por lo tanto se produce interferencia entre los sucesivos términos de la Ecuación (7.3), lo que causa solapamiento, como se muestra en la Figura 7.3. Sin embargo, si el filtro en tiempo continuo se aproxima a cero a altas frecuencias, el solapamiento puede ser razonablemente pequeño y se puede obtener un filtro útil en tiempo discreto partiendo del muestreo de la respuesta al impulso de un filtro en tiempo continuo.

Cuando se emplea el procedimiento de diseño de invarianza al impulso para utilizar procedimientos de diseño de filtros en tiempo continuo en la creación de filtros en tiempo discreto con especificaciones de respuesta en frecuencia determinadas, las especificaciones del filtro en tiempo discreto se transforman primero en especificaciones del filtro en tiempo continuo utilizando la Ecuación (7.5). Suponiendo

despreciable el solapamiento que aparece en la transformación de $H_c(j\Omega)$ en $H(e^{j\omega})$ obtenemos las especificaciones de $H_c(j\Omega)$ aplicando la relación

$$\Omega = \omega/T_d \tag{7.6}$$

Dicha relación permite obtener las especificaciones del filtro en tiempo continuo a partir de las especificaciones de $H(e^{j\omega})$. Tras obtener un filtro en tiempo continuo adecuado que cumpla esas especificaciones, el filtro en tiempo continuo con función de transferencia $H_c(s)$ se transforma en el filtro en tiempo discreto deseado con función de transferencia $H(z)$. En breve desarrollaremos los detalles algebraicos de la transformación de $H_c(s)$ en $H(z)$. Nótese, sin embargo, que en la transformación en frecuencia en tiempo discreto, $H(e^{j\omega})$ estará relacionado con $H_c(j\Omega)$ mediante la Ecuación (7.3) que aplica de nuevo la transformación de la Ecuación (7.6) al eje de frecuencias. En consecuencia, el parámetro de "muestreo" T_d no se puede utilizar para controlar el solapamiento. Como las especificaciones básicas se dan en términos de la frecuencia en tiempo discreto, si se aumenta la frecuencia de muestreo (es decir, si T_d se hace más pequeño), la frecuencia de corte del filtro en tiempo continuo debe aumentarse en proporción. En la práctica, para compensar el solapamiento que puede aparecer en la transformación de $H_c(j\Omega)$ en $H(e^{j\omega})$, el filtro en tiempo continuo debe estar ligeramente por encima de las especificaciones de diseño, es decir, debe diseñarse de forma que cumpla sobradamente las especificaciones, particularmente en la banda eliminada.

Aunque la transformación de tiempo continuo en tiempo discreto definida por la invarianza al impulso se define en términos de muestreo en el dominio del tiempo, es fácil convertirla en una transformación de la función de transferencia. Para desarrollar esta transformación consideremos la función de transferencia del filtro en tiempo continuo expresada mediante una descomposición en fracciones simples[1]

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}. \tag{7.7}$$

La respuesta al impulso correspondiente es

$$h_c(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

La respuesta al impulso del filtro en tiempo discreto que se obtiene muestreando $T_d h_c(t)$ es

$$\begin{aligned} h[n] = T_d h_c(nT_d) &= \sum_{k=1}^{N} T_d A_k e^{s_k n T_d} u[n] \\ &= \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Por tanto, la función de transferencia del filtro en tiempo discreto está dada por

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}. \tag{7.10}$$

[1] Por simplicidad, supondremos en esta exposición que todos los polos de $H(s)$ son simples. En el Problema 7.41 consideraremos la modificación necesaria para el caso de polos de orden múltiple.

Comparando las Ecuaciones (7.7) y (7.10), observamos que un polo en el plano s situado en $s = s_k$ se transforma en un polo en el plano z situado en $z = e^{s_k T_d}$ y que los coeficientes de las descomposiciones en fracciones simples de $H_c(s)$ y $H(z)$ son iguales salvo el factor de escala T_d. Si el filtro causal en tiempo continuo es estable, lo que equivale a que la parte real de s_k es menor que cero, el módulo de $e^{s_k T_d}$ será menor que la unidad y el correspondiente polo del filtro en tiempo discreto estará en el interior de la circunferencia unidad. Por tanto, el filtro en tiempo discreto causal será también estable. Aunque los polos en el plano s se transformen en polos en el plano z de acuerdo a la relación $z_k = e^{s_k T_d}$, es importante tener en cuenta que el procedimiento de diseño de invarianza al impulso no corresponde simplemente a una transformación del plano s en el plano z mediante esa relación. En concreto, los ceros de la función de transferencia en tiempo discreto son función de los polos $e^{s_k T_d}$ y de los coeficientes $T_d A_k$ del desarrollo en fracciones simples y, en general, no se transformarán de la misma forma que los polos. El siguiente ejemplo ilustra la técnica de diseño de un filtro paso bajo mediante invarianza al impulso.

Ejemplo 7.2 Invarianza al impulso con un filtro de Butterworth

En este ejemplo consideramos el diseño de un filtro paso bajo en tiempo discreto aplicando la técnica de invarianza al impulso a un filtro apropiado en tiempo continuo. La clase de filtros que vamos a emplear en este ejemplo se denomina filtros de Butterworth y se presentan con más detalle en la Sección 7.3 y en el Apéndice B.[2] Las especificaciones del filtro en tiempo discreto corresponden a una ganancia en la banda de paso entre 0 dB y -1 dB, y a una atenuación en la banda eliminada de al menos -15 dB, es decir,

$$0{,}89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \qquad 0 \leq |\omega| \leq 0{,}2\pi, \tag{7.11a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0{,}17783, \qquad 0{,}3\pi \leq |\omega| \leq \pi. \tag{7.11b}$$

Como el parámetro T_d se cancela en el procedimiento de invarianza al impulso, podemos seleccionar $T_d = 1$, con lo que $\omega = \Omega$. En el Problema 7.2 se considera este mismo ejemplo, pero se incluye explícitamente el parámetro T_d para ver cómo y dónde se cancela.

Al diseñar el filtro utilizando el método de invarianza al impulso sobre un filtro de Butterworth en tiempo continuo, debemos transformar en primer lugar las especificaciones en tiempo discreto en especificaciones del filtro en tiempo continuo. En este ejemplo supondremos que el efecto del solapamiento en la Ecuación (7.3) es despreciable. Tras completar el diseño podemos evaluar la respuesta en frecuencia resultante con respecto a las especificaciones de las Ecuaciones (7.11a) y (7.11b).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, deseamos diseñar un filtro de Butterworth en tiempo continuo cuya respuesta en amplitud $|H_c(j\Omega)|$ cumpla

$$0{,}89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 0{,}2\pi, \tag{7.12a}$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0{,}17783, \qquad 0{,}3\pi \leq |\Omega| \leq \pi. \tag{7.12b}$$

Como la respuesta en amplitud de un filtro de Butterworth analógico es una función monótona de la frecuencia, las Ecuaciones (7.12a) y (7.12b) se cumplirán cuando $H_c(j0) = 1$, si

$$|H_c(j0{,}2\pi)| \geq 0{,}89125 \tag{7.13a}$$

y

$$|H_c(j0{,}3\pi)| \leq 0{,}17783. \tag{7.13b}$$

[2] El Apéndice B presenta los filtros de Butterworth y de Chebyshev en tiempo continuo.

El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de un filtro de Butterworth tiene la forma

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}, \tag{7.14}$$

de manera que el proceso de diseño consiste en determinar los parámetros N y Ω_c para cumplir las especificaciones deseadas. Sustituyendo la Ecuación (7.14) en las Ecuaciones (7.13) expresadas con igualdad, se llega a las ecuaciones

$$1+\left(\frac{0{,}2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0{,}89125}\right)^2 \tag{7.15a}$$

y

$$1+\left(\frac{0{,}3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0{,}17783}\right)^2. \tag{7.15b}$$

La solución simultánea de estas dos ecuaciones es $N = 5{,}8858$ y $\Omega_c = 0{,}70474$. Sin embargo, el parámetro N, debe ser entero. Por tanto, para que las especificaciones se cumplan exactamente o en exceso, debemos redondear N al entero superior, $N = 6$, Debido a este redondeo, el filtro no cumplirá exactamente las Ecuaciones (7.15a) y (7.15b) simultáneamente. Con $N = 6$, el parámetro Ω_c se puede escoger de forma que se cumplan en exceso las especificaciones de la banda de paso, de la banda eliminada o de ambas. Concretamente, en función del valor de Ω_c existe un compromiso en la cantidad en la que se exceden las especificaciones en la banda de paso y en la banda eliminada. Si sustituimos $N = 6$ en la Ecuación (7.15a) se obtiene ($\Omega_c = 0{,}7032$). Con este valor, las especificaciones de la banda de paso (del filtro en tiempo continuo) se cumplen exactamente, y las especificaciones de la banda eliminada (del filtro en tiempo continuo) se cumplirán en exceso. Esto da algún margen para permitir solapamiento en el filtro en tiempo discreto. Con los valores ($\Omega_c = 0{,}7032$) y $N = 6$, los 12 polos de la función módulo al cuadrado $H_c(s)H_c(-s) = 1/[1+(s/j\Omega_c)^{2N}]$ tienen una distribución angular uniforme en una circunferencia de radio ($\Omega_c = 0{,}7032$), como indica la Figura 7.4. En consecuencia, los polos de $H_c(s)$ son las tres parejas de polos del semiplano izquierdo del plano s que tienen las siguientes coordenadas:

Pareja de polos 1: $-0{,}182 \pm j(0{,}679)$,

Pareja de polos 2: $-0{,}497 \pm j(0{,}497)$,

Pareja de polos 3: $-0{,}679 \pm j(0{,}182)$.

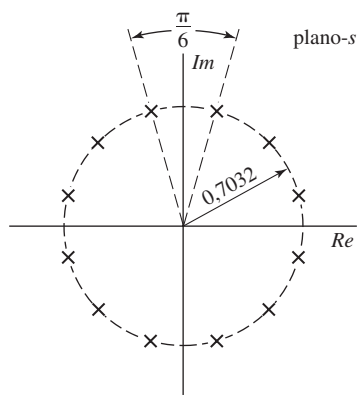


Figura 7.4 Localizaciones en el plano s de los polos de $H_c(s)H_c(-s)$ para el filtro de Butterworth de sexto orden del Ejemplo 7.2.

Por tanto,

$$H_c(s) = \frac{0{,}12093}{(s^2+0{,}3640s+0{,}4945)(s^2+0{,}9945s+0{,}4945)(s^2+1{,}3585s+0{,}4945)}. \tag{7.16}$$

Si expresamos $H_c(s)$ mediante su descomposición en fracciones simples, realizamos la transformación de la Ecuación (7.10) y combinamos después términos complejos conjugados, la función de transferencia resultante del sistema en tiempo discreto es

$$\begin{aligned} H(z) = {} & \frac{0{,}2871-0{,}4466z^{-1}}{1-1{,}2971z^{-1}+0{,}6949z^{-2}} \\ & + \frac{-2{,}1428+1{,}1455z^{-1}}{1-1{,}0691z^{-1}+0{,}3699z^{-2}} \\ & + \frac{1{,}8557-0{,}6303z^{-1}}{1-0{,}9972z^{-1}+0{,}2570z^{-2}}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Como puede verse en la Ecuación (7.17), la función de transferencia resultante del procedimiento de diseño por invarianza al impulso se puede realizar directamente en forma paralelo. Si se desea una realización en cascada o en forma directa, los términos de segundo orden individuales se deben combinar de la forma apropiada.

La Figura 7.5 muestra las funciones de respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto. No hay que olvidar que el filtro prototipo en tiempo continuo se diseñó para cumplir exactamente las especificaciones en la banda de paso y para cumplirlas en exceso en la banda eliminada. Esto es también cierto para el filtro en tiempo discreto, y es una indicación de que el filtro en tiempo continuo es lo suficientemente de banda limitada como para que el solapamiento no presente problemas. De hecho, la diferencia entre $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ y $20\log_{10}|H_c(j\Omega)|$ no es visible a la escala de dibujo, excepto por una ligera desviación en los alrededores de $\omega = \pi$ (no olvidemos que $T_d = 1$, por lo que $\Omega = \omega$). Algunas veces el solapamiento es un problema serio. Si el filtro resultante en tiempo discreto no cumple las especificaciones a causa del solapamiento, con la técnica de invarianza al impulso no hay más alternativa que intentar un orden del filtro superior o probar con diferentes parámetros del filtro manteniendo fijo el orden.

La base del método de invarianza al impulso consiste en escoger una respuesta al impulso del filtro en tiempo discreto que sea similar en algún sentido a la respuesta al impulso del filtro en tiempo continuo. El uso de este procedimiento puede no estar motivado tanto por un deseo de mantener la forma de la respuesta al impulso como por el conocimiento de que si el filtro en tiempo continuo es de banda limitada, la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto se aproximará mucho a la respuesta en frecuencia en tiempo continuo. Cuando el objetivo principal es controlar algún aspecto de la respuesta en el dominio del tiempo, como la respuesta al impulso o la respuesta al escalón, una solución natural podría ser diseñar el filtro en tiempo discreto por invarianza al impulso o invarianza al escalón. En este último caso, la respuesta del filtro a una función escalón unidad muestreada se define como la secuencia que se obtiene muestreando la respuesta al escalón en tiempo continuo. Si el filtro en tiempo continuo tiene unas buenas características de respuesta al escalón, como un tiempo de subida pequeño y un pico de sobreoscilación bajo, el filtro en tiempo discreto mantendrá esas características. Claramente, este concepto de invarianza a la forma de onda se puede extender a la conservación de la forma de onda de la salida para diversas entradas, como se ilustra en el Problema 7.1. Este problema resalta el hecho de

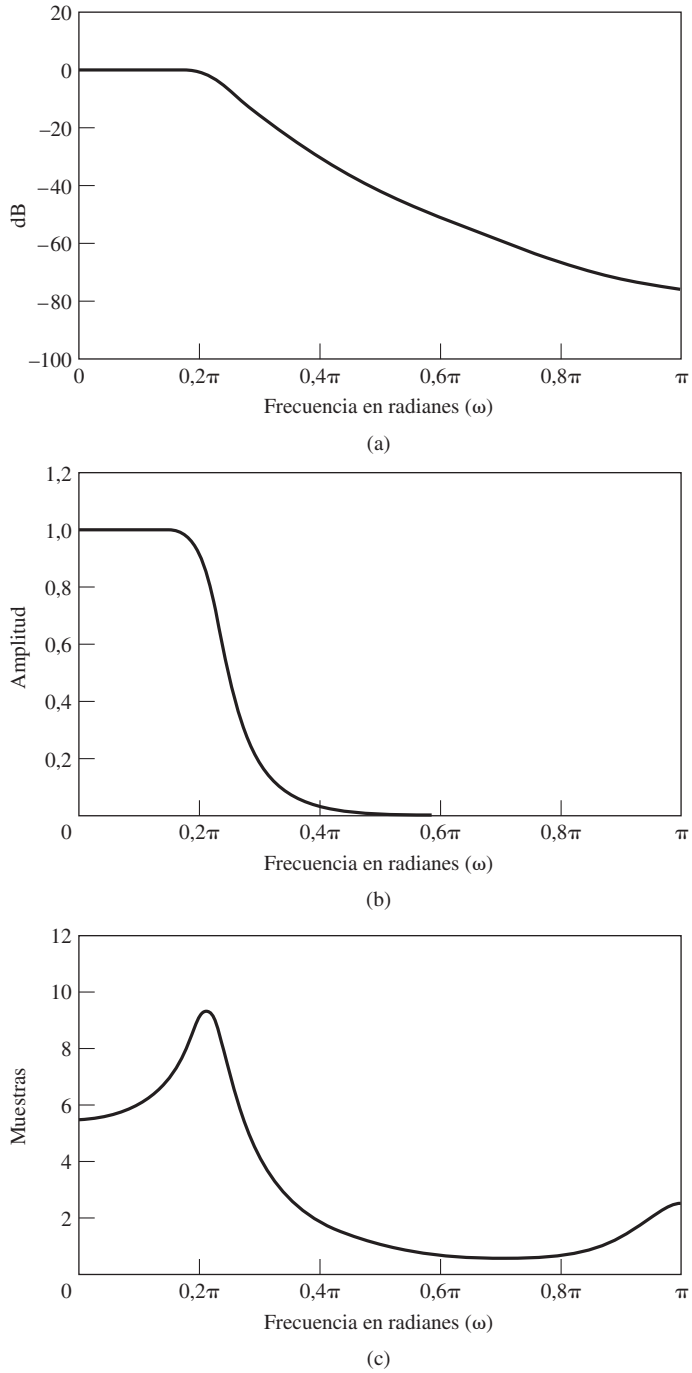


Figura 7.5 Respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth de sexto orden transformado mediante invarianza al impulso. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Módulo. (c) Retardo de grupo.

que al transformar el mismo filtro en tiempo continuo mediante invarianza al impulso e invarianza al escalón (o mediante algún otro criterio de invarianza a otras formas de onda) no se produce el mismo filtro en tiempo discreto.

En el procedimiento de diseño de invarianza al impulso la relación entre la frecuencia en tiempo continuo y en tiempo discreto es lineal. Por tanto, salvo por la existencia de solapamiento, se conserva la forma de la respuesta en frecuencia. Esto es una diferencia con el procedimiento que se presentará a continuación que se basa en una transformación algebraica. Diremos, para concluir esta sección, que la técnica de invarianza al impulso sólo es apropiada para filtros de banda limitada. Los filtros paso alto o banda eliminada en tiempo continuo requieren una limitación en banda adicional para evitar que se produzca un solapamiento severo si se desean diseñar mediante el método de invarianza al impulso.

7.2.2. La transformación bilineal

La técnica que se presenta en esta subsección evita el problema del solapamiento utilizando la transformación bilineal, una transformación algebraica entre las variables s y z que transforma todo el eje $j\Omega$ del plano s en una revolución de la circunferencia unidad del plano z. Como en este método, $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ se transforma en $-\pi \leq \omega \leq \pi$, la transformación entre las variables de frecuencia en tiempo continuo y en tiempo discreto debe ser necesariamente no lineal. Por lo tanto, el uso de esta técnica está limitado a situaciones en las que la correspondiente distorsión no lineal del eje de frecuencias sea aceptable.

Sea $H_c(s)$ la función de transferencia en tiempo continuo y $H(z)$ la función de transferencia en tiempo discreto. La transformación bilineal se realiza sustituyendo s por

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right); \tag{7.18}$$

es decir,

$$H(z) = H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right). \tag{7.19}$$

Como en el caso de invarianza al impulso, el parámetro de "muestreo" T_d se incluye a menudo en la definición de la transformación bilineal. Históricamente, este parámetro se ha incluido debido a que la ecuación en diferencias correspondiente a $H(z)$ se puede obtener aplicando la regla de integración trapezoidal a la ecuación diferencial correspondiente a $H_c(s)$, siendo T_d el tamaño del paso de la integración numérica (véase Kaiser, 1966 y el Problema 7.49). Sin embargo, en diseño de filtros, nuestro uso de la transformación bilineal se basa en las propiedades de la transformación algebraica definida por la Ecuación (7.18). Como en el caso de invarianza al impulso, el parámetro T_d no afecta al procedimiento de diseño, ya que suponemos que el punto de partida del problema de diseño son las especificaciones del filtro en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$. Cuando estas especificaciones se transforman en especificaciones en tiempo continuo y el correspondiente filtro en tiempo continuo se vuelve a transformar en un filtro en tiempo discreto, el efecto de T_d se cancela. Aunque en esta exposición mantendremos el parámetro T_d por razones históricas, en problemas específicos y en los ejemplos se puede elegir cualquier valor conveniente de T_d.

Para desarrollar las propiedades de la transformación algebraica definida por la Ecuación (7.18), despejamos z y obtenemos

$$z = \frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}, \tag{7.20}$$

y sustituyendo $s = \sigma + j\Omega$ en la Ecuación (7.22) resulta

$$z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 - j\Omega T_d/2}. \tag{7.21}$$

Si $\sigma < 0$, entonces, de la Ecuación (7.21) se deduce que $|z| < 1$ para cualquier valor de Ω. Del mismo modo, si $\sigma > 0$, $|z| > 1$ para todo Ω. Es decir, si un polo de $H_c(s)$ está en el semiplano izquierdo del plano s, su imagen en el plano z está en el interior de la circunferencia unidad. Por tanto, los filtros en tiempo continuo causales y estables se transforman en filtros en tiempo discreto causales y estables.

Seguidamente, para demostrar que el eje $j\Omega$ del plano s se transforma en la circunferencia unidad, sustituimos $s = j\Omega$ en la Ecuación (7.20), con lo que se obtiene

$$z = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2}. \tag{7.22}$$

En la Ecuación (7.22) se puede ver claramente que $|z| = 1$ para los valores de s en el eje $j\Omega$. Es decir, el eje $j\Omega$ se transforma en la circunferencia unidad, con lo que la Ecuación (7.22) se transforma en

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2}. \tag{7.23}$$

Para obtener una relación entre las variables ω y Ω, es útil volver a la Ecuación (7.18) y sustituir $z = e^{j\omega}$. Así,

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}\right), \tag{7.24}$$

o equivalentemente,

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d}\left[\frac{2e^{-j\omega/2}(j \operatorname{sen} \omega/2)}{2e^{-j\omega/2}(\cos \omega/2)}\right] = \frac{2j}{T_d}\tan(\omega/2). \tag{7.25}$$

Igualando las partes real e imaginaria de los dos miembros de la Ecuación (7.25) se llega a las relaciones $\sigma = 0$ y

$$\Omega = \frac{2}{T_d}\tan(\omega/2), \tag{7.26}$$

o

$$\omega = 2\arctan(\Omega T_d/2). \tag{7.27}$$

Las Figuras 7.6 y 7.7 resumen las propiedades de la transformación bilineal como una transformación del plano s en el plano z. Observando la Ecuación (7.27) y la Figura 7.7 vemos que el intervalo de frecuencias $0 \leq \Omega \leq \infty$ se transforma en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$, mientras que el intervalo $-\infty \leq \Omega \leq 0$ se transforma en el intervalo $-\pi \leq \omega \leq 0$. La transformación bilineal evita el problema del solapamiento que aparece con la técnica de invarianza al impulso, debido a que transforma el eje imaginario completo del plano s en la circunferencia unidad en el plano z. El precio que se paga, sin embargo, es la distorsión no lineal del eje de frecuencias como muestra la Figura 7.7. Por consiguiente, el diseño de filtros en tiempo discreto mediante la transformación bilineal sólo será útil cuando esta compresión se pueda tolerar o se pueda compensar, como por ejemplo en el caso de filtros que aproximan características de respuesta en amplitud constantes a intervalos. Esto se ilustra en la Figura 7.8, donde se muestra cómo

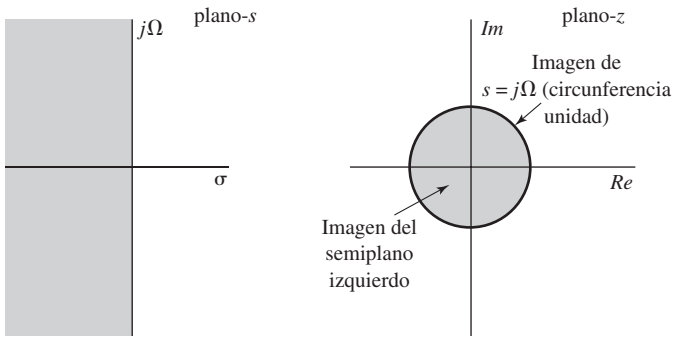


Figura 7.6 Transformación del plano s en el plano z mediante la transformación bilineal.

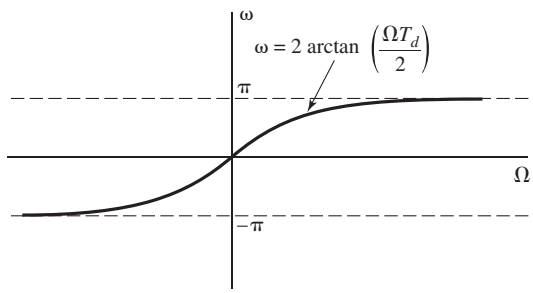


Figura 7.7 Transformación del eje de frecuencias en tiempo continuo en el eje de frecuencias en tiempo discreto mediante la transformación bilineal.

se transforma una respuesta en frecuencia en tiempo continuo y su esquema de tolerancias asociado con la compresión en frecuencia que indican las Ecuaciones (7.26) y (7.27). Si las frecuencias críticas (como las frecuencias de corte de la banda de paso y la banda eliminada) del filtro en tiempo continuo se modifican de acuerdo a la Ecuación (7.26), entonces, cuando el filtro en tiempo continuo se transforme en el filtro en tiempo discreto mediante la Ecuación (7.19), el filtro en tiempo discreto cumplirá las especificaciones deseadas.

Aunque la transformación bilineal se puede usar de forma efectiva para transformar del plano s al plano z una respuesta en amplitud constante por tramos, la distorsión del eje de frecuencias se manifiesta también como una distorsión de la respuesta de fase del filtro. Por ejemplo, la Figura 7.9 muestra el resultado de aplicar la transformación bilineal a un factor de fase lineal ideal $e^{-s\alpha}$. Si sustituimos s según la Ecuación (7.18) y evaluamos el resultado en la circunferencia unidad, el ángulo de fase es $-(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$. En la Figura 7.9, la curva continua muestra la función $-(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$ y la curva discontinua es la función de fase lineal periódica $-(\omega\alpha/T_d)$, que se obtiene utilizando la aproximación para ángulo pequeño $\omega/2 \approx \tan(\omega/2)$. Teniendo esto en cuenta debe resultar evidente que si estuviéramos interesados en un filtro paso bajo con característica de fase lineal, no podríamos obtenerlo aplicando la transformación bilineal a un filtro paso bajo en tiempo continuo con característica de fase lineal.

Como se dijo anteriormente, debido a la distorsión en frecuencia, el uso de la transformación bilineal está limitado al diseño de aproximaciones a filtros con respuesta en amplitud constante a intervalos, como los filtros paso alto, paso bajo o paso banda. Como se ilustró con el Ejemplo 7.2, la técnica de invarianza al impulso se puede utilizar también para diseñar filtros paso bajo, pero no se puede usar para transformar diseños paso alto en tiempo continuo en diseños paso alto en tiempo discreto, ya que los filtros paso alto en tiempo continuo no son de banda limitada.

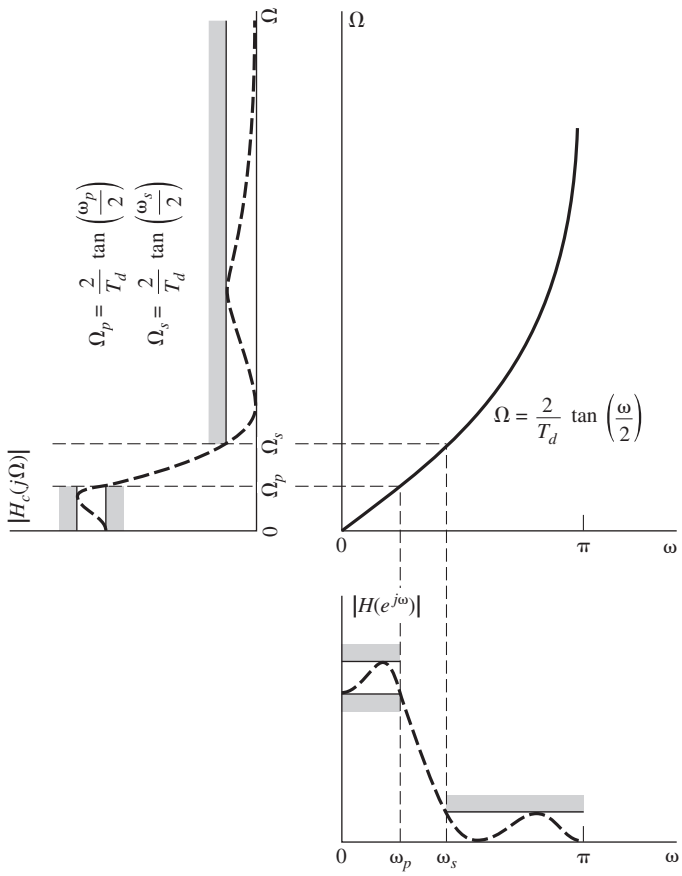


Figura 7.8 Compresión en frecuencia inherente a la transformación bilineal de un filtro paso bajo en tiempo continuo en un filtro paso bajo en tiempo discreto. Para obtener las frecuencias de corte deseadas en tiempo discreto, las frecuencias de corte en tiempo continuo deben ser modificadas como se indica.

En el Ejemplo 4.4 presentamos una clase de filtros denominada diferenciadores en tiempo discreto. Una característica significativa de la respuesta en frecuencia de este tipo de filtros es que son lineales con la frecuencia. La distorsión no lineal del eje de frecuencias que introduce la transformación bilineal no conserva esa propiedad. Por tanto, si se aplica la transformación bilineal a un diferenciador en tiempo continuo no se producirá un diferenciador en tiempo discreto. Sin embargo, si se aplica la técnica de invarianza al impulso a un diferenciador en tiempo continuo de banda apropiadamente limitada, resultará un diferenciador en tiempo discreto.

7.3. FILTROS EN TIEMPO DISCRETO DE BUTTERWORTH, CHEBYSHEV Y ELÍPTICOS

Históricamente, las clases de filtros en tiempo continuo selectivos en frecuencia más ampliamente utilizadas han sido los diseños de filtros de Butterworth, Chebyshev y elípticos. En el Apéndice B resumimos brevemente las características de estas tres clases de filtros en tiempo continuo. Las fórmulas de diseño en forma cerrada asociadas hacen que el procedimiento de diseño sea relativamente directo. Como se explica en el Apéndice B, el módulo de la respuesta en frecuencia de un filtro de Butterworth en tiempo continuo es monótono en la banda de paso y en la banda eliminada. Un filtro de Chebyshev de tipo I presenta un rizado constante en la banda de paso de su respuesta en frecuencia y varía monótonamente en la banda eliminada. Un filtro de Chebyshev de tipo II es monótono en su banda de paso y presenta rizado

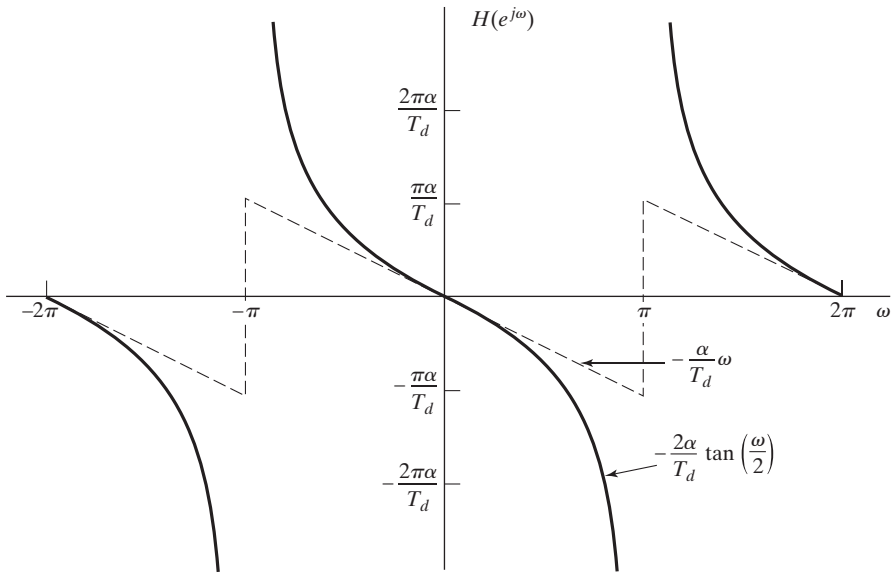


Figura 7.9 Ilustración del efecto de la transformación bilineal en una característica de fase lineal (la línea discontinua es la fase lineal y la línea continua la fase resultante de la transformación bilineal).

constante en su banda eliminada. Los filtros elípticos tienen rizado constante tanto en su banda de paso como en su banda eliminada. Estas propiedades se conservarán claramente cuando el filtro se transforma en un filtro digital mediante la transformación bilineal. Esto se ilustra con la aproximación de la línea discontinua de la Figura 7.8. Los filtros resultantes de aplicar la transformación bilineal a esas clases de filtros en tiempo continuo, que se denominan respectivamente filtros de Butterworth, Chebyshev y elípticos, han sido, de forma similar, ampliamente utilizados como filtros en tiempo discreto selectivos en frecuencia.

Como primer paso en el procedimiento de diseño de cualquiera de estas clases de filtros, deben predistorsionarse las frecuencias críticas, es decir, las frecuencias de los límites de las bandas en tiempo continuo, como indica la Ecuación (7.26). De este modo, la distorsión en frecuencia inherente a la transformación bilineal hará corresponder las frecuencias en tiempo continuo con las frecuencias correctas en tiempo discreto. Esta predistorsión se ilustrará con mayor detalle en el Ejemplo 7.3. Las tolerancias permitidas en la banda de paso y en la banda eliminada serán las mismas para los filtros en tiempo continuo y en tiempo discreto, ya que la transformación bilineal sólo distorsiona el eje de frecuencias, no la escala de amplitud. Al usar un paquete de diseño de filtros en tiempo discreto, como los que se incluyen en MATLAB y LabVIEW, las entradas habituales serán las tolerancias deseadas y las frecuencias críticas en tiempo discreto. El programa de diseño realizará implícitamente cualquier predistorsión necesaria de las frecuencias.

Antes de ilustrar estas clases de filtros con varios ejemplos, merece la pena comentar algunas características generales que se pueden esperar. Ya hemos visto anteriormente que esperamos que los filtros en tiempo discreto de Butterworth, Chebyshev y elípticos mantengan las características de monotonía y rizado de los correspondientes filtros en tiempo continuo. El filtro paso bajo de Butterworth de orden N en tiempo continuo tiene N ceros en $\Omega = \infty$. Como la transformación bilineal transforma $s = \infty$ en $z = -1$, debemos esperar que cualquier diseño de Butterworth que utilice la transformación bilineal produzca N ceros en $z = -1$. Lo mismo ocurre en el caso de los filtros paso bajo de Butterworth de tipo I.

7.3.1. Ejemplos de diseño de filtros IIR

A continuación vamos a considerar varios ejemplos para ilustrar el diseño de filtros IIR. El Ejemplo 7.3 sirve para ilustrar el procedimiento de diseño basado en la transformación bilineal en comparación con el uso de la invarianza al impulso. En el Ejemplo 7.4 se presentan una serie de ejemplos comparando el diseño de un filtro de Butterworth, de Chebyshev tipo I, de Chevyshev tipo II y elíptico. El Ejemplo 7.5 ilustra, con un conjunto diferente de especificaciones, el diseño de un filtro de Butterworth, de Chebyshev tipo I, de Chevyshev tipo II y elíptico. Estos diseños se compararán en la Sección 7.8.1 con diseños FIR. En los Ejemplos 7.4 y 7.5 se utilizará el paquete de diseño de filtros que incluye el *toolbox* (herramientas) de tratamiento de señal de MATLAB.

Ejemplo 7.3 Transformación bilineal de un filtro de Butterworth

Consideremos las especificaciones del filtro en tiempo discreto del Ejemplo 7.2, en el que ilustrábamos la técnica de invarianza al impulso para el diseño de un filtro en tiempo discreto. Las especificaciones del filtro en tiempo discreto son

$$0{,}89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \qquad 0 \leq \omega \leq 0{,}2\pi, \tag{7.28a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0{,}17783, \qquad 0{,}3\pi \leq \omega \leq \pi. \tag{7.28b}$$

Al realizar el diseño aplicando la transformación bilineal a un filtro en tiempo continuo, las frecuencias críticas del filtro en tiempo discreto se deben transformar previamente en los valores de las correspondientes frecuencias en tiempo continuo utilizando la Ecuación (7.26), de forma que la distorsión de frecuencia inherente a la transformación bilineal transforme de nuevo las frecuencias en tiempo continuo en las frecuencias críticas correctas en tiempo discreto. Para este filtro específico, si $|H_c(j\Omega)|$ representa la función de respuesta en amplitud del filtro en tiempo continuo, se requiere que

$$0{,}89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq \Omega \leq \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0{,}2\pi}{2}\right), \tag{7.29a}$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0{,}17783, \qquad \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0{,}3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq \infty. \tag{7.29b}$$

Por conveniencia, escogeremos $T_d = 1$. Además, como en el Ejemplo 7.2, dado que un filtro de Butterworth en tiempo continuo tiene una respuesta en amplitud monótona, podemos requerir de forma equivalente que

$$|H_c(j2\tan(0{,}1\pi))| \geq 0{,}89125 \tag{7.30a}$$

y

$$|H_c(j2\tan(0{,}15\pi))| \leq 0{,}17783. \tag{7.30b}$$

La forma del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth es

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}. \tag{7.31}$$

Despejando N y Ω_c utilizando el signo de igualdad en las Ecuaciones (7.30a) y (7.30b) obtenemos

$$1+\left(\frac{2\tan(0{,}1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0{,}89}\right)^2 \tag{7.32a}$$

y

$$1+\left(\frac{2\tan(0{,}15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0{,}178}\right)^2, \tag{7.32b}$$

y despejando N en las Ecuaciones (7.32a) y (7.32b) resulta

$$N=\frac{\log\left[\left(\left(\frac{1}{0{,}178}\right)^2-1\right)\Big/\left(\left(\frac{1}{0{,}89}\right)^2-1\right)\right]}{2\log[\tan(0{,}15\pi)/\tan(0{,}1\pi)]}=5{,}305. \tag{7.33}$$

Como N debe ser entero, escogeremos $N=6$. Sustituyendo $N=6$ en la Ecuación (7.32b), obtenemos $\Omega_c=0{,}766$. Para este valor de Ω_c, las especificaciones de la banda de paso se cumplen en exceso y las de la banda eliminada se cumplen exactamente. Esto es razonable para el caso de la transformación bilineal, ya que no debemos preocuparnos por el solapamiento. Es decir, con una transformación previa de frecuencia adecuada, podemos estar seguros de que el filtro en tiempo discreto resultante cumplirá exactamente las especificaciones en el límite deseado de la banda eliminada.

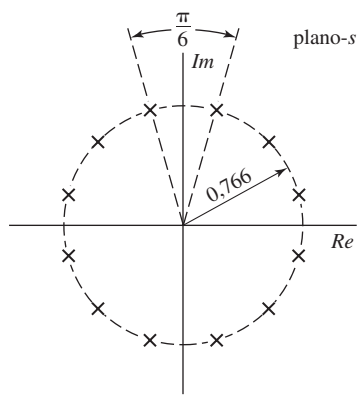


Figura 7.10 Localizaciones en el plano s de los polos de $H_c(s)H_c(-s)$ del filtro de Butterworth de sexto orden del Ejemplo 7.3.

En el plano s, los 12 polos de la función módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia están uniformemente distribuidos en ángulo en una circunferencia de radio 0,766, como muestra la Figura 7.10. La función de transferencia del filtro en tiempo continuo obtenido seleccionando los polos del semiplano izquierdo del plano s es

$$H_c(s)=\frac{0{,}20238}{(s^2+0{,}3996s+0{,}5871)(s^2+1{,}0836s+0{,}5871)(s^2+1{,}4802s+0{,}5871)}. \tag{7.34}$$

La función de transferencia del filtro en tiempo discreto se obtiene aplicando la transformación bilineal a $H_c(s)$ con $T_d=1$. El resultado es

$$\begin{aligned}H(z)=&\frac{0{,}0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1{,}2686z^{-1}+0{,}7051z^{-2})(1-1{,}0106z^{-1}+0{,}3583z^{-2})}\\&\times\frac{1}{(1-0{,}9044z^{-1}+0{,}2155z^{-2})}.\end{aligned} \tag{7.35}$$

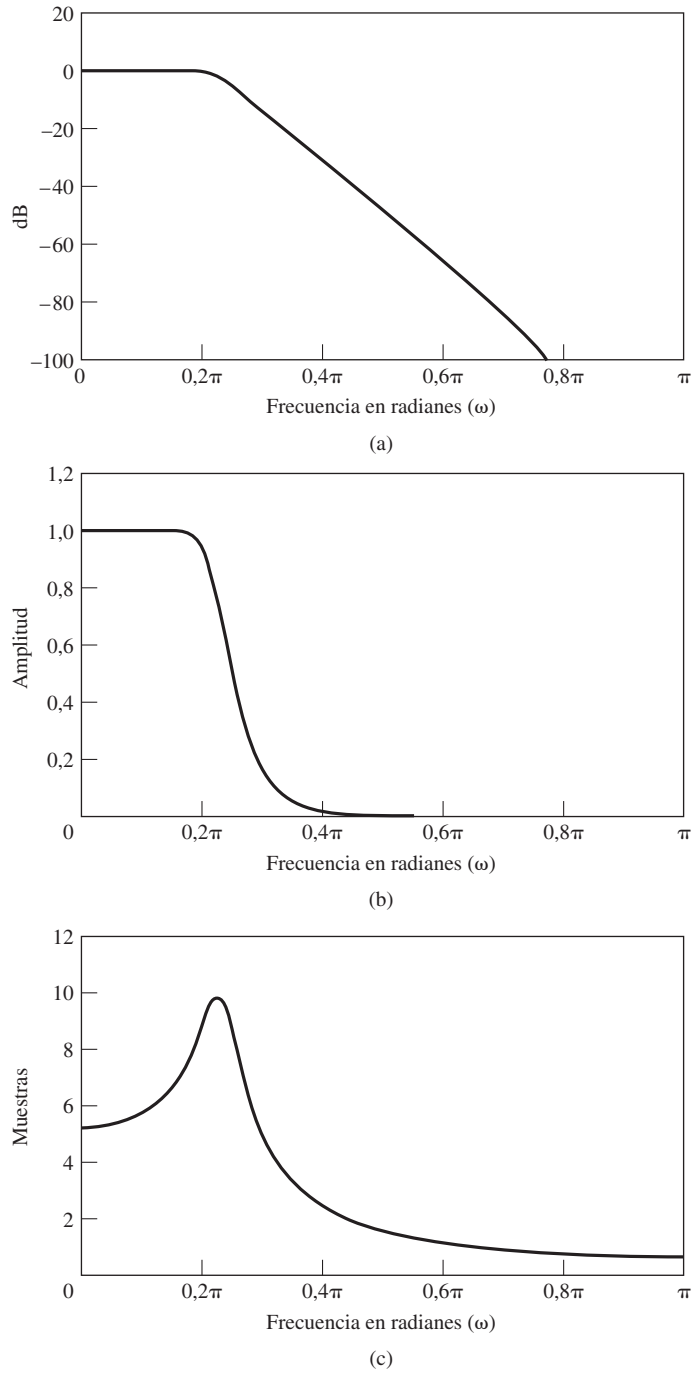


Figura 7.11 Respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth de sexto orden transformado mediante la transformación bilineal. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Módulo. (c) Retardo de grupo.

La Figura 7.11 muestra el módulo, el logaritmo del módulo y el retardo de grupo de la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto. En $\omega = 0{,}2\pi$, el logaritmo del módulo vale $-0{,}56$ dB y en $\omega = 0{,}3\pi$ el logaritmo del módulo vale exactamente -15 dB.

Como la transformación bilineal transforma el eje $j\Omega$ completo del plano s en la circunferencia unidad del plano z, la respuesta en amplitud del filtro en tiempo discreto decrece de forma mucho más rápida que en el filtro en tiempo continuo original. En particular, el comportamiento de $H(e^{j\omega})$ en $\omega = \pi$ se corresponde con el comportamiento de $H_c(j\Omega)$ en $\Omega = \infty$. Por tanto, como el filtro de Butterworth tiene un cero de sexto orden en $s = \infty$, el filtro en tiempo discreto resultante tiene un cero de sexto orden en $z = -1$.

Como la forma general del módulo al cuadrado del filtro de Butterworth en tiempo continuo de orden N está dada por la Ecuación (7.31), y debido a que ω y Ω se relacionan por la Ecuación (7.26), la función módulo al cuadrado del filtro de Butterworth general en tiempo discreto de orden N será

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}}, \tag{7.36}$$

donde $\tan(\omega_c/2) = \Omega_c T_d/2$. La función de respuesta en frecuencia de la Ecuación (7.36) tiene las mismas propiedades que la respuesta de Butterworth en tiempo continuo: es maximalmente plana[3] y $|H(e^{j\omega_c})|^2 = 0{,}5$. Sin embargo, la función de la Ecuación (7.38) es periódica de periodo 2π y decrece de forma más abrupta que la respuesta de Butterworth en tiempo continuo.

Generalmente, no diseñaremos directamente filtros de Butterworth partiendo de la Ecuación (7.38), ya que no es inmediato determinar las posiciones de los polos asociados con la función módulo al cuadrado de la Ecuación (7.36) en el plano z (todos los ceros están en $z = -1$). Es necesario determinar los polos para poder factorizar dicha función en la forma $H(z)H(z^{-1})$ y obtener así $H(z)$. Es mucho más sencillo factorizar la función de transferencia del sistema en tiempo continuo y transformar después los polos del semiplano izquierdo mediante la transformación bilineal, como hicimos en el Ejemplo 7.3.

Se pueden obtener también ecuaciones de la forma (7.36) para filtros de Chebyshev y filtros elípticos en tiempo discreto. Sin embargo, los detalles sobre los cálculos del diseño de estas clases de filtros comúnmente utilizadas se realizan mejor mediante programas de computador que incorporan las apropiadas ecuaciones de diseño en forma cerrada.

En el siguiente ejemplo compararemos el diseño de un filtro paso bajo realizado mediante los métodos de diseño de filtros de Butterworth, Chebyshev tipo I, Chebyshev tipo II y elíptico. Existen algunas características del módulo de la respuesta en frecuencia y de los diagramas polo-cero que son específicas para cada uno de estos tipos de filtros paso bajo en tiempo discreto, y estas características resultarán evidentes en los diseños del Ejemplo 7.4 y del Ejemplo 7.5 que se presentarán en breve.

En el caso de un filtro paso bajo de Butterworth, el módulo de su respuesta en frecuencia decrece monótonamente tanto en su banda de paso como en su banda eliminada, y todos los ceros de su función de transferencia están en $z = -1$. Para un filtro paso bajo de Chebyshev tipo I, el módulo de su respuesta en frecuencia tiene siempre un rizado constante en su banda de paso, es decir, oscilará manteniendo un error máximo igual a cada lado de la ganancia deseada, y será monótono en su banda de paso. Todos los ceros de su correspondiente función de transferencia estarán en $z = -1$. En un filtro paso bajo de Chebyshev tipo II, el módulo de su respuesta en frecuencia será monótono en su banda de paso y tendrá rizado constante en su banda eliminada, es decir, oscilará alrededor de la ganancia cero. Debido a este comportamiento de rizado constante en la banda eliminada, los ceros de su función de transferencia estarán distribuidos en la forma correspondiente sobre la circunferencia unidad.

[3] Las primeras $(2N-1)$ derivadas de $|H(e^{j\omega})|^2$ son cero en $\omega = 0$.

En ambos casos de la aproximación de Chebyshev, el comportamiento monótono en la banda eliminada o en la banda de paso sugieren que quizá se podría obtener un sistema de orden menor si se utilizara una aproximación de rizado constante en la banda de paso y en la banda eliminada. De hecho, se puede demostrar (véase Papoulis, 1957) que para valores fijos de δ_{p_1}, δ_{p_2}, δ_s, ω_p y ω_s del esquema de tolerancias de la Figura 7.1, el filtro de orden mínimo se consigue cuando el error de aproximación tiene un rizado constante entre los extremos de las dos bandas de aproximación. Este comportamiento de rizado constante se consigue con una clase de filtros denominados filtros elípticos. Los filtros elípticos, como el filtro de Chebyshev tipo II, tiene los ceros dispuestos uniformemente en la región de la banda de paso de la circunferencia unidad. Estas propiedades de los filtros de Butterworth, Chebyshev y elípticos se ilustran en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.4 Comparaciones de diseños

En los cuatro diseños de filtros que siguen, se ha utilizado el toolbox de tratamiento de señal de MATLAB. En este toolbox y en otros programas típicos de diseño de filtros paso bajo IIR se suponen las especificaciones de tolerancias como las que se indican en la Figura 7.1, con $\delta_{p1} = 0$. Aunque los diseños resultantes corresponden a los que resultarían de aplicar la transformación bilineal a los diseños apropiados en tiempo continuo, cualquier predistorsión en frecuencia y su correspondiente incorporación en la transformación bilineal son internos a los programas de diseño y, por tanto, transparentes al usuario. Por consiguiente, las especificaciones se proporcionan al programa de diseño en función de los parámetros en tiempo discreto. En este ejemplo, el filtro se diseña para cumplir o exceder las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned}
&\text{frecuencia de corte de la banda de paso } \omega_p && = 0{,}5\pi \\
&\text{frecuencia de corte de la banda eliminada } \omega_s && = 0{,}6\pi \\
&\text{ganancia máxima en la banda de paso} && = 0 \text{ dB} \\
&\text{ganancia mínima en la banda de paso} && = -0{,}3 \text{ dB} \\
&\text{ganancia máxima en la banda eliminada} && = -30 \text{ dB}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la Figura 7.1, los correspondientes límites de tolerancia en las bandas de paso y eliminada son

$$\begin{aligned}
&20\log_{10}(1+\delta_{p_1}) = 0 && \text{o de forma equivalente } \delta_{p_1} = 0 \\
&20\log_{10}(1-\delta_{p_2}) = -0{,}3 && \text{o de forma equivalente } \delta_{p_2} = 0{,}0339 \\
&20\log_{10}(\delta_s) = -30 && \text{o de forma equivalente } \delta_s = 0{,}0316.
\end{aligned}$$

Nótese que las especificaciones son sólo sobre los módulos de la respuesta en frecuencia. La fase está determinada implícitamente por la naturaleza de las funciones de aproximación.

Utilizando el programa de diseño de filtros, se determina que en un diseño de Butterworth, el mínimo orden (entero) del filtro que cumple o excede las especificaciones dadas es un filtro de orden 15. La Figura 7.12 muestra el módulo de la respuesta en frecuencia, el retardo de grupo y el diagrama polo–cero. Como se esperaba, todos los ceros del filtro de Butterworth están en $z = -1$.

En el caso de un diseño de Chebyshev tipo I, el orden mínimo del filtro es 7. En la Figura 7.13 se muestran el módulo de la respuesta en frecuencia, el retardo de grupo y el diagrama polo–cero. De nuevo, como era de esperar, todos los ceros de la función de transferencia están en $z = -1$ y el módulo de la respuesta en frecuencia presenta un rizado constante en la banda de paso y es monótona en la banda eliminada.

Para un diseño de Chebyshev tipo II, el orden mínimo del filtro es de nuevo 7. En la Figura 7.14 pueden verse el módulo de la respuesta en frecuencia, el retardo de grupo y el correspondiente diagrama polo–cero. Como podía esperarse, todos los ceros de la función de transferencia están en $z = -1$ y el

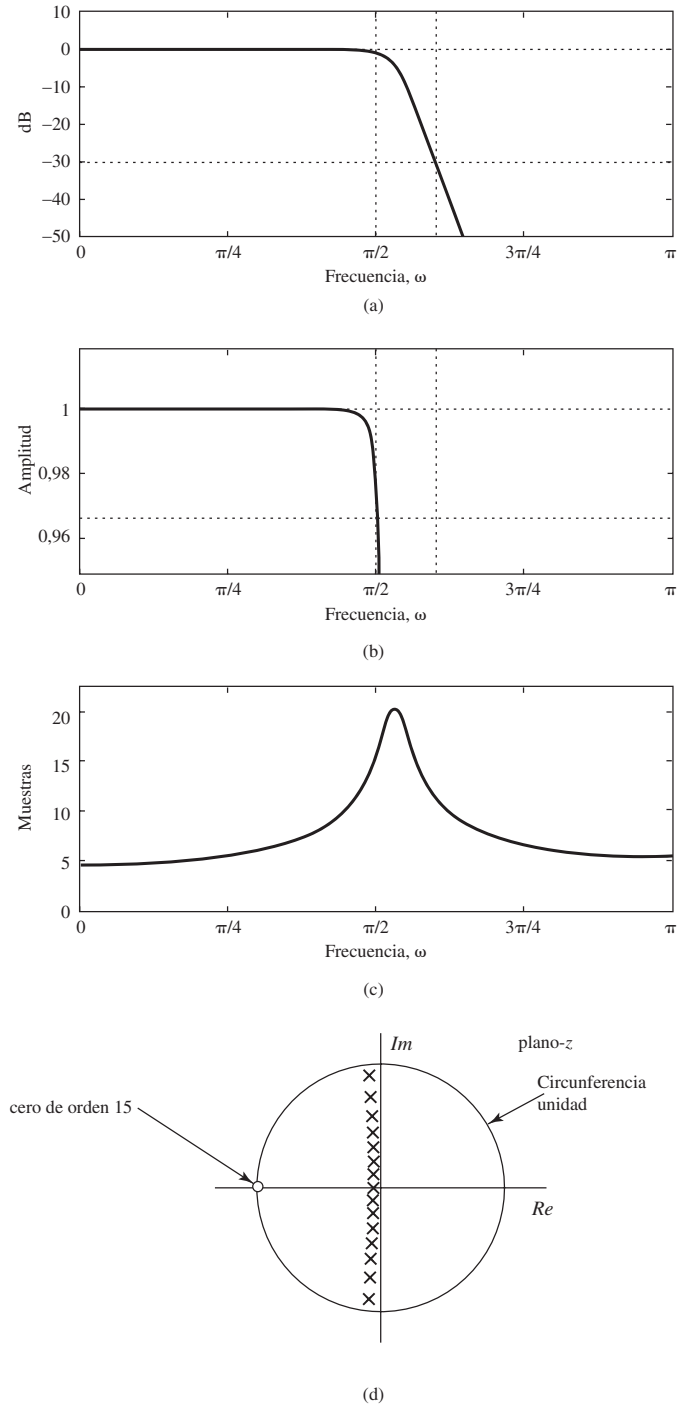


Figura 7.12 Filtro de Butterworth, orden 15.

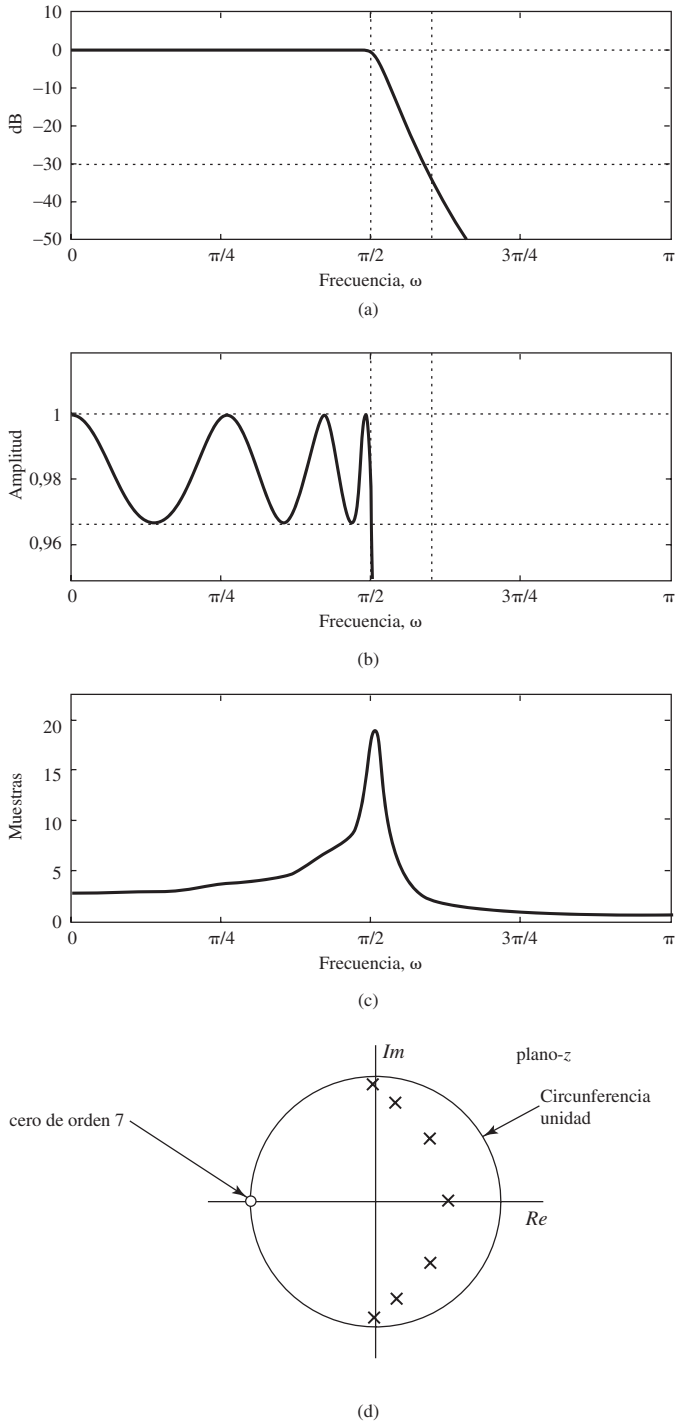


Figura 7.13 Filtro de Chebyshev tipo I, orden 7.

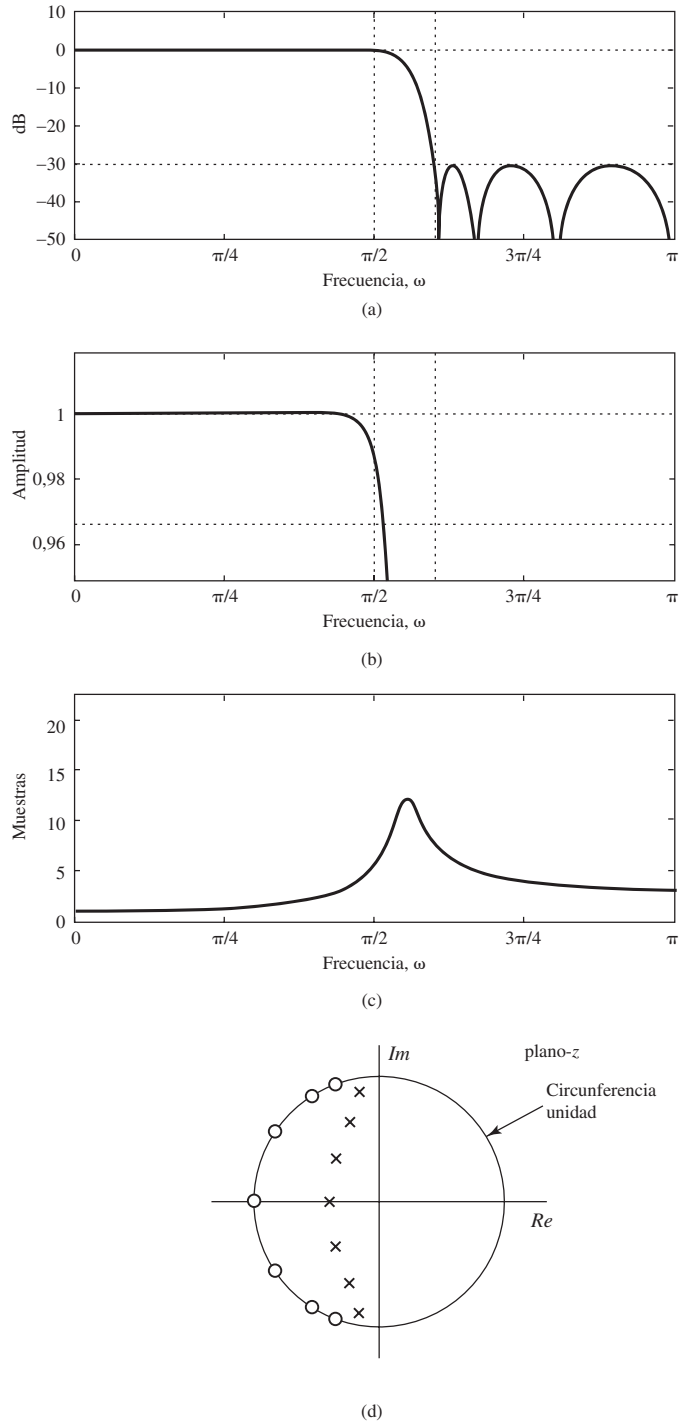


Figura 7.14 Filtro de Chebyshev tipo II, orden 7.

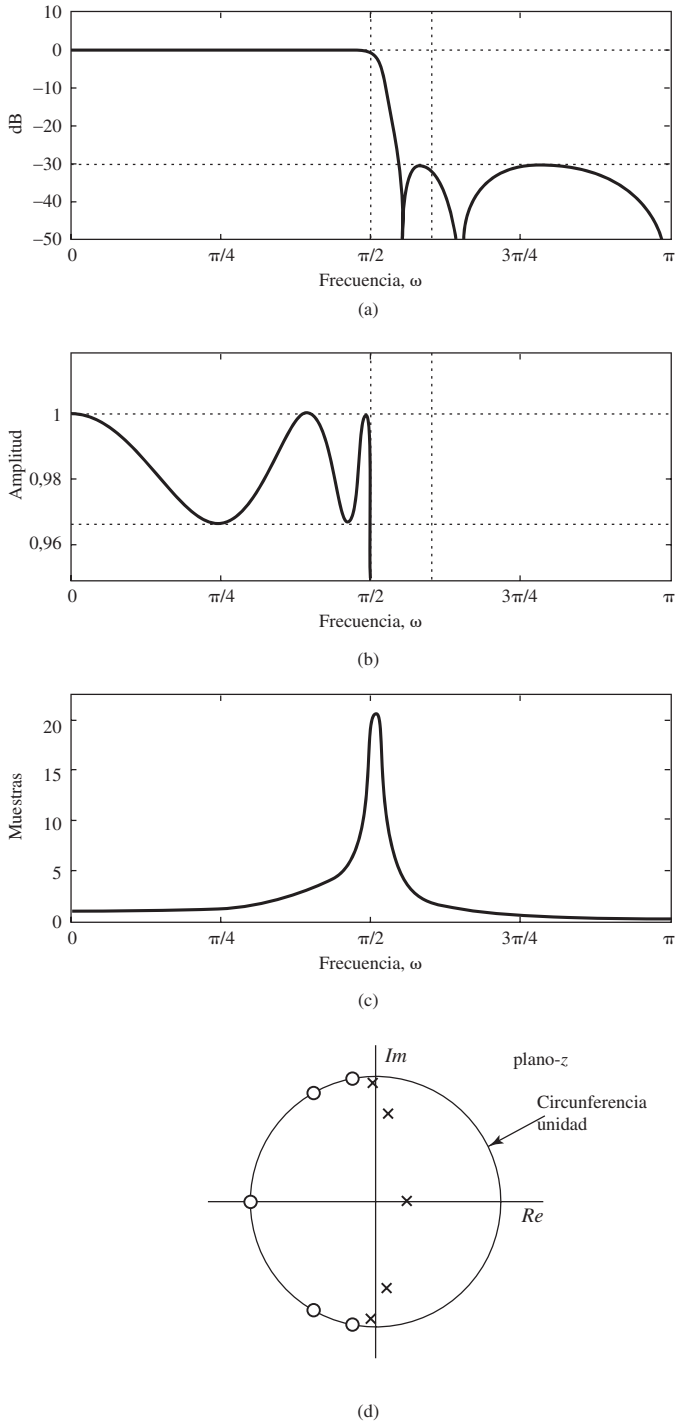


Figura 7.15 Filtro elíptico, orden 5, excede las especificaciones de diseño.

módulo de la respuesta en frecuencia es monótona en la banda de paso y presenta un rizado constante en la banda eliminada. Los ceros de la función de transferencia están dispuestos regularmente sobre la circunferencia unidad en la banda eliminada.

Al comparar los diseños de Chebyshev I y de Chebyshev II, merece la pena observar que, en ambos, el orden del polinomio del denominador de la función de transferencia correspondiente a los polos es 7, y el orden del polinomio del numerador es también 7. En la implementación de la ecuación en diferencias para los diseños de Chebyshev I y de Butterworth, se puede aprovechar de forma importante el hecho de que todos los ceros aparecen en $z = -1$. Éste no es el caso del filtro de Chebyshev II. En consecuencia, en la implementación del filtro, el diseño de Chebyshev II requerirá más multiplicaciones que el diseño de Chebyshev I. Con el diseño de Butterworth, aunque se puede aprovechar el hecho de que los ceros estén agrupados en $z = -1$, el orden del filtro es más de dos veces el de los diseños de Chebyshev y por consiguiente se requieren más multiplicaciones.

Para el diseño de un filtro elíptico que cumpla las especificaciones dadas, se requiere un filtro de al menos quinto orden. La Figura 7.15 muestra el diseño resultante. Como en los ejemplos anteriores, al diseñar un filtro con las especificaciones dadas, es probable que se cumplan en exceso las especificaciones mínimas, ya que el orden del filtro es necesariamente un entero. Dependiendo de la aplicación, el diseñador puede elegir qué especificaciones se cumplirán exactamente y cuáles en exceso. Por ejemplo, en el diseño del filtro elíptico podemos elegir cumplir exactamente las frecuencias límite de las bandas de paso y eliminada, junto con la variación en la banda de paso, y minimizar la ganancia en la banda eliminada. El filtro resultante, que alcanza 43 dB de atenuación en la banda eliminada, se muestra en la Figura 7.16. Alternativamente, la flexibilidad añadida se puede utilizar para reducir la banda de transición o para reducir la desviación de la ganancia de 0 dB en la banda de paso. Como también podía esperarse, la respuesta en frecuencia del filtro elíptico tiene rizado constante tanto en la banda de paso como en la banda eliminada.

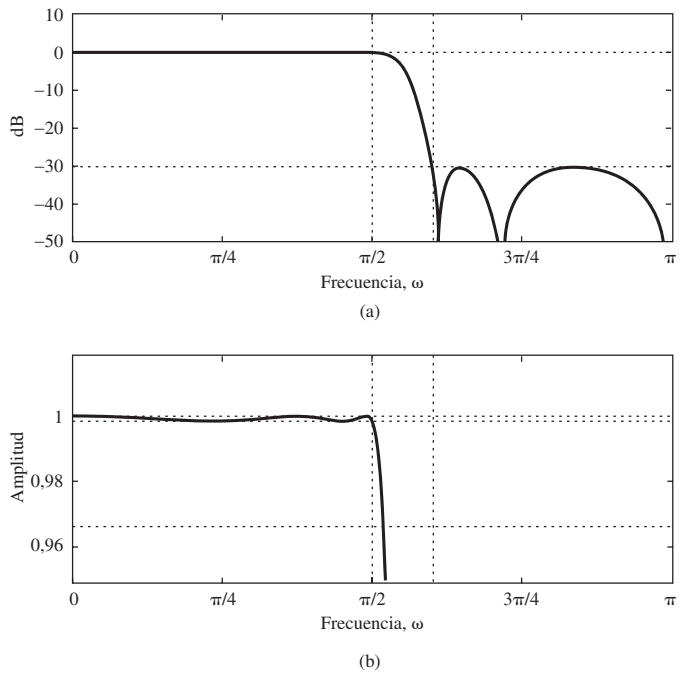


Figura 7.16 Filtro elíptico, orden 5, minimización del rizado en la banda de paso.

Ejemplo 7.5 Ejemplo de diseño para comparación con diseños FIR

En este ejemplo volvemos a las especificaciones del Ejemplo 7.1 e ilustramos la realización de este filtro con diseños de Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II y elíptico. Los diseños se realizan utilizando de nuevo el programa de diseño de filtros del toolbox de tratamiento de señales de MATLAB. En la Sección 7.8.1 compararemos estos diseños IIR con diseños FIR de las mismas especificaciones. Los programas típicos de diseño de filtros FIR requieren que los límites de tolerancia de la Figura 7.1 se especifiquen con $\delta_{p1} = \delta_{p2}$, mientras que en el caso de filtros IIR, se supone generalmente que $\delta_{p1} = 0$. En consecuencia, para realizar una comparación entre diseños IIR y FIR, puede ser necesario realizar una renormalización de las especificaciones de las bandas de paso y eliminada (véase, por ejemplo, el Problema 7.3), como hicimos en el Ejemplo 3.5.

En términos del esquema de tolerancias de la Figura 7.1, $\delta_{p_1} = \delta_{p_2} = 0{,}01$, $\delta_s = 0{,}001$, $\omega_p = 0{,}4\pi$ y $\omega_s = 0{,}6\pi$. Reescalar estas especificaciones para que $\delta_{p1} = 0$ equivale a escalar el filtro por $1/(1+\delta_{p1})$ obteniéndose $\delta_{p1} = 0$, $\delta_{p2} = 0{,}0198$ y $\delta_s = 0{,}00099$.

Los filtros se diseñan en primer lugar utilizando el programa de diseño de filtros con estas especificaciones y los diseños devueltos por el programa se reescalan por un factor de 1.01 para satisfacer las especificaciones de las Ecuaciones (7.37a) y (7.37b).

Para las especificaciones de este ejemplo, el método de aproximación de Butterworth requiere un sistema de orden 14. La Figura 7.17 muestra la respuesta en frecuencia del filtro en tiempo discreto resultado de la transformación bilineal del filtro de Butterworth apropiado con el predistorsionado incorporado. La Figura 7.17(a) muestra al logaritmo del módulo en dB, la Figura 7.17(b) el módulo de $H(e^{j\omega})$ sólo en la banda de paso, y la Figura 7.17(c) el retardo de grupo del filtro. Observando estas gráficas, podemos ver que, como era de esperar, la respuesta en frecuencia de Butterworth disminuye monótonamente con la frecuencia y la ganancia del filtro se hace muy pequeña en $\omega = 0{,}7\pi$.

Las especificaciones del filtro paso bajo en tiempo discreto utilizadas en este ejemplo son:

$$0{,}99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1{,}01, \qquad |\omega| \le 0{,}4\pi, \tag{7.37a}$$

y

$$|H(e^{j\omega})| \le 0{,}001, \qquad 0{,}6\pi \le |\omega| \le \pi. \tag{7.37b}$$

Los dos diseños de Chebyshev de tipo I y II producen el mismo orden para un conjunto de especificaciones dadas. En nuestro caso el orden requerido es de 8 en vez de 14, el necesario en la aproximación de Butterworth. La Figura 7.18 muestra el logaritmo del módulo, el módulo en la banda de paso y el retardo de grupo para la aproximación de tipo I a las especificaciones dadas por las Ecuaciones (7.37a) y (7.37b). Nótese que, como era de esperar, la respuesta en frecuencia oscila con el mismo valor máximo del error a cada lado de la ganancia unidad en la banda de paso.

La Figura 7.19 muestra las funciones de respuesta en frecuencia de la aproximación de Chebyshev tipo II. En este caso, el comportamiento de rizado constante es en la banda de paso. Los diagramas polo–cero de los filtros de Chebyshev se muestran en la Figura 7.20. Nótese que el filtro de Chebyshev tipo I es similar al filtro de Butterworth en el sentido de que tiene sus ocho ceros en $z = -1$. Por otra parte, el filtro de tipo II tiene sus ceros dispuestos de forma regular sobre la circunferencia unidad. Estos ceros son situados de forma natural por las ecuaciones de diseño para conseguir el comportamiento de rizado constante en la banda eliminada.

Las especificaciones de las Ecuaciones (7.37a) y (7.37b) se pueden cumplir con un filtro elíptico de orden seis. Es la aproximación racional de orden mínimo que cumple las especificaciones. La Figura 7.21 muestra claramente el comportamiento de rizado constante en ambas bandas de aproximación. La Figura 7.22 muestra que el filtro elíptico, como el filtro de Chebyshev de tipo II, tiene sus ceros dispuestos regularmente en la región de la banda de paso de la circunferencia unidad.

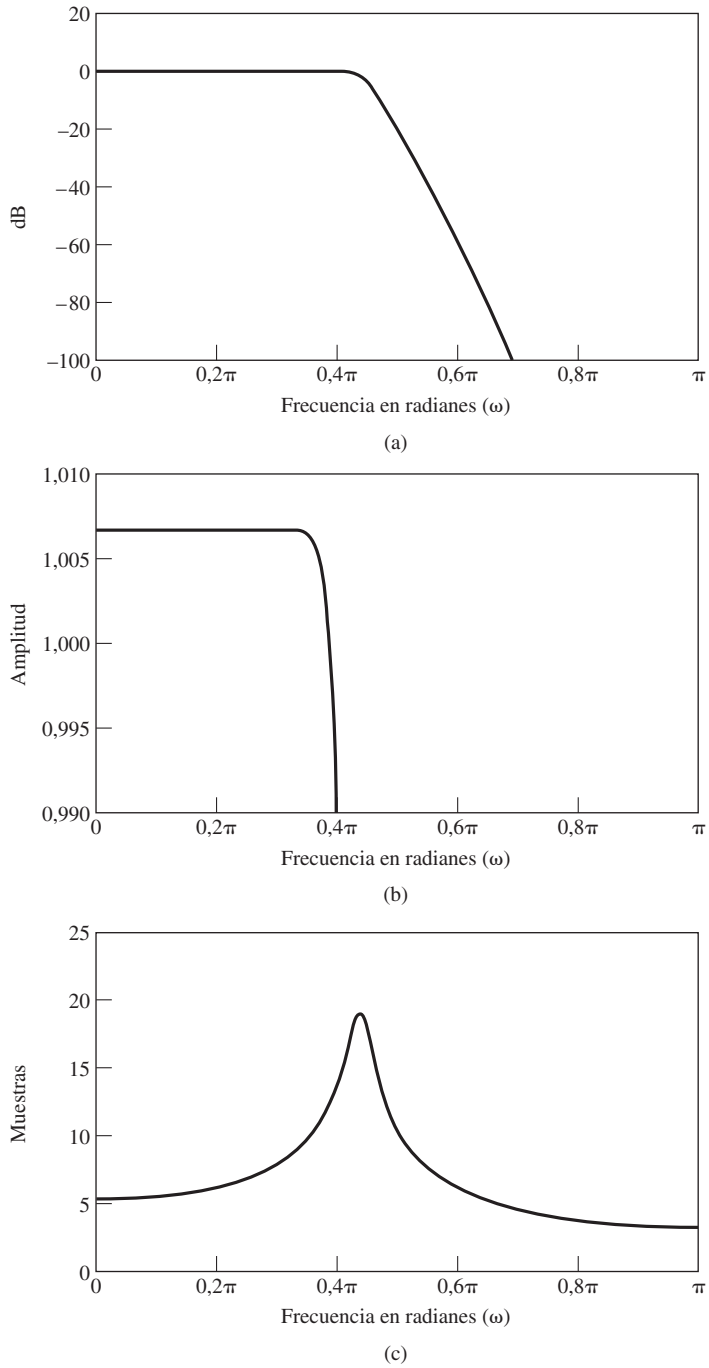


Figura 7.17 Respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth de orden 14 en el Ejemplo 7.5. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Gráfica detallada del módulo en la banda de paso. (c) Retardo de grupo.

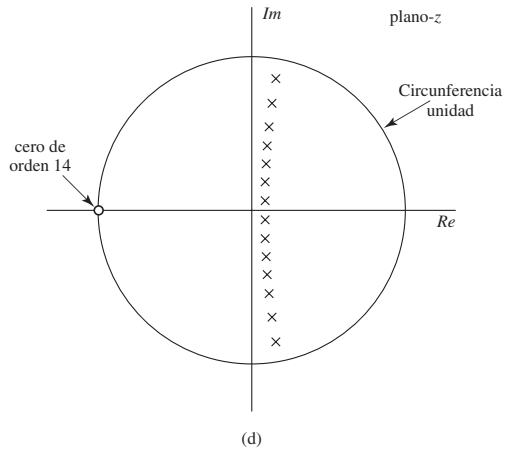


Figura 7.17 (*Continuación*) (d) Diagrama polo–cero del filtro de Butterworth de orden 14 en el Ejemplo 7.5.

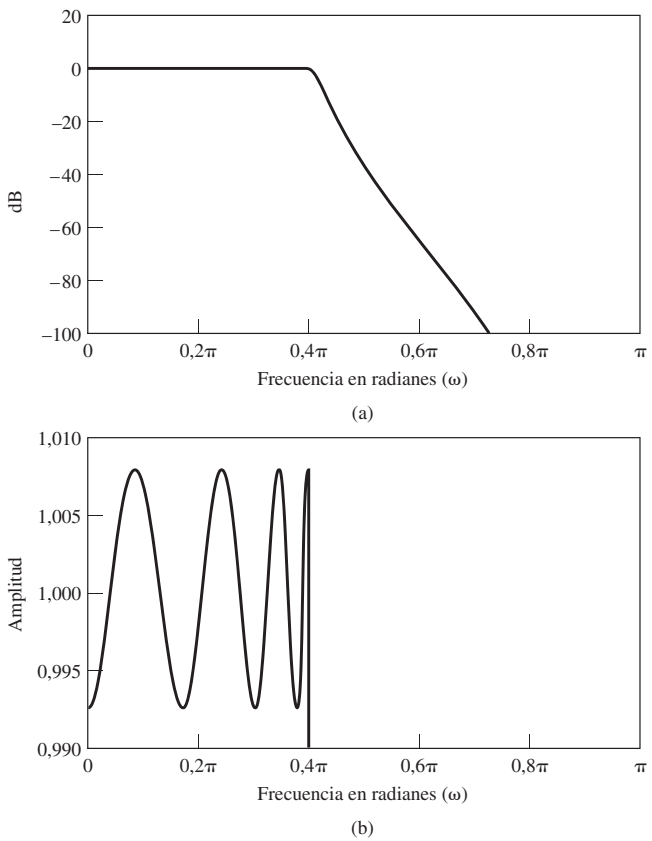
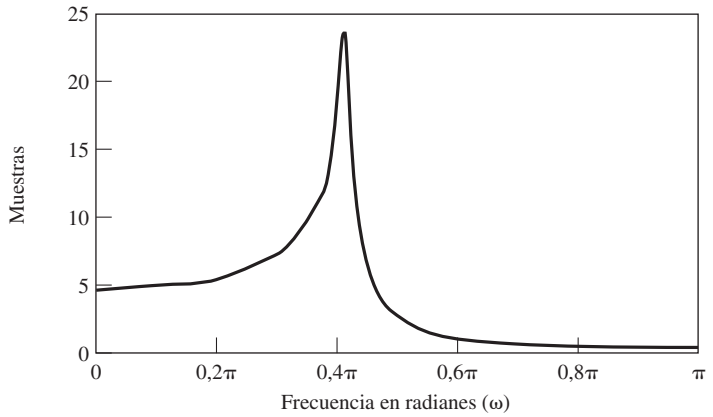
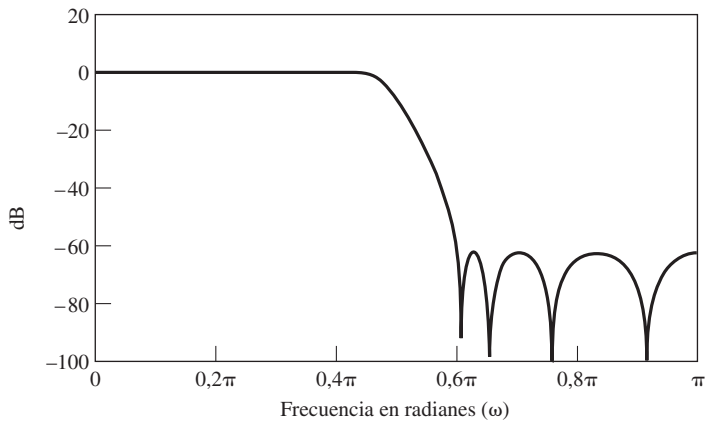


Figura 7.18 Respuesta en frecuencia del filtro de Chebyshev de tipo I de orden 8 en el Ejemplo 7.5. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Gráfica detallada del módulo en la banda de paso.

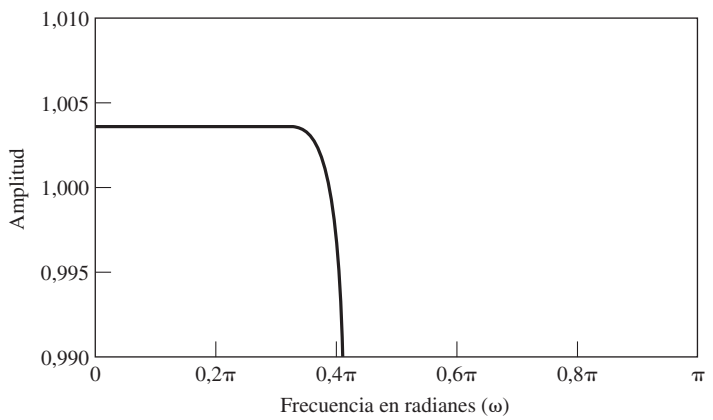


(c)

Figura 7.18 (*Continuación*) (c) Retardo de grupo.

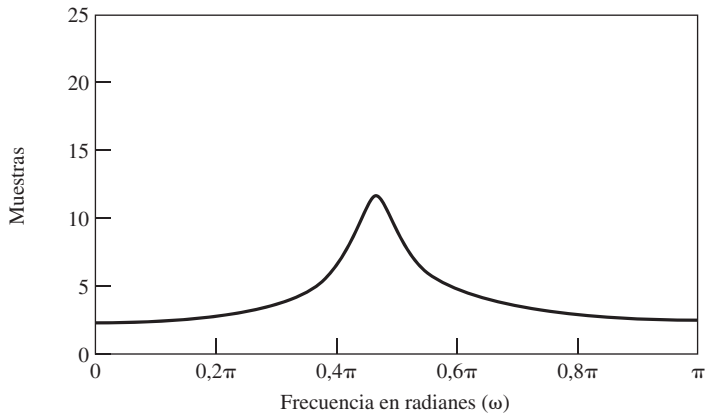


(a)



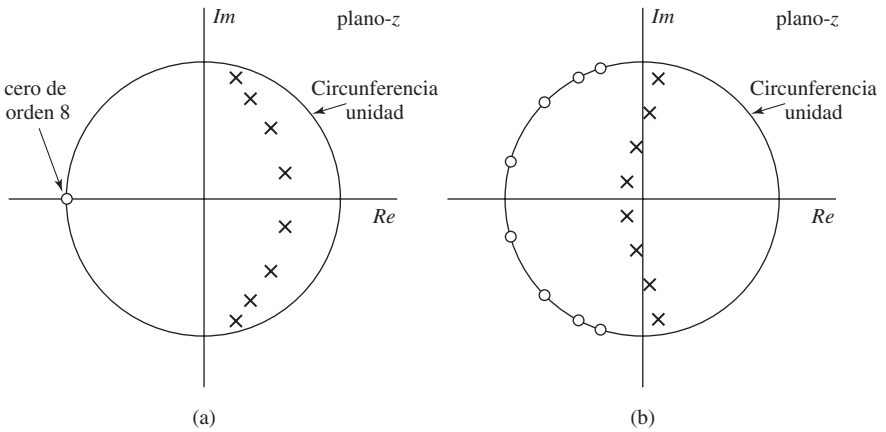
(b)

Figura 7.19 Respuesta en frecuencia del filtro de Chebyshev de tipo II de orden 8 en el Ejemplo 7.5. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Gráfica detallada del módulo en la banda de paso.



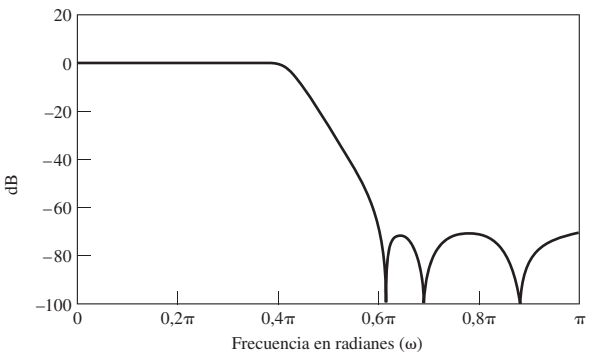
(c)

Figura 7.19 (*Continuación*) (c) Retardo de grupo.



(a) (b)

Figura 7.20 Diagrama polo–cero de los filtros de Chebyshev de orden 8 para el Ejemplo 7.5. (a) Tipo I. (b) Tipo II.



(a)

Figura 7.21 Respuesta en frecuencia del filtro elíptico de orden 6 en el Ejemplo 7.5. (a) Logaritmo del módulo en dB.

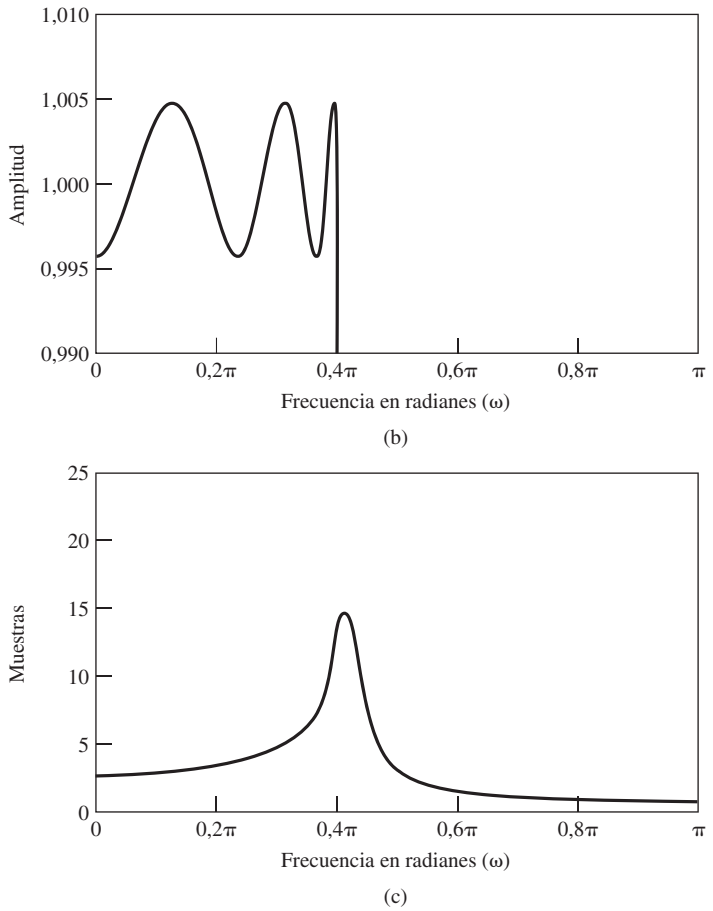


Figura 7.21 *Continuación* (b) Gráfica detallada del módulo en la banda de paso. (c) Retardo de grupo.

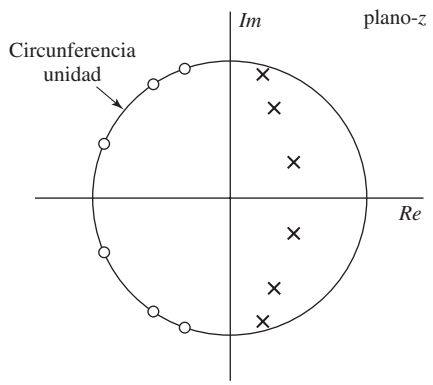


Figura 7.22 Diagrama polo–cero del filtro elíptico de orden 6 del Ejemplo 7.5.

7.4. TRANSFORMACIONES EN FRECUENCIA DE FILTROS IIR PASO BAJO

Esta exposición y los ejemplos de diseño de filtros IIR se han centrado en el diseño de filtros paso bajo selectivos en frecuencia. Existen otros tipos de filtros selectivos en frecuencia como los paso alto, paso banda, banda eliminada y multibanda, que son igualmente importantes. Como en el caso de los filtros paso bajo, estas otras clases de filtros se caracterizan por una o varias bandas de paso y bandas eliminadas, cada una de ellas especificada por sus correspondientes frecuencias de corte de la banda de paso y de la banda eliminada. Generalmente, la ganancia del filtro deseado es la unidad en las bandas de paso y cero en las bandas eliminadas, pero como en el caso del filtro paso bajo, las especificaciones de diseño del filtro incluyen límites de tolerancia dentro de los cuales se pueden desviar las ganancias o atenuaciones ideales en las bandas de paso y eliminadas. La Figura 7.23 muestra un esquema típico de tolerancias para un filtro multibanda con dos bandas de paso y una banda eliminada.

El procedimiento tradicional de diseño de muchos filtros en tiempo continuo selectivos en frecuencia es diseñar primero un filtro paso bajo prototipo normalizado en frecuencia y después, utilizando una transformación algebraica, obtener el filtro deseado a partir del filtro paso bajo prototipo (véanse Guillemin, 1957 y Daniels, 1974). En el caso de filtros e tiempo discreto selectivos en frecuencia, podríamos diseñar un filtro en tiempo continuo selectivo en frecuencia del tipo deseado, y transformarlo después en un filtro en tiempo discreto. Este procedimiento sería aceptable con la transformación bilineal, pero es claro que el método de invarianza al impulso no se puede utilizar para transformar filtros e tiempo continuo paso alto y banda eliminada en los correspondientes filtros en tiempo discreto, debido al solapamiento resultante del muestreo. Un procedimiento alternativo que funciona con la transformación bilineal o con el método de invarianza al impulso es diseñar un filtro paso bajo prototipo en tiempo discreto y realizar después una transformación algebraica sobre él, para obtener el filtro en tiempo discreto selectivo en frecuencia deseado.

Los filtros selectivos en frecuencia de tipos paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada se pueden obtener partiendo de un filtro paso bajo en tiempo discreto mediante el uso de transformaciones muy similares a la transformación bilineal utilizada para transformar funciones de transferencia en tiempo continuo en funciones de transferencia en tiempo discreto. Para ver cómo se puede hacer, supongamos que tenemos una función de transferencia paso bajo $H_{\text{lp}}(Z)$ que se desea transformar en una nueva función de transferencia $H(z)$, con característica de paso bajo, paso alto, paso banda o banda eliminada cuando se evalúa en la circunferencia unidad. Nótese que utilizamos la variable compleja Z para el filtro paso bajo prototipo y la variable compleja z para el filtro transformado. Entonces, podemos definir una transformación del plano Z en el plano z de la forma

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) \tag{7.38}$$

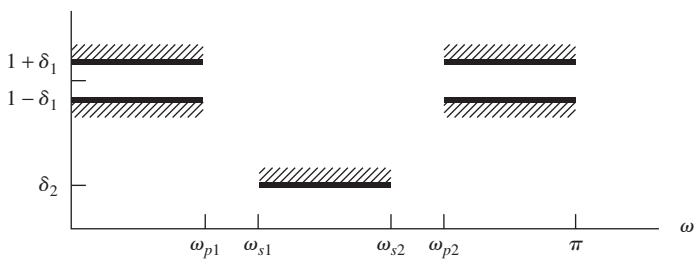


Figura 7.23 Esquema de tolerancia de un filtro multibanda.

tal que

$$H(z) = H_{\text{lp}}(Z)\big|_{Z^{-1}=G(z^{-1})} \tag{7.39}$$

En lugar de expresar Z como función de z, en la Ecuación (7.38) hemos supuesto que es Z^{-1} la que se expresa en función de z^{-1}. Por tanto, de acuerdo con la Ecuación (7.39), al obtener $H(z)$ a partir de $H_{\text{lp}}(z)$ se sustituye Z^{-1} en la función $H_{\text{lp}}(Z)$ por la función $G(z^{-1})$. Es una representación adecuada, ya que $H_{\text{lp}}(Z)$ se expresa normalmente como una función racional de Z^{-1}.

Si $H_{\text{lp}}(Z)$ es la función de transferencia racional de un sistema causal y estable, requeriremos de forma natural que la función de transferencia transformada $H(z)$ sea una función racional de z^{-1} y que el sistema sea también causal y estable. Esto impone las siguientes restricciones en la transformación $Z^{-1} = G(z^{-1})$:

1. $G(z^{-1})$ debe ser una función racional de z^{-1}.
2. El interior del círculo unidad del plano Z debe transformarse en el interior del círculo unidad en el plano z.
3. La circunferencia unidad en el plano Z debe transformarse en la circunferencia unidad en el plano z.

Sean θ y ω las variables de frecuencia (ángulos) en el plano Z y en el plano z, respectivamente; es decir, en las correspondientes circunferencias unidad $Z = e^{j\theta}$ y $z = e^{j\omega}$. Entonces, para que se cumpla la condición 3, se debe cumplir que

$$e^{-j\theta} = |G(e^{-j\omega})|e^{j\angle G(e^{-j\omega})}, \tag{7.40}$$

y por tanto,

$$|G(e^{-j\omega})| = 1. \tag{7.41}$$

En consecuencia, la relación entre las variables de frecuencia es

$$-\theta = \angle G(e^{-j\omega}). \tag{7.42}$$

Constantinides (1970) demostró que la forma más general de la función $G(z^{-1})$ que cumple las restricciones anteriores es

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \tag{7.43}$$

Teniendo en cuenta la presentación de los sistemas paso todo del Capítulo 5, debe ser claro que $G(z^{-1})$ expresada como indica la Ecuación (7.43) cumple la Ecuación (7.41), y se puede demostrar fácilmente que la Ecuación (7.43) transforma el interior del círculo unidad en el plano Z en el interior del círculo unidad en el plano z si y sólo si $|\alpha_k| < 1$. Escogiendo los valores apropiados de N y de las constantes α_k, se pueden obtener diferentes transformaciones. La más simple es la que transforma un filtro paso bajo en otro filtro paso bajo con diferentes frecuencias de corte de las bandas de paso y eliminada. En este caso,

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}. \tag{7.44}$$

Sustituyendo $Z = e^{j\theta}$ y $z = e^{j\omega}$ se obtiene

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}, \tag{7.45}$$

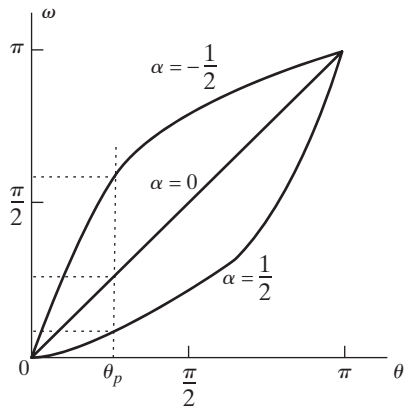


Figura 7.24 Distorsión de la escala de frecuencia en una transformación paso bajo–paso bajo.

de donde se deduce que

$$\omega = \arctan\left[\frac{(1-\alpha^2)\operatorname{sen}\theta}{2\alpha + (1+\alpha^2)\cos\theta}\right]. \tag{7.46}$$

Esta relación se muestra para diferentes valores de α en la Figura 7.24. Aunque en dicha figura resulta evidente una distorsión de la escala de frecuencia (excepto en el caso de $\alpha = 0$, que corresponde a $Z^{-1} = z^{-1}$), si el sistema original tiene una respuesta en frecuencia paso bajo constante por tramos, con frecuencia de corte θ_p, entonces el sistema transformado tendrá también una respuesta en frecuencia paso bajo similar con frecuencia de corte ω_p determinada por el valor de α.

Despejando α en función de θ_p y ω_p, se obtiene

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen}[(\theta_p - \omega_p)/2]}{\operatorname{sen}[(\theta_p + \omega_p)/2]}. \tag{7.47}$$

Por tanto, para usar estos resultados con el fin de obtener un filtro paso bajo $H(z)$ con frecuencia de corte ω_p a partir de un filtro paso bajo ya disponible $H_{\text{lp}}(Z)$ con frecuencia de corte θ_p, debe usarse la Ecuación (7.47) para determinar el valor de α en la expresión

$$H(z) = H_{\text{lp}}(Z)\big|_{Z^{-1}=(z^{-1}-\alpha)/(1-\alpha z^{-1})}. \tag{7.48}$$

(En el Problema 7.51 se explora cómo se puede utilizar la transformación paso bajo para obtener una estructura de red de un filtro de frecuencia de corte variable, estando dicha frecuencia de corte determinada por un único parámetro α.)

Las transformaciones de un filtro paso bajo en paso alto, paso banda y banda eliminada se pueden obtener de forma similar. La Tabla 7.1 resume dichas transformaciones. En las fórmulas de diseño, se supone que todas las frecuencias de corte están entre cero y π radianes. El ejemplo siguiente ilustra el uso de estas transformaciones.

TABLA 7.1 TRANSFORMACIONES DE UN FILTRO DIGITAL PASO BAJO PROTOTIPO DE FRECUENCIA DE CORTE θ_p EN FILTROS PASO ALTO, PASO BANDA Y BANDA ELIMINADA.

Tipo de filtro	Transformaciones	Fórmulas de diseño asociadas
Paso bajo	$Z^{-1} = \dfrac{z^{-1}-\alpha}{1-az^{-1}}$	$\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_p-\omega_p}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_p+\omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p =$ frecuencia de corte deseada
Paso alto	$Z^{-1} = -\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\dfrac{\cos\left(\frac{\theta_p+\omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p-\omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p =$ frecuencia de corte deseada
Paso banda	$Z^{-1} = -\dfrac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$	$\alpha = \dfrac{\cos\left(\frac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}\right)}$ $k = \cot\left(\dfrac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}\right)\tan\left(\dfrac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_{p1} =$ frecuencia de corte inferior deseada $\omega_{p2} =$ frecuencia de corte superior deseada
Banda eliminada	$Z^{-1} = \dfrac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$	$\alpha = \dfrac{\cos\left(\frac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}\right)}$ $k = \tan\left(\dfrac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2}\right)\tan\left(\dfrac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_{p1} =$ frecuencia de corte inferior deseada $\omega_{p2} =$ frecuencia de corte superior deseada

Ejemplo 7.6 Transformación de un filtro paso bajo en un filtro paso alto

Consideremos un filtro paso bajo de Chebyshev tipo I cuya función de transferencia es

$$H_{\text{lp}}(Z) = \frac{0{,}001836(1+Z^{-1})^4}{(1-1{,}5548Z^{-1}+0{,}6493Z^{-2})(1-1{,}4996Z^{-1}+0{,}8482Z^{-2})}. \tag{7.49}$$

Este sistema de cuarto orden se diseña para cumplir las siguientes especificaciones:

$$0{,}89125 \le |H_{\text{lp}}(e^{j\theta})| \le 1, \quad 0 \le \theta \le 0{,}2\pi, \tag{7.50a}$$

$$|H_{\text{lp}}(e^{j\theta})| \le 0{,}17783, \quad 0{,}3\pi \le \theta \le \pi. \tag{7.50b}$$

La respuesta en frecuencia de este filtro se muestra en la Figura 7.25.

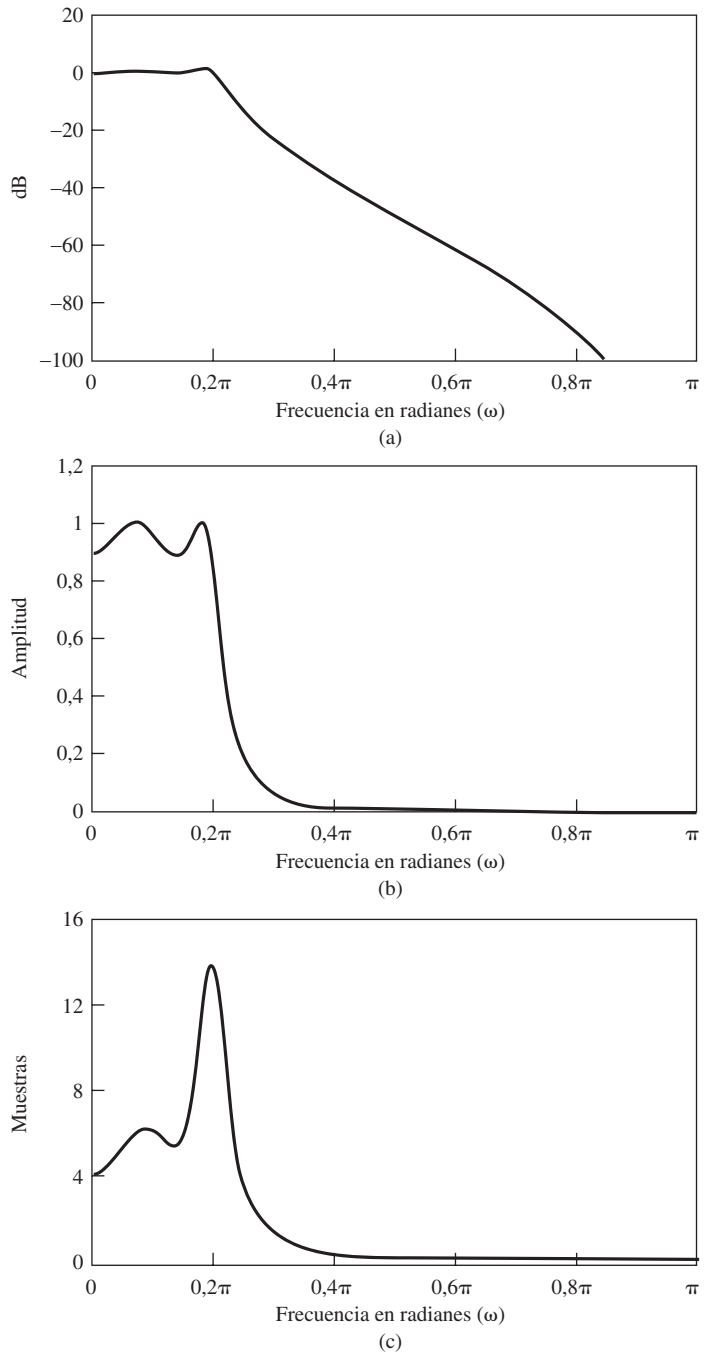


Figura 7.25 Respuesta en frecuencia del filtro paso bajo de Chebyshev de cuarto orden. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Módulo (c) Retardo de grupo.

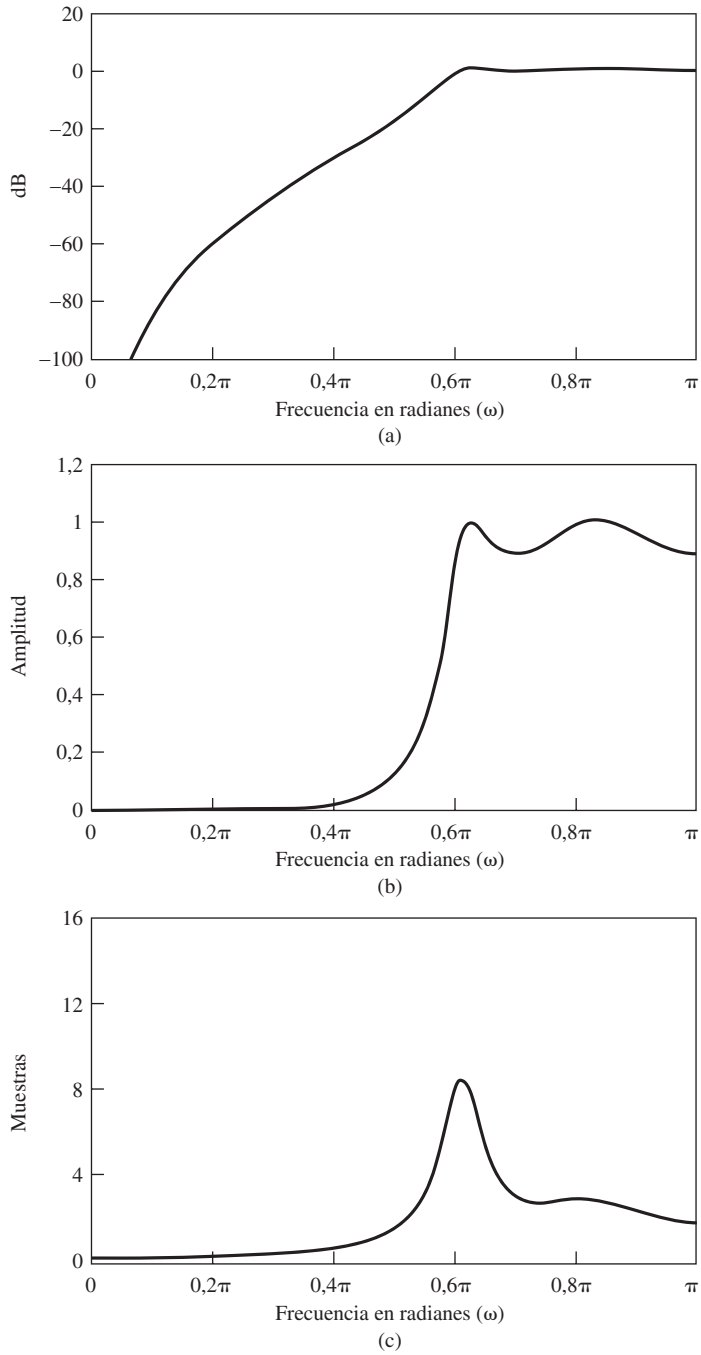


Figura 7.26 Respuesta en frecuencia del filtro alto bajo de Chebyshev de cuarto orden obtenido por transformación en frecuencia. (a) Logaritmo del módulo en dB. (b) Módulo (c) Retardo de grupo.

Para transformar este filtro en un filtro paso alto con frecuencia de corte en la banda de paso de $\omega_p = 0{,}6\pi$, observando la Tabla 7.1 se obtiene

$$\alpha = -\frac{\cos[(0{,}2\pi + 0{,}6\pi)/2]}{\cos[(0{,}2\pi - 0{,}6\pi)/2]} = -0{,}38197. \tag{7.51}$$

Por tanto, utilizando la transformación paso bajo - paso banda indicada en la Tabla 7.1 resulta

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{\text{lp}}(Z)\big|_{Z^{-1}=-[(z^{-1}-0{,}38197)/(1-0{,}38197z^{-1})]} \\ &= \frac{0{,}02426(1-z^{-1})^4}{(1+1{,}0416z^{-1}+0{,}4019z^{-2})(1+0{,}5661z^{-1}+0{,}7657z^{-2})}. \end{aligned} \tag{7.52}$$

La Figura 7.26 muestra la respuesta en frecuencia de este sistema. Nótese que, excepto por alguna distorsión en la escala de frecuencias, la respuesta en frecuencia paso alto se parece mucho a la respuesta en frecuencia paso bajo desplazada π unidades en frecuencia. Fíjese también en que el cero de cuarto orden en $Z = -1$ del filtro paso bajo aparece ahora en $z = 1$ en el filtro paso alto. En este ejemplo se verifica también que las transformaciones de este tipo conservan el rizado constante en la banda de paso y en la banda eliminada. Por último, observe también que el retardo de grupo que se muestra en la Figura 7.26(c) no es simplemente una versión estirada y desplazada del que se muestra en la Figura 7.25(c). Esto es porque las variaciones de fase se estiran y desplazan, por lo que la derivada de la fase es menor para el filtro paso alto.

7.5. DISEÑO DE FILTROS FIR MEDIANTE ENVENTANADO

Como se presentó en la Sección 7.2, las técnicas utilizadas comúnmente para el diseño de filtros IIR han evolucionado partiendo de la aplicación de transformaciones de sistemas IIR en tiempo continuo en sistemas IIR en tiempo discreto. Por el contrario, las técnicas de diseño de filtros FIR se basan en aproximar directamente la respuesta en frecuencia o la respuesta al impulso deseadas del sistema en tiempo discreto.

El método más simple de diseño de filtros FIR se denomina *método de enventanado*. Este método parte generalmente de una respuesta en frecuencia deseada ideal que se puede representar como

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}, \tag{7.53}$$

siendo $h_d[n]$ la correspondiente secuencia de respuesta al impulso, que se puede expresar en función de $H_d(e^{j\omega})$ como

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{7.54}$$

Muchos sistemas se definen de forma idealizada mediante respuestas en frecuencia constantes por tramos o suaves por tramos, con discontinuidades en los límites de las bandas. Como resultado, la respuesta al impulso de estos sistemas es no causal e infinitamente larga. La forma más directa de obtener una aproximación FIR causal a estos sistemas consiste en truncar la respuesta al impulso ideal. La Ecuación (7.53) puede verse como el desarrollo en serie de Fourier de la respuesta en frecuencia periódica $H_d(e^{j\omega})$, donde los valores de la secuencia $h_d[n]$ juegan el papel de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Por tanto, la aproximación de un filtro ideal mediante el truncamiento de la respuesta al impulso ideal es idéntica al tema de la convergencia del desarrollo en serie de Fourier, algo que ha

sido largamente estudiado. Un concepto particularmente importante es el fenómeno de Gibbs, que se comentó en el Ejemplo 2.18. En la exposición que sigue, veremos cómo este fenómeno de convergencia no uniforme se manifiesta también en el diseño de filtros FIR.

Una forma particularmente simple de obtener un filtro FIR causal a partir de $h_d[n]$ es definir un nuevo sistema con respuesta al impulso $h_d[n]$ dada por[4]

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{7.55}$$

De forma más general, $h[n]$ se puede representar como el producto de la respuesta al impulso deseada y una "ventana" de longitud finita $w[n]$; es decir,

$$h[n] = h_d[n]w[n], \tag{7.56}$$

donde, para el truncamiento simple que indica la Ecuación (7.55) la ventana aplicada es la *ventana rectangular*

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{7.57}$$

utilizando el teorema de modulación o enventanado (Sección 2.9.7), se puede ver que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \tag{7.58}$$

Es decir, $H(e^{j\omega})$ es la convolución periódica de la respuesta en frecuencia ideal deseada con la transformada de Fourier de la ventana. Por tanto, la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ será una versión "distorsionada" de la respuesta deseada $H_d(e^{j\omega})$. La Figura 7.27(a) muestra funciones típicas $H_d(e^{j\theta})$ y $W(e^{j(\omega-\theta)})$ en función de θ, como se usarían en la Ecuación (7.58).

Si $w[n] = 1$ para todo n (es decir, no truncamos en absoluto), $W(e^{j\omega})$ es un tren periódico de impulsos de periodo 2π y, por tanto, $H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$. Esta interpretación sugiere que si se selecciona $w[n]$ de forma que $W(e^{j\omega})$ se concentre en una banda estrecha de frecuencias alrededor de $\omega = 0$, entonces $H(e^{j\omega})$ se "parecerá mucho" a $H_d(e^{j\omega})$, excepto donde esta última cambie muy abruptamente. En consecuencia, la selección de la ventana está gobernada por el deseo de que la duración de $w[n]$ sea tan corta como sea posible para minimizar los cálculos necesarios en la realización del filtro, pero de forma que $W(e^{j\omega})$ se aproxime a un impulso, es decir, que esté altamente concentrada en frecuencia de forma que la convolución de la Ecuación (7.58) reproduzca fielmente la respuesta en frecuencia deseada. Estos dos requerimientos entran en conflicto, como puede verse en el caso de la ventana rectangular de la Ecuación (7.57), donde

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2}\frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}. \tag{7.59}$$

[4]La notación de los sistemas FIR se presentó en el Capítulo 5. Es decir, M es el grado del polinomio de la función de transferencia. Por tanto, $(M+1)$ es la longitud, o duración, de la respuesta al impulso. En la literatura se utiliza a menudo N para indicar la longitud de la respuesta al impulso de un filtro FIR. Sin embargo, nosotros hemos utilizado N para indicar el grado del polinomio del denominador de la función de transferencia de un sistema IIR. Por tanto, para evitar confusiones y con el fin de mantener la coherencia a lo largo del texto, consideraremos siempre que la longitud de la respuesta en frecuencia de un filtro FIR es $(M+1)$.

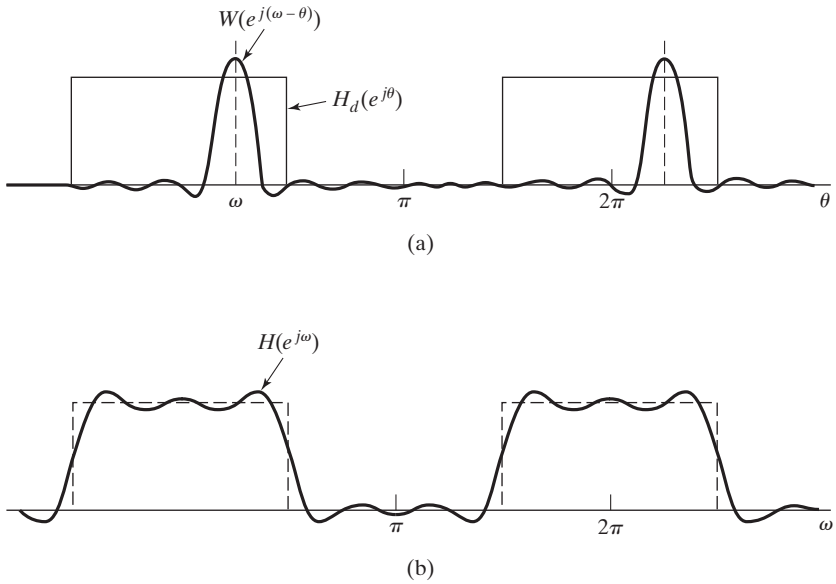


Figura 7.27 (a) Proceso de convolución implicado por el truncamiento de la respuesta al impulso ideal. (b) Aproximación típica resultante del enventanado de la respuesta al impulso ideal.

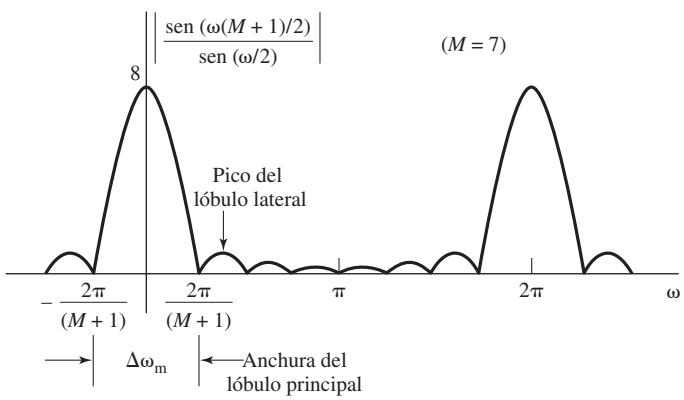


Figura 7.28 Módulo de la transformada de Fourier de una ventana rectangular ($M = 7$).

La Figura 7.28 muestra el módulo de la función $\text{sen}[\omega(M+1)/2]/\text{sen}(\omega/2)$ para el caso de $M = 7$. Nótese que $W(e^{j\omega})$ para la ventana rectangular tiene fase lineal generalizada. A medida que M crece, el ancho del "lóbulo principal" decrece. El lóbulo principal se define generalmente como la región comprendida entre los primeros cruces por cero a ambos lados del origen. Para la ventana rectangular, el ancho del lóbulo principal es $\Delta\omega_m = 4\pi/(M+1)$. Sin embargo, para el caso de la ventana rectangular, los lóbulos laterales son altos y de hecho, a medida que M crece, las amplitudes de pico del lóbulo principal y de los lóbulos secundarios también crecen de forma que el área encerrada en cada lóbulo permanece constante mientras que su anchura decrece con M. Por tanto, cuando $W(e^{j(\omega-\theta)})$ se "desliza" por la discontinuidad de $H_d(e^{j\theta})$ al variar ω, la integral de $W(e^{j(\omega-\theta)})H_d(e^{j\theta})$ oscilará cuando cada

lóbulo lateral de $W(e^{j(\omega-\theta)})$ pase por la discontinuidad. Este resultado se muestra en la Figura 7.27(b). Como el área de cada lóbulo permanece constante al crecer M, las oscilaciones ocurren más rápidamente, pero no disminuyen su amplitud al aumentar M.

En la teoría de series de Fourier, es un hecho bien conocido que esta convergencia no uniforme, el *fenómeno de Gibbs,* se puede moderar mediante el uso de un truncamiento menos abrupto del desarrollo en serie de Fourier. Si la ventana desciende suavemente hacia cero en cada extremo, la altura de los lóbulos laterales se puede reducir, pero a expensas de una mayor anchura del lóbulo principal y por lo tanto de una transición más ancha en la discontinuidad.

7.5.1. Propiedades de las ventanas comúnmente utilizadas

La Figura 7.29 muestra algunas de las ventanas más comúnmente utilizadas. Estas ventanas se definen mediante las siguientes ecuaciones:

Rectangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{7.60a}$$

Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \le n \le M/2,\ M \text{ par} \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \le M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{7.60b}$$

Hann

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{7.60c}$$

Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{7.60d}$$

Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}42 - 0{,}5\cos(2\pi n/M) + 0{,}08\cos(4\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{7.60e}$$

(Por conveniencia, la Figura 7.29 muestra estas ventanas como funciones de una variable continua. Sin embargo, como se indica en las Ecuaciones (7.60), la secuencia de ventana sólo está definida para valores enteros de n.)

Las ventanas de Bartlett, Hann, Hamming y Blackman deben todas su nombre a sus descubridores. La ventana de Hanning se debe a Julius von Hann, un meteorólogo austríaco, y se denomina a veces ventana de Hann. El término "hanning" fue utilizado por Blackman y Tukey (1958) para describir la operación de la aplicación de esta ventana a una señal y se ha convertido en el nombre más amplia-

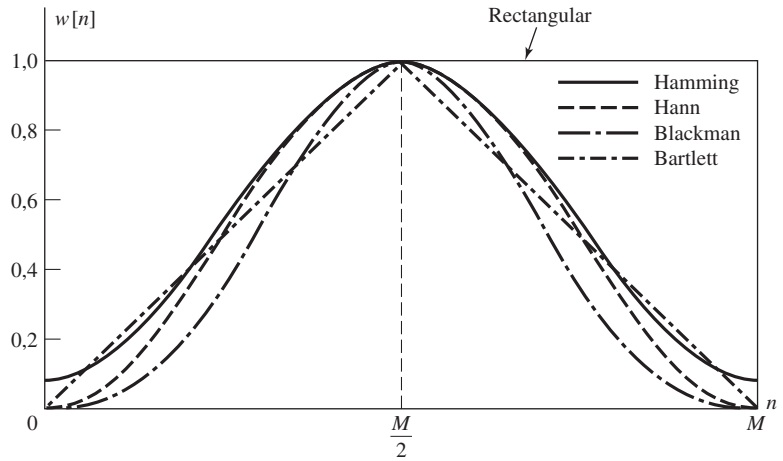


Figura 7.29 Ventanas comúnmente utilizadas.

mente utilizado de esta ventana, con preferencias variadas sobre la utilización del término "Hanning" o "hanning". Hay alguna ligera variación en la definición de las ventanas de Barlett y Hann. Tal como las hemos definido, $w[0] = w[M] = 0$, por lo que sería razonable afirmar que, con esta definición, la longitud de la ventana es realmente de $M - 1$ muestras. Otras definiciones de las ventanas de Barlett y Hann se relacionan con la nuestra mediante un desplazamiento de una muestra y una redefinición de la longitud de la ventana.

Como veremos en el Capítulo 10, las ventanas definidas en las Ecuaciones (7.60) se utilizan habitualmente tanto para análisis espectral como para el diseño de filtros FIR. Tienen la deseable propiedad de que sus transformadas de Fourier se concentran alrededor de $\omega = 0$, además, su expresión funcional es sencilla, de forma que se pueden calcular fácilmente. La transformada de Fourier de la ventana de Bartlett se puede expresar como el producto de transformadas de Fourier de ventanas rectangulares y las transformadas de Fourier de las otras ventanas se pueden expresar como sumas de transformadas de Fourier de la ventana rectangular (dada en la Ecuación (7.59)) desplazadas en frecuencia (véase el Problema (7.43)).

La Figura 7.30 muestra la función $20\log_{10}|W(e^{j\omega})|$ para cada una de las ventanas anteriores con $M = 50$. Puede verse claramente que la ventana rectangular es la que tiene el lóbulo principal más estrecho y, por tanto, para una longitud determinada, es la que producirá en $H(e^{j\omega})$ transiciones más abruptas en cada discontinuidad de $H_d(e^{j\omega})$. Sin embargo, el primer lóbulo está sólo 13 dB por debajo del pico del lóbulo principal, lo que produce oscilaciones de $H(e^{j\omega})$ de tamaño considerable en los alrededores de las discontinuidades de $H_d(e^{j\omega})$. La Tabla 7.2, que compara las ventanas de las Ecuaciones (7.60), muestra que los extremos de la ventana caen a cero suavemente en las ventanas de Hamming, Hanning y Blackman. En dichas ventanas los lóbulos laterales (segunda columna) reducen grandemente su amplitud. Sin embargo, se paga el precio de un lóbulo principal mucho más ancho (tercera columna) y, en consecuencia, transiciones más anchas en las discontinuidades de $H_d(e^{j\omega})$. Las otras columnas de la Tabla 7.2 se comentarán posteriormente.

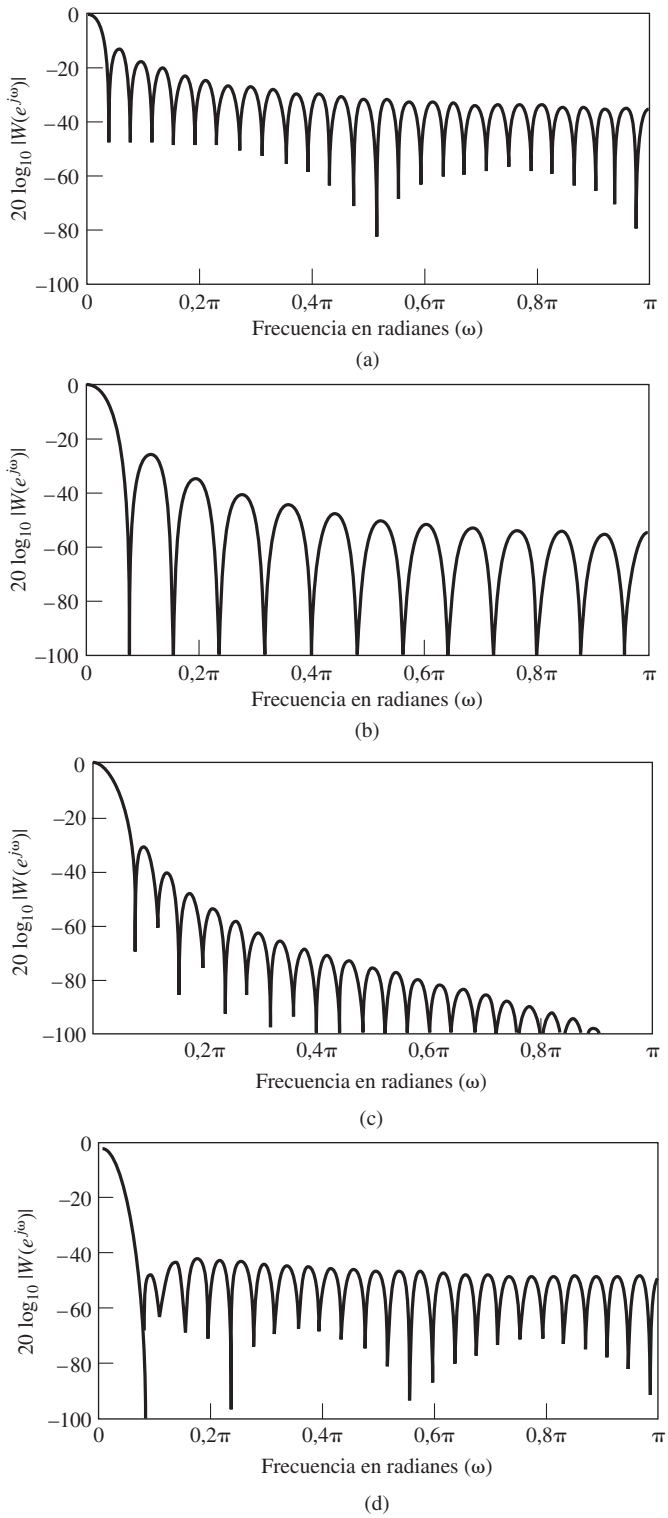
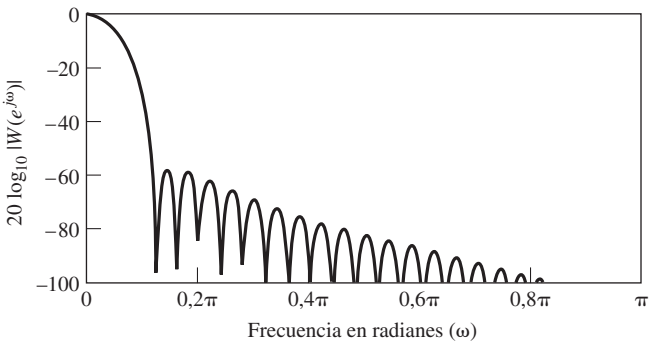


Figura 7.30 Transformadas de Fourier (logaritmo del módulo) de las ventanas de la Figura 7.29 con $M = 50$. (a) Rectangular. (b) Bartlett. (c) Hann. (d) Hamming.



(e)

Figura 7.30 (*Continuación*) (e) Blackman.

TABLA 7.2 COMPARACIÓN DE VENTANAS COMÚNMENTE UTILIZADAS.

Tipo de ventana	Amplitud de pico de los lóbulos laterales (relativa) (dB)	Anchura aproximada del lóbulo principal	Pico del error de aproximación, $20\log_{10}\delta$ (dB)	Ventana de Kaiser equivalente, β	Anchura de la transición de de la ventana de Kaiser equivalente
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1{,}81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2{,}37\pi/M$
Hann	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5{,}01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6{,}27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9{,}19\pi/M$

7.5.2. Incorporación de la fase lineal generalizada

Al diseñar muchos tipos de filtros FIR, es deseable obtener sistemas causales con una respuesta de fase lineal generalizada. Todas las ventanas de las Ecuaciones (7.60) se han definido teniendo en cuenta esta necesidad. Concretamente, todas las ventanas tienen la propiedad de que

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto;} \end{cases} \tag{7.61}$$

Es decir, son simétricas con respecto al punto $M/2$. Como resultado, las transformadas de Fourier son de la forma

$$W(e^{j\omega}) = W_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \tag{7.62}$$

siendo $W_e(e^{j\omega})$ una función real y par de ω. Esto se ilustra en la Ecuación (7.59). El convenio de la Ecuación (7.61) conduce en general a filtros causales y, si la respuesta al impulso deseada es también simétrica con respecto a $M/2$, es decir, si $h_d[M-n] = h_d[n]$, la respuesta al impulso enventanada poseerá también esa simetría y la respuesta en frecuencia resultante tendrá también fase lineal generalizada. Es decir,

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \tag{7.63}$$

siendo $A_e(e^{j\omega})$ una función real y par de ω. De la misma forma, si la respuesta al impulso deseada es antisimétrica con respecto a $M/2$, es decir, si $h_d[M-n] = -h_d[n]$, la respuesta al impulso enventanada será también antisimétrica con respecto a $M/2$, y la respuesta en frecuencia resultante tendrá una fase lineal generalizada con un desplazamiento de fase constante de noventa grados. Es decir,

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \tag{7.64}$$

siendo $A_o(e^{j\omega})$ una función real e impar de ω.

Aunque los resultados anteriores son directos si consideramos el producto de la ventana simétrica por la respuesta al impulso simétrica (o antisimétrica) deseada, es útil considerar la representación en el dominio de la frecuencia. Supongamos que $h_d[M-n] = h_d[n]$. Entonces,

$$H_d(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \tag{7.65}$$

donde $H_e(e^{j\omega})$ es real y par.

Si la ventana es simétrica, se pueden sustituir las Ecuaciones (7.62) y (7.65) en la Ecuación (7.58), con lo que se obtiene

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})e^{-j\theta M/2}W_e(e^{j(\omega-\theta)})e^{-j(\omega-\theta)M/2}d\theta. \tag{7.66}$$

Unos cambios simples en los factores de fase producen

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}, \tag{7.67}$$

siendo

$$A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})W_e(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \tag{7.68}$$

Por tanto, vemos que el sistema resultante tiene fase lineal generalizada y además, la función real $A_e(e^{j\omega})$ es el resultado de realizar la convolución periódica de las funciones reales $H_e(e^{j\omega})$ y $W_e(e^{j\omega})$.

El comportamiento detallado de la convolución de la Ecuación (7.68) determina la respuesta en amplitud del filtro resultante del enventanado. El siguiente ejemplo es una ilustración para un filtro paso bajo de fase lineal.

Ejemplo 7.7 Filtro paso bajo de fase lineal

La respuesta en frecuencia deseada es

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \tag{7.69}$$

donde el factor de fase lineal generalizada se ha incorporado en la definición del filtro paso bajo ideal. La correspondiente respuesta al impulso ideal es

$$h_{\text{lp}}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\text{sen}[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)} \tag{7.70}$$

para $-\infty < n < \infty$. Se puede demostrar fácilmente que $h_{\text{lp}}[M-n] = h_{\text{lp}}[n]$, de modo que si utilizamos una ventana simétrica en la ecuación

$$h[n] = \frac{\operatorname{sen}[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)} w[n], \tag{7.71}$$

resultará un sistema con fase lineal.

La parte superior de la Figura 7.31 muestra el tipo de respuesta en amplitud que resultaría para todas las ventanas de las Ecuaciones (7.60), excepto para la ventana de Bartlett, que raramente se utiliza en el diseño de filtros (la ventana de Bartlett produciría una función $A_e(e^{j\omega})$ monótona, ya que $W_e(e^{j\omega})$ es una función positiva). La figura muestra las propiedades importantes de las aproximaciones por el método de ventanas a respuestas en frecuencia deseadas que tienen discontinuidades tipo salto. Aplica de forma precisa cuando ω_c no está cercano a cero o a π y cuando la anchura del lóbulo principal es menor que $2\omega_c$. En la parte inferior de la figura aparece una transformada de Fourier típica de una ventana simétrica (excepto por la fase lineal). Esta función debe imaginarse en diferentes posiciones como ayuda a la comprensión de la forma de la aproximación $A_e(e^{j\omega})$ en las proximidades de ω_c.

Cuando $\omega = \omega_c$, la función simétrica $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ está centrada en la discontinuidad, y aproximadamente la mitad del área contribuye a $A_e(e^{j\omega})$. Podemos ver también que el pico de la sobreoscilación positiva aparece cuando $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ se desplaza de forma que el primer lóbulo lateral negativo de la derecha queda justamente a la derecha de ω_c. Similarmente, el pico de la sobreoscilación negativa aparece cuando el primer lóbulo lateral de la izquierda está justamente a la izquierda de ω_c. Esto significa que la distancia entre los picos del rizado a cada lado de la discontinuidad es aproximadamente la anchura del lóbulo principal $\Delta\omega_m$, como se muestra en la Figura 7.31. La anchura de la transición $\Delta\omega$ tal como se define en la figura, es por tanto algo menor que la anchura del lóbulo principal. Finalmente, debido a la simetría de $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$, la aproximación tiende a ser simétrica alrededor de ω_c. Es decir, la aproximación presenta un pico de oscilación positiva de tamaño δ en la banda de paso y un pico de oscilación negativa del mismo tamaño en la banda eliminada.

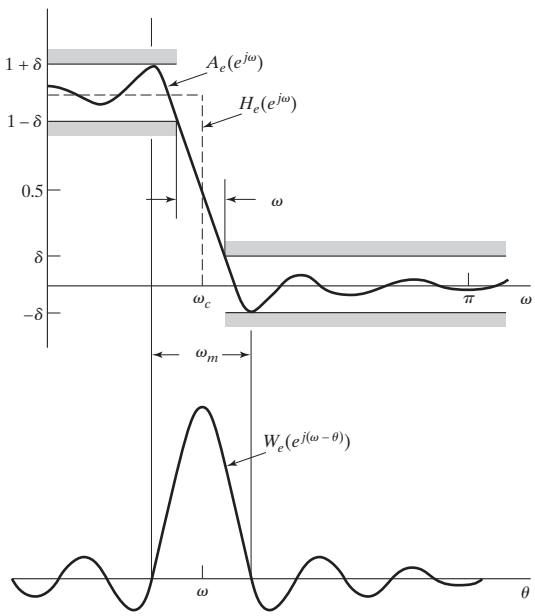


Figura 7.31 Ilustración del tipo de aproximación que se obtiene en una discontinuidad de la respuesta en frecuencia ideal.

La cuarta columna de la Tabla 7.2 muestra el pico del error de aproximación (en dB) para las ventanas de las Ecuaciones (7.60). Puede verse claramente que las ventanas con menores lóbulos laterales producen mejores aproximaciones a la respuesta ideal en las discontinuidades. Además, la tercera columna, que muestra la anchura del lóbulo principal, sugiere que se pueden conseguir regiones de transición más estrechas aumentando M. Por tanto, mediante la selección de la forma y la duración de la ventana se pueden controlar las propiedades del filtro FIR resultante. Sin embargo, ensayar con diversos tipos de ventanas y de longitudes mediante prueba y error no es una forma muy satisfactoria de diseñar filtros. Afortunadamente, Kaiser (1974) desarrolló una formalización simple del método de ventanas.

7.5.3. El método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser

El compromiso entre anchura del lóbulo principal y área de los lóbulos laterales se puede cuantificar buscando la función de ventana que esté concentrada de forma máxima alrededor de $\omega = 0$ en el dominio de la frecuencia. Este asunto se ha considerado en profundidad en una serie de artículos clásicos de Slepian et al. (1961). La solución que se encontró en esos trabajos utiliza funciones de onda esferoidales, que son difíciles de calcular y por tanto inadecuadas para el diseño de filtros. Sin embargo, Kaiser (1966, 1974) descubrió que se puede formar una ventana cuasi-óptima utilizando la función de Bessel modificada de primera especie, que es mucho más sencilla de calcular. La ventana de Kaiser se define como

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{7.72}$$

siendo $\alpha = M/2$, e $I_0(\cdot)$ la función de Bessel modificada de primera especie. A diferencia de las otras ventanas de las Ecuaciones (7.60), la ventana de Kaiser tiene dos parámetros: la longitud $(M+1)$ y el parámetro de forma β. Variando $(M+1)$ y β, se pueden ajustar la longitud y la forma de la ventana, ajustándose a su vez el compromiso entre la amplitud de los lóbulos laterales y la anchura del lóbulo principal. La Figura 7.32(a) muestra envolventes continuas de ventanas de Kaiser de longitud $M+1 = 21$ para $\beta = 0, 3$ y 6. Observando la Ecuación (7.72), vemos que el caso de $\beta = 0$ se reduce a la ventana rectangular. La Figura 7.32(b) muestra las correspondientes transformadas de Fourier de las ventanas de Kaiser con $\beta = 6$ y M = 10, 20 y 40. Las gráficas de las Figuras 7.32(b) y (c) muestran claramente que se puede conseguir ajustar el compromiso. Si la ventana desciende a cero más suavemente, los lóbulos laterales de la transformada de Fourier disminuyen, pero el lóbulo principal se hace más ancho. La Figura 7.32(c) muestra que si se aumenta M manteniendo β constante, el lóbulo principal reduce su anchura, pero no se modifica la amplitud de los lóbulos laterales. De hecho, Kaiser obtuvo, mediante amplias experimentaciones numéricas, una pareja de fórmulas que permiten al diseñador de filtros predecir los valores de M y β necesarios para cumplir una determinada especificación de selectividad en frecuencia. La gráfica superior de la Figura 7.31 es también representativa del comportamiento típico que se obtiene utilizando la ventana de Kaiser. Kaiser (1974) descubrió también que, sobre un intervalo suficientemente amplio de condiciones, el pico del error de aproximación (δ en la Figura 7.31) está determinado por la selección de β. Supuesto δ fijo, la frecuencia de corte de la banda de paso ω_p del filtro paso bajo se define como la máxima frecuencia para la que $|H(e^{j\omega})| \ge 1-\delta$. La frecuencia de corte de la banda eliminada ω_s se define como la mínima frecuencia para la que $|H(e^{j\omega})| \le \delta$. Por tanto, la anchura de la región de transición es

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p \tag{7.73}$$

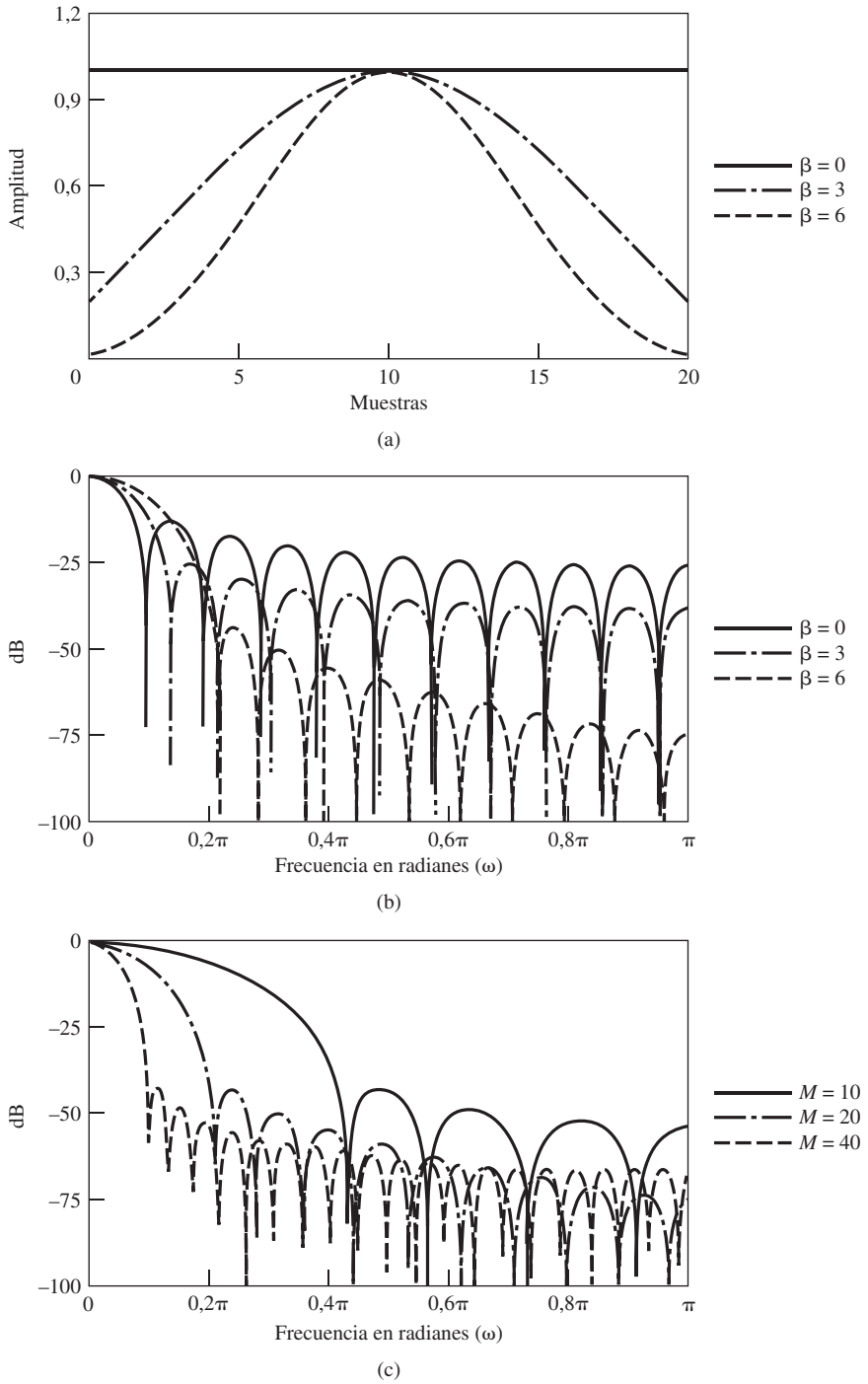


Figura 7.32 (a) Ventanas de Kaiser para $\beta = 0$, 3, y 6, y $M = 20$. (b) Transformadas de Fourier correspondientes a las ventanas de (a). (c) Transformadas de Fourier de las ventanas de Kaiser con $\beta = 6$ y $M = 10$, 20 y 40.

para la aproximación del filtro paso bajo. Definiendo

$$A = -20\log_{10}\delta, \tag{7.74}$$

Kaiser determinó empíricamente que el valor de β necesario para cumplir un valor especificado de A está dado por

$$\beta = \begin{cases} 0{,}1102(A-8{,}7), & A > 50, \\ 0{,}5842(A-21)^{0{,}4} + 0{,}07886(A-21), & 21 \le A \le 50, \\ 0{,}0, & A < 21. \end{cases} \tag{7.75}$$

(No olvidemos que el caso de $\beta = 0$ es la ventana rectangular para la que $A = 21$.) Además, Kaiser descubrió que para cumplir unos valores especificados de A y $\Delta\omega$, M debe satisfacer

$$M = \frac{A-8}{2{,}285\Delta\omega}. \tag{7.76}$$

La Ecuación (7.76) permite predecir el valor de M con una precisión de ± 2 para un amplio margen de valores de $\Delta\omega$ y A. Por tanto, con estas fórmulas, el método de diseño basado en la ventana de Kaiser casi no requiere iteraciones o prueba y error. Los ejemplos de la Sección 7.6 resumen e ilustran el procedimiento.

Relación de la ventana de Kaiser con otras ventanas

El principio básico del método de diseño de la ventana es truncar la respuesta al impulso ideal con una ventana de longitud finita como las que se han presentado en esta sección. El correspondiente efecto en el dominio de la frecuencia es que la respuesta en frecuencia ideal se convoluciona con la transformada de Fourier de la ventana. Si el filtro ideal es un filtro paso bajo, la discontinuidad de la respuesta en frecuencia se suaviza a medida que el lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana atraviesa la discontinuidad en el proceso de convolución. En una primera aproximación, podemos decir que la anchura de la banda de transición resultante está determinada por la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana, y los rizados de la banda de paso y la banda eliminada están determinados por sus lóbulos laterales. Como los rizados de la banda de paso y la banda eliminada están producidos por la integración de los lóbulos laterales de la ventana simétrica, dichos rizados son aproximadamente iguales. Además, es una buena aproximación suponer que las máximas desviaciones en la banda de paso y en la banda eliminada no dependen de M y sólo se pueden cambiar modificando la forma de la ventana utilizada. Esto se ilustra en la fórmula de Kaiser del parámetro de forma, Ecuación (7.75), que es independiente de M. Las dos últimas columnas de la Tabla 7.2 comparan la ventana de Kaiser con las ventanas de las Ecuaciones (7.60). La quinta columna presenta el parámetro de forma de la ventana de Kaiser (β) que produce el mismo pico de error de aproximación (δ) que la ventana indicada en la primera columna. La sexta columna especifica la correspondiente anchura de transición (utilizando la Ecuación (7.76)) para filtros diseñados con la ventana de Kaiser. Esta fórmula predeciría mucho mejor la anchura de transición para las otras ventanas que la anchura del lóbulo principal dado en la tercera columna de la tabla.

En la Figura 7.33 se muestra una comparación del máximo error de aproximación frente a la anchura de la transición para varias ventanas fijas y para la ventana de Kaiser con diferentes valores de β. La línea de puntos, obtenida mediante la Ecuación (7.76), muestra que la fórmula de Kaiser es una representación precisa para la ventana de Kaiser del error de aproximación en función de la anchura de la transición.

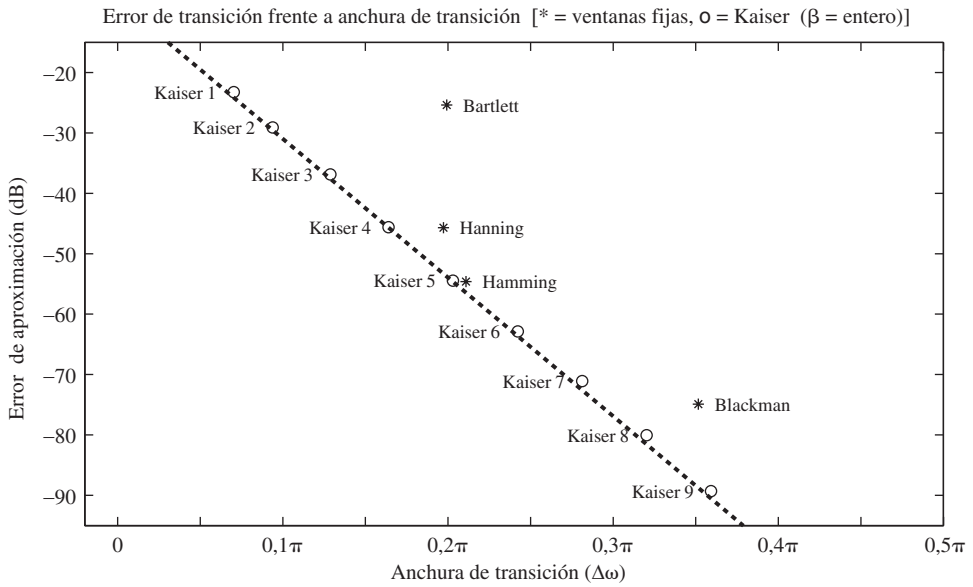


Figura 7.33 Comparación de ventanas fijas con ventanas de Kaiser en una aplicación de diseño de un filtro paso bajo ($M = 32$ y $\omega_c = \pi/2$). (Nótese que el término "Kaiser 6" por ejemplo, significa ventana de Kaiser con $\beta = 6$, etc.)

7.6. EJEMPLOS DE DISEÑO DE FILTROS FIR MEDIANTE EL MÉTODO DE LA VENTANA DE KAISER

En esta sección presentaremos varios ejemplos que ilustran el uso de la ventana de Kaiser para obtener aproximaciones FIR a varios tipos de filtros, entre los que se incluyen los filtros paso bajo. Estos ejemplos sirven para resaltar algunas propiedades importantes de los sistemas FIR.

7.6.1. Filtro paso bajo

Con el uso de las fórmulas de diseño de la ventana de Kaiser, es directo diseñar un filtro FIR paso bajo que cumpla unas determinadas especificaciones. El procedimiento es el siguiente:

1. Primero deben establecerse las especificaciones. Esto significa seleccionar los valores deseados de ω_p y ω_s y el máximo error de aproximación tolerable. Utilizando el método de ventanas, el filtro resultante tendrá el mismo error de pico δ en la banda de paso y en la banda eliminada. En este ejemplo utilizamos las mismas especificaciones que en el Ejemplo 7.5, es decir, $\omega_p = 0{,}4\pi, \omega_s = 0{,}6\pi, \delta_1 = 0{,}01$ y $\delta_2 = 0{,}001$. Como los filtros diseñados por el método de enventanado cumplen inherentemente que $\delta_1 = \delta_2$, debemos hacer que $\delta = 0{,}001$.
2. Hay que determinar la frecuencia de corte del filtro paso bajo ideal. Debido a la simetría de la aproximación en la discontinuidad de $H_d(e^{j\omega})$, sería

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0{,}5\pi.$$

3. Para determinar los parámetros de la ventana de Kaiser debemos calcular primero

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0{,}2\pi, \qquad A = -20\log_{10}\delta = 60.$$

Si sustituimos esas dos cantidades en las Ecuaciones (7.75) y (7.76), obtenemos los valores de β y M. En este ejemplo, las fórmulas predicen que

$$\beta = 5{,}653, \qquad M = 37.$$

4. La respuesta al impulso del filtro se calcula utilizando las Ecuaciones (7.71) y (7.72), y se obtiene

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \cdot \dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

siendo $\alpha = M/2 = 37/2 = 18{,}5$. Como $M = 37$ es un entero impar, el sistema de fase lineal resultante será de tipo II (véase la Sección 5.7.3 para la definición de los cuatro tipos de sistemas FIR con fase lineal generalizada). Las características de la respuesta del filtro se muestran en la Figura 7.34. La Figura 7.34(a), que muestra la respuesta al impulso, ilustra la simetría característica de un sistema de tipo II. La Figura 7.34(b), que muestra el logaritmo de la respuesta de amplitud en dB, indica que $H(e^{j\omega})$ es cero en $\omega = \pi$ o, lo que es lo mismo, que $H(z)$ es cero en $z = -1$, condición que debe cumplir un sistema FIR de tipo II. La Figura 7.34(c) muestra el error de aproximación en la banda de paso y en las bandas eliminadas. La función de este error se define como

$$E_A(\omega) = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \le \omega \le \omega_p, \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_s \le \omega \le \pi. \end{cases} \tag{7.77}$$

(El error no se define en la región de transición, $0{,}4\pi < \omega < 0{,}6\pi$.) Nótese la ligera asimetría del error de aproximación, y también que el error de aproximación de pico es $\delta = 0{,}00113$ en lugar del valor deseado de 0,001. En este caso, es necesario aumentar M hasta 40 para cumplir las especificaciones.

5. Finalmente, puede observarse que no es necesario dibujar la fase o el retardo de grupo, ya que sabemos que la fase es lineal y el retardo es de $M/2 = 18.5$ muestras.

7.6.2. Filtro paso alto

El filtro paso alto ideal con fase lineal generalizada tiene como respuesta en frecuencia

$$H_{\text{hp}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ e^{-j\omega M/2}, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases} \tag{7.78}$$

La correspondiente respuesta al impulso se puede obtener evaluando la transformada inversa de $H_{\text{hp}}(e^{j\omega})$, o bien podemos observar que

$$H_{\text{hp}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} - H_{\text{lp}}(e^{j\omega}), \tag{7.79}$$

donde $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ se da en la Ecuación (7.69). Por tanto, $h_{\text{hp}}[n]$ es

$$h_{\text{hp}}[n] = \frac{\operatorname{sen}\pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)} - \frac{\operatorname{sen}\omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.80}$$

Para diseñar una aproximación FIR al filtro paso alto, podemos proceder de forma similar a como lo hemos hecho en la Sección 7.6.1.

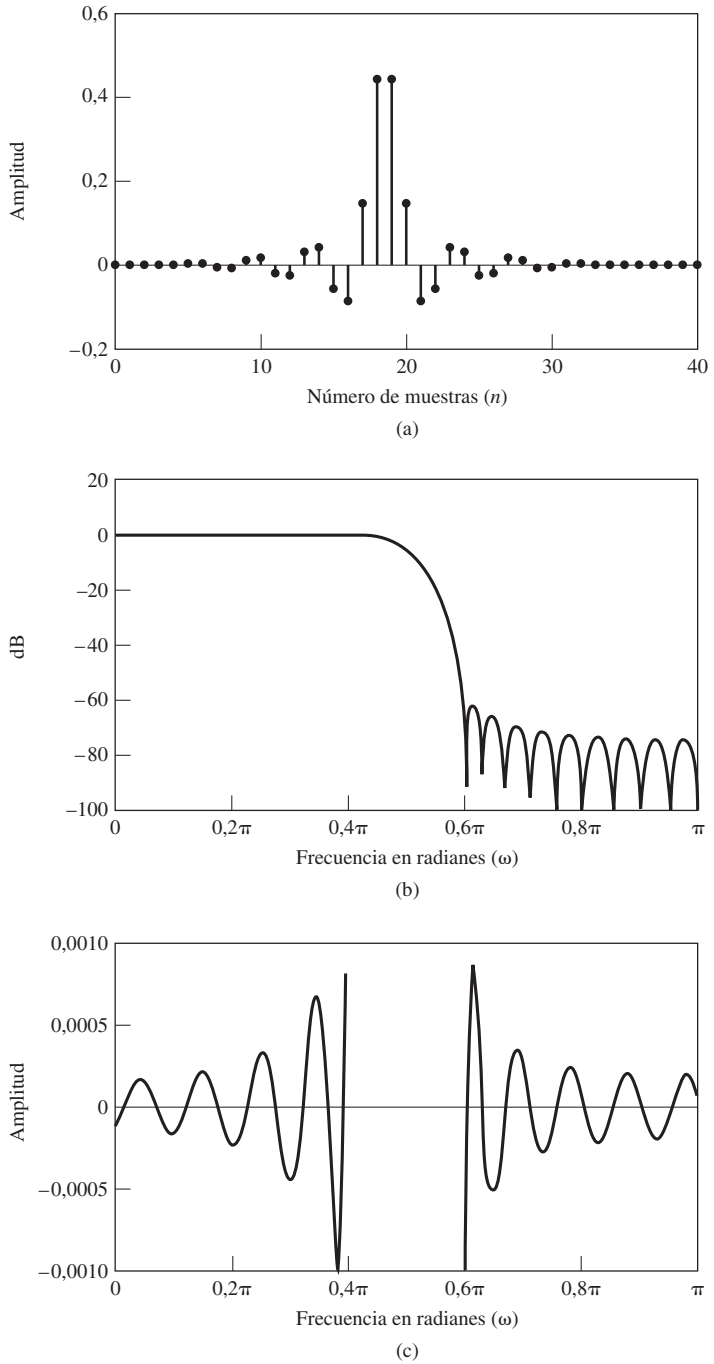


Figura 7.34 Funciones de respuesta para el filtro paso bajo diseñado con una ventana de Kaiser. (a) Respuesta al impulso ($M = 37$). (b) Logaritmo del módulo. (c) Error de aproximación para $A_e(e^{j\omega})$.

Supongamos que deseamos diseñar un filtro paso alto que cumpla las siguientes especificaciones

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \qquad |\omega| \leq \omega_s$$

$$1-\delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1+\delta_1, \qquad \omega_p \leq |\omega| \leq \pi$$

siendo $\omega_s = 0{,}35\pi, \omega_p = 0{,}5\pi$ y $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0{,}02$. Como la respuesta ideal tiene también una discontinuidad, podemos aplicar las fórmulas de Kaiser de las Ecuaciones (7.75) y (7.76) con $A = 33{,}98$ y $\Delta\omega = 0{,}15\pi$ para estimar los valores requeridos de $\beta = 2{,}65$ y $M = 24$. La Figura 7.35 muestra las características de la respuesta que resultan cuando se aplica una ventana de Kaiser con esos parámetros a $h_{\text{hp}}[n]$ con $\omega_c = (0{,}35\pi + 0{,}5\pi)/2$. Nótese que, como M es un entero impar, el filtro es un sistema FIR de tipo I con fase lineal y el retardo es precisamente $M/2 = 12$ muestras. En este caso, el pico del error de aproximación real es de $\delta = 0{,}0209$ en lugar del valor de 0,02 especificado. Como el error es menor que 0.02 en todas partes excepto en el límite de la banda eliminada, se puede pensar en aumentar simplemente M a 25, manteniendo igual β, y estrechando por tanto la región de transición. Este filtro de tipo II, que se muestra en la Figura 7.36, es altamente insatisfactorio debido al cero de $H(z)$ en $z = -1$, (es decir, en $\omega = \pi$) forzado por la restricción de fase lineal. Aunque al incrementar el orden en 1 se llega a un resultado peor, un valor de $M = 26$ produciría un sistema de tipo I que cumpliría sobradamente las especificaciones. Vemos claramente que los sistemas FIR de fase lineal de tipo II no son en general apropiados para aproximar filtros paso alto o banda eliminada.

La anterior presentación para el diseño de filtros paso alto se puede generalizar al caso de múltiples bandas de paso y bandas eliminadas. La Figura 7.37 muestra una respuesta ideal selectiva en frecuencia multibanda. El filtro multibanda generalizado incluye como casos particulares a los filtros paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada. Si una función de amplitud de un filtro multibanda se multiplica por un factor de fase $e^{-j\omega M/2}$, la correspondiente respuesta al impulso ideal es

$$h_{\text{mb}}[n] = \sum_{k=1}^{N_{\text{mb}}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\operatorname{sen} \omega_k (n - M/2)}{\pi(n - M/2)}, \tag{7.81}$$

donde N_{mb} es el número de bandas y $G_{N_{\text{mb}}+1} = 0$. Si $h_{\text{mb}}[n]$ se multiplica por una ventana de Kaiser, el tipo de comportamiento que hemos observado en la discontinuidad del filtro paso bajo o del filtro paso alto aparecerá en *cada una* de las discontinuidades. El comportamiento será el mismo en cada discontinuidad, suponiendo que las discontinuidades están lo suficientemente separadas. Por tanto, las fórmulas de Kaiser sobre los tamaños de la ventana se pueden aplicar también en este caso para predecir los errores de aproximación y la anchura de las transiciones. Observe que los errores de aproximación serán proporcionales al tamaño del salto que los produce. Es decir, si una discontinuidad de amplitud unidad produce un error de pico de δ, una discontinuidad de amplitud mitad producirá un error de pico de $\delta/2$.

7.6.3. Diferenciadores en tiempo discreto

Como se ilustró en el Ejemplo 4.4, algunas veces es necesario obtener muestras de la derivada de una señal de banda limitada a partir de las muestras de la propia señal. Como la transformada de Fourier de la derivada de una señal continua es la transformada de Fourier de la señal multiplicada por $j\Omega$ se deduce que para señales de banda limitada, un sistema en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia sea $(j\omega/T)$ para $-\pi < \omega < \pi$ (y periódica de periodo 2π) producirá a su salida muestras de la derivada de la señal en tiempo continuo. Un sistema con esta propiedad se denomina diferenciador en tiempo discreto.

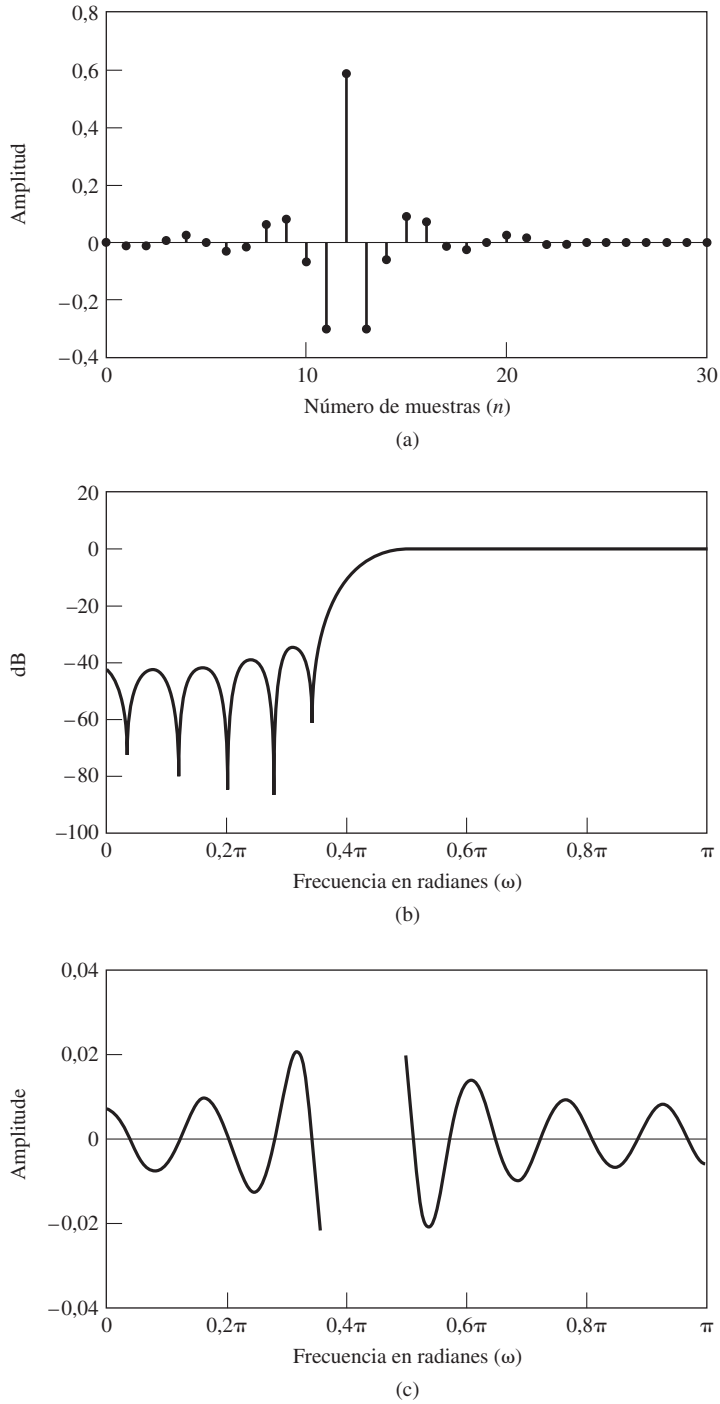


Figura 7.35 Funciones de respuesta del filtro paso alto FIR tipo I. (a) Respuesta al impulso ($M = 24$). (b) Logaritmo del módulo. (c) Error de aproximación para $A_e(e^{j\omega})$.

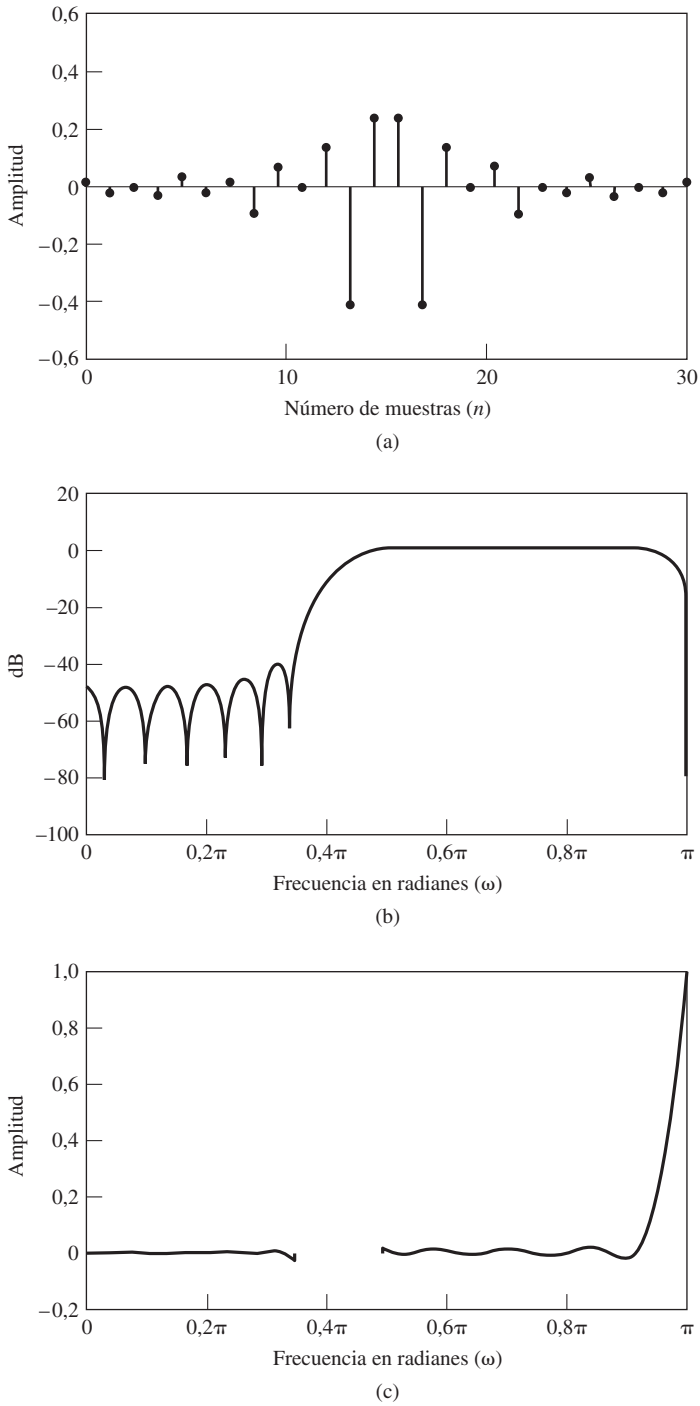


Figura 7.36 Funciones de respuesta del filtro paso alto FIR tipo II. (a) Respuesta al impulso $(M = 25)$. (b) Logaritmo del módulo. (c) Error de aproximación para $A_e(e^{j\omega})$.

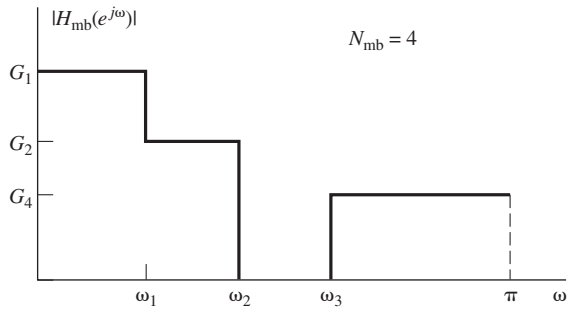


Figura 7.37 Respuesta en frecuencia ideal de un filtro multibanda.

La respuesta en frecuencia de un diferenciador en tiempo discreto ideal con fase lineal es

$$H_{\text{diff}}(e^{j\omega}) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}, \qquad -\pi < \omega < \pi. \tag{7.82}$$

donde hemos omitido el factor $1/T$. La correspondiente respuesta al impulso ideal es

$$h_{\text{diff}}[n] = \frac{\cos\pi(n-M/2)}{(n-M/2)} - \frac{\operatorname{sen}\pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)^2}, \qquad -\infty < n < \infty. \tag{7.83}$$

Si $h_{\text{diff}}[n]$ se multiplica por una ventana simétrica de longitud $(M+1)$, se puede demostrar fácilmente que $h[n] = -h[M-n]$. Por tanto, el sistema resultante será un sistema de fase lineal generalizada de tipo III o de tipo IV.

Como las fórmulas de Kaiser se han desarrollado para respuestas en frecuencia con discontinuidades simples en la amplitud, no se pueden aplicar directamente a diferenciadores en los que la discontinuidad de la respuesta en frecuencia ideal se presenta en la fase. A pesar de esto, como vamos a ver en el siguiente ejemplo, el método de ventanas es muy efectivo en el diseño de estos sistemas.

Diseño de un diferenciador mediante la ventana de Kaiser

Para ilustrar el diseño de un diferenciador mediante el método de enventanado, supongamos que $M = 10$ y $\beta = 2{,}4$. La Figura 7.38 muestra las características de la respuesta antisimétrica resultante. Como M es par, el sistema es de fase lineal de tipo III, lo que implica que $H(z)$ tiene ceros en $z = +1$ $(\omega = 0)$ y en $z = -1$ $(\omega = \pi)$. Esto se ve claramente en la respuesta en amplitud que se muestra en la Figura 7.38(b). La fase es exacta, ya que los sistemas de tipo III tienen un desplazamiento de fase constante de $\pi/2$ radianes a la que se suma una fase lineal correspondiente, en este, caso a un retardo de $M/2 = 5$ muestras. La Figura 7.38(c) muestra el error de aproximación de amplitud

$$E_{\text{diff}}(\omega) = \omega - A_o(e^{j\omega}), \qquad 0 \le \omega \le 0{,}8\pi, \tag{7.84}$$

siendo $A_o(e^{j\omega})$ la amplitud de la aproximación. Nótese que el error es grande en los alrededores de $\omega = \pi$ y que no se muestra para frecuencias por encima de $\omega = 0{,}8\pi$. Puede verse claramente que el incremento lineal del módulo no se consigue en toda la banda y, obviamente, el error relativo (es decir, $E_{\text{diff}}(\omega)/\omega$) es muy grande para bajas frecuencias o altas frecuencias (alrededor de $\omega = \pi$).

Los sistemas de fase lineal de tipo IV no imponen que $H(z)$ tenga un cero en $z = -1$. Este tipo de sistemas producen aproximaciones mucho mejores de la función de amplitud, como se muestra en la Figura 7.39 para $M = 5$ y $\beta = 2{,}4$. En este caso, el error de aproximación es muy pequeño hasta $\omega = 0{,}8\pi$ y aún más allá. La fase de este sistema es de nuevo un desplazamiento de fase de $\pi/2$ radianes sumado a

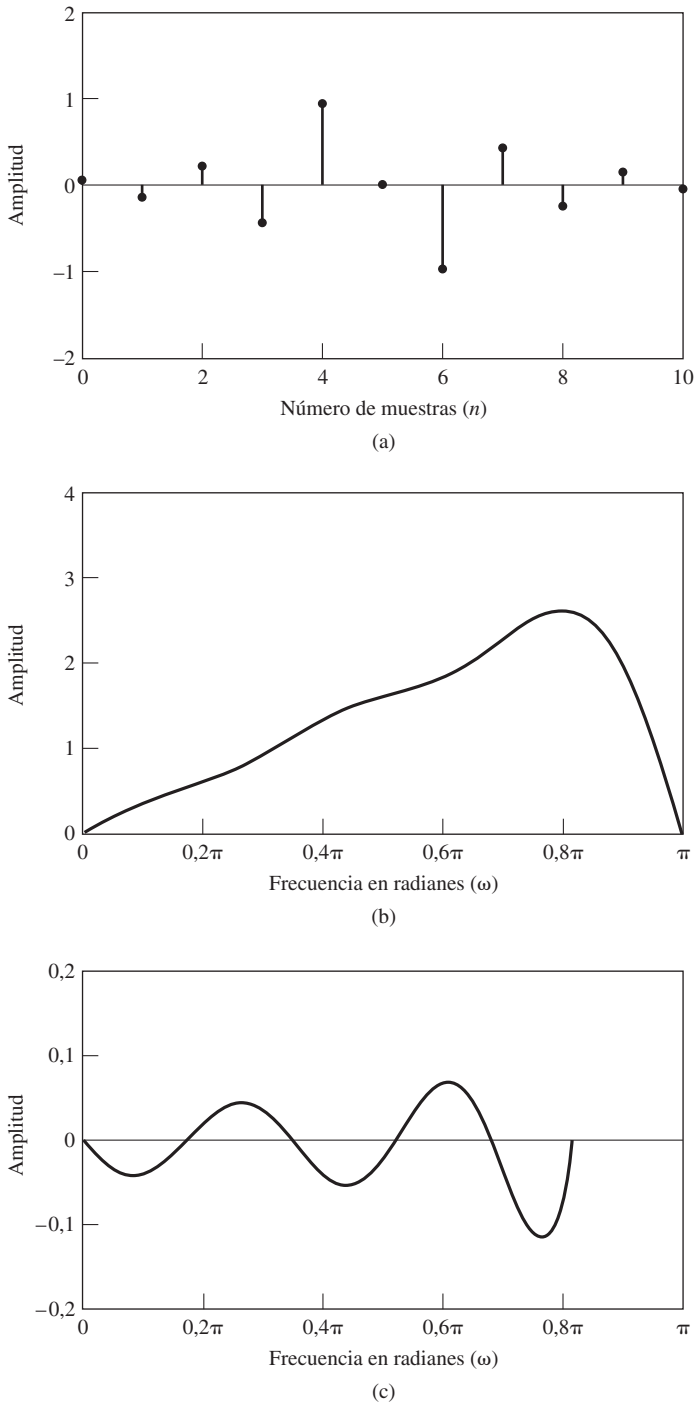


Figura 7.38 Funciones de respuesta de un diferenciador en tiempo discreto realizado con un FIR de tipo III. (a) Respuesta al impulso ($M = 10$). (b) Módulo. (c) Error de aproximación para $A_0(e^{j\omega})$.

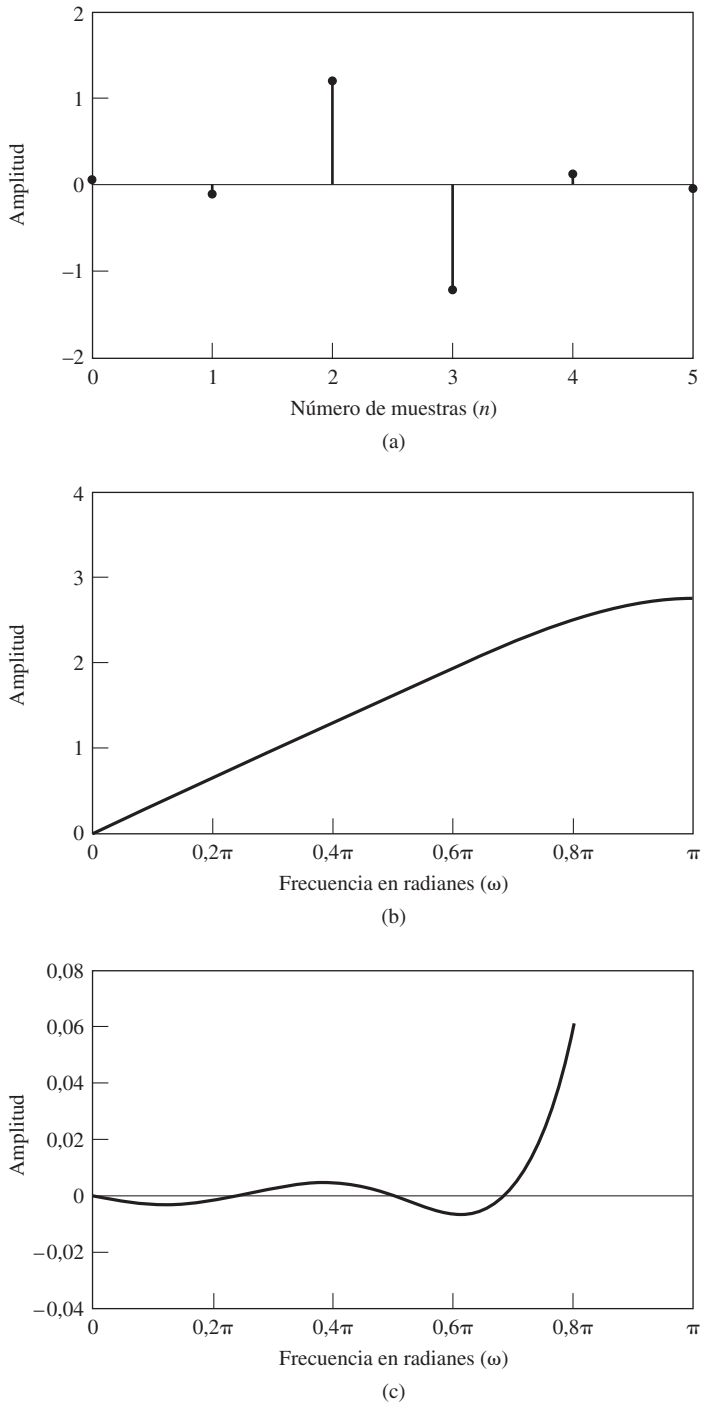


Figura 7.39 Funciones de respuesta de un diferenciador en tiempo discreto realizado con un FIR de tipo IV. (a) Respuesta al impulso ($M = 5$). (b) Módulo. (c) Error de aproximación para $A_0(e^{j\omega})$.

una fase lineal correspondiente a un retardo de $M/2 = 2{,}5$ muestras. Este retardo no entero es el precio que se paga por la aproximación tan buena de la amplitud. En lugar de obtener muestras de la derivada de la señal en tiempo continuo inicial en los instantes originales de muestreo $t = nT$, se obtienen muestras de dicha derivada en los instantes $t = (n - 2{,}5)T$. Sin embargo, en muchas aplicaciones, este retardo no entero no supone un problema, o se puede compensar con otros retardos no enteros si este sistema forma parte de un sistema más complejo en el que intervienen otros filtros de fase lineal.

7.7. APROXIMACIONES ÓPTIMAS DE FILTROS FIR

El diseño de filtros FIR por el método de enventanado es un procedimiento directo y bastante general, aunque presenta algunas limitaciones. Sin embargo, muchas veces se desea diseñar un filtro que es "el mejor" que se puede conseguir para un valor dado de M. No tiene sentido discutir esta cuestión sin establecer antes un criterio de aproximación. Por ejemplo, en el caso del método de diseño de la ventana, aplicando la teoría del desarrollo en serie de Fourier, se puede deducir que la ventana rectangular proporciona la mejor aproximación del error cuadrático medio a una respuesta en frecuencia deseada para un valor dado de M. Es decir,

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{7.85}$$

minimiza la expresión

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega. \tag{7.86}$$

(Véase el Problema 7.25). Sin embargo, como ya hemos visto, este criterio de aproximación produce un comportamiento adverso en las discontinuidades de $H_d(e^{j\omega})$. Además, el método de enventanado no permite un control separado de los errores de aproximación en las diferentes bandas. En muchas aplicaciones, pueden diseñarse filtros mejores aplicando una estrategia minimax (minimización de los errores máximos) o un criterio de ponderación en frecuencia. Estos diseños se pueden realizar mediante técnicas algorítmicas.

Como muestran los ejemplos anteriores, los filtros selectivos en frecuencia diseñados por el método de enventanado tienen frecuentemente la propiedad de que el error es mayor a ambos lados de una discontinuidad de la respuesta en frecuencia ideal, y el error va haciéndose más pequeño a medida que nos alejamos de la discontinuidad. Además, como se sugiere en la Figura 7.31, estos filtros producen generalmente los mismos errores en la banda de paso y en la banda eliminada (véanse por ejemplo las Figuras 7.34(c) y 7.35(c)). Ya hemos visto que, para filtros IIR, si el error de aproximación se distribuye uniformemente en frecuencia y si los rizados en las bandas de paso y eliminada se ajustan separadamente, se puede cumplir una determinada especificación de diseño utilizando un filtro de orden inferior que si la aproximación cumple justamente la especificación en una banda y la cumple con exceso en otras. Esta noción intuitiva para sistemas FIR se confirma gracias a un teorema que se presentará posteriormente en esta sección.

En la exposición que sigue, consideraremos un procedimiento algorítmico particularmente efectivo y ampliamente utilizado para el diseño de filtros FIR con fase lineal generalizada. Aunque sólo consideraremos en detalle los filtros de tipo I, allí donde sea apropiado indicaremos cómo se aplican los resultados a filtros de fase lineal generalizada de tipos II, III y IV.

Al diseñar un filtro FIR causal de fase lineal de tipo I, es conveniente considerar en primer lugar el diseño de un filtro FIR de fase cero, es decir, un filtro FIR para el que

$$h_e[n] = h_e[-n], \tag{7.87}$$

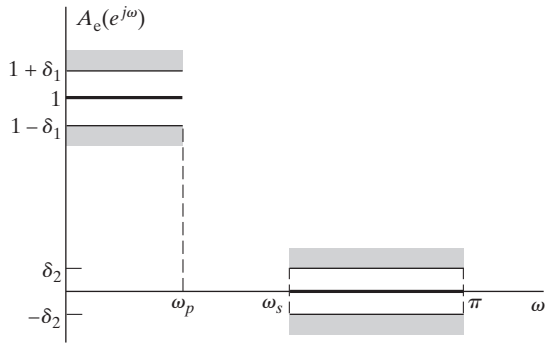


Figura 7.40 Esquema de tolerancias y respuesta ideal de un filtro paso bajo.

e insertar posteriormente un retardo suficiente para que sea causal. Por tanto, consideraremos que $h_e[n]$ satisface la condición de la Ecuación (7.87). La correspondiente respuesta en frecuencia es

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^{L} h_e[n]e^{-j\omega n}, \tag{7.88}$$

siendo $L = M/2$ un entero o, utilizando la Ecuación (7.87),

$$A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] + \sum_{n=1}^{L} 2h_e[n]\cos(\omega n). \tag{7.89}$$

Nótese que $A_e(e^{j\omega})$ es una función en ω que es real, par y periódica. A partir de $h_e[n]$ se puede obtener un sistema causal retardando esa respuesta al impulso $L = M/2$ muestras. La respuesta al impulso del sistema resultante es

$$h[n] = h_e[n - M/2] = h[M - n] \tag{7.90}$$

y la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}. \tag{7.91}$$

La Figura 7.40 muestra el esquema de tolerancias de una aproximación a un filtro paso bajo con una función real como $A_e(e^{j\omega})$. Se realiza una aproximación a la unidad en la banda $0 \le |\omega| \le \omega_p$ con un error absoluto máximo de δ_1, y una aproximación a cero en la banda $\omega_s \le |\omega| \le \pi$ con un error absoluto máximo de δ_2. Cualquier técnica algorítmica para diseñar un filtro que cumpla esas especificaciones deberá modificar los $(L+1)$ valores sin restricciones de la respuesta al impulso $h_e[n]$, con $0 \le n \le L$. Se han desarrollado algoritmos de diseño en los que se fijan algunos parámetros del conjunto $L, \delta_1, \delta_2, \omega_p$ y ω_s y, mediante procedimientos iterativos, se obtienen ajustes óptimos para los restantes parámetros. Hay dos procedimientos diferentes. Herrmann (1970), Herrmann y Schüssler (1970a) y Hofstetter, Oppenheim y Siegel (1971) han desarrollado procedimientos en los que se fijan L, δ_1 y δ_2 y se varían ω_p y ω_s. Parks y McClellan (1972a, 1972b), McClellan y Parks (1973), y Rabiner (1972a, 1972b) han desarrollado procedimientos en los que se fijan L, ω_p, ω_s, y la relación δ_1/δ_2 y δ_1 (o δ_2) son variables. Dado el momento en el que se desarrollaron las diferentes soluciones, el algoritmo de Parks-McClellan se ha convertido en el método dominante para el diseño óptimo de filtros FIR. Esto es debido a que es el más flexible y el más eficiente computacionalmente. Por tanto, sólo presentaremos ese algoritmo.

El algoritmo de Parks-McClellan se basa en replantear el problema de diseño de filtros como un problema de aproximación de polinomios. Concretamente, los términos $\cos(\omega n)$ de la Ecuación (7.89) se pueden expresar como una suma de potencias de $\cos\omega$ de la forma

$$\cos(\omega n) = T_n(\cos\omega), \tag{7.92}$$

siendo $T_n(x)$ un polinomio de grado n.[5] En consecuencia, la Ecuación (7.89) se puede reescribir como un polinomio de grado L en $\cos\omega$, es decir,

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{L} a_k(\cos\omega)^k, \tag{7.93}$$

donde a_ks son constantes relacionadas con $h_e[n]$, los valores de la respuesta al impulso. Con la sustitución $x = \cos\omega$, la Ecuación (7.93) se puede expresar como

$$A_e(e^{j\omega}) = P(x)|_{x=\cos\omega}, \tag{7.94}$$

siendo $P(x)$ el polinomio de grado L

$$P(x) = \sum_{k=0}^{L} a_k x^k. \tag{7.95}$$

Veremos que no es necesario conocer la relación entre los coeficientes a_ks y $h_e[n]$ (aunque se puede obtener una fórmula). Es suficiente con saber que $A_e(e^{j\omega})$ se puede expresar como el polinomio trigonométrico de grado L en la Ecuación (7.93).

La clave para controlar los valores de ω_p y ω_s es fijar sus valores y variar δ_1 y δ_2. Parks y McClellan (1972a, 1972b) demostraron que fijando L, ω_p y ω_s, el problema de diseño de un filtro selectivo en frecuencia se transforma en un problema de aproximación de Chebyshev en conjuntos disjuntos, un importante problema de teoría de aproximación para el que se han desarrollado varios teoremas y procedimientos de utilidad (véase Cheney, 1982). Para formalizar el problema de aproximación en este caso, definamos la función de error de aproximación

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})], \tag{7.96}$$

donde la función de peso $W(\omega)$ incorpora los parámetros del error de aproximación en el proceso de diseño. En este método de diseño, la función de error $E(\omega)$, la función de ponderación $W(\omega)$ y la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$ se definen sólo en subintervalos cerrados de $0 \le \omega \le \pi$. Por ejemplo, para aproximar un filtro paso bajo, esas funciones se definen en $0 \le \omega \le \omega_p$ y en $\omega_s \le \omega \le \pi$. La función de aproximación $A_e(e^{j\omega})$ no está restringida en la región (o regiones) de transición (es decir, $\omega_p < \omega < \omega_s$), y puede tomar cualquier forma que sea necesaria para conseguir la respuesta deseada en los otros subintervalos.

Por ejemplo, supongamos que deseamos obtener una aproximación como la de la Figura 7.40, siendo L, ω_p y ω_s parámetros de diseño fijos. En este caso,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega \le \omega_p, \\ 0, & \omega_s \le \omega \le \pi. \end{cases} \tag{7.97}$$

La función de peso $W(\omega)$ nos permite ponderar los errores de aproximación de forma diferente en los diferentes intervalos de aproximación. Para el caso del problema de aproximación al filtro paso bajo, la función de peso es

$$W(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{K}, & 0 \le \omega \le \omega_p, \\ 1, & \omega_s \le \omega \le \pi, \end{cases} \tag{7.98}$$

[5]Más concretamente, $T_n(x)$ es el polinomio de Chebyshev de grado n, que se define como $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$.

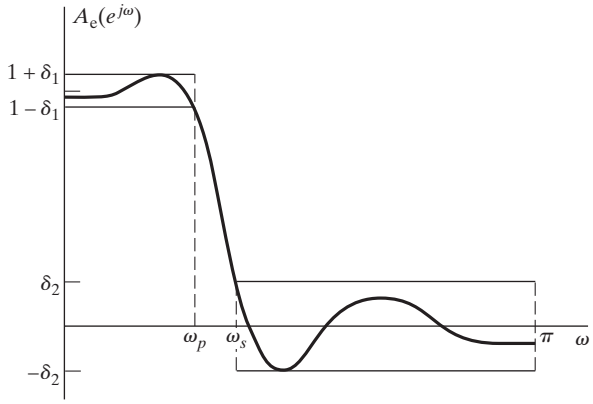


Figura 7.41 Respuesta en frecuencia típica que cumple las especificaciones de la Figura 7.40.

siendo $K = \delta_1/\delta_2$. Si $A_e(e^{j\omega})$ es como muestra la Figura 7.41, el error de aproximación ponderado, $E(\omega)$ en la Ecuación (7.96), sería como se ilustra en la Figura 7.42. Nótese que con esta ponderación, el máximo valor del error de aproximación absoluto ponderado es $\delta = \delta_2$ en ambas bandas.

El criterio particular utilizado en este procedimiento de diseño se denomina criterio minimax o de Chebyshev. Dentro de los intervalos de frecuencia de interés (la banda de paso y la banda eliminada para un filtro paso bajo), buscamos una respuesta en frecuencia $A_e(e^{j\omega})$ que *minimiza* el *máximo* error de aproximación ponderado de la Ecuación (7.96). En pocas palabras, se calcula la mejor aproximación en el sentido de

$$\min_{\{h_e[n]:0\le n\le L\}} \left(\max_{\omega\in F} |E(\omega)| \right),$$

siendo F el subconjunto cerrado de $0 \le \omega \le \pi$ tal que $0 \le \omega \le \omega_p$ o $\omega_s \le \omega \le \pi$. Buscamos por tanto los valores de la respuesta al impulso que minimizan δ en la Figura 7.42.

Parks y McClellan (1972a, 1972b) aplicaron el siguiente teorema de la teoría de aproximación a este problema de diseño de filtros.

Teorema de alternancia: Sea F_P el subconjunto cerrado consistente en la unión disjunta de subconjuntos cerrados del eje real x. Sea

$$P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$$

un polinomio de grado r. Sea $D_P(x)$ una determinada función deseada de x que es continua en F_P; $W_P(x)$ es una función positiva, continua en F_P y

$$E_P(x) = W_P(x)[D_P(x) - P(x)]$$

es el error ponderado. El error máximo se define como

$$\geq E \geq = \max_{x\in F_P} |E_P(x)|.$$

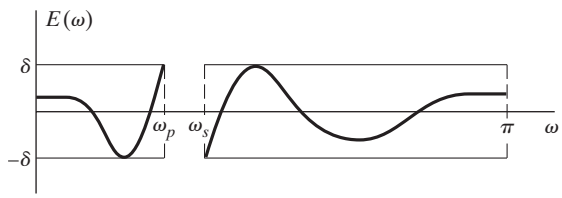


Figura 7.42 Error ponderado para la aproximación de la Figura 7.41.

Una condición necesaria y suficiente para que $P(x)$ sea el único polinomio de grado r que minimiza $\geq E \geq$es que $E_P(x)$ presente *al menos* $(r+2)$ alternancias, es decir, deben existir al menos $(r+2)$ valores x_i en F_p tales que $x_1 < x_2 < \cdots < x_{r+2}$ y tal que $E_p(x_i) = -E_P(x_{i+1}) = \pm \geq E \geq$para $i = 1, 2, \ldots, (r+1)$.

A primera vista puede parecer difícil relacionar este teorema formal con el problema de diseño de filtros. Sin embargo, en la presentación que sigue, todos los elementos del teorema se revelarán importantes al desarrollar el diseño del algoritmo. Para ayudar a comprender el teorema de alternancia, en la Sección 7.7.1 lo interpretaremos específicamente para el diseño de un filtro paso bajo tipo I. Antes de proceder a aplicar el teorema de alternancia al diseño de filtros, ilustraremos cómo se aplica a polinomios en el Ejemplo 7.8.

Ejemplo 7.8 Teorema de alternancia y polinomios

El teorema de alternancia proporciona una condición necesaria y suficiente que debe cumplir un polinomio de un grado determinado para que minimice el máximo error ponderado. Para ilustrar cómo se aplica el teorema, supongamos que deseamos examinar polinomios $P(x)$ que se aproximan a la unidad para $-1 \leq x \leq -0{,}1$ y a cero para $0{,}1 \leq x \leq 1$. Consideremos tres de esos polinomios que se muestran en la Figura 7.43. Cada uno de ellos es de grado cinco, y nos gustaría determinar cuál de ellos, si lo hay, satisface el teorema de alternancia. Los subconjuntos cerrados del eje real x a los que hace referencia el teorema son $-1 \leq x \leq -0{,}1$ y $0{,}1 \leq x \leq 1$. Ponderaremos igual los errores en ambas regiones, es decir, $W_p(x) = 1$. Para empezar, será útil para el lector construir cuidadosamente gráficas de la función de error de aproximación para cada polinomio de la Figura 7.43.

De acuerdo con el teorema de alternancia, el polinomio de quinto grado óptimo debe tener *al menos* siete alternancias del error en las regiones correspondientes al subconjunto cerrado F_P. $P_1(x)$ presenta sólo cinco alternancias, tres en la región $-1 \leq x \leq -0{,}1$ y dos en la región $0{,}1 \leq x \leq 1$. Los puntos x en los que el polinomio alcanza el máximo error de aproximación $||E||$ dentro del conjunto F_P se denominan puntos extremos (o simplemente extremos). Todas las alternancias ocurren en los extremos pero, como veremos, no todos los puntos extremos son alternancias. Por ejemplo, el punto con pendiente cero cercano a $x = 1$ que no toca la línea de puntos es un máximo local, pero no es una alternancia, ya que la correspondiente función de error no alcanza el valor extremo negativo.[6] El teorema de alternancia especifica que las alternancias adyacentes deben cambiar de signo, con lo que el valor extremo en $x = 1$ no puede ser tampoco una alternancia, puesto que la alternancia anterior fue un valor extremo negativo en el primer punto con pendiente cero en $0{,}1 \leq x \leq 1$. La posición de las alternancias se indica en la Figura 7.43 con el símbolo $\circ$.

$P_2(x)$ tiene también cinco alternancias y por tanto no es óptimo. Concretamente, $P_2(x)$ tiene tres alternancias en $-1 \leq x \leq -0{,}1$, pero de nuevo sólo dos alternancias en $0{,}1 \leq x \leq 1$. La dificultad aparece porque $x = 0{,}1$ no es un valor extremo negativo. La alternancia previa en $x = -0{,}1$ es un valor extremo positivo, por lo que necesitaremos un valor extremo negativo para la siguiente alternancia. El primer punto con pendiente cero dentro del intervalo $0{,}1 \leq x \leq 1$ tampoco se puede contar, ya que es un valor extremo positivo, como $x = -0{,}1$, y no alterna el signo. Podemos contar el segundo punto con pendiente cero en esa región y $x = 1$, lo que da como resultado dos alternancias en $0{,}1 \leq x \leq 1$ y un total de cinco.

$P_3(x)$ tiene ocho alternancias: todos los puntos de pendiente cero, $x = -1$, $x = -0{,}1$, $x = 0{,}1$ y $x = 1$. Como con ocho alternancias se satisface el teorema de alternacia, que especifica un mínimo de siete, $P_3(x)$ es el único polinomio de quinto grado que produce una aproximación óptima para esta región.

[6] En esta exposición hacemos referencia a extremos positivos y negativos de la función de error. Como los polinomios se restan de una constante para formar el error, los puntos extremos se localizan fácilmente en las curvas de los polinomios de la Figura 7.43, pero el signo es opuesto a la variación hacia arriba y hacia debajo de los valores constantes deseados.

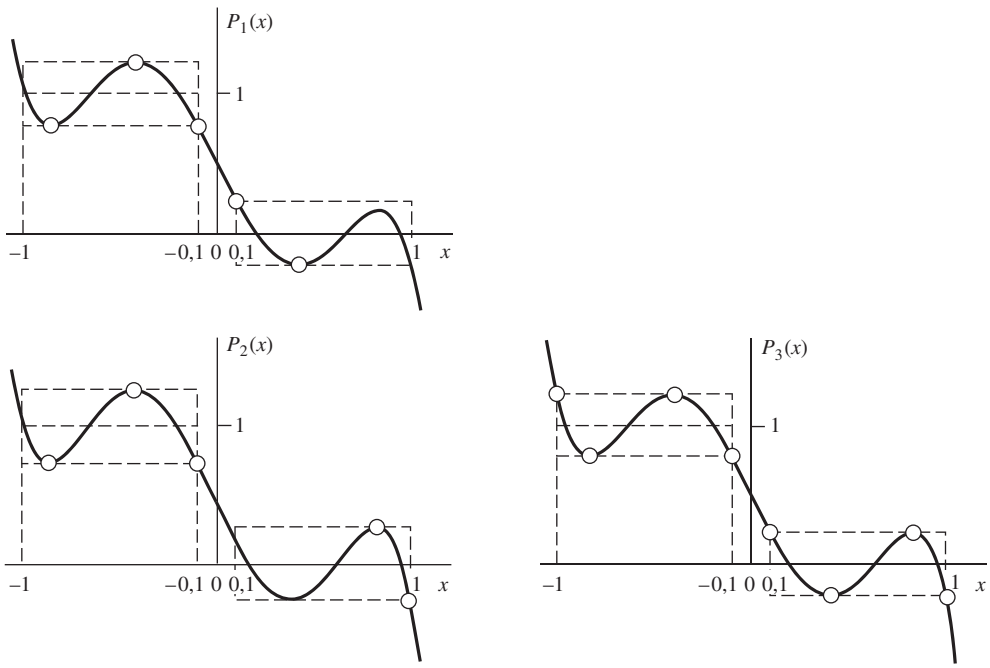


Figura 7.43 Polinomios de quinto grado del Ejemplo 7.8. Los puntos de alternancia se indican con el símbolo ∘.

7.7.1. Filtros paso bajo de tipo I óptimos

En el caso de filtros tipo I, $P(x)$ es el polinomio en cosenos $A_e(e^{j\omega})$ de la Ecuación (7.93), con la transformación de variables $x = \cos\omega$ y $r = L$:

$$P(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{L} a_k (\cos\omega)^k. \tag{7.99}$$

$D_P(x)$ es la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo deseado de la Ecuación (7.97), con $x = \cos\omega$:

$$D_P(\cos\omega) = \begin{cases} 1, & \cos\omega_p \leq \cos\omega \leq 1, \\ 0, & -1 \leq \cos\omega \leq \cos\omega_s. \end{cases} \tag{7.100}$$

$W_P(\cos\omega)$ se especifica en la Ecuación (7.98) y podemos reescribirla en términos de $\cos\omega$:

$$W_P(\cos\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{K}, & \cos\omega_p \leq \cos\omega \leq 1, \\ 1, & -1 \leq \cos\omega \leq \cos\omega_s. \end{cases} \tag{7.101}$$

Y el error de aproximación ponderado es

$$E_P(\cos\omega) = W_P(\cos\omega)[D_P(\cos\omega) - P(\cos\omega)]. \tag{7.102}$$

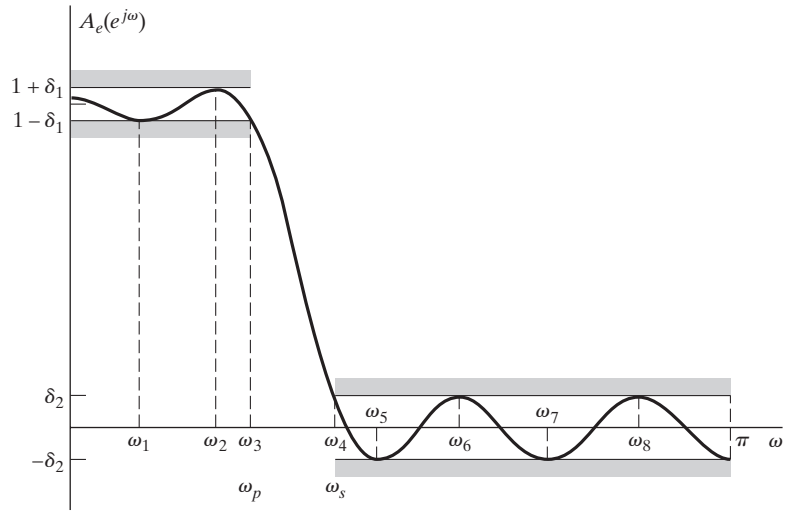


Figura 7.44 Ejemplo típico de una aproximación a un filtro paso bajo que es óptima de acuerdo al teorema de alternancia para $L = 7$.

El subconjunto cerrado F_P está formado por la unión de los intervalos $0 \leq \omega \leq \omega_p$ y $\omega_s \leq \omega \leq \pi$, o, en función de $\cos\omega$, por los intervalos $\cos\omega_p \leq \cos\omega \leq 1$ y $-1 \leq \cos\omega \leq \cos\omega_s$. El teorema de alternancia indica entonces que un conjunto de coeficientes a_k en la Ecuación (7.99) corresponderá a la representación de la mejor y única aproximación al filtro paso bajo ideal con la relación δ_1/δ_2 fija a un valor de K y con límites de la banda de paso y la banda eliminada ω_p y ω_s, si y sólo si $E_P(\cos\omega)$ presenta al menos $(L+2)$ alternancias en F_P, es decir, si y sólo si $E_P(\cos\omega)$ iguala alternativamente más y menos su valor máximo al menos $(L+2)$ veces. Ya hemos visto previamente estas *aproximaciones de rizado de amplitud constante* en el caso de filtros IIR elípticos.

La Figura 7.44 muestra la respuesta en frecuencia de un filtro óptimo de acuerdo al teorema de alternancia para $L = 7$. En esta figura se representa $A_e(e^{j\omega})$ en función de ω. Para probar formalmente el teorema de alternancia deberíamos representar previamente $A_e(e^{j\omega})$ en función de $x = \cos\omega$. Además, debemos examinar explícitamente las alternancias de $E_P(x)$. Por tanto, en las Figuras 7.45(a), (b) y (c) se muestran $P(x)$, $W_P(x)$ y $E_P(x)$, respectivamente, en función de $x = \cos\omega$. En este ejemplo, con $L = 7$, vemos que hay nueve alternancias del error, por lo que se cumple el teorema de alternancia. Un punto importante es que, al contar alternancias, incluimos los puntos $\cos\omega_p$ y $\cos\omega_s$, ya que, de acuerdo con el teorema de alternancia, los subconjuntos (o subintervalos) incluidos en F_P son cerrados y por lo tanto se cuentan los extremos de los intervalos. Aunque este aspecto puede parecer poco importante, es muy significativo, como veremos después.

Comparando las Figuras 7.44 y 7.45 puede verse que cuando el filtro deseado es paso bajo (o cualquier filtro constante por tramos), podríamos contar fácilmente las alternancias examinando la respuesta en frecuencia, teniendo en cuenta que el error máximo es diferente (en la relación $K = \delta_1/\delta_2$) en la banda de paso y en la banda eliminada.

El teorema de alternancia dice que el filtro óptimo debe tener un mínimo de $(L+2)$ alternancias, pero no excluye la posibilidad de que haya más de $(L+2)$ alternancias. De hecho, demostraremos que para un filtro paso bajo, el máximo número posible de alternancias es $(L+3)$. Pero primero lo ilustraremos en la Figura 7.46 para $L = 7$. La Figura 7.46(a) tiene $L+3 = 10$ alternancias, y las Figuras 7.46(b), (c) y (d) tienen $L+2 = 9$ alternancias. El caso de $L+3$ alternancias (Figura 7.46(a)) se denomina

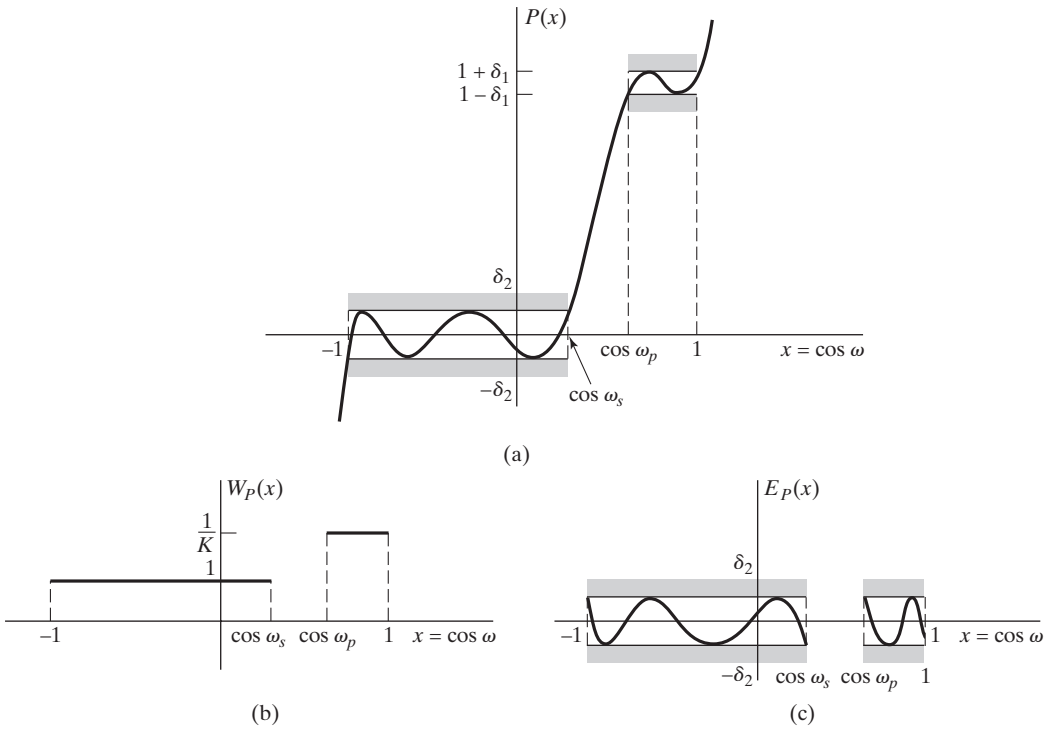


Figura 7.45 Funciones de aproximación polinómica equivalentes en función de $x = \cos\omega$. (a) Polinomio de aproximación. (b) Función de ponderación. (c) Error de aproximación.

frecuentemente *caso de extrarrizado.* Nótese que para el filtro con extrarrizado, hay alternancias en $\omega = 0$ y π, así como en $\omega = \omega_p$ y $\omega = \omega_s$. Es decir, en todos los límites de las bandas. En las Figuras 7.46(b) y (c) hay de nuevo alternancias en ω_p y ω_s, pero no en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$. En la Figura 7.46(d) hay alternancias en $0, \pi, \omega_p$ y ω_s, pero hay un punto de pendiente cero menos dentro de la banda de eliminada. Observamos también que todos estos casos son de rizado constante dentro de la banda de paso y de la banda eliminada, es decir, todos los puntos de pendiente cero dentro del intervalo $0 < \omega < \pi$ están en frecuencias en las que el módulo del error ponderado es máximo. Finalmente, como todos los filtros de la Figura 7.46 satisfacen el teorema de alternancia para $L = 7$ y para el mismo valor de $K = \delta_1/\delta_2$, se deduce que ω_p y/o ω_s deben ser diferentes en cada caso, debido a que el teorema de alternancia establece que el filtro óptimo bajo las condiciones que indica dicho teorema es único.

Las propiedades que se comentan en el párrafo anterior para los filtros de la Figura 7.46 son consecuencia del teorema de alternancia. Concretamente, demostraremos que para filtros paso bajo de tipo I:

- El máximo número posible de alternancias del error es de $(L+3)$.
- Siempre hay alternancias en ω_p y ω_s.
- Todos los puntos con pendiente cero en la banda de paso y en la banda eliminada (para $0 < \omega < \omega_p$ y $\omega_s < \omega < \pi$) corresponden a alternancias. Es decir, el filtro será de rizado constante, excepto posiblemente en $\omega = 0$ y en $\omega = \pi$.

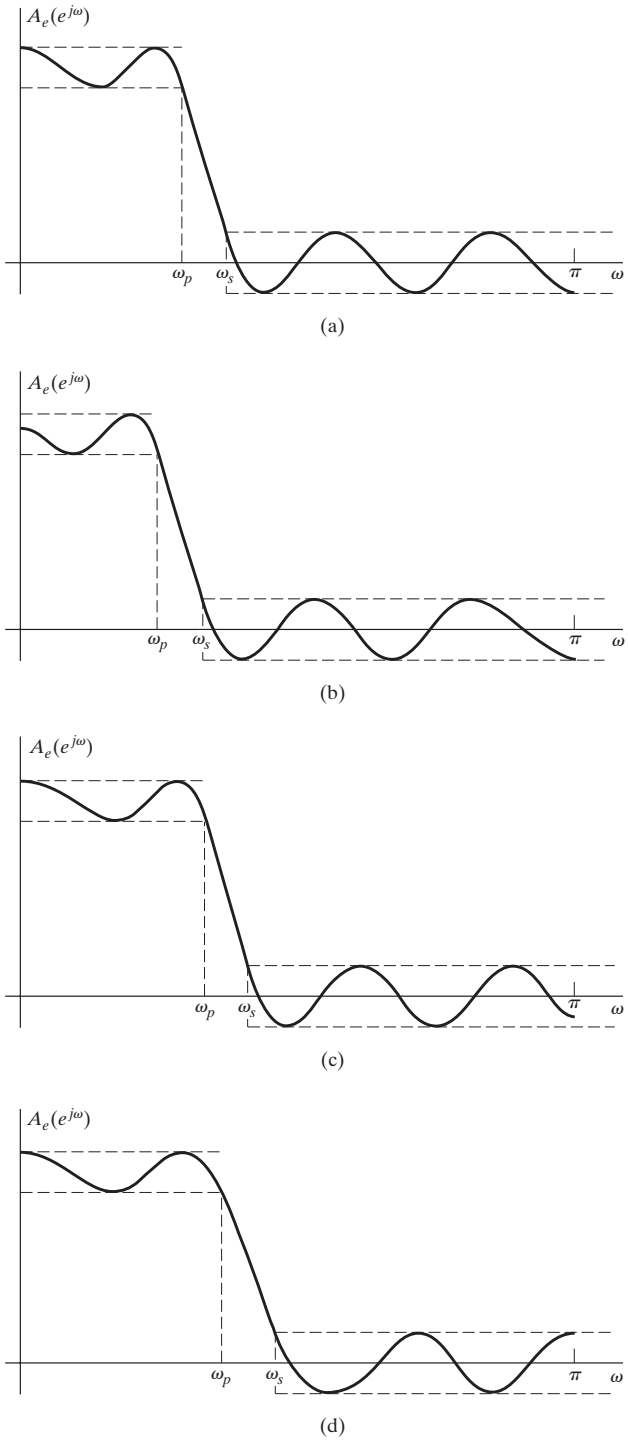


Figura 7.46 Posibles aproximaciones al filtro paso bajo óptimo para $L = 7$. (a) $L+3$ alternancias (caso de extrarrizado). (b) $L+2$ alternancias (extremo en $\omega =$). (c) $L+2$ alternancias (extremo en $\omega = 0$). (d) $L+2$ alternancias (extremos en $\omega = 0$ y $\omega =$).

El máximo número posible de alternancias es de $(L+3)$

La observación de las Figuras 7.44 ó 7.46 sugiere que el máximo número posible de localizaciones de alternancias son los cuatro límites de las bandas $(\omega = 0, \pi, \omega_p, \omega_s)$ y las frecuencias a las que $A_e(e^{j\omega})$ tiene pendiente cero. Como un polinomio de grado L debe tener al menos $(L-1)$ puntos de pendiente cero en cualquier intervalo abierto, el máximo número posible de posiciones de las alternancias son los $(L-1)$ máximos o mínimos locales del polinomio más los cuatro límites de las bandas, es decir, un total de $(L+3)$. Al considerar los extremos y los puntos de pendiente cero de los polinomios trigonométricos, es importante observar que el polinomio trigonométrico

$$P(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{L} a_k (\cos\omega)^k, \tag{7.103}$$

cuando se considera como una función de ω tendrá siempre pendiente cero en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, incluso aunque el polinomio $P(x)$ considerado como función de x pueda no tener pendiente cero en los correspondientes puntos $x = 1$ y $x = -1$. Esto es porque

$$\begin{aligned} \frac{dP(\cos\omega)}{d\omega} &= -\operatorname{sen}\omega \left(\sum_{k=0}^{L} k a_k (\cos\omega)^{k-1} \right) \\ &= -\operatorname{sen}\omega \left(\sum_{k=0}^{L-1} (k+1) a_{k+1} (\cos\omega)^k \right), \end{aligned} \tag{7.104}$$

que es siempre cero en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, así como en las $(L-1)$ raíces del polinomio de grado $(L-1)$ representado por la suma. Este comportamiento en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ es evidente en la Figura 7.46. En la Figura 7.46(d) ocurre que el polinomio $P(x)$ tiene pendiente cero en $x = -1 = \cos\pi$.

Siempre hay alternancias en ω_p *y* ω_s

Para todas las respuestas en frecuencia de la Figura 7.46, $A_e(e^{j\omega})$ es exactamente igual a $1-\delta_1$ en el límite de la banda de paso ω_p y es exactamente igual a $+\delta_2$ en el límite de la banda eliminada ω_s. Para ver por qué debe ser siempre así, consideremos si el filtro de la Figura 7.46(a) podría ser también óptimo si disminuyéramos ω_p como se indica en la Figura 7.47, sin modificar el polinomio. Las frecuencias en las que el módulo del máximo error ponderado es igual son $\omega = 0$, ω_1, ω_2, ω_s, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 y $\omega = \pi$, un total de $(L+2) = 9$. Sin embargo, no todas las frecuencias son alternancias, ya que para ser contadas según el teorema de alternancias el error debe *alternar* entre $\delta = \pm\geq E \geq$en esas frecuencias. Por tanto, como el error es negativo en ω_2 y ω_s, las frecuencias que cuentan según el teorema de alternancia son $\omega = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ y π, un total de 8. Como $(L+2) = 9$, las condiciones del teorema de alternancia no se cumplen y la respuesta en frecuencia de la Figura 7.47 no es óptima con los valores de ω_p y ω_s que se indican. En otras palabras, la eliminación de ω_p como frecuencia de alternancia elimina dos alternancias. Como el número máximo es $(L+3)$, esto deja como mucho $(L+1)$, que no es suficiente. Se podría aplicar un argumento idéntico si se eliminara ω_s como frecuencia de alternancia. Se puede construir un razonamiento similar para filtros paso alto, pero no necesariamente para filtros paso banda o para filtros multibanda (véase el Problema 7.63).

El filtro debe ser de rizado constante, excepto posiblemente en $\omega = 0$ *y en* $\omega = \pi$

El argumento aquí es muy similar al utilizado para demostrar que ω_p y ω_s deben ser alternancias. Supongamos, por ejemplo, que el filtro de la Figura 7.46(a) se modifica como se indica en la Figura 7.48,

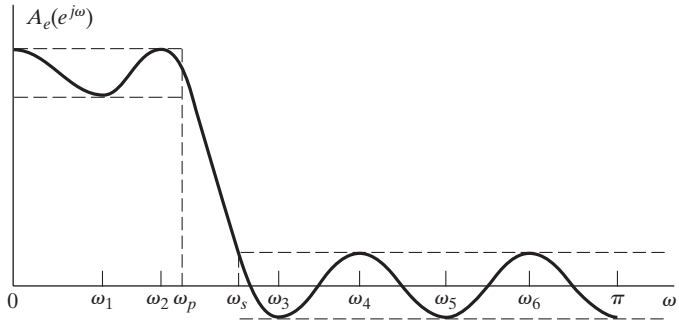


Figura 7.47 Ilustración de que el límite de la banda de paso ω_p debe ser una frecuencia de alternancia.

de forma que en un punto con pendiente cero no se tiene el error máximo. Entonces, aunque el error máximo ocurre en nueve frecuencias, sólo ocho se pueden contar como alternancias. En consecuencia, si se elimina un rizado como punto en el que el error es máximo, se reduce en dos el número de alternancias, dejando un número máximo posible de $(L+1)$.

Las propiedades anteriores representan sólo unas pocas de las muchas que se pueden deducir del teorema de alternancia. En Rabiner y Gold (1975) se presentan algunas otras. Además, sólo hemos considerado filtros paso bajo de tipo I. Aunque una presentación más amplia y detallada de los filtros de tipo II, III y IV, así como de filtros con respuesta en frecuencia deseada de tipo más general se sale de los límites de este libro, consideraremos brevemente los filtros paso bajo de tipo II para resaltar más algunos aspectos del teorema de alternancia.

7.7.2. Filtros paso bajo de tipo II óptimos

Un filtro causal de tipo II es aquél para el que $h[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq M$, y cuya longitud $(M+1)$ es par, es decir, M es impar. Además, tiene la propiedad de simetría

$$h[n] = h[M-n]. \tag{7.105}$$

Por tanto, la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ se puede expresar en la forma

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} 2h[n] \cos\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right]. \tag{7.106}$$

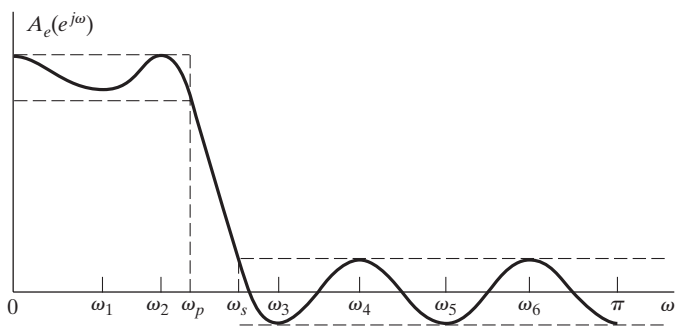


Figura 7.48 Ilustración de que la respuesta en frecuencia debe ser de rizado constante en las bandas de aproximación.

Si hacemos $b[n] = 2h[(M+1)/2-n]$, $n = 1,2,\ldots,(M+1)/2$, se puede reescribir la Ecuación (7.106) como

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left\{\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \tag{7.107}$$

Para aplicar el teorema de alternancia al diseño de filtros de tipo II, debemos ser capaces de identificar el problema como de aproximación de polinomios. Para ello, expresaremos la suma de la Ecuación (7.107) de la forma

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos(\omega/2)\left[\sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{b}[n]\cos(\omega n)\right]. \tag{7.108}$$

(Véase el Problema 7.58). La suma del miembro derecho de la Ecuación (7.108) se puede representar como un polinomio trigonométrico $P(\cos\omega)$ de forma que

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\cos(\omega/2)P(\cos\omega), \tag{7.109a}$$

donde

$$P(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{L} a_k(\cos\omega)^k \tag{7.109b}$$

y $L = (M-1)/2$. Los coeficientes de la Ecuación (7.109b) se relacionan con los coeficientes $\tilde{b}[n]$ de la Ecuación (7.108), que se relacionan a su vez con los coeficientes $b[n] = 2h[(M+1)/2-n]$ de la Ecuación (7.107). Como en el caso del tipo I, no es necesario obtener una relación explícita entre los valores de la respuesta al impulso y los coeficientes a_ks. Ahora se puede aplicar el teorema de alternancia al error ponderado entre $P(\cos\omega)$ y la respuesta en frecuencia deseada. En el caso de un filtro paso bajo de tipo I con una determinada relación K entre el rizado de la banda de paso y de la banda eliminada, la Ecuación (7.97) proporciona la función deseada, y la Ecuación (7.98) proporciona la función de ponderación del error. Para el caso de filtros de tipo II, debido a la presencia del factor $\cos(\omega/2)$ en la Ecuación (7.109a), la función que se debe aproximar mediante el polinomio $P(\cos\omega)$ se define como

$$H_d(e^{j\omega}) = D_P(\cos\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos(\omega/2)}, & 0 \le \omega \le \omega_p, \\ 0, & \omega_s \le \omega \le \pi, \end{cases} \tag{7.110}$$

y la función de ponderación que se aplica al error es

$$W(\omega) = W_P(\cos\omega) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\omega/2)}{K}, & 0 \le \omega \le \omega_p, \\ \cos(\omega/2), & \omega_s \le \omega \le \pi. \end{cases} \tag{7.111}$$

Por tanto, el diseño de un filtro de tipo II es un problema de aproximación polinómica diferente al del diseño de un filtro de tipo I.

En esta sección sólo hemos presentado brevemente el diseño de filtros de tipo II, principalmente para resaltar el requerimiento de que el problema de diseño se formula en primer lugar como un problema de aproximación polinómica. En el diseño de filtros FIR de fase lineal de tipo III y de tipo IV aparecen consideraciones semejantes. Concretamente, el diseño de estas clases de filtros se puede formular

también como problemas de aproximación polinómica, pero en cada clase la función de ponderación que se aplica al error tiene una forma trigonométrica, como en el caso de los filtros de tipo II (véase el Problema 7.58). En Rabiner y Gold (1975) se puede encontrar una presentación detallada del diseño y propiedades de estas clases de filtros.

Los detalles de la formulación del problema para sistemas de fase lineal de tipos I y II se han ilustrado para un filtro paso bajo. Sin embargo, la presentación de los sistemas de tipo II en particular, debería sugerirnos que hay una gran flexibilidad tanto en la selección de la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$ como en la selección de la función de peso $W(\omega)$. Por ejemplo, la función de peso se puede definir en términos de la función deseada para conseguir un error de aproximación relativo de rizado constante. Este planteamiento es útil en el diseño de sistemas diferenciadores de tipos III y IV.

7.7.3. El algoritmo de Parks–McClellan

El teorema de alternancia proporciona las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir el error para conseguir un comportamiento óptimo en el sentido de Chebyshev o minimax. Aunque el teorema no indica explícitamente cómo obtener el filtro óptimo, las condiciones que se presentan sirven como base para la obtención de un algoritmo eficiente. Aunque nuestra presentación se centre en filtros paso bajo de tipo I, el algoritmo se puede generalizar fácilmente.

Utilizando el teorema de alternancia, sabemos que el filtro óptimo $A_e(e^{j\omega})$ cumplirá el conjunto de ecuaciones

$$W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - A_e(e^{j\omega_i})] = (-1)^{i+1}\delta, \qquad i = 1,2,\ldots,(L+2), \tag{7.112}$$

donde δ es el error óptimo y $A_e(e^{j\omega})$ se indica en la Ecuación (7.89) o en la Ecuación (7.93). Utilizando la Ecuación (7.93) para $A_e(e^{j\omega})$, las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$\begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^L & \dfrac{1}{W(\omega_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^L & \dfrac{-1}{W(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \cdots & x_{L+2}^L & \dfrac{(-1)^{L+1}}{W(\omega_{L+2})} \end{matrix} \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \delta \end{matrix} = \begin{matrix} H_d(e^{j\omega_1}) \\ H_d(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ H_d(e^{j\omega_{L+2}}) \end{matrix}, \tag{7.113}$$

siendo $x_i = \cos\omega_i$. Este conjunto de ecuaciones sirve como base de un algoritmo iterativo para obtener el valor óptimo de $A_e(e^{j\omega})$. El procedimiento comienza planteando un conjunto de frecuencias de alternancia ω_i para $i = 1,2,\ldots,(L+2)$. Nótese que ω_p y ω_s son fijos y, basándonos en la exposición de la Sección 7.7.1, son necesariamente miembros del conjunto de frecuencias de alternancia. Concretamente, si $\omega_\ell = \omega_p$, entonces $\omega_{\ell+1} = \omega_s$. El sistema de Ecuaciones (7.113) se podría resolver obteniendo el conjunto de coeficientes a_k y δ. Sin embargo, una solución más eficiente es utilizar interpolación polinómica. En particular, Parks y McClellan (1972a, 1972b) obtuvieron que, para el conjunto de frecuencias de extremos,

$$\delta = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(e^{j\omega_k})}{\displaystyle\sum_{k=1}^{L+2} \frac{b_k(-1)^{k+1}}{W(\omega_k)}}, \tag{7.114}$$

siendo

$$b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{(x_k - x_i)} \tag{7.115}$$

y donde, como antes, $x_i = \cos \omega_i$. Es decir, si $A_e(e^{j\omega})$ está determinada por el conjunto de coeficientes a_k que cumplen la Ecuación (7.113), con δ como se indica en la Ecuación (7.114), la función de error toma los valores $\pm\delta$ en las $(L+2)$ frecuencias ω_i, o en otras palabras, $A_e(e^{j\omega})$ toma los valores $1 \pm K\delta$ si $0 \leq \omega_i \leq \omega_p$ y $\pm\delta$ si $\omega_s \leq \omega_i \leq \pi$. Como se sabe que $A_e(e^{j\omega})$ es un polinomio trigonométrico de orden L, se puede interpolar un polinomio trigonométrico en $(L+1)$ de los $(L+2)$ valores conocidos $E(\omega_i)$ (o equivalentemente, $A_e(e^{j\omega_i})$). Parks y McClellan utilizaron la fórmula de interpolación de Lagrange obteniendo

$$A_e(e^{j\omega}) = P(\cos\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k/(x - x_k)] C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k/(x - x_k)]}, \tag{7.116a}$$

siendo $x = \cos\omega, x_i = \cos\omega_i$,

$$C_k = H_d(e^{j\omega_k}) - \frac{(-1)^{k+1}\delta}{W(\omega_k)}, \tag{7.116b}$$

y

$$d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(x_k - x_i)} = b_k(x_k - x_{L+2}). \tag{7.116c}$$

Aunque para ajustar el polinomio de grado L sólo se usan las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{L+1}$ podemos asegurar que el polinomio toma también el valor correcto en ω_{L+2}, ya que las Ecuaciones (7.113) se cumplen para el $A_e(e^{j\omega})$ resultante.

Ahora ya disponemos de $A_e(e^{j\omega})$ a cualquier frecuencia deseada sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones (7.113) para obtener los coeficientes a_k. El polinomio de la Ecuación (7.116a) se puede usar para evaluar $A_e(e^{j\omega})$ y también $E(\omega)$ en un conjunto denso de frecuencias de la banda de paso y de la banda eliminada. Si $|E(\omega)| \leq \delta$ para todo ω en la banda de paso y en la banda eliminada, habremos encontrado una aproximación óptima. Si no, debe probarse con un nuevo conjunto de frecuencias de extremos.

La Figura 7.49 muestra un ejemplo típico para un filtro paso bajo de tipo I antes de encontrar el óptimo. Claramente, el conjunto de frecuencias ω_i seleccionado para calcular δ (representado por los círculos en al figura) ha sido tal que δ ha resultado demasiado pequeño. Adoptando la filosofía del método de intercambio de Remez (véase Cheney, 2000), los valores extremos se intercambian para un conjunto completamente nuevo definido por los $(L+2)$ picos mayores de la curva de error. Los puntos marcados con $\times$ serían el nuevo conjunto de frecuencias en el ejemplo de la figura. Como antes, ω_p y ω_s se deben seleccionar como frecuencias de extremos. No olvidemos que hay al menos $(L-1)$ mínimos y máximos locales en los intervalos abiertos $0 < \omega < \omega_p$ y $\omega_s < \omega < \pi$. Los extremos restantes pueden estar en $\omega = 0$ o en $\omega = \pi$. Si hay un máximo de la función de error en 0 y en π, la frecuencia a la que se produce el máximo error se toma como la nueva estimación de la frecuencia del extremo restante. El ciclo (cálculo del valor de δ, ajuste de un polinomio a los valores de los picos del error supuestos, y localización de los picos del error reales) se repite hasta que δ no cambia su valor con respecto al

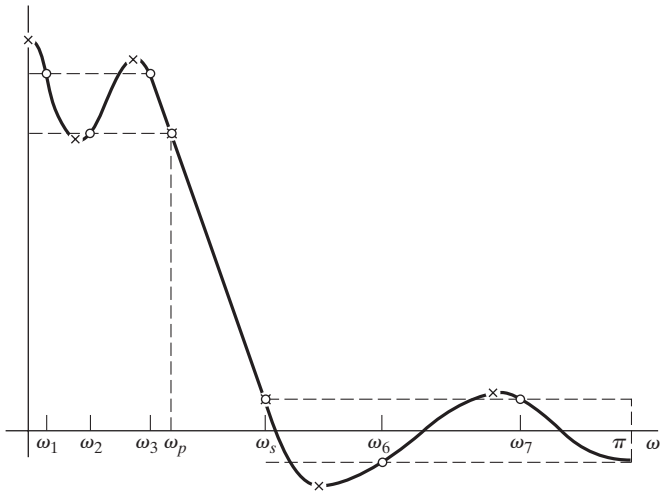


Figura 7.49 Ilustración del algoritmo de Parks–McCLellan para la aproximación de rizado constante.

anterior en más de una cantidad pequeña preestablecida. Este valor de δ es el mínimo de los valores máximos del error de aproximación ponderado.

La Figura 7.50 muestra un diagrama de flujo del algoritmo de Parks–McClellan. En este algoritmo, todos los valores de la respuesta al impulso $h_e[n]$ se varían implícitamente en cada iteración para obtener la aproximación óptima deseada, aunque dichos valores no se calculan explícitamente. Tras la convergencia del algoritmo, la respuesta al impulso se puede calcular a partir de muestras de la representación polinómica utilizando la transformada discreta de Fourier, como se comentará en el Capítulo 8.

7.7.4. Características de los filtros FIR óptimos

Los filtros FIR paso bajo óptimos tienen el mínimo valor del máximo error ponderado de la aproximación, δ, para unas frecuencias límite preestablecidas de la banda de paso y la banda eliminada, ω_p y ω_s. Dada la función de ponderación de la Ecuación (7.98), el máximo error de aproximación en la banda eliminada es $\delta_2 = \delta$, y el máximo error de aproximación en la banda de paso es $\delta_1 = K\delta$. En la Figura 7.51 se ilustra cómo varía δ con el orden del filtro y la frecuencia de corte de la banda de paso. En este ejemplo, $K = 1$ y la anchura de la transición tiene un valor fijo de $(\omega_s - \omega_p) = 0{,}2\pi$. Las curvas muestran que a medida que ω_p crece, el error δ alcanza mínimos locales. Estos mínimos de las curvas corresponden a los filtros con extrarrizado ($L + 3$ extremos).Todos los puntos entre los mínimos corresponden a filtros que son óptimos de acuerdo al teorema de alternación. Los filtros para $M = 8$ y $M = 10$ son filtros de tipo I, y los casos $M = 9$ y $M = 11$ corresponden a filtros de tipo II. Es interesante advertir que, para algunos valores de los parámetros, un filtro más corto ($M = 9$) puede ser mejor (es decir, producir menos error) que un filtro más largo ($M = 10$). Esto puede parecer a primera vista sorprendente e incluso contradictorio. Sin embargo, los casos $M = 9$ y $M = 10$ representan tipos de filtros fundamentalmente diferentes. Interpretado de otra forma, los filtros para $M = 9$ no se pueden considerar como casos particulares de $M = 10$ con un punto puesto a cero, ya que esto violaría la simetría necesaria para conseguir fase lineal. Por otra parte, $M = 8$ siempre se puede ver como un caso particular de $M = 10$ con la primera y la última muestra a cero. Por este motivo, el filtro para $M = 8$ no puede ser mejor que para $M = 10$. Esta restricción puede verse en la Figura 7.51, donde la curva para $M = 8$ está siempre por encima o coincide con la curva de $M = 10$. Los puntos en los que las dos curvas se tocan corresponden a respuestas al impulso idénticas, ya que en esos casos el filtro con $M = 10$ tiene su primera y última muestras a cero.

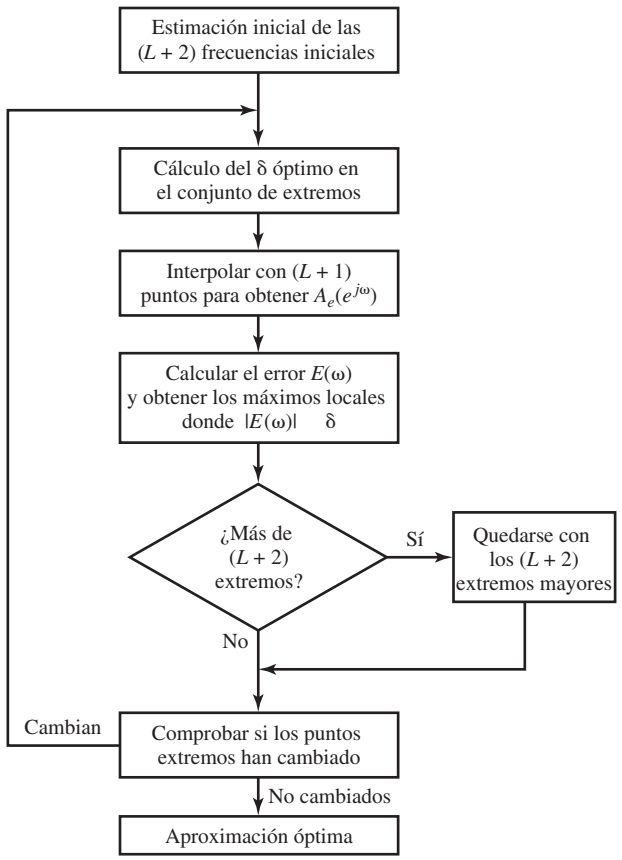


Figura 7.50 Diagrama de flujo del algoritmo de Parks–McClellan.

Herrmann et al. (1973) realizaron un extenso estudio computacional de las relaciones entre los parámetros M, δ_1, δ_2, ω_p y ω_s para aproximaciones paso bajo de rizado constante, y Kaiser (1974) obtuvo posteriormente la fórmula simplificada

$$M = \frac{-10\log_{10}(\delta_1\delta_2) - 13}{2{,}324\Delta\omega}, \tag{7.117}$$

con $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, como un ajuste a sus datos. Comparando la Ecuación (7.117) con la fórmula de diseño de la Ecuación (7.76) para al caso del diseño mediante la ventana de Kaiser, podemos ver que en el caso comparable de $(\delta_1 = \delta_2 = \delta)$, las aproximaciones óptimas producen un mejor error de aproximación de aproximadamente 5 dB para un valor dado de M. Otra ventaja importante de los filtros de rizado constante es que δ_1 y δ_2 no tienen que ser iguales, y en el método de enventanado deben serlo.

7.8. EJEMPLOS DE APROXIMACIÓN DE RIZADO CONSTANTE DE FILTROS FIR

El algoritmo de Parks–McClellan para la aproximación óptima de rizado constante de filtros FIR se puede utilizar para diseñar una amplia variedad de filtros de este tipo. En esta sección daremos varios ejemplos que ilustran algunas de las propiedades de la aproximación óptima y sugieren la gran flexibilidad que se consigue con el método de diseño.

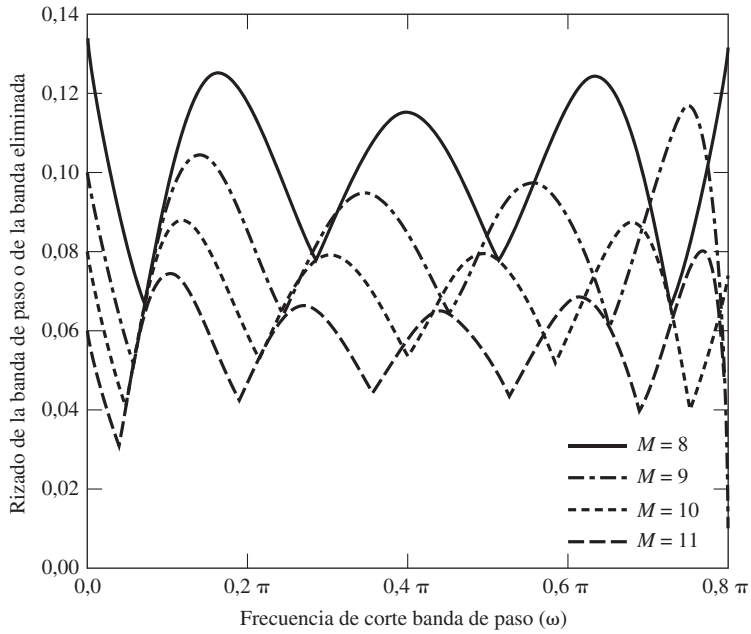


Figura 7.51 Ilustración de la dependencia del error con la frecuencia de corte en la banda de paso y en la banda eliminada para la aproximación óptima de un filtro paso bajo. En este ejemplo, $K = 1$ y $(\omega_s - \omega_p) = 0{,}2$. (Herrmann, Rabiner y Chan, 1973.)

7.8.1. Filtro paso bajo

En el caso del filtro paso bajo, podemos aproximar de nuevo el conjunto de especificaciones utilizado en el Ejemplo 7.5, de forma que podamos comparar los principales métodos de diseño utilizando las mismas especificaciones del filtro paso bajo. Estas especificaciones exigen que $\omega_p = 0{,}4\pi$, $\omega_s = 0{,}6\pi$, $\delta_1 = 0{,}01$ y $\delta_2 = 0{,}001$. En contraste con el método de enventanado, el algoritmo de Parks–McClellan puede acomodar el diferente error de aproximación en la banda de paso y en la banda eliminada fijando el parámetro de la función de ponderación al valor $K = \delta_1/\delta_2 = 10$.

Sustituyendo las especificaciones anteriores en la Ecuación (7.117), y redondeando por exceso se obtiene la estimación $M = 26$ como valor de M necesario para cumplir las especificaciones. Las Figuras 7.52(a), (b) y (c) muestran la respuesta al impulso, el logaritmo del módulo y el error de aproximación, respectivamente, del filtro óptimo con $M = 26$, $\omega_p = 0{,}4\pi$ y $\omega_s = 0{,}6\pi$. La Figura 7.52(c) muestra el error de aproximación *no ponderado*

$$E_A(\omega) = \frac{E(\omega)}{W(\omega)} = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \le \omega \le \omega_p, \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_s \le \omega \le \pi, \end{cases} \tag{7.118}$$

en vez del error de aproximación ponderado utilizado en la formulación del algoritmo de diseño. El error ponderado sería idéntico al de la Figura 7.52(c), excepto porque estaría dividido por 10 en la banda de paso.[7] Las alternancias del error de aproximación se evidencian claramente en la Figura 7.52(c).

[7]Para filtros selectivos en frecuencia, el error de aproximación no ponderado muestra también de forma conveniente el comportamiento en la banda de paso y en la banda eliminada, ya que $A_e(e^{j\omega}) = 1 - E(\omega)$ en la banda de paso y $A_e(e^{j\omega}) = -E(\omega)$ en la banda eliminada.

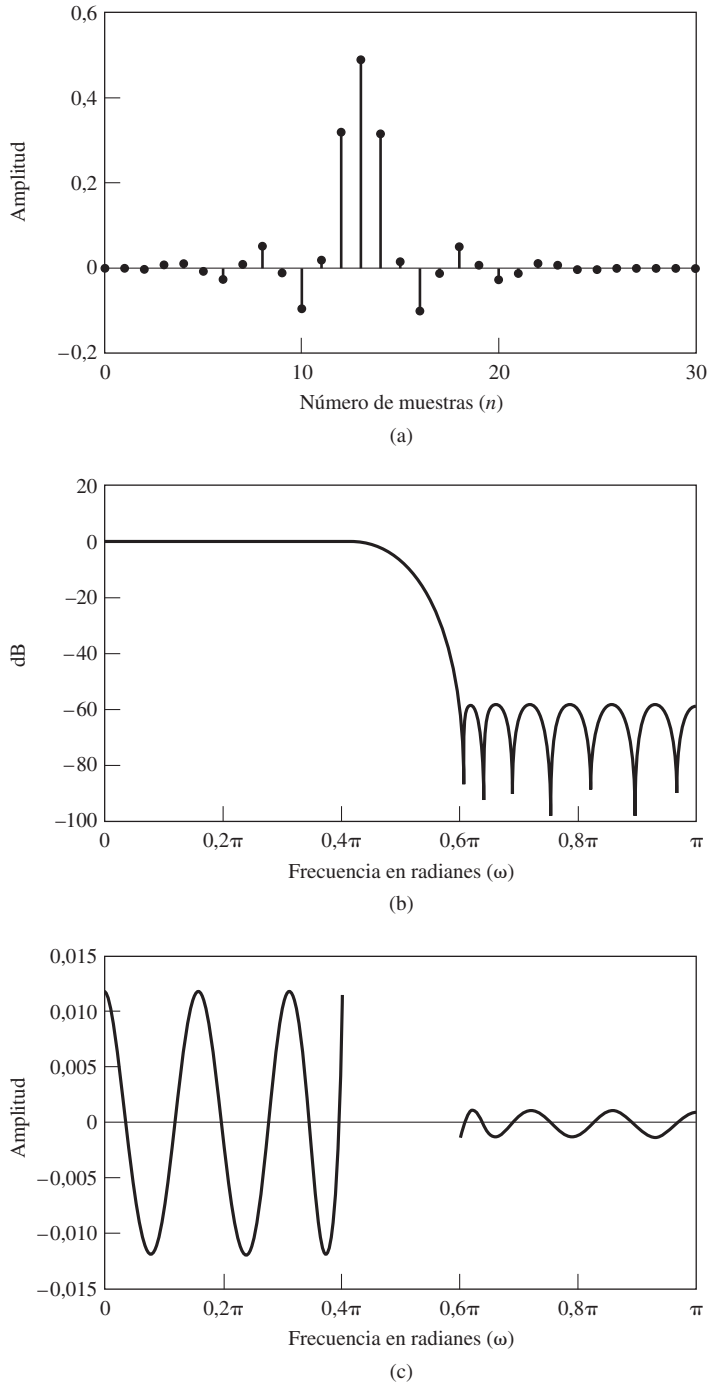


Figura 7.52 Filtro paso bajo FIR de tipo I óptimo para $\omega_p = 0{,}4$, $\omega_s = 0{,}6$, $K = 10$ y $M = 26$. (a) Respuesta al impulso. (b) Logaritmo del módulo de la respuesta en frecuencia. (c) Error de aproximación (no ponderado).

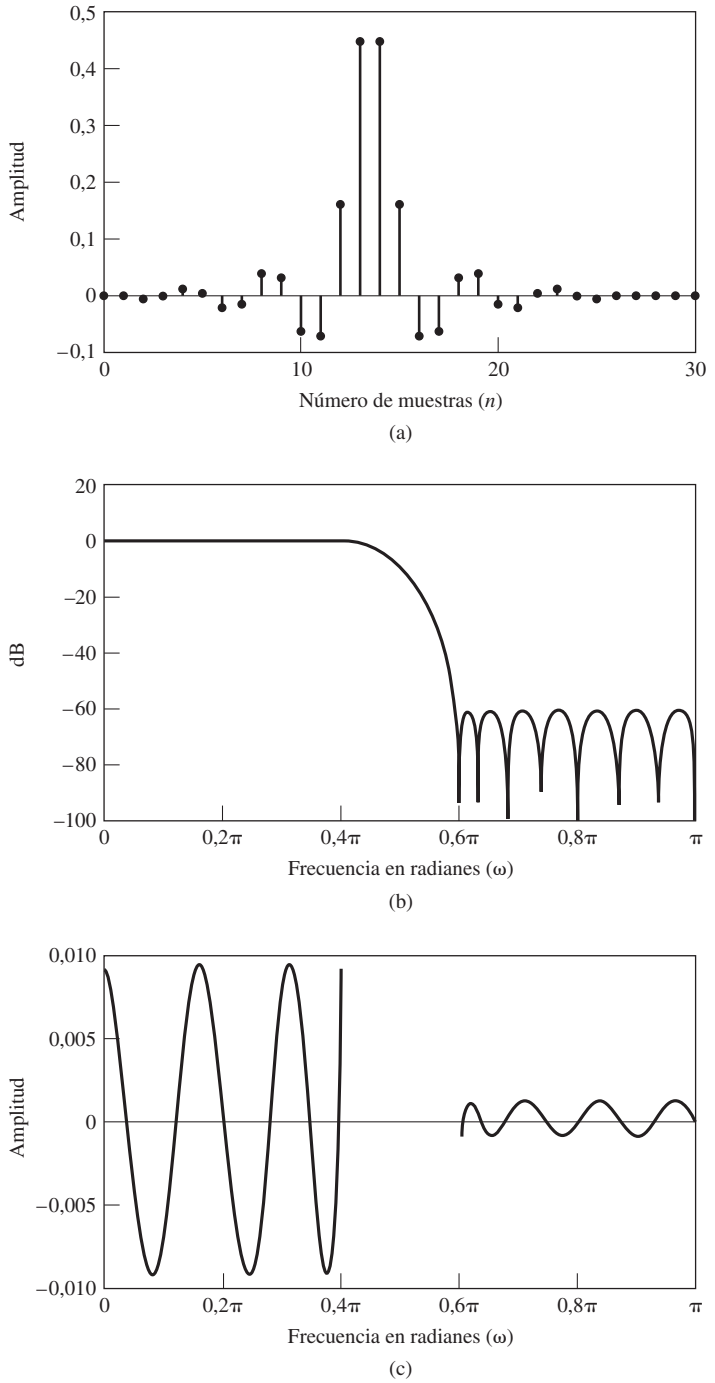


Figura 7.53 Filtro paso bajo FIR de tipo II óptimo para $\omega_p = 0{,}4$, $\omega_s = 0{,}6$, $K = 10$ y $M = 27$. (a) Respuesta al impulso. (b) Logaritmo del módulo de la respuesta en frecuencia. (c) Error de aproximación (no ponderado).

Hay siete alternancias en la banda de paso y ocho en la banda eliminada, lo que da un total de quince alternancias. Como $L = M/2$ para sistemas de tipo I (M par) y $M = 26$, el mínimo número de alternancias es $(L+2) = (26/2+2) = 15$. Por tanto, el filtro de la Figura 7.52 es el filtro óptimo para $M = 26$, $\omega_p = 0{,}4\pi$ y $\omega_s = 0{,}6\pi$. Sin embargo, la Figura 7.52(c) muestra que el filtro no cumple las especificaciones originales de error en la banda de paso y en la banda eliminada. (Los errores máximos en la banda de paso y en la banda eliminada son 0,0116 y 0,00116, respectivamente). Para cumplir las especificaciones debemos aumentar M.

Las funciones de respuesta en frecuencia para el caso de $M = 27$ se muestran en la Figura 7.53. Ahora los errores de aproximación en las bandas de paso y eliminada son ligeramente menores que los valores especificados. (Los valores máximos en la banda de paso y eliminada son, respectivamente, 0,0092 y 0,00092). En este caso, hay siete alternancias en la banda de paso y ocho alternancias en la banda eliminada, lo que da un total de quince. Nótese que, como $M = 27$, se trata de un sistema de tipo II, y para los sistemas de tipo II, el orden del polinomio de aproximación implícito es $L = (M-1)/2 = (27-1)/2 = 13$. Por tanto, el mínimo número de alternancias es todavía 15. Nótese también que en el caso de tipo II, la función de transferencia del sistema debe tener un cero en $z = -1$ o $\omega = \pi$. Esto se puede ver claramente en las Figuras 7.53(b) y (c).

Si comparamos los resultados de este ejemplo con los resultados de la Sección 7.6.1, vemos que el método de la ventana de Kaiser requiere un valor de $M = 40$ para cumplir o exceder las especificaciones, mientras que el método de Parks-McClellan requiere $M = 27$. Esta disparidad se acentúa debido a que el método de ventanas produce errores aproximadamente iguales en la banda de paso, mientras que el método de Parks–McClellan puede ponderar los errores de forma diferente.

7.8.2. Compensación para el filtro de retención de orden cero

En muchos casos, se diseña un filtro en tiempo discreto que se utiliza en un sistema como el que se muestra en la Figura 7.54. Este filtro se utiliza para procesar una secuencia de muestras $x[n]$ y obtener una secuencia $y[n]$, que es la entrada a un conversor D/A seguido de un filtro paso bajo en tiempo continuo (como aproximación al conversor D/C ideal) utilizados en la reconstrucción de una señal $y_c(t)$ en tiempo continuo. Un sistema como éste surge como parte de un sistema de filtrado en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo, como se comentó en la Sección 4.8. Si el conversor D/A mantiene su salida constante durante el periodo de muestreo T completo, la transformada de Fourier de la salida $y_c(t)$ es

$$Y_c(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_o(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}), \tag{7.119}$$

siendo $\tilde{H}_r(j\Omega)$ la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción apropiado y

$$H_o(j\Omega) = \frac{\operatorname{sen}(\Omega T/2)}{\Omega/2} e^{-j\Omega T/2} \tag{7.120}$$

la respuesta en frecuencia del sistema de retención de orden cero del conversor D/A. En la Sección 4.8.4 sugerimos que la compensación de $H_o(j\Omega)$ se podría incorporar en el filtro de reconstrucción en tiempo continuo. Es decir, se podría escoger $\tilde{H}_r(j\Omega)$ para que

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \dfrac{\Omega T/2}{\operatorname{sen}(\Omega T/2)} & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \tag{7.121}$$

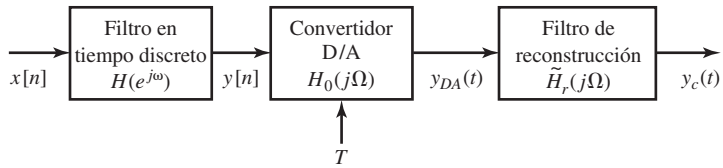


Figura 7.54 Precompensación de un filtro en tiempo discreto para los efectos de un conversor D/A.

de forma que el efecto del filtro en tiempo discreto $H(e^{j\Omega T})$ no sería distorsionado por el sistema de retención de orden cero. Otra solución sería incorporar la compensación en el filtro en tiempo discreto diseñando un filtro $\tilde{H}(e^{j\Omega T})$ tal que

$$\tilde{H}_(e^{j\Omega T}) = \frac{\Omega T/2}{\text{sen}(\Omega T/2)} H(e^{j\Omega T}). \tag{7.122}$$

Se puede diseñar rápidamente el filtro paso bajo del conversor D/A compensado mediante el algoritmo de Parks–McClellan si definimos simplemente la respuesta deseada como

$$\tilde{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\omega/2}{\text{sen}(\omega/2)}, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \tag{7.123}$$

La Figura 7.55 muestra las funciones de respuesta para ese filtro, donde las especificaciones son de nuevo $\omega_p = 0{,}4\pi, \omega_s = 0{,}6\pi, \delta_1 = 0{,}01$ y $\delta_2 = 0{,}001$. En este caso, se cumplen con $M = 28$ en lugar de $M = 27$ como en el caso anterior de ganancia constante. Por tanto, sin especial penalización, hemos incorporado la compensación para el conversor D/A en el filtro en tiempo discreto de forma que la banda de paso efectiva del filtro será plana. (Para resaltar la pendiente de la banda de paso, la Figura 7.55(c) muestra la respuesta de amplitud de la banda de paso en vez del error de aproximación como hemos hecho al dibujar las respuestas en frecuencia de los otros ejemplos de filtros FIR).

7.8.3. Filtro paso banda

La Sección 7.7 se ha centrado enteramente en el filtro paso bajo óptimo lineal e invariante con el tiempo, para el que sólo hay dos bandas de aproximación. Sin embargo, los filtros paso banda y banda eliminada requieren tres bandas de aproximación. Para diseñar esos filtros, es necesario generalizar la presentación de la Sección 7.7 al caso de múltiples bandas. Esto requiere explorar las implicaciones del teorema de alternancia y las propiedades de los polinomios de aproximación en un contexto más general. En primer lugar, recordemos que, como ya se dijo, el teorema de alternancia no supone ningún límite en el número de intervalos de aproximación disjuntos. Por lo tanto, el *mínimo* número de alternancias para la aproximación óptima sigue siendo $(L+2)$. Sin embargo, los filtros multibanda pueden tener más de $(L+3)$ alternancias, ya que hay más límites de bandas (el Problema 7.57 se ocupa de este aspecto). Esto significa que algunas de las afirmaciones demostradas en la Sección 7.7.1 no son ciertas en el caso multibanda. Por ejemplo, *no* es necesario que todos los máximos y mínimos locales de $A_e(e^{j\omega})$ estén en los intervalos de aproximación. Por tanto, puede haber extremos locales en las regiones de transición, y la aproximación no tiene que ser de rizado constante en las regiones de aproximación.

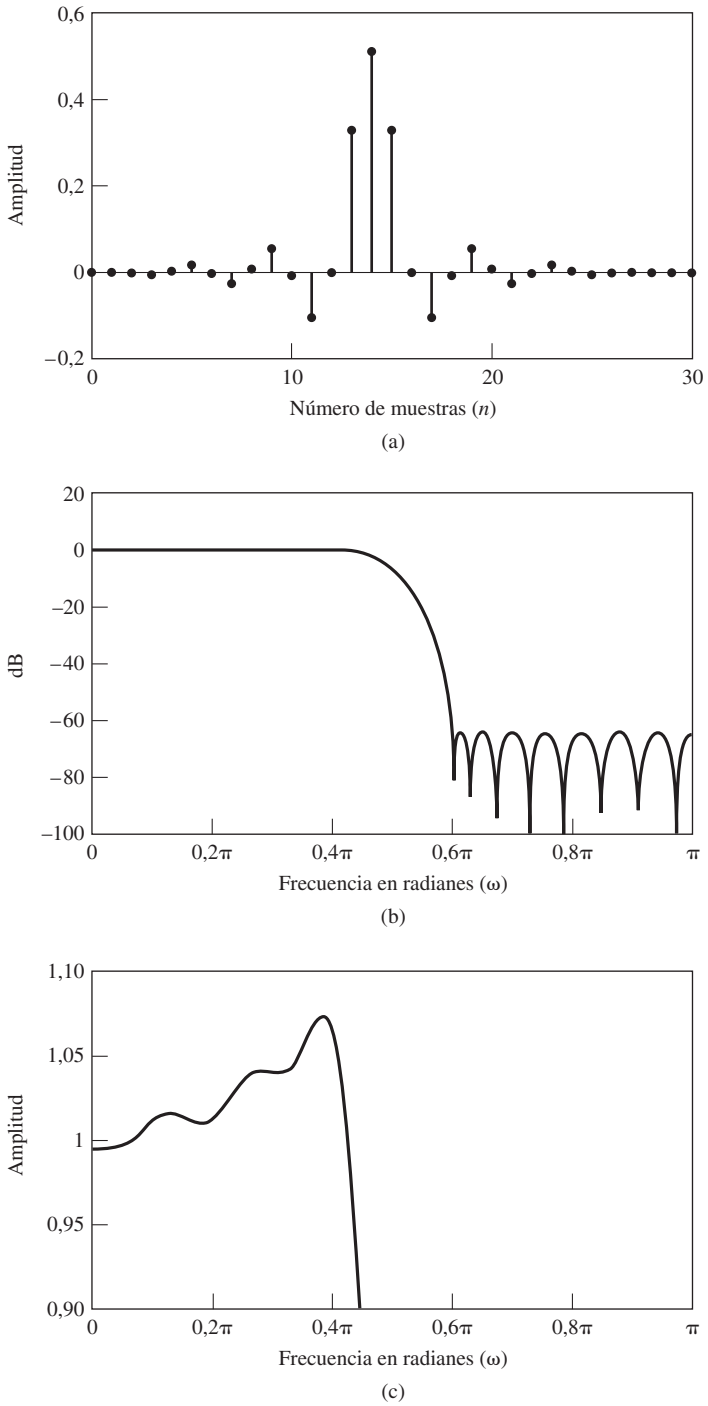


Figura 7.55 Filtro paso bajo óptimo con compensación de D/A para $\omega_p = 0{,}4\pi, \omega_s = 0{,}6\pi$, $K = 10$ y $M = 28$. (a) Respuesta al impulso. (b) Logaritmo del módulo de la respuesta en frecuencia. (c) Respuesta en amplitud en la banda de paso.

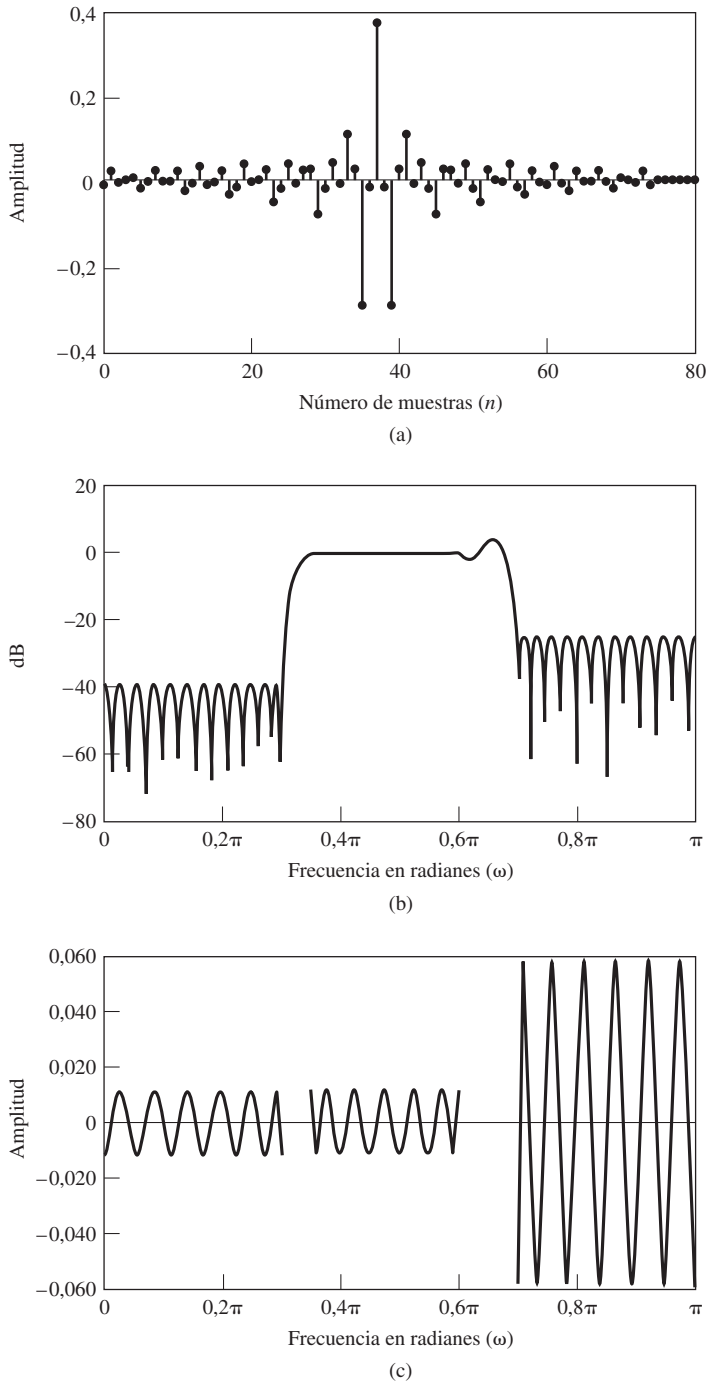


Figura 7.56 Filtro paso banda FIR óptimo para $M = 74$. (a) Respuesta al impulso. (b) Logaritmo del módulo de la respuesta en frecuencia. (c) Error de aproximación (no ponderado).

Para ilustrar esto, consideremos la respuesta deseada

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq 0{,}3\pi, \\ 1, & 0{,}35\pi \leq \omega \leq 0{,}6\pi, \\ 0, & 0{,}7\pi \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \tag{7.124}$$

y la función de ponderación del error

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 0{,}3\pi, \\ 1, & 0{,}35\pi \leq \omega \leq 0{,}6\pi, \\ 0{,}2, & 0{,}7\pi \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \tag{7.125}$$

Se escoge un valor de $M+1 = 75$ para la longitud de la respuesta al impulso del filtro. La Figura 7.56 muestra las funciones de respuesta del filtro resultante. Nótese que la región de transición de la segunda banda de aproximación a la tercera ya no es monótona. Sin embargo, el uso de dos extremos locales en esta región de transición sin restricciones no viola el teorema de alternancia. Como $M = 74$, el filtro es un sistema de tipo I, y el orden del polinomio de aproximación implícito es $L = M/2 = 74/2 = 37$. Por tanto, el teorema de alternancia requiere al menos $L+2 = 39$ alternancias. Se puede ver fácilmente en la Figura 7.56(c), que muestra el error de aproximación no ponderado, que hay 13 alternancias en cada banda, lo que da un total de 39.

Las aproximaciones como la que se muestra en la Figura 7.56 son óptimas en el sentido del teorema de alternancia, pero probablemente son inaceptables en una aplicación de filtrado. En general, no hay garantía de que las regiones de transición del un filtro multibanda sean monótonas, debido a que el algoritmo de Parks–McClellan no impone ninguna restricción sobre ellas. Cuando una selección concreta de parámetros del filtro produce este tipo de respuesta, se pueden obtener regiones de transición aceptables cambiando sistemáticamente una o más frecuencias límite de las bandas, la longitud de la respuesta al impulso o la función de ponderación del error y volviendo a diseñar el filtro.

7.9. COMENTARIOS SOBRE LOS FILTROS FIR E IIR EN TIEMPO DISCRETO

En este capítulo hemos considerado métodos de diseño de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Hemos presentado un amplio conjunto de métodos para diseñar filtros de respuesta al impulso de duración finita y de duración infinita.

La elección entre filtros FIR e IIR depende de la importancia que tengan para el problema de diseño las ventajas de cada tipo. Por ejemplo, los filtros IIR tienen la ventaja de que se puede diseñar una gran variedad de filtros selectivos en frecuencia utilizando fórmulas de diseño cerradas. Es decir, una vez que se ha especificado el problema en términos que sean apropiados para un determinado método de aproximación (Butterworth, Chebyshev o elíptico), se calcula el orden del filtro que cumplirá las especificaciones y se obtienen los coeficientes (o los polos y ceros) del filtro en tiempo discreto mediante sustitución directa en un sistema de ecuaciones de diseño. Esta simplicidad del procedimiento de diseño hace que se puedan diseñar filtros IIR de forma manual si fuera necesario, y produce programas de ordenador no iterativos para el diseño de filtros IIR. Estos métodos se limitan a filtros selectivos en frecuencia, y sólo se permite especificar el módulo de la respuesta. Si se desean otras formas del módulo, o es necesario aproximar una respuesta de fase o retardo de grupo predeterminados, se requiere un procedimiento algorítmico.

Por el contrario, los filtros FIR pueden tener una fase lineal (generalizada) de forma precisa. Sin embargo, no existen ecuaciones de diseño en forma cerrada para filtros FIR. Aunque el método de enventanado es sencillo de aplicar, puede ser necesaria alguna iteración para cumplir unas determinadas especificaciones. El algoritmo de Parks–McClellan produce filtros de orden menor que el método de enventanado, y existen programas de diseño de filtros para ambos métodos. Además, el método de enventanado y la mayor parte de los procedimientos algorítmicos permiten la posibilidad de aproximar características de respuesta en frecuencia arbitrarias, sólo con un poco más de dificultad de la necesaria para diseñar filtros paso bajo. Adicionalmente, el problema de diseño de filtros FIR está mucho más controlado que el del diseño de filtros IIR, debido a la existencia de un teorema de optimalidad para filtros FIR aplicable en un amplio rango de situaciones prácticas. Las técnicas de diseño de filtros FIR sin fase lineal se pueden consultar en Chen y Parks (1987), Parks y Burrus (1987), Schüssler y Steffen (1988) y Karam y McClellan (1995).

Las cuestiones económicas deben ser también tenidas en cuenta al realizar filtros en tiempo discreto. Estas cuestiones se miden generalmente en términos de complejidad del hardware, área del chip o velocidad computacional. Estos factores están relacionados más o menos directamente con el orden del filtro necesario para cumplir una determinada especificación. En aplicaciones donde no se puede explotar la eficiencia de las implementaciones polifásicas, es generalmente cierto que una determinada especificación de la respuesta de amplitud se puede conseguir de forma más eficiente empleando un filtro IIR. Sin embargo, en muchos casos la fase lineal que se puede conseguir utilizando un filtro FIR puede compensar el coste adicional.

En cualquier problema práctico, la elección de la clase de filtro y del método de diseño será altamente dependiente del contexto, de las restricciones, de las especificaciones y de la plataforma de implementación. En esta sección, concluiremos el capítulo con un ejemplo concreto para ilustrar algunos de los compromisos y de los aspectos que pueden aparecer. No debe olvidarse, sin embargo, que se trata sólo de uno de los muchos escenarios posibles, y en cada uno de ellos se puede llegar a diferentes elecciones y conclusiones.

7.10. DISEÑO DE UN FILTRO DE SOBREMUESTREO

Concluiremos este capítulo con una comparación, en el contexto del sobremuestreo, de diseños de filtros IIR y FIR. Como se presentó en el Capítulo 4, en las Secciones 4.6.2 y 4.9.3, el sobremuestreo por un factor entero y la conversión D/A sobremuestreada emplean un expansor por un factor de L seguido por un filtro paso bajo en tiempo discreto. Como la frecuencia de muestreo a la salida del expansor es L veces la frecuencia a la entrada, el filtro paso bajo trabaja a una velocidad que es L veces la velocidad de la entrada al sobremuestreador del conversor D/A. Como ilustramos en este ejemplo, el orden del filtro paso bajo es muy dependiente de si su diseño es como filtro IIR o como filtro FIR y además, dentro de esas clases, de qué método de diseño de escoge. Aunque el orden del filtro IIR puede ser significativamente inferior al orden del filtro FIR, con el filtro FIR se pueden explotar las eficiencias de las implementaciones polifásicas. En el caso de los diseños IIR, la polifase se puede explotar para las implementaciones de los ceros de la función de transferencia, pero no de los polos.

El sistema que se va a realizar es un sobremuestreador por cuatro, es decir, $L = 4$. Como se indicó en el Capítulo 4, el filtro ideal para una interpolación 1:4 es un filtro paso bajo ideal de ganancia 4 y frecuencia de corte de $\pi/4$. Para aproximarnos a este filtro, las especificaciones pueden ser como sigue:[8]

[8]La ganancia está normalizada a la unidad en la banda de paso. En todos los casos los filtros se pueden escalar por 4 para utilizarse en interpolación.

$$\begin{aligned}
\text{frecuencia límite de la banda de paso } \omega_p &= 0{,}22\pi \\
\text{frecuencia límite de la banda eliminada } \omega_s &= 0{,}29\pi \\
\text{ganancia máxima en la banda de paso} &= 0 \text{ dB} \\
\text{ganancia mínima en la banda de paso} &= -1 \text{ dB} \\
\text{ganancia máxima en la banda eliminada} &= -40 \text{ dB.}
\end{aligned}$$

Se diseñan seis filtros diferentes para cumplir con estas especificaciones: los cuatro diseños de filtros IIR presentados en la Sección 7.3 (Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II y elíptico) y dos diseños de filtros FIR (un diseño basado en la ventana de Kaiser y un diseño óptimo utilizando el algoritmo de Parks–McClellan). Los diseños se realizan utilizando el toolbox de tratamiento de señal de MATLAB. Como el programa de diseño de filtros FIR utilizado requiere límites de tolerancia en la banda de paso que sean simétricos respecto a la unidad, las especificaciones anteriores se escalan previamente de la forma apropiada en el caso de los diseños FIR, y el filtro FIR resultante es escalado de nuevo para obtener una ganancia máxima de 0 dB en la banda de paso (véase el Problema 7.3).

Los órdenes resultantes para los seis filtros se muestran en la Tabla 7.3, y los correspondientes diagramas polo–cero en las Figuras 7.57(a)–(f). En el caso de los diseños FIR sólo se muestran en la Figura 7.57 las localizaciones de los ceros. Si estos filtros se realizan como filtros causales existirá un polo de orden múltiple en el origen para ajustarse al número total de ceros de la función de transferencia.

Sin explotar las eficiencias disponibles, tales como el uso de implementaciones polifásicas, los dos filtros FIR requieren significativamente más multiplicaciones por muestra de salida que cualquiera de los diseños IIR. En el caso de los diseños IIR, el número de multiplicaciones por muestra de salida dependerá de la implementación concreta de los ceros. A continuación, vamos a ver cómo implementar eficientemente cada uno de los seis diseños y en la Tabla 7.4 se proporciona un resumen para comparar el número requerido de multiplicaciones por muestra de salida. Los cuatro diseños IIR se pueden considerar como una combinación en cascada de un filtro FIR (que implementa los ceros de la función de transferencia) y un filtro IIR (que implementa los polos). Comentaremos primero los dos diseños FIR, ya que las eficiencias que se pueden explotar para ellos se pueden utilizar también con las componentes FIR de los filtros IIR.

Diseños de Parks–McClellan y de la ventana de Kaiser: sin explotar la simetría de la respuesta al impulso o una implementación polifásica, el número necesario de multiplicaciones por muestra de *salida* es igual a la longitud del filtro. Si se utiliza una implementación polifásica como se indica en la Sección 4.7.5, entonces el número de multiplicaciones por muestra de *entrada* es igual a la longitud del filtro. Alternativamente, como ambos filtros son simétricos, se puede emplear la estructura presentada

TABLA 7.3 ÓRDENES DE LOS FILTROS DISEÑADOS.

Diseño del filtro	Orden
Butterworth	18
Chebyshev I	8
Chebyshev II	8
Elíptico	5
Kaiser	63
Parks–McClellan	44

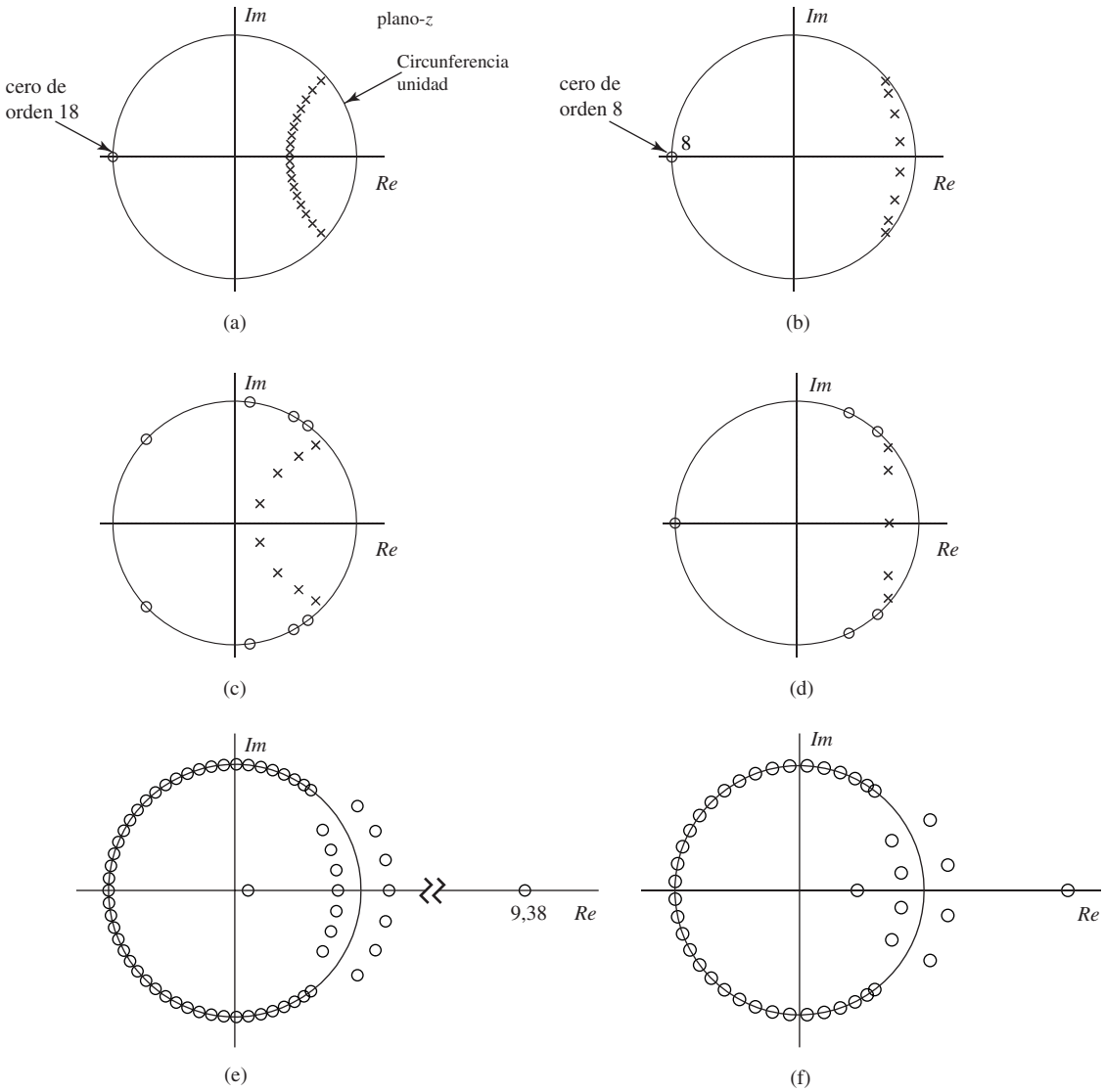


Figura 7.57 Diagramas polo–cero de los seis diseños. (a) Filtro de Butterworth. (b) Filtro de Chebyshev I. (c) Filtro de Chebyshev II. (d) Filtro elíptico. (e) Filtro de Kaiser. (f) Filtro de Parks–McClellan.

en la Sección 6.5.3 (Figuras 6.32 y 6.33) para reducir el número de multiplicaciones a la velocidad de entrada por un factor aproximadamente de 2.[9]

[9]Es posible combinar la estructura de la Sección 6.5.3 y las eficiencias de las implementaciones polifásicas al realizar filtros FIR simétricos (véase Baran y Oppenheim, 2007). El número resultante de multiplicaciones es aproximadamente la mitad de la longitud del filtro y a la velocidad de las muestras de entrada, en vez de a la velocidad de las muestras de salida. Sin embargo, la estructura resultante es significativamente más compleja.

TABLA 7.4 NÚMERO MEDIO DE MULTIPLICACIONES REQUERIDAS POR MUESTRA DE SALIDA PARA CADA UNO DE LOS FILTROS DISEÑADOS.

Diseño del filtro	Forma directa	Simétrico	Polifase
Butterworth	37	18	18
Chebyshev I	17	8	8
Chebyshev II	17	13	10,25
Elíptico	11	8	6,5
Kaiser	64	32	16
Parks–McClellan	45	23	11,25

Diseño de Butterworth: como es característico de los filtros de Butterworth en tiempo discreto, todos los ceros se producen en $z = -1$ y los polos aparecen, por supuesto, en parejas complejas conjugadas. Implementando los ceros como una cascada de 18 sistemas de primer orden de la forma $(1+z^{-1})$ no se requieren multiplicaciones para implementar los ceros. Los 18 polos requieren un total de 18 multiplicaciones por muestra de salida.

Diseño de Chebyshev I: el filtro de Chebyshev I tiene orden 8 con sus ceros en $z = -1$ y por tanto dichos ceros se pueden realizar sin multiplicaciones. Los 8 polos requieren 8 multiplicaciones por muestra de salida.

Diseño de Chebyshev II: en este diseño, el filtro es de nuevo de orden 8. Como los ceros se encuentran ahora distribuidos por la circunferencia unidad, su implementación requerirá algunas multiplicaciones. Sin embargo, como todos los ceros se encuentran sobre la circunferencia unidad, la respuesta al impulso FIR asociada será simétrica y se pueden explotar las eficiencias de la estructura de la Sección 6.5.3 y de las implementaciones polifásicas para implementar los ceros.

Diseño de filtro elíptico: el filtro elíptico tiene el orden mínimo (orden 5) de los cuatro diseños IIR. A partir del diagrama polo–cero, se puede observar que tiene todos sus ceros sobre la circunferencia unidad. En consecuencia, los ceros se pueden realizar eficientemente explotando la simetría así como las implementaciones polifásicas.

La Tabla 7.4 resume el número de multiplicaciones necesarias por muestra de salida para cada uno de los seis diseños con varias estructuras de implementación diferentes. La implementación en forma directa asume que tanto los polos como los ceros se implementan en forma directa, es decir, no se aprovecha la posibilidad de la implementación en cascada de múltiples ceros en $z = -1$. Explotando una implementación polifásica pero no la simetría de la respuesta al impulso los diseños FIR son ligeramente menos eficientes que los diseños IIR más eficientes, aunque aquéllos son también los únicos que tienen fase lineal. Explotando tanto la simetría como la implementación polifásica en la implementación del diseño de Parks–McClellan lo convierten, junto con el filtro elíptico, en los más eficientes.

7.11. RESUMEN

En este capítulo hemos considerado una variedad de técnicas de diseño de filtros en tiempo discreto con respuesta al impulso finita e infinita. Nos hemos centrado en la especificación en el dominio de la frecuencia de las características del filtro deseado, ya que es la práctica más común. Nuestro objetivo ha

sido dar una panorámica general del amplio rango de posibilidades disponibles para realizar el diseño de filtros en tiempo discreto, proporcionando además el suficiente detalle sobre algunas de las técnicas para poderlas aplicar directamente, sin necesidad de consultas adicionales a la extensa literatura existente sobre el diseño de filtros en tiempo discreto. En el caso de los sistemas FIR se han presentado con considerable detalle el método de enventanado y el método algorítmico de Parks–McClellan.

El capítulo concluye con algunas consideraciones sobre la selección entre las dos clases de filtros digitales. El principal punto de discusión es que la elección no es siempre clara y puede depender de multitud de factores que son a menudo difíciles de cuantificar o de discutir en términos generales. Sin embargo, debe quedar claro de lo expuesto en este capítulo y en el Capítulo 6 que los filtros digitales se caracterizan por una gran flexibilidad en su diseño y realización. Esta flexibilidad posibilita realizar esquemas de tratamiento de señales muy sofisticados que, en muchos casos, sería difícil realizar, si no imposible, por medios analógicos.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

7.1. Considere un sistema en tiempo continuo causal con respuesta al impulso $h_c(t)$ y función de transferencia

$$H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}.$$

(a) Utilizando la técnica de invarianza al impulso, determine la función de transferencia $H_1(z)$ de un sistema en tiempo discreto tal que $h_1[n] = h_c(nT)$.

(b) Utilizando invarianza al escalón, determine la función de transferencia $H_2(z)$ de un sistema en tiempo discreto tal que $s_2[n] = s_c(nT)$, siendo

$$s_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_2[k] \qquad \text{y} \qquad s_c(t) = \int_{-\infty}^{t} h_c(\tau)d\tau.$$

(c) Determine la respuesta al escalón $s_1[n]$ del sistema 1 y la respuesta al impulso $h_2[n]$ del sistema 2. ¿Es cierto que $h_2[n] = h_1[n] = h_c(nT)$? ¿Es cierto que $s_1[n] = s_2[n] = s_c(nT)$?

7.2. Se desea diseñar un filtro paso bajo en tiempo discreto aplicando el método de invarianza al impulso a un filtro de Butterworth en tiempo continuo cuya función módulo al cuadrado es

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}.$$

Las especificaciones del sistema en tiempo discreto son las del Ejemplo 7.2. Es decir,

$$\begin{aligned} &0{,}89125 \le |H(e^{j\omega})| \le 1, && 0 \le |\omega| \le 0{,}2\pi, \\ &|H(e^{j\omega})| \le 0{,}17783, && 0{,}3\pi \le |\omega| \le \pi. \end{aligned}$$

Suponga como en ese ejemplo que el solapamiento no es un problema, es decir, diseñe el filtro de Butterworth en tiempo continuo de forma que cumpla las especificaciones de banda de paso y de banda eliminada determinadas por el filtro deseado en tiempo discreto.

(a) Dibuje los límites de tolerancia del módulo de la respuesta al impulso, $|H_c(j\Omega)|$, del filtro de Butterworth en tiempo continuo de forma que, tras la aplicación de método de invarianza al impulso (es decir, $h[n] = T_d h_c(nT_d)$), el filtro en tiempo discreto resultante satisfaga las especificaciones de diseño dadas. No suponga que $T_d = 1$ como en el Ejemplo 7.2.

(b) Determine el orden entero N y la cantidad $T_d\Omega_c$ de forma que el filtro de Butterworth en tiempo continuo cumpla exactamente las especificaciones del apartado (a) en el límite de la banda de paso.

(c) Nótese que si $T_d = 1$, la respuesta del apartado (b) debe coincidir con los valores de N y Ω_c obtenidos en el Ejemplo 7.2. Utilice este hecho para determinar la función de transferencia $H_c(s)$ para $T_d \neq 1$ y para argumentar que la función de transferencia $H(z)$ que resulta de aplicar el método de invarianza al impulso con $T_d \neq 1$ es la misma que la que resulta con $T_d = 1$ dada por la Ecuación (7.17).

7.3. Se desea utilizar el método de invarianza al impulso o la transformación bilineal para diseñar un filtro en tiempo discreto que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 1-\delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| &\leq 1+\delta_1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq \delta_2, \qquad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned} \tag{P7.3-1}$$

Por razones históricas, la mayoría de las fórmulas, tablas o gráficas de diseño de filtros en tiempo continuo se especifican generalmente para una ganancia de pico unidad en la banda de paso, es decir,

$$\begin{aligned} 1-\hat{\delta}_1 \leq |H_c(j\Omega)| &\leq 1, \quad 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p, \\ |H_c(\Omega)| &\leq \hat{\delta}_2, \quad \Omega_s \leq |\Omega|. \end{aligned} \tag{P7.3-2}$$

En Rabiner, Kaiser, Herrmann y Dolan (1974) se proporcionan gráficas útiles para el diseño de filtros en tiempo continuo especificados de esta forma.

(a) Para utilizar estas tablas y gráficas en el diseño de filtros en tiempo discreto con ganancia de pico de $(1+\delta_1)$, es necesario convertir las especificaciones del sistema en tiempo discreto en especificaciones con la forma de la Ecuación (P7.3-2). Esto se puede hacer dividiendo las especificaciones en tiempo discreto por $(1+\delta_1)$. Utilice este procedimiento para obtener una expresión de $\hat{\delta}_1$ y $\hat{\delta}_2$ en función de δ_1 y δ_2.

(b) En el Ejemplo 7.2 diseñamos un filtro en tiempo discreto con una ganancia máxima unidad en la banda de paso. Este filtro se puede transformar en un filtro que cumple un conjunto de especificaciones como las de la Ecuación (P7.3-1) multiplicando por una constante de la forma $(1+\delta_1)$. Obtenga el valor necesario de δ_1 y el correspondiente valor de δ_2 para este ejemplo y utilice la Ecuación (7.17) para determinar los coeficientes de la función de transferencia del nuevo filtro.

(c) Repita el apartado (b) para el filtro del Ejemplo 7.3.

7.4. La función de transferencia de un sistema en tiempo discreto es

$$H(z) = \frac{2}{1-e^{-0,2}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-0,4}z^{-1}}.$$

(a) Suponga que este filtro en tiempo discreto se diseña con el método de invarianza al impulso con $T_d = 2$; es decir, $h[n] = 2h_c(2n)$, siendo $h_c(t)$ real. Obtenga la función de transferencia $H_c(s)$ del filtro en tiempo continuo que se podría haber utilizado como base para el diseño. ¿Es única la respuesta? Si no lo es, obtenga otra función de transferencia $H_c(s)$.

(b) Suponga que $H(z)$ se obtiene mediante la transformación bilineal con $T_d = 2$. Obtenga la función de transferencia $H_c(s)$ que podría haberse utilizado como base para el diseño ¿Es única la respuesta? Si no lo es, obtenga otra función de transferencia $H_c(s)$.

7.5. Se desea utilizar el método de la ventana de Kaiser para diseñar un filtro en tiempo discreto con fase lineal generalizada que cumpla un conjunto de especificaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &\leq 0{,}01, & 0 \leq |\omega| \leq 0{,}25\pi, \\ 0{,}95 \leq |H(e^{j\omega})| &\leq 1{,}05, & 0{,}35\pi \leq |\omega| \leq 0{,}6\pi, \\ |H(e^{j\omega})| &\leq 0{,}01, & 0{,}65\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

(a) Determine la mínima longitud $(M+1)$ de la respuesta al impulso y el valor del parámetro β de la ventana de Kaiser para que el filtro cumpla las especificaciones anteriores.
(b) ¿Cuál es el retardo del filtro?
(c) Determine la respuesta al impulso ideal $h_d[n]$ sobre la que se aplicaría la ventana de Kaiser.

7.6. Se desea utilizar el método de la ventana de Kaiser para diseñar un filtro FIR real y simétrico con fase cero que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 0{,}9 < H(e^{j\omega}) &< 1{,}1, & 0 \leq |\omega| \leq 0{,}2\pi, \\ -0{,}06 < H(e^{j\omega}) &< 0{,}06, & 0{,}3\pi \leq |\omega| \leq 0{,}475\pi, \\ 1{,}9 < H(e^{j\omega}) &< 2{,}1, & 0{,}525\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Estas especificaciones se pueden cumplir aplicando la ventana de Kaiser a la respuesta al impulso real ideal asociada a la respuesta en frecuencia ideal $H_d(e^{j\omega})$ dada por

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq 0{,}25\pi, \\ 0, & 0{,}25\pi \leq |\omega| \leq 0{,}5\pi, \\ 2, & 0{,}5\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es el máximo valor de δ que se puede utilizar para cumplir las especificaciones? ¿Cuál es el correspondiente valor de β? Explique claramente el razonamiento seguido.
(b) ¿Cuál es el máximo valor de $\Delta\omega$ que se puede utilizar para cumplir las especificaciones? ¿Cuál es el correspondiente valor de $M+1$, la longitud de la respuesta al impulso? Explique claramente el razonamiento seguido.

7.7. Estamos interesados en realizar un filtro paso bajo LTI en tiempo continuo $H(j\Omega)$ utilizando el sistema que se muestra en la Figura 4.10, donde el sistema en tiempo discreto tiene como respuesta en frecuencia $H_d(e^{j\omega})$. El periodo de muestreo es $T = 10^{-4}$ segundos y la señal de entrada $x_c(t)$ está limitada en banda de forma apropiada, con $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$.

Sean las especificaciones de $|H(j\Omega)|$

$$\begin{aligned} 0{,}99 \leq |H(j\Omega)| &\leq 1{,}01, & |\Omega| \leq 2\pi(1000), \\ |H(j\Omega)| &\leq 0{,}01, & |\Omega| \geq 2\pi(1100). \end{aligned}$$

Determine las correspondientes especificaciones de la respuesta en frecuencia en tiempo discreto $H_d(e^{j\omega})$.

7.8. Se desea diseñar un filtro paso bajo FIR de tipo I óptimo (Parks–McClellan) de fase cero con frecuencia de la banda de paso $\omega_p = 0{,}3\pi$ y frecuencia de la banda eliminada $\omega_s = 0{,}6\pi$ con la misma ponderación del error en la banda de paso y en la banda eliminada. La respuesta al impulso del filtro deseado tiene longitud 11. Es decir, $h[n] = 0$ para $n < -5$ o $n > 5$. La Figura P7.8 muestra la respuesta en frecuencia deseada $H(e^{j\omega})$ para dos filtros diferentes. Para cada filtro, especifique cuántas alternancias tiene e indique si satisface el teorema de alternación como filtro óptimo en el sentido minimax que cumple las anteriores especificaciones.

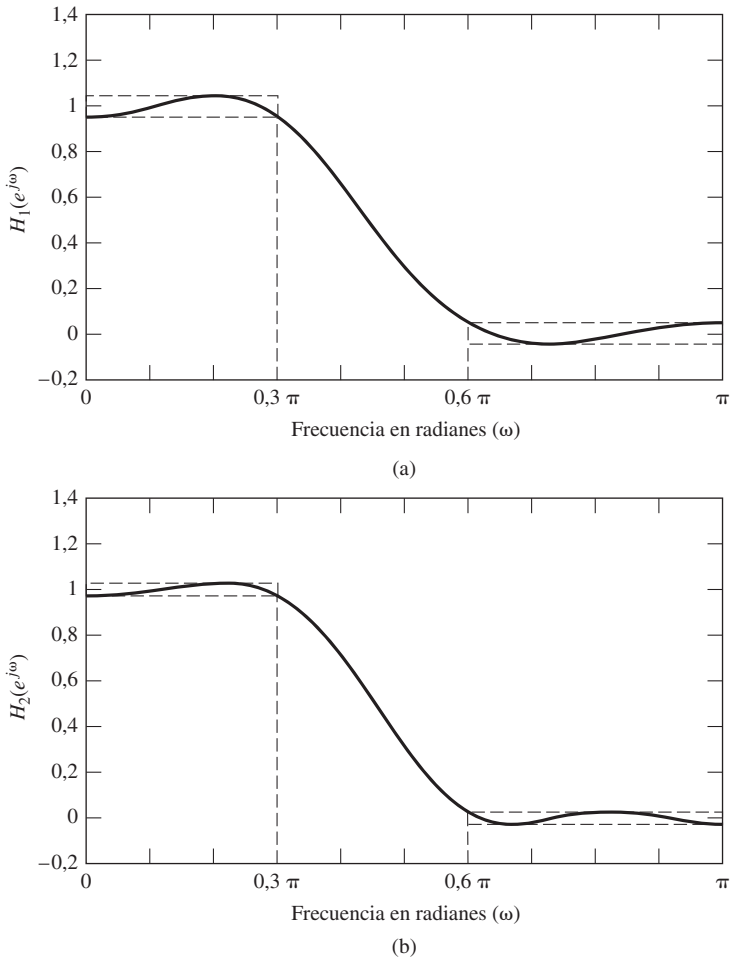


Figura P7.8

7.9. Suponga que se desea diseñar un filtro en tiempo discreto utilizando la técnica de invarianza al impulso con un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo como prototipo. El filtro prototipo tiene una frecuencia de corte de $\Omega_c = 2\pi(1000)$ rad/s, y la transformación del método de invarianza al impulso utiliza $T = 0{,}2$ ms. ¿Cuál es la frecuencia de corte ω_c del filtro en tiempo discreto resultante?

7.10. Se desea diseñar un filtro paso bajo en tiempo discreto aplicando la transformación bilineal a un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo. Suponga que el filtro prototipo en tiempo continuo tiene una frecuencia de corte de $\Omega_c = 2\pi(2000)$ rad/s, y escogemos como parámetro de la transformación bilineal $T = 0{,}4$ ms. ¿Cuál es la frecuencia de corte ω_c del filtro en tiempo discreto resultante?

7.11. Suponga que tenemos un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$. Además, se sabe que este filtro ha resultado de aplicar la técnica de invarianza al impulso a un filtro paso bajo en tiempo continuo prototipo utilizando $T = 0{,}1$ ms. ¿Cuál es la frecuencia de corte Ω_c del filtro prototipo en tiempo continuo?

7.12. Un filtro paso alto en tiempo discreto con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$ se diseña utilizando la transformación bilineal con $T = 1$ ms. ¿Cuál es la frecuencia de corte Ω_c del filtro prototipo paso alto ideal en tiempo continuo?

7.13. Un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto con frecuencia de corte $\omega_c = 2\pi/5$ se diseña utilizando la técnica de invarianza al impulso a partir de un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo de frecuencia de corte

$\Omega_c = 2\pi(4000)$ rad/s. ¿Cuál es el valor de T? ¿Es único este valor? Si no lo es, obtenga otro valor de T que sea consistente con la información dada.

7.14. Se utiliza la transformación bilineal para diseñar un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto con frecuencia de corte $\omega_c = 3\pi/5$ a partir de un filtro paso bao ideal en tiempo continuo de frecuencia de corte $\Omega_c = 2\pi(300)$ rad/s. Proporcione un valor del parámetro T que sea consistente con esta información. ¿Es único este valor? Si no lo es, proporcione otro valor de T que sea consistente con la información dada.

7.15. Se desea diseñar un filtro FIR paso bajo que satisfaga las especificaciones

$$\begin{aligned} 0{,}95 < H(e^{j\omega}) < 1{,}05, &\qquad 0 \le |\omega| \le 0{,}25\pi, \\ -0{,}1 < H(e^{j\omega}) < 0{,}1, &\qquad 0{,}35\pi \le |\omega| \le \pi, \end{aligned}$$

aplicando una ventana $w[n]$ a la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro paso bajo ideal en tiempo discreto con frecuencia de corte $\omega_c = 0{,}3\pi$. ¿Cuál de los filtros de la Sección 7.5.1 se puede utilizar para cumplir con esta especificación? Para cada ventana que cumpla la especificación, proporcione la mínima longitud requerida para el filtro $M+1$.

7.16. Se desea diseñar un filtro FIR paso bajo que satisfaga las especificaciones

$$\begin{aligned} 0{,}98 < H(e^{j\omega}) < 1{,}02, &\qquad 0 \le |\omega| \le 0{,}63\pi, \\ -0{,}15 < H(e^{j\omega}) < 0{,}15, &\qquad 0{,}65\pi \le |\omega| \le \pi, \end{aligned}$$

aplicando la ventana de Kaiser a la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro paso bajo ideal en tiempo discreto con frecuencia de corte $\omega_c = 0{,}64\pi$. Obtenga los valores de β y M necesarios para cumplir las especificaciones.

7.17. Suponga que se desea diseñar un filtro paso banda que cumpla la siguiente especificación:

$$\begin{aligned} -0{,}02 < |H(e^{j\omega})| < 0{,}02, &\qquad 0 \le |\omega| \le 0{,}2\pi, \\ 0{,}95 < |H(e^{j\omega})| < 1{,}05, &\qquad 0{,}3\pi \le |\omega| \le 0{,}7\pi, \\ -0{,}001 < |H(e^{j\omega})| < 0{,}001, &\qquad 0{,}75\pi \le |\omega| \le \pi. \end{aligned}$$

El filtro se diseñará aplicando a un filtro prototipo en tiempo continuo el método de invarianza al impulso con $T = 5$ ms Indique las especificaciones que se deben utilizar para diseñar el filtro prototipo en tiempo continuo.

7.18. Suponga que se desea diseñar un filtro paso alto que cumpla la siguiente especificación:

$$\begin{aligned} -0{,}04 < |H(e^{j\omega})| < 0{,}04, &\qquad 0 \le |\omega| \le 0{,}2\pi, \\ 0{,}995 < |H(e^{j\omega})| < 1{,}005, &\qquad 0{,}3\pi \le |\omega| \le \pi. \end{aligned}$$

El filtro se diseñará aplicando a un filtro prototipo en tiempo continuo la transformación bilineal con $T =$ 2 ms. Indique las especificaciones que se deben utilizar en el filtro prototipo en tiempo continuo para asegurar que el filtro en tiempo discreto cumple las especificaciones.

7.19. Se desea diseñar un filtro paso banda ideal en tiempo discreto cuya banda de paso sea $\pi/4 \le \omega \le \pi/2$ aplicando la técnica de invarianza al impulso a un filtro paso banda ideal en tiempo continuo cuya banda de paso es $2\pi(300) \le \Omega \le 2\pi(600)$. Especifique un valor de T que produzca el filtro deseado. ¿Es único ese valor de T?

7.20. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

Afirmación: Si se usa la transformación bilineal para transformar un sistema paso todo en tiempo continuo en un sistema en tiempo discreto, el sistema resultante en tiempo discreto será también un sistema paso todo.

Problemas básicos

7.21. Se pide a un ingeniero que evalúe el sistema de tratamiento de señales que se muestra en la Figura P7.21-1, y lo mejore si es necesario. La entrada $x[n]$ se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo con una frecuencia de muestreo de $1/T = 100$ Hz.

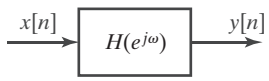


Figura P7.21-1

El objetivo es que $H(e^{j\omega})$ sea un filtro FIR de fase lineal, e idealmente debería tener la siguiente respuesta en amplitud (de forma que pueda funcionar como un diferenciador de banda limitada):

$$\text{amplitud de } H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega/T & \omega < 0 \\ \omega/T & \omega \geq 0 \end{cases}$$

(a) Dada una implementación de $H(e^{j\omega})$, que denominaremos $H_1(e^{j\omega})$, el diseñador, motivado por la definición

$$\frac{d\,(x(t))}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t},$$

escoge la respuesta al impulso del sistema $h_1[n]$ de forma que la relación entrada–salida sea

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{T}$$

Dibuje la respuesta en amplitud de $H_1(e^{j\omega})$ y comente si se ajusta bien a la respuesta ideal. Puede encontrar de utilidad los siguientes desarrollos:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$

(b) Se desea conectar $H_1(e^{j\omega})$ en cascada con otro filtro FIR $G(e^{j\omega})$ *de fase lineal*, para asegurar que, en la combinación de los dos filtros, el retardo de grupo es un número entero de muestras. ¿Debería ser la longitud de $g[n]$ par o impar? Explique su respuesta.

(c) Otro método para diseñar el filtro H en tiempo discreto es el método de la invarianza al impulso. En este método, se muestrea la respuesta al impulso ideal en tiempo continuo de banda limitada, que se muestra en la Ecuación P7.21-1.

$$h(t) = \frac{\Omega_c \pi t \cos(\Omega_c t) - \pi \operatorname{sen}(\Omega_c t)}{\pi^2 t^2} \qquad \text{(P7.21-1)}$$

(En una aplicación típica, Ω_c sería ligeramente menor que π/T, resultando que $h(t)$ es la respuesta al impulso de un diferenciador con banda limitada a $|\Omega| < \pi/T$.) Basándose en esta respuesta al impulso, se desea crear un nuevo filtro H_2 que sea también FIR y de fase lineal. Por tanto, la respuesta al impulso $h_2[n]$, debe conservar la simetría impar de $h(t)$ respecto a $t = 0$. Utilizando la gráfica de la Figura P7.21-2, indique la posición resultante de las muestras si la respuesta al impulso se muestrea a 100 Hz, y se obtiene una respuesta al impulso de longitud 9 utilizando una ventana rectangular.

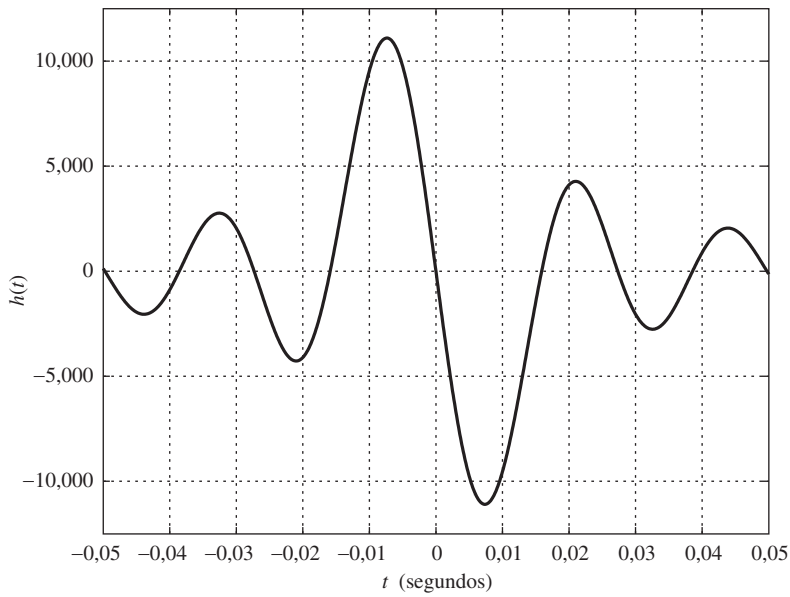


Figura P7.21-2

(d) Utilizando de nuevo la gráfica de la Figura P7.21-2, indique la posición de las muestras si se diseña la respuesta al impulso $h_2[n]$ con longitud 8, conservando de nuevo la simetría impar de $h(t)$ respecto a $t = 0$.

(e) Como la respuesta en amplitud de $H(e^{j\omega})$ es grande en los alrededores de $\omega = \pi$, no se desea que H_2 tenga un cero en $\omega = \pi$. ¿Debe utilizarse una respuesta al impulso con un número de muestras par o impar? Explique su respuesta.

7.22. En el sistema que se muestra en la Figura P7.22, el sistema en tiempo discreto es un filtro paso bajo FIR de fase lineal diseñado mediante el algoritmo de Parks–McClellan con $\delta_1 = 0{,}01$, $\delta_2 = 0{,}001$, $\omega_p = 0{,}4\pi$ y $\omega_s = 0{,}6\pi$. La longitud de la respuesta al impulso es de 28 muestras. La frecuencia de muestreo de los conversores C/D y D/C ideales es de $1/T = 10000$ muestras/segundo.

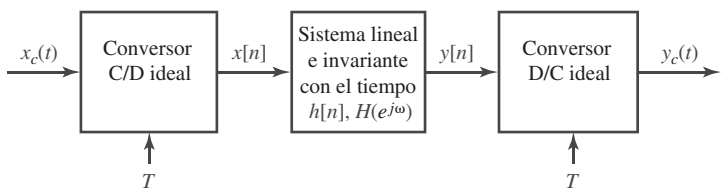


Figura P7.22

(a) ¿Qué propiedad debería tener la señal de entrada para que el sistema total se comporte como un sistema lineal e invariante con el tiempo con $Y_c(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega)$?

(b) Dada la condición obtenida en (a), determine las especificaciones sobre el error de aproximación satisfechas por $|H_{eff}(j\Omega)|$. Proporcione su respuesta como una ecuación o como una gráfica en función de Ω.

(c) ¿Cuál es el retardo total (en segundos) desde la entrada en tiempo continuo hasta la salida en tiempo continuo del sistema de la Figura P7.22?

7.23. Considere un sistema en tiempo continuo con función de transferencia

$$H_c(s) = \frac{1}{s}.$$

Este sistema se denomina *integrador,* ya que la salida $y_c(t)$ está relacionada con la entrada $x_c(t)$ mediante la expresión

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} x_c(\tau)d\tau.$$

Suponga un sistema en tiempo discreto obtenido aplicando la transformación bilineal a $H_c(s)$.

(a) ¿Cuál es la función de transferencia $H(z)$ del sistema en tiempo discreto resultante? ¿Cuál es su respuesta al impulso $h[n]$?

(b) Si $x[n]$ es la entrada e $y[n]$ es la salida del sistema resultante en tiempo discreto, escriba la ecuación en diferencias satisfecha por la entrada y la salida. ¿Qué problemas puede anticipar al implementar el sistema en tiempo discreto utilizando esta ecuación en diferencias?

(c) Obtenga una expresión de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema. Dibuje su módulo y su fase para $0 \leq |\omega| \leq \pi$. Compárelos con el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia $H_c(j\Omega)$ del integrador en tiempo continuo. ¿Bajo qué condiciones el "integrador" en tiempo discreto se podría considerar una buena aproximación al integrador en tiempo continuo?

Considere ahora un sistema en tiempo continuo con función de transferencia

$$G_c(s) = s.$$

Este sistema es un *diferenciador*; es decir, la salida es la derivada de la entrada. Suponga que se obtiene un sistema en tiempo discreto aplicando la transformación bilineal a $G_c(s)$.

(d) ¿Cuál es la función de transferencia $G(z)$ del sistema en tiempo discreto resultante? ¿Cuál es su respuesta al impulso $g[n]$?

(e) Obtenga una expresión de la respuesta en frecuencia $G(e^{j\omega})$ del sistema. Dibuje su módulo y su fase para $0 \leq |\omega| \leq \pi$. Compárelos con el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia $G_c(j\Omega)$ del diferenciador en tiempo continuo. ¿Bajo qué condiciones el "diferenciador" en tiempo discreto se podría considerar una buena aproximación al diferenciador en tiempo continuo?

(f) El integrador y el diferenciador en tiempo continuo son sistemas exactamente inversos entre sí. ¿Es esto también cierto para las aproximaciones en tiempo discreto obtenidas utilizando la transformación bilineal?

7.24. Suponga que tenemos un filtro FIR con simetría par y de longitud $2L+1$, es decir,

$$h[n] = 0 \text{ para } |n| > L,$$

$$h[n] = h[-n].$$

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, es decir, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $h[n]$, se muestra en el intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$, en la Figura P7.24.
¿Qué se puede deducir observando la Figura P7.24 sobre el posible intervalo de valores de L? Explique claramente la razón (o razones) de su respuesta. No haga suposiciones sobre el procedimiento de diseño que se podría haber utilizado para obtener $h[n]$.

7.25. Sea $h_d[n]$ la respuesta al impulso de un sistema ideal requerido, con su respuesta en frecuencia correspondiente, $H_d(e^{j\omega})$. Sean $h[n]$ y $H(e^{j\omega})$ respectivamente, la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia de una aproximación FIR al sistema ideal. Suponga que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > M$. Se desea obtener las $(M+1)$ muestras de la respuesta al impulso de forma que minimicen el error cuadrático medio de la respuesta en frecuencia definido como

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

(a) Utilice la relación de Parseval para expresar la función de error en función de las secuencias $h_d[n]$ y $h[n]$.

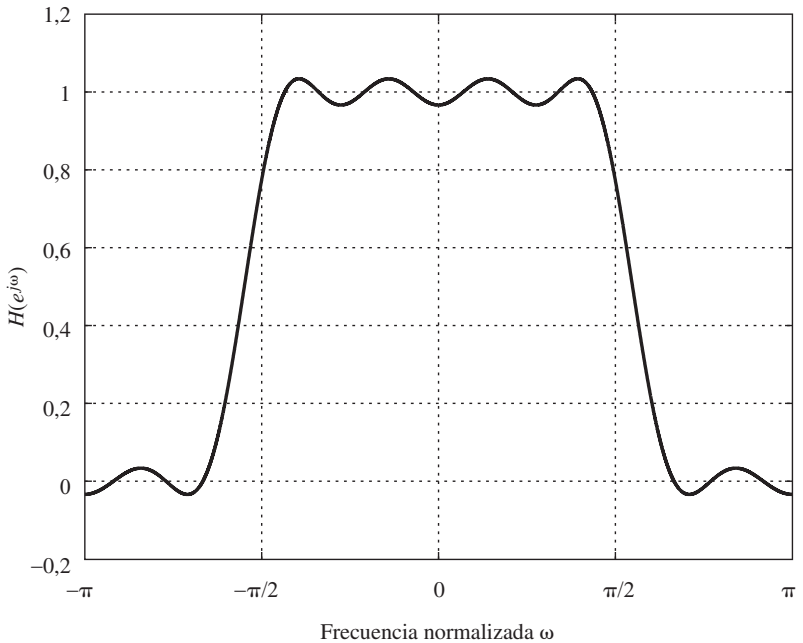


Figura P7.24

(b) Utilizando el resultado del apartado (a), determine los valores de $h[n]$ para $0 \leq n \leq M$ que minimizan ε^2.

(c) El filtro FIR determinado en el apartado (b) se podría haber obtenido mediante una operación de enventanado. Es decir, $h[n]$ se podría haber obtenido multiplicando la secuencia requerida de longitud infinita $h_d[n]$ por una cierta secuencia $w[n]$ de longitud finita. Determine la función necesaria $w[n]$ tal que la respuesta al impulso óptima sea $h[n] = w[n]h_d[n]$.

Problemas avanzados

7.26. La *invarianza al impulso* y la *transformación bilineal* son dos métodos para diseñar filtros en tiempo discreto. Ambos métodos transforman una función de transferencia en tiempo continuo $H_c(s)$ en una función de transferencia en tiempo discreto $H(z)$. Responda a las cuestiones que siguen indicando qué método producirá el resultado deseado:

(a) Un sistema en tiempo continuo de fase mínima tiene todos sus polos y ceros en el semiplano izquierdo del plano s. Si se transforma un sistema en tiempo continuo de fase mínima en un sistema en tiempo discreto, ¿qué método o métodos producirán un sistema en tiempo discreto de fase mínima?

(b) Si el sistema en tiempo continuo es un sistema paso todo sus polos estarán en las posiciones s_k del semiplano s izquierdo y sus ceros estarán en las posiciones $-s_k$ del semiplano s derecho, ¿qué método o métodos producirán un sistema en tiempo discreto paso todo?

(c) ¿Qué método o métodos garantizan que

$$H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)\big|_{\Omega=0}?$$

(d) Si el sistema en tiempo continuo es un filtro banda eliminada, ¿qué método o métodos producirán un sistema en tiempo discreto banda eliminada?

(e) Suponga que $H_1(z)$, $H_2(z)$ y $H(z)$ son versiones transformadas de $H_{c1}(s)$, $H_{c2}(s)$ y $H_c(s)$, respectivamente. ¿Qué método o métodos de diseño garantizarán que $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ siempre que $H_c(s) = H_{c1}(s)H_{c2}(s)$?

(f) Suponga que $H_1(z)$, $H_2(z)$ y $H(z)$ son versiones transformadas de $H_{c1}(s)$, $H_{c2}(s)$ y $H_c(s)$, respectivamente. ¿Qué método o métodos de diseño garantizarán que $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ siempre que $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$?

(g) Suponga que dos funciones de transferencia en tiempo continuo satisfacen la condición

$$\frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & \Omega > 0, \\ e^{j\pi/2}, & \Omega < 0. \end{cases}$$

Si $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son versiones transformadas de $H_{c1}(s)$ y $H_{c2}(s)$, respectivamente, ¿qué método o métodos de diseño producirán un sistema en tiempo discreto tal que

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi, \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0? \end{cases}$$

(Estos sistemas se denominan "desplazadores de fase de 90 grados".)

7.27. Suponga que se tiene un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/4, \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Se desea obtener nuevos filtros a partir de ese prototipo mediante transformaciones de la respuesta al impulso $h[n]$.

(a) Dibuje la respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$ del sistema cuya respuesta al impulso es $h_1[n] = h[2n]$.

(b) Dibuje la respuesta en frecuencia $H_2(e^{j\omega})$ del sistema cuya respuesta al impulso es

$$h_2[n] = \begin{cases} h[n/2], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(c) Dibuje la respuesta en frecuencia $H_3(e^{j\omega})$ del sistema cuya respuesta al impulso es $h_3[n] = e^{j\pi n} h[n] = (-1)^n h[n]$.

7.28. Considere un filtro paso bajo en tiempo continuo $H_c(s)$ cuyas especificaciones en la banda de paso y la banda eliminada son

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 \leq |H_c(j\Omega)| &\leq 1 + \delta_1, \qquad |\Omega| \leq \Omega_p, \\ |H_c(j\Omega)| &\leq \delta_2, \qquad \Omega_s \leq |\Omega|. \end{aligned}$$

Este filtro se convierte en un filtro paso bajo en tiempo discreto $H_1(z)$ mediante la transformación

$$H_1(z) = H_c(s)\big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})},$$

y el mismo filtro en tiempo continuo se transforma en un filtro paso alto mediante la transformación

$$H_2(z) = H_c(s)\big|_{s=(1+z^{-1})/(1-z^{-1})}.$$

(a) Determine una relación entre la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso bajo en tiempo continuo Ω_p y la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso bajo en tiempo discreto ω_{p1}.

(b) Determine una relación entre la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso bajo en tiempo continuo Ω_p y la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso alto en tiempo discreto ω_{p2}.

(c) Determine una relación entre la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso bajo en tiempo discreto ω_{p1} y la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso alto en tiempo discreto ω_{p2}.

(d) La red de la Figura P7.28 muestra una realización del filtro paso bajo en tiempo discreto con función de transferencia $H_1(z)$. Los coeficientes A, B, C y D son reales. ¿Cómo se podrían modificar estos coeficientes para obtener una red que realice el filtro paso alto en tiempo discreto con función de transferencia $H_2(z)$?

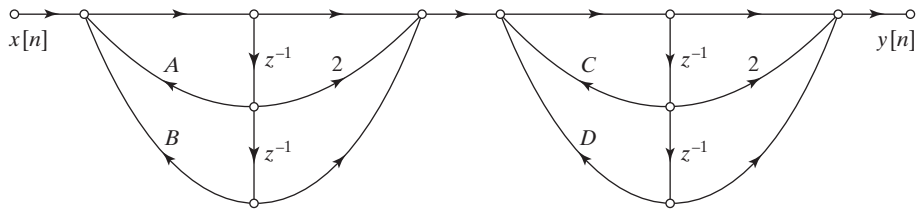


Figura P7.28

7.29. Un sistema en tiempo discreto con función de transferencia $H(Z)$ y respuesta al impulso $h[n]$ tiene como respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} A, & |\theta| < \theta_c, \\ 0, & \theta_c < |\theta| \leq \pi, \end{cases}$$

siendo $0 < \theta_c < \pi$. Este filtro se transforma en un nuevo filtro mediante la transformación $Z = -z^2$; es decir,

$$H_1(z) = H(Z)\big|_{Z=-z^2} = H(-z^2).$$

(a) Obtenga una relación entre la variable de frecuencia θ del sistema paso bajo original $H(Z)$ y la variable de frecuencia ω del nuevo sistema $H_1(z)$.

(b) Dibuje y etiquete cuidadosamente la respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\omega})$ del nuevo filtro.

(c) Obtenga una relación que permita expresar $h_1[n]$ en función de $h[n]$.

(d) Suponga que $H(Z)$ se puede realizar mediante el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] - a_1 g[n-1] - b_1 f[n-2], \\ f[n] &= a_2 g[n-1] + b_2 f[n-1], \\ y[n] &= c_1 f[n] - c_2 g[n-1], \end{aligned}$$

siendo $x[n]$ la entrada del sistema e $y[n]$ la salida. Determine un sistema de ecuaciones en diferencias que realice el sistema transformado $H_1(z) = H(-z^2)$.

7.30. Considere el diseño de un filtro en tiempo discreto con función de transferencia $H(z)$ a partir de un filtro en tiempo continuo con función de transferencia racional $H_c(s)$ mediante la transformación

$$H(z) = H_c(s)\big|_{s=\beta[(1-z^{-\alpha})/(1+z^{-\alpha})]},$$

siendo α un entero distinto de cero y β un número real.

(a) Si $\alpha > 0$, ¿para qué valores de β un filtro en tiempo continuo causal y estable con función de transferencia racional $H_c(s)$ produce siempre un filtro en tiempo discreto causal y estable con función de transferencia racional $H(z)$?

(b) Si $\alpha < 0$, ¿para qué valores de β un filtro en tiempo continuo causal y estable con función de transferencia racional $H_c(s)$ produce siempre un filtro en tiempo discreto causal y estable con función de transferencia racional $H(z)$?

(c) Para $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, determine en qué contorno del plano z se transforma el eje $j\Omega$ del plano s.

(d) Suponga que el sistema en tiempo continuo es un filtro paso bajo estable cuya respuesta en frecuencia en su banda de paso cumple que

$$1-\delta_1 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1+\delta_1 \qquad \text{para} \quad |\Omega| \leq 1.$$

Si el sistema en tiempo discreto $H(z)$ se obtiene mediante la transformación mencionada al principio de este problema con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, determine los valores de ω en el intervalo $|\omega| \leq \pi$ para los que

$$1-\delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1+\delta_1 .$$

7.31. Suponga que hemos utilizado el algoritmo de Parks–McClellan para diseñar un filtro paso bajo FIR causal de fase lineal. La función de transferencia de este filtro se denomina $H(z)$. La *longitud* de la respuesta al impulso es de 25 muestras, es decir, $h[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > 24$, y $h[0] \neq 0$. La respuesta deseada y la función de ponderación utilizada son

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0{,}3\pi \\ 0 & 0{,}4\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \qquad W(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0{,}3\pi \\ 2 & 0{,}4\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

En los casos posteriores, determine si las afirmaciones son verdaderas o falsas, o si no se proporciona suficiente información. Justifique sus conclusiones.

(a) $h[n+12] = h[12-n]$ o $h[n+12] = -h[12-n]$ para $-\infty < n < \infty$.
(b) El sistema tiene sistema inverso que es causal y estable.
(c) Sabemos que $H(-1) = 0$.
(d) El máximo error de aproximación ponderado tiene el mismo valor en todas las bandas de aproximación.
(e) Si z_0 es un cero de $H(z)$, entonces $1/z_0$ es un polo de $H(z)$.
(f) El sistema se puede implementar mediante una red (grafo de flujo) que no tiene vías de realimentación.
(g) El retardo de grupo es igual a 24 para $0 < \omega < \pi$.
(h) Si todos los coeficientes de la función de transferencia se cuantifican con 10 bits, el sistema es todavía óptimo en el sentido de Chebyshev para la respuesta deseada y función de ponderación originales.
(i) Si todos los coeficientes de la función de transferencia se cuantifican con 10 bits, está garantizado que el sistema es de fase lineal.
(j) Si todos los coeficientes de la función de transferencia se cuantifican con 10 bits, el sistema puede transformarse en inestable.

7.32. Suponga que debe diseñar un filtro FIR, $h[n]$, con las siguientes especificaciones sobre el módulo:

- Límite de la banda de paso: $\omega_p = \pi/100$.
- Límite de la banda eliminada: $\omega_s = \pi/50$.
- Máxima ganancia en la banda de paso: $\delta_s \leq -60$ dB, relativos a la banda de paso.

Se le sugiere que intente utilizar una ventana de Kaiser. Las reglas de diseño de la ventana de Kaiser con parámetro de forma β y longitud del filtro M se proporcionan en la Sección 7.5.3.

(a) ¿Qué valores de β y M son necesarios para cumplir las especificaciones requeridas?

Tras mostrar el filtro resultante a su jefe, éste no queda satisfecho. Le pide que reduzca la necesidad de cómputo requerida para el filtro. Solicita los servicios de un consultor, quien le sugiere que diseñe el filtro en forma de cascada con dos etapas: $h'[n] = p[n] * q[n]$. Para diseñar $p[n]$ le sugiere que diseñe primero un filtro $g[n]$, con límite de la banda de paso $\omega'_p = 10\omega_p$, límite de la banda eliminada $\omega'_s = 10\omega_s$ y ganancia de la banda eliminada $\delta'_s = \delta_s$. El filtro $p[n]$ se obtiene expandiendo $g[n]$ por un factor de 10:

$$p[n] = \begin{cases} g[n/10], & \text{cuando } n/10 \text{ es un entero,} \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}.$$

(b) ¿Qué valores de β' y M' son necesarios para cumplir las especificaciones requeridas para $g[n]$?

(c) Dibuje $P(e^{j\omega})$ desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \pi/4$. No es necesario que dibuje la forma exacta de la respuesta en frecuencia. Basta con que indique qué regiones de la respuesta en frecuencia están cerca de 0 dB y qué regiones están en o por debajo de -60 dB. Etiquete todos los límites de las bandas de su dibujo.

(d) ¿Qué especificaciones se deberían utilizar para diseñar $q[n]$ de forma que se garantice que $h'[n] = p[n] * q[n]$ cumple o excede los requisitos originales? Especifique el límite de la banda de paso ω_p'', el límite de la banda eliminada, ω_s'', y la atenuación de la banda eliminada δ_s'', requeridas para $q[n]$.

(e) ¿Qué valores de β'' y M'' son necesarios para cumplir las especificaciones requeridas de $q[n]$? ¿Cuántas muestras distintas de cero tendrá $h'[n] = q[n] * p[n]$?

(f) El filtro $h'[n]$ de los apartados (b) - (e) se implementa primero de forma directa, convolucionando la entrada con $q[n]$ y después convolucionando el resultado con $p[n]$. El filtro $h[n]$ del apartado (a) se implementa mediante convolución directa de la entrada con $h[n]$. ¿Cuál de estas dos implementaciones requiere menos multiplicaciones? Explique su respuesta. Nota: no debe contar las multiplicaciones por 0 como una operación.

7.33. Considere una señal $x_a(t)$ real y de banda limitada cuya transformada de Fourier $X_a(j\Omega)$ tiene la siguiente propiedad:

$$X_a(j\Omega) = 0 \qquad \text{for} \qquad |\Omega| > 2\pi \cdot 10000\,.$$

Es decir, la señal es de banda limitada a 10 kHz.

Se desea procesar $x_a(t)$ con un filtro paso alto analógico cuya respuesta al impulso satisface las siguientes especificaciones (véase la Figura P7.33):

$$\begin{cases} 0 \le |H_a(j\Omega)| \le 0{,}1 & \text{para } 0 \le |\Omega| \le 2\pi \cdot 4000 = \Omega_s \\ 0{,}9 \le |H_a(j\Omega)| \le 1 & \text{para } \Omega_p = 2\pi \cdot 8000 \le |\Omega|, \end{cases}$$

siendo Ω_s y Ω_p las frecuencias de la banda de paso y de la banda eliminada, respectivamente.

(a) Suponga que se implementa el filtro analógico $H_a(j\Omega)$ mediante procesado en tiempo discreto, de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 7.2.

La frecuencia de muestreo $f_s = \dfrac{1}{T}$ es de 24 kHz. Para ambos conversores C/D y D/C ideales.

Determine la especificación del filtro apropiada para $|H(e^{j\omega})|$, la respuesta en amplitud del filtro digital.

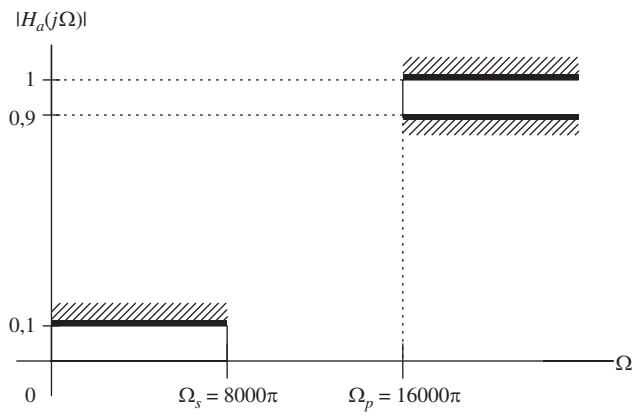


Figura P7.33

(b) Utilizando la transformación bilineal $s = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$, se desea diseñar un filtro digital cuyas especificaciones sobre la respuesta en amplitud se diseñaron en el apartado (a). Obtenga las especificaciones de

$|G_{HP}(j\Omega_1)|$, la respuesta en amplitud del filtro paso alto analógico relacionado con el filtro digital mediante la transformación bilineal. Proporcione de nuevo una gráfica cuidadosamente etiquetada de las especificaciones de la respuesta en amplitud $|G_{HP}(j\Omega_1)|$.

(c) Utilizando la transformación de frecuencia $s_1 = \dfrac{1}{s_2}$, (es decir, sustituyendo la variable s de la transformada de Laplace por su inversa), diseñe el filtro paso alto analógico $G_{HP}(j\Omega_1)$ partiendo del filtro de Butterworth de orden mínimo. El módulo al cuadrado de su respuesta en frecuencia se indica a continuación:

$$|G(j\Omega_2)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_2/\Omega_c)^{2N}} \ .$$

En particular, calcule el mínimo orden N y su correspondiente frecuencia de corte Ω_c, tales que la especificación de la banda de paso del filtro original ($|H_a(j\Omega_p)| = 0{,}9$) se cumpla *exactamente*. Etiquete en un diagrama las principales características de la respuesta en amplitud del filtro de Butterworth que ha diseñado.

(d) Dibuje el diagrama polo-cero del filtro de Butterworth (paso bajo) $G(s_2)$, y calcule una expresión de su función de transferencia.

7.34. Un filtro FIR $h[n]$ de fase cero tiene una transformada de Fourier en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$, que se muestra en la Figura P7.34.
Se sabe que el filtro ha sido diseñado utilizando el algoritmo de Parks–McClellan (PM). Se sabe que los parámetros de entrada al algoritmo PM han sido:

- Límite de la banda de paso: $\omega_p = 0{,}4\pi$
- Límite de la banda eliminada: $\omega_s = 0{,}6\pi$
- Ganancia ideal en la banda de paso: $G_p = 1$
- Ganancia ideal en la banda eliminada: $G_s = 0$
- Función de ponderación del error: $W(\omega) = 1$

La longitud de la respuesta al impulso $h[n]$, es $M+1 = 2L+1$ y

$$h[n] = 0 \ \text{ para } \ |n| > L.$$

El valor de L no es conocido.

Se argumenta que existen dos filtros, ambos con respuesta en frecuencia idéntica a la que se muestra en la Figura P7.34, y ambos diseñados mediante el algoritmo de Parks–McClellan con *diferentes* valores del parámetro de entrada L

- **Filtro 1:** $L = L_1$
- **Filtro 2:** $L = L_2 > L_1$.

Ambos filtros se diseñaron utilizando exactamente el mismo algoritmo de Parks-McClellan y los mismos parámetros de entrada, *excepto* el valor de L.

(a) ¿Cuáles son los posibles valores de L_1?
(b) ¿Cuáles son los posibles valores de $L_2 > L_1$?
(c) ¿Son idénticas las respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$ de los dos filtros?
(d) El teorema de la alternancia garantiza la "*unicidad* del polinomio de orden r". Si su respuesta al apartado (c) es afirmativa, explique por qué no se viola el teorema de la alternancia. Si su respuesta es negativa, explique cómo se relacionan los filtros $h_1[n]$ y $h_2[n]$.

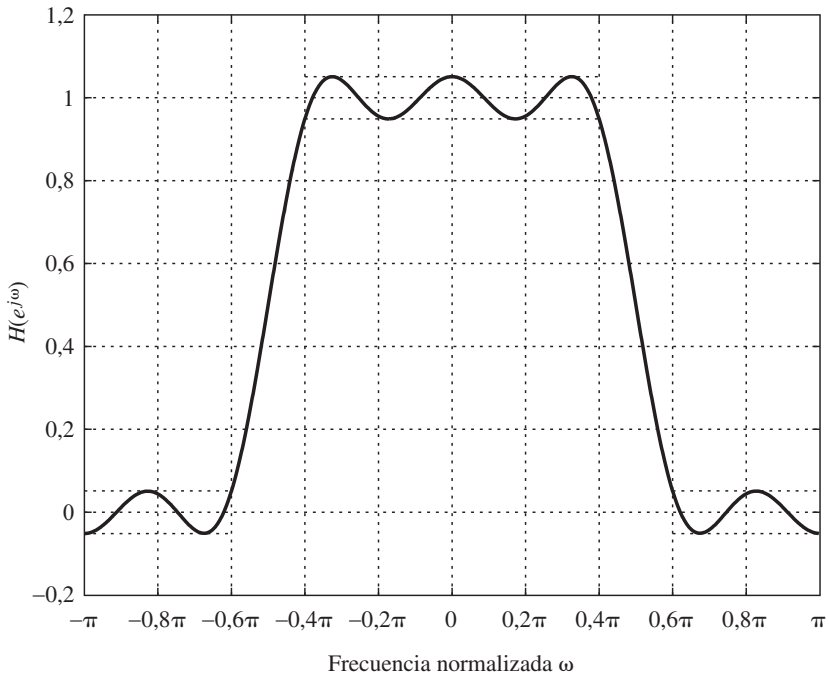


Figura P7.34

7.35. Suponga que se dispone de un filtro FIR $h[n]$ paso banda y de fase cero, es decir, $h[n] = h[-n]$. Dicho filtro tiene una transformada de Fourier en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$ que se muestra en la Figura P7.35.
Se sabe que el filtro ha sido diseñado utilizando el algoritmo de Parks–McClellan. Se sabe que los parámetros de entrada al algoritmo de Parks–McClellan han sido:

- Límite inferior de la banda eliminada: $\omega_1 = 0{,}2\pi$
- Límite inferior de la banda de paso: $\omega_2 = 0{,}3\pi$
- Límite superior de la banda de paso: $\omega_3 = 0{,}7\pi$
- Límite superior de la banda eliminada: $\omega_4 = 0{,}8\pi$
- Ganancia ideal en la banda de paso: $G_p = 1$
- Ganancia ideal en la banda eliminada: $G_s = 0$
- Función de ponderación del error $W(\omega) = 1$

El valor del parámetro de entrada $M+1$, que representa el máximo número de valores de la respuesta al impulso distintos de cero (o, de forma equivalente, la longitud del filtro) no es conocido.
Se argumenta que existen dos filtros, ambos con respuesta en frecuencia idéntica a la que se muestra en la Figura P7.35, pero con *diferentes* longitudes de respuesta al impulso $M+1 = 2L+1$.

- **Filtro 1:** $M = M_1 = 14$
- **Filtro 2:** $M = M_2 \neq M_1$

Ambos filtros se diseñaron utilizando exactamente el mismo algoritmo de Parks–McClellan y los mismos parámetros de entrada, *excepto* el valor de M.

(a) ¿Cuáles son los posibles valores de M_2?

(b) El teorema de la alternancia garantiza la "*unicidad* del polinomio de orden r". Explique por qué no se viola el teorema de la alternancia.

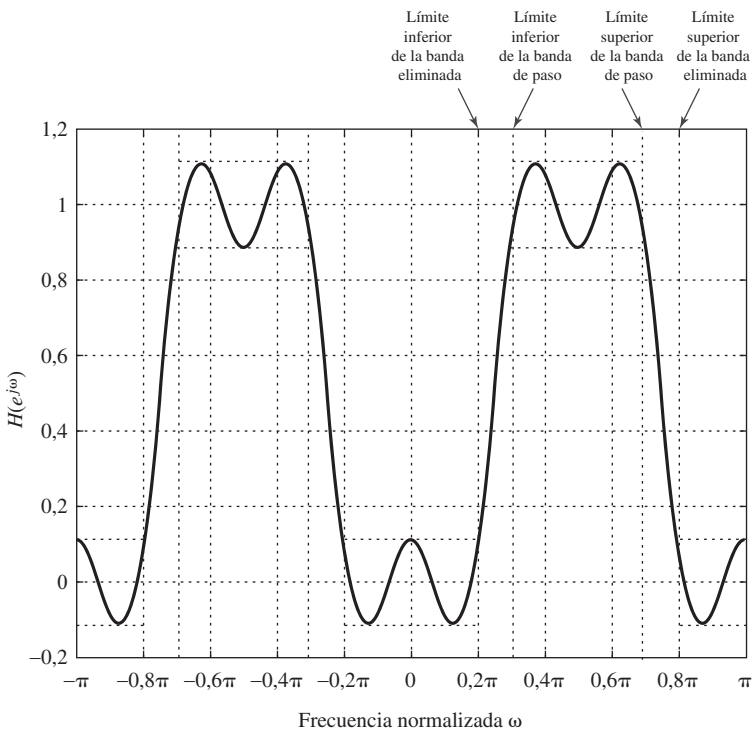


Figura P7.35

7.36. Las gráficas de la Figura P7.36 muestran cuatro módulos de respuestas en frecuencia de filtros FIR de fase lineal, denominados $|A_e^i(e^{j\omega})|$, $i = 1,2,3,4$. Una o más de estas gráficas pueden ser de filtros FIR de fase lineal diseñados mediante el algoritmo de Parks–McClellan. Los errores máximos de aproximación en la banda de paso, y en la banda eliminada, así como las frecuencias de corte deseadas de esas bandas, se muestran también en las gráficas. Nótese que las especificaciones sobre el error de aproximación y la longitud del filtro se pueden haber elegido de forma diferente para asegurar que la frecuencia de corte es la misma en todos los diseños.

(a) ¿A qué tipos (I,II, III, IV) de filtros FIR de fase lineal puede corresponder $|A_e^i(e^{j\omega})|$ para $i = 1,2,3,4$? Nótese que puede haber más de un tipo de filtro FIR de fase lineal correspondiente a cada $|A_e^i(e^{j\omega})|$. Si cree que ese es el caso, indique todas las posibles opciones.

(b) ¿Cuántas alternancias presenta cada $|A_e^i(e^{j\omega})|$ para $i = 1,2,3,4$?

(c) Para cada valor de i, $i = 1,2,3,4$, ¿puede corresponder $|A_e^i(e^{j\omega})|$ a un resultado del algoritmo de Parks–McClellan?

(d) Si argumenta que un $|A_e^i(e^{j\omega})|$ determinado podrá corresponder a un resultado del algoritmo de Parks–McClellan, y que podría ser de tipo I, ¿cuál es la longitud de la respuesta al impulso correspondiente a ese $|A_e^i(e^{j\omega})|$?

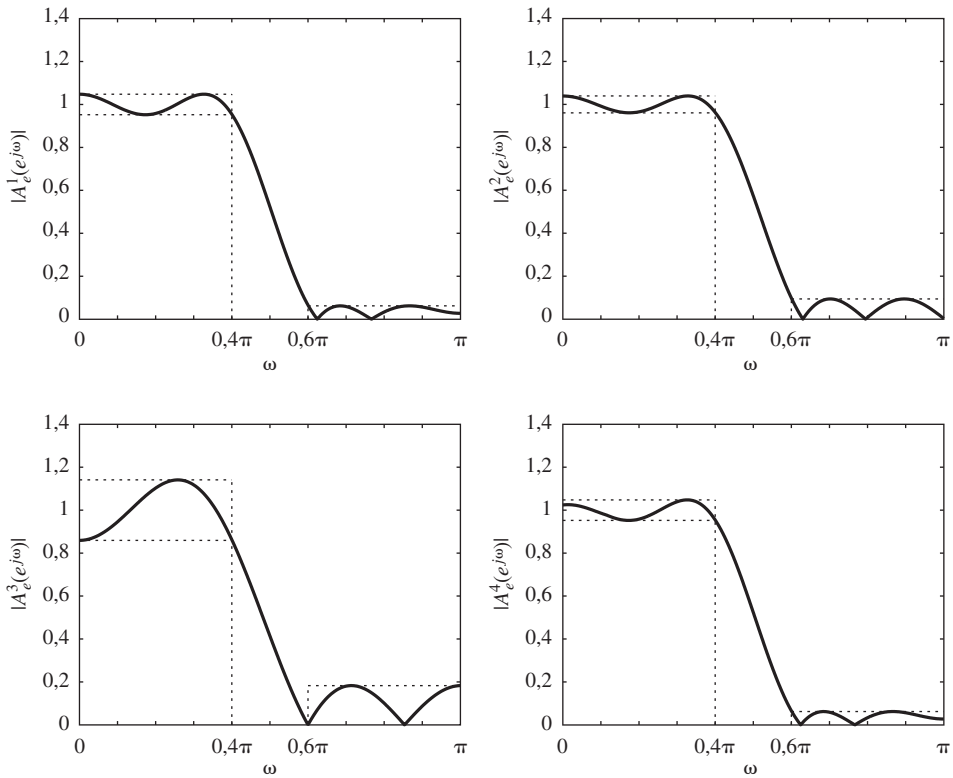


Figura P7.36

7.37. Considere el sistema en dos etapas que se muestra en la Figura P7.37, para interpolar una secuencia $x[n] = x_c(nT)$ a una frecuencia de muestreo que es 15 veces superior a la frecuencia de muestreo de la entrada, es decir, se desea que $y[n] = x_c(nT/15)$.

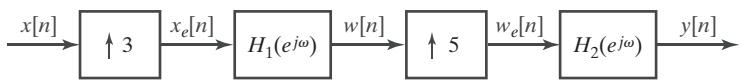


Figura P7.37

Suponga que la secuencia de entrada $x[n] = x_c(nT)$ se obtienen muestreando una señal en tiempo continuo de banda limitada cuya transformada de Fourier satisface la siguiente condición: $|X_c(j\Omega)| = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(3600)$. Suponga que el periodo de muestreo original es de $T = 1/8000$.

(a) Dibuje la transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ de una señal "típica" de banda limitada y las correspondientes transformadas de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ y $X_e(e^{j\omega})$.

(b) Para implementar el sistema de interpolación, debemos, por supuesto, utilizar filtros no ideales. Use su dibujo de $X_e(e^{j\omega})$ obtenido en el apartado (a) para determinar las frecuencias de corte de la banda de paso y de la banda eliminada (ω_{p1} y ω_{s1}) que se requieren para conservar esencialmente sin modificar la banda original de frecuencias, atenuando significativamente las imágenes del espectro en banda base. (Es decir, se desea que $w[n] \approx x_c(nT/3)$.) Suponiendo que esto se puede conseguir con un error de aproximación en la banda de paso de $\delta_1 = 0{,}005$ (para un filtro con ganancia 1 en la banda de paso) y error de aproximación en la banda eliminada de $\delta_2 = 0{,}01$, dibuje las especificaciones de diseño del filtro $H_1(e^{j\omega})$ para $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

(c) Suponiendo que $w[n] = x_c(nT/3)$, dibuje $W_e(e^{j\omega})$ y utilice el dibujo para determinar las frecuencias de corte de la banda de paso y de la banda eliminada ω_{p2} y ω_{s2} necesarias para el segundo filtro.

(d) Utilice la fórmula de la Ecuación (7.117) para determinar los órdenes del filtro M_1 y M_2 para los filtros de Parks–McClellan que tienen las frecuencias de corte de sus bandas de paso y bandas eliminadas determinadas en loa apartados (b) y (c) con $\delta_1 = 0{,}005$ y $\delta_2 = 0{,}01$ para ambos filtros.

(e) Determine en este caso cuántas multiplicaciones son necesarias para calcular 15 muestras de la salida.

7.38. El sistema de la Figura 7.2 se utiliza para realizar el filtrado de señales en tiempo continuo mediante un filtro digital. La frecuencia de muestreo de los conversores C/D y D/C es $f_s = 1/T = 10.000$ muestras/s.

Se utiliza una ventana de Kaiser $w_K[n]$ de longitud $M+1 = 23$ y $\beta = 3{,}395$ para diseñar un filtro paso bajo de fase lineal con respuesta en frecuencia $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$. Cuando se utiliza en el sistema de la Figura 7.2, de forma que $H(e^{j\omega}) = H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$, la respuesta en frecuencia efectiva global (desde la entrada $x_a(t)$ hasta la salida $y_a(t)$) cumple las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} &0{,}99 \le |H_{\text{eff}}(j\Omega)| \le 1{,}01, && 0 \le |\Omega| \le 2\pi(2000) \\ &|H_{\text{eff}}(j\Omega)| \le 0{,}01 && 2\pi(3000) \le |\Omega| \le 2\pi(5000). \end{aligned}$$

(a) La fase lineal del filtro FIR introduce un retardo temporal t_d. Calcule dicho retardo temporal del sistema (en milisegundos).

(b) Ahora se diseña un filtro paso alto con la *misma* ventana de Kaiser aplicándola a la respuesta al impulso ideal $h_d[n]$ cuya correspondiente respuesta en frecuencia es

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < 0{,}25\pi \\ 2e^{-j\omega n_d} & 0{,}25\pi < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

Es decir, se obtiene un filtro FIR paso alto de fase lineal con respuesta al impulso $h_{\text{hp}}[n] = w_K[n]h_d[n]$ y respuesta en frecuencia $H_{\text{hp}}(e^{j\omega})$ multiplicando $h_d[n]$ por la misma ventana de Kaiser $w_K[n]$ que se utilizó para diseñar el primer filtro paso bajo mencionado. El filtro FIR paso alto en tiempo discreto resultante cumple un conjunto de especificaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |H_{\text{hp}}(e^{j\omega})| &\le \delta_1 && 0 \le |\omega| \le \omega_1 \\ G - \delta_2 \le |H_{\text{hp}}(e^{j\omega})| &\le G + \delta_2 && \omega_2 \le |\omega| \le \pi \end{aligned}$$

Utilice la información sobre las especificaciones del filtro paso bajo para determinar los valores de ω_1, ω_2, δ_1, δ_2 y G.

7.39. La Figura P7.39 es la respuesta en frecuencia ideal deseada de un filtro paso banda que se va a diseñar como un filtro FIR Tipo I $h[n]$, con transformada de Fourier en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$ que aproxima a $H_d(e^{j\omega})$ y cumple las siguientes restricciones:

$$-\delta_1 \le H(e^{j\omega}) \le \delta_1, \;\; 0 \le |\omega| \le \omega_1$$

$$1 - \delta_2 \le H(e^{j\omega}) \le 1 + \delta_2, \;\; \omega_2 \le |\omega| \le \omega_3$$

$$-\delta_3 \le H(e^{j\omega}) \le \delta_3, \;\; \omega_4 \le |\omega| \le \pi$$

El filtro resultante $h[n]$ minimiza el máximo error ponderado y por tanto debe cumplir el teorema de la alternancia.

Determine y dibuje un valor apropiado de la función de peso a utilizar en el algoritmo de Parks–McClellan.

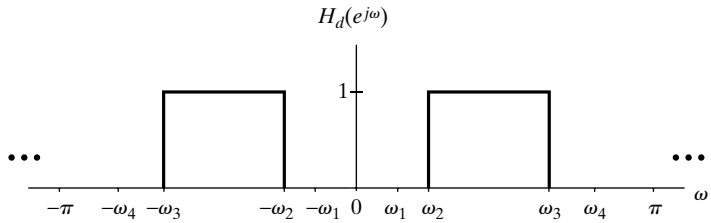


Figura P7.39

7.40. **(a)** La Figura P7.40-1 muestra la respuesta en frecuencia $A_e(e^{j\omega})$ de un filtro paso bajo de Parks–McClellan de Tipo I basado en las especificaciones que siguen. Por tanto, cumple el teorema de la alternancia.

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 0{,}45\pi$
Límite de la banda eliminada: $\omega_s = 0{,}50\pi$
Módulo deseado en la banda de paso: 1
Módulo deseado en la banda eliminada: 0

La función de ponderación utilizada en la banda de paso y en la banda eliminada es $W(\omega) = 1$.

¿Qué puede concluir sobre el máximo número posible de valores distintos de cero de la respuesta en frecuencia del filtro?

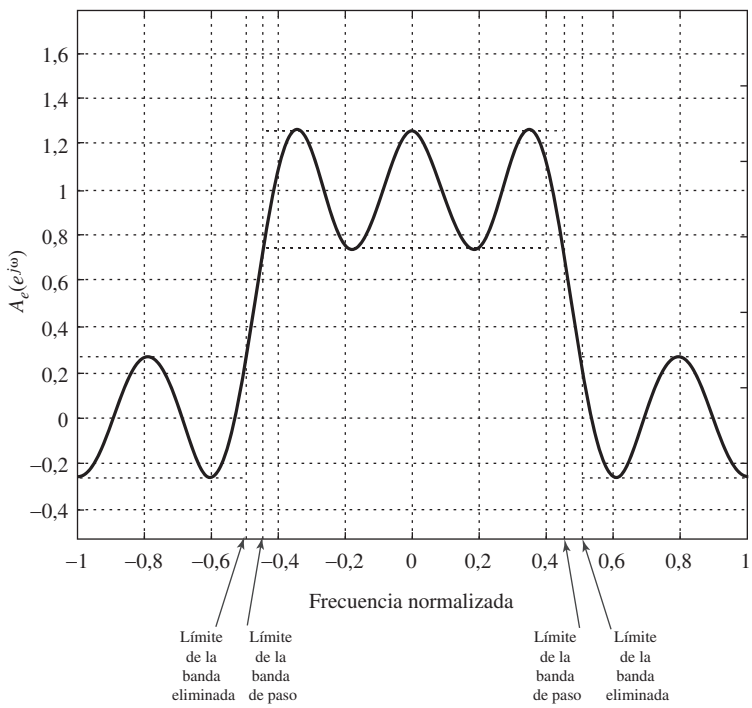


Figura P7.40-1

(b) La Figura P7.40-2 muestra otra respuesta en frecuencia $B_e(e^{j\omega})$ de un filtro FIR Tipo I. $B_e(e^{j\omega})$ se obtiene a partir de $A_e(e^{j\omega})$ del apartado (a) de la siguiente forma:

$$B_e(e^{j\omega}) = k_1 \left(A_e(e^{j\omega})\right)^2 + k_2,$$

siendo k_1 y k_2 constantes. Observe que $B_e(e^{j\omega})$ muestra un comportamiento de rizado constante, con un error máximo diferente en la banda de paso y en la banda eliminada.
¿Cumple este filtro el teorema de la alternancia con las frecuencias indicadas de la banda de paso y la banda eliminada, y con los rizados en la banda de paso y en la banda eliminada indicados por las líneas de puntos?

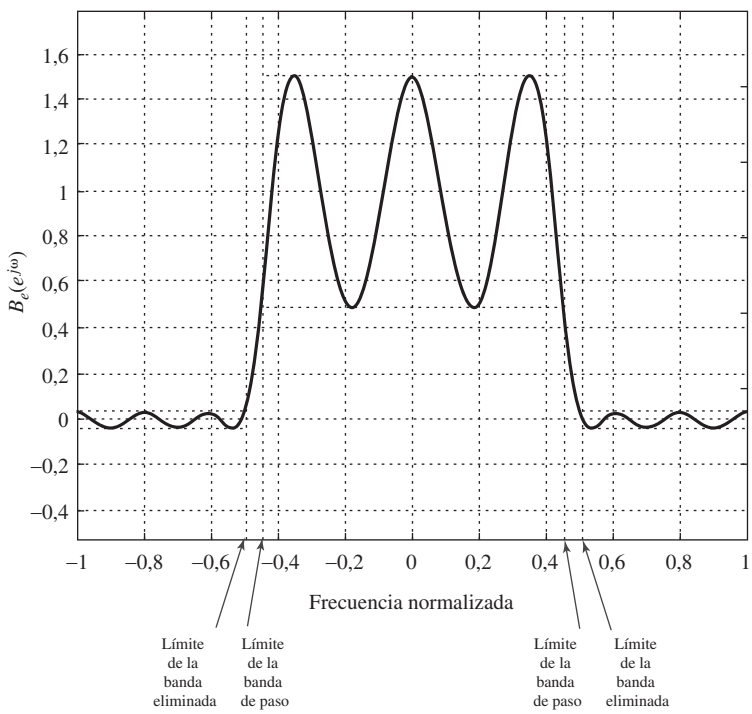


Figura P7.40-2

7.41. Suponga que $H_c(s)$ tiene un polo de orden r en $s = s_0$, de modo que $H_c(s)$ se puede expresar como

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{(s - s_0)^k} + G_c(s),$$

donde $G_c(s)$ tiene sólo polos de primer orden. Suponga que $H_c(s)$ es causal.

(a) Proporcione una fórmula para determinar las constantes A_k de $H_c(s)$.

(b) Obtenga una expresión de la respuesta al impulso $h_c(t)$ en función de s_0 y $g_c(t)$, la transformada inversa de Laplace de $G_c(s)$.

7.42. Como se verá en el Capítulo 12, un *transformador de Hilbert ideal en tiempo discreto* produce un desplazamiento de fase de -90 grados ($-\pi/2$ radianes) en $0 < \omega < \pi$ y $+90$ grados ($+\pi/2$ radianes) para $-\pi < \omega < 0$. El módulo de la respuesta en frecuencia es constante (unidad) para $0 < \omega < \pi$ y para $-\pi < \omega < 0$. Estos sistemas se denominan también *desplazadores ideales de fase de 90 grados.*

(a) Proporcione una ecuación de la respuesta en frecuencia ideal $H_d(e^{j\omega})$ de un transformador de Hilbert ideal en tiempo discreto que incluya también un retardo de grupo constante (distinto de cero). Dibuje la respuesta de fase de este sistema para $-\pi < \omega < \pi$.

(b) ¿Qué tipo o tipos de sistemas FIR de fase lineal (I, II, III o IV) se podrían utilizar para aproximar el transformador ideal de Hilbert del apartado (a)?

(c) Suponga que se desea emplear el método de ventanas para diseñar una aproximación de fase lineal al transformador de Hilbert ideal. Utilice la función $H_d(e^{j\omega})$ del apartado (a) para determinar la respuesta al impulso ideal $h_d[n]$ si el sistema FIR es tal que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > M$.

(d) ¿Cuál es el retardo del sistema si $M = 21$? Dibuje el módulo de la respuesta en frecuencia de la aproximación FIR en este caso, suponiendo una ventana rectangular.

(e) ¿Cuál es el retardo del sistema si $M = 20$? Dibuje el módulo de la respuesta en frecuencia de la aproximación FIR en este caso, suponiendo una ventana rectangular.

7.43. Las ventanas más comúnmente utilizadas que se han presentado en la Sección 7.5.1 se pueden expresar en función de la ventana rectangular. Este hecho se puede utilizar para obtener expresiones de las transformadas de Fourier de la ventana de Bartlett y de la familia de ventanas coseno alzado, que incluye a las ventanas de Hanning, Hamming y Blackman.

(a) Demuestre que la ventana de Bartlett de $(M+1)$ puntos, definida en la Ecuación (4.60b) se puede expresar como la convolución de dos ventanas rectangulares más pequeñas. Utilice este hecho para demostrar que la transformada de Fourier de la ventana de Bartlett de $(M+1)$ puntos es

$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}(2/M)\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega M/4)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right)^2 \qquad \text{para } M \text{ par,}$$

o

$$W_B(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}(2/M)\left(\frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/4]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}[\omega(M-1)/4]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right) \qquad \text{para } M \text{ impar.}$$

(b) Se puede ver fácilmente que las ventanas de tipo coseno alzado de $(M+1)$ puntos de las Ecuaciones (7.60c)–(7.60e) se pueden expresar en la forma

$$w[n] = [A + B\cos(2\pi n/M) + C\cos(4\pi n/M)]w_R[n],$$

siendo $w_R[n]$ la ventana rectangular de $(M+1)$ puntos. Utilice esta relación para obtener la transformada de Fourier de la ventana tipo coseno alzado general.

(c) Seleccionando apropiadamente los parámetros A, B y C y el resultado del apartado (b), dibuje el módulo de la transformada de Fourier de la ventana de Hanning.

7.44. Considere la siguiente respuesta en frecuencia ideal de un filtro multibanda:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & 0 \le |\omega| < 0{,}3\pi, \\ 0, & 0{,}3\pi < |\omega| < 0{,}6\pi, \\ 0{,}5e^{-j\omega M/2}, & 0{,}6\pi < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

La respuesta al impulso $h_d[n]$ se multiplica por una ventana de Kaiser con $M = 48$ y $\beta = 3{,}68$, obteniéndose un filtro FIR de fase lineal con respuesta al impulso $h[n]$.

(a) ¿Cuál es el retardo del filtro?

(b) Determine la respuesta al impulso ideal deseada $h_d[n]$.

(c) Determine el conjunto de especificaciones del error de aproximación satisfechas por el filtro FIR. Es decir, determine los parámetros δ_1, δ_2, δ_3, B, C, ω_{p1}, ω_{s1}, ω_{s2} y ω_{p2} en

$$\begin{aligned} B - \delta_1 \le |H(e^{j\omega})| &\le B + \delta_1, & 0 \le \omega \le \omega_{p1}, \\ |H(e^{j\omega})| &\le \delta_2, & \omega_{s1} \le \omega \le \omega_{s2}, \\ C - \delta_3 \le |H(e^{j\omega})| &\le C + \delta_3, & \omega_{p2} \le \omega \le \pi. \end{aligned}$$

7.45. La Figura P7.45 muestra la respuesta en frecuencia requerida de un filtro $h_d[n]$. En este problema se desea diseñar un filtro FIR causal de fase lineal de N puntos $h[n]$ que minimice la integral del error al cuadrado

$$\varepsilon_d^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

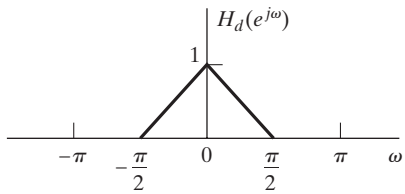


Figura P7.45

donde la respuesta en frecuencia del filtro $h[n]$ es

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

y N es un entero impar.

(a) Determine $h_d[n]$.
(b) ¿Qué simetría debería tener $h[n]$ en el intervalo $0 \le n \le M$? Explique brevemente su razonamiento.
(c) Determine $h[n]$ en el intervalo $0 \le n \le N-1$.
(d) Determine una expresión del mínimo de la integral del error al cuadrado ε^2 en función de $h_d[n]$ y N.

7.46. Considere un filtro paso bajo FIR de fase lineal de tipo I con respuesta al impulso $h_{LP}[n]$ de longitud $(M+1)$ y con respuesta en frecuencia

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}.$$

La Figura P7.46 muestra la función de amplitud $A_e(e^{j\omega})$ del sistema.

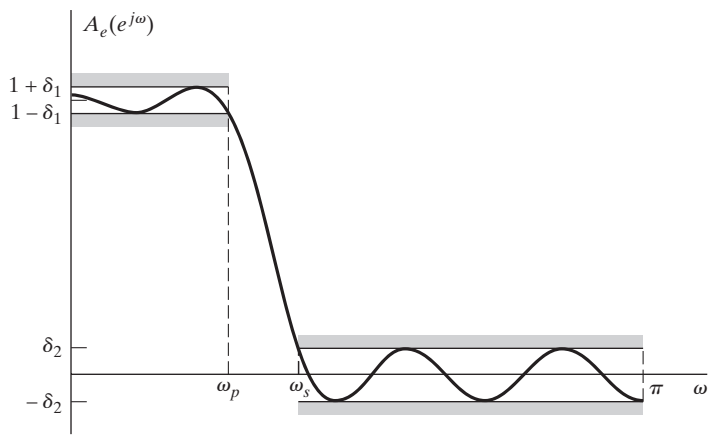


Figura P7.46

Esta función de amplitud es la aproximación óptima (en el sentido de Parks–McClellan) a la unidad en la banda $0 \le \omega \le \omega_p$, con $\omega_p = 0{,}27\pi$, y la aproximación óptima a cero en la banda $\omega_s \le \omega \le \pi$, con $\omega_s = 0{,}4\pi$.

(a) ¿Cuál es el valor de M?

Suponga ahora que se obtiene un filtro paso alto a partir del filtro paso bajo definiendo

$$h_{HP}[n] = (-1)^{n+1} h_{LP}[n] = -e^{j\pi n} h_{LP}[n].$$

(b) Demuestre que la respuesta en frecuencia resultante es de la forma $H_{HP}(e^{j\omega}) = B_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$.

(c) Dibuje $B_e(e^{j\omega})$ para $0 \leq \omega \leq \pi$.

(d) Se afirma que para un valor dado de M (el obtenido en el apartado (a)) el filtro paso alto resultante es la aproximación óptima a cero en la banda $0 \leq \omega \leq 0{,}6\pi$ y a la unidad en la banda $0{,}73\pi \leq \omega \leq \pi$. ¿Es correcta esta afirmación? Justifique su respuesta.

7.47. Diseñe un filtro causal paso bajo óptimo (en sentido minimax) de tres puntos con $\omega_s = \pi/2$, $\omega_p = \pi/3$ y $K = 1$. Especifique la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro diseñado. *Nota:* $\cos(\pi/2) = 0$ y $\cos(\pi/3) = 0{,}5$.

Problemas de ampliación

7.48. Si un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo tiene una función de transferencia racional, su entrada y su salida satisfacen una ecuación en diferencias ordinaria lineal con coeficientes constantes. Un procedimiento estándar para la simulación de estos sistemas es utilizar aproximaciones en diferencias finitas a las derivadas de las ecuaciones diferenciales. Concretamente, como para funciones diferenciables continuas $y_c(t)$,

$$\frac{dy_c(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \left[\frac{y_c(t) - y_c(t-T)}{T} \right],$$

parece razonable que si T es "suficientemente pequeño" deberíamos obtener una buena aproximación si sustituimos $dy_c(t)/dt$ por $[y_c(t) - y_c(t-T)]/T$.

Aunque esta aproximación simple puede resultar útil para simular sistemas en tiempo continuo, generalmente, *no* es un método útil para diseñar sistemas en tiempo discreto para aplicaciones de filtrado. Para entender el efecto de aproximar ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias, sirve de ayuda considerar un ejemplo concreto. Suponga que la función de transferencia de un sistema en tiempo continuo es

$$H_c(s) = \frac{A}{s+c},$$

siendo A y c constantes.

(a) Demuestre que la entrada $x_c(t)$ y la salida $y_c(t)$ del sistema satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + cy_c(t) = Ax_c(t).$$

(b) Evalúe la ecuación diferencial en $t = nT$, y sustituya

$$\left.\frac{dy_c(t)}{dt}\right|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT-T)}{T},$$

es decir, sustituya la primera derivada por la *primera diferencia regresiva.*

(c) Defina $x[n] = x_c(nT)$ e $y[n] = y_c(nT)$. Utilizando esta notación y el resultado del apartado (b), obtenga una ecuación en diferencias que relacione $x[n]$ e $y[n]$, y determine la función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$ del sistema resultante en tiempo discreto.

(d) Demuestre que para este ejemplo

$$H(z) = H_c(s)\big|_{s=(1-z^{-1})/T};$$

es decir, demuestre que $H(z)$ se puede obtener directamente a partir de $H_c(s)$ mediante la transformación

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}.$$

(Se puede demostrar que si las derivadas de orden superior se aproximan mediante la aplicación reiterada de la primera diferencia regresiva, el resultado del apartado (d) es aplicable también a sistemas de orden superior.)

(e) Para la transformación del apartado (d), determine el contorno del plano z en el que se transforma el eje $j\Omega$ del plano s. Determine también la región del plano z que corresponde a la mitad izquierda del plano s. Si el sistema en tiempo continuo con función de transferencia $H_c(s)$ es estable, ¿será también estable el sistema en tiempo discreto obtenido mediante la aproximación de la diferencia regresiva? ¿Será la respuesta en frecuencia en tiempo discreto una reproducción fiable de la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo continuo? ¿Cómo afectará la selección de T a la estabilidad y a la respuesta en frecuencia?

(f) Suponga que la primera derivada se aproxima mediante la *primera diferencia progresiva;* es decir,

$$\left.\frac{dy_c(t)}{dt}\right|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT+T)-y_c(nT)}{T}.$$

Determine la correspondiente transformación del plano s al plano z y repita, para esta transformación, el apartado (e).

7.49. Considere un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia racional $H_c(s)$. La entrada $x_c(t)$ y la salida $y_c(t)$ satisfacen una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes. Una forma de simular estos sistemas es utilizar técnicas numéricas para integrar la ecuación diferencial. En este problema demostraremos que si se utiliza la fórmula de integración trapezoidal, la solución es equivalente a transformar la función de transferencia en tiempo continuo $H_c(s)$ en una función de transferencia en tiempo discreto $H(z)$ mediante la transformación bilineal.

Para demostrarlo, considere la función de transferencia en tiempo continuo

$$H_c(s) = \frac{A}{s+c},$$

siendo A y c constantes. La correspondiente ecuación diferencial es

$$y_c(t) + cy_c(t) = Ax_c(t),$$

donde

$$y_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt}.$$

(a) Demuestre que $y_c(nT)$ se puede expresar en función de $y_c(t)$ como

$$y_c(nT) = \int_{(nT-T)}^{nT} y_c(\tau)d\tau + y_c(nT-T).$$

La integral definida de esta ecuación representa el área encerrada por la función $y_c(t)$ en el intervalo que va desde $(nT-T)$ hasta nT. La Figura P7.49 muestra una función $y_c(t)$ y una región sombreada con forma trapezoidal cuya área se aproxima al área encerrada por la curva. Esta aproximación a la integral se denomina *aproximación trapezoidal.* Se puede ver claramente que a medida que T se acerca a cero, la aproximación mejora. Utilice la aproximación trapezoidal para obtener una expresión de $y_c(nT)$ en función de $y_c(nT-T)$, $y_c(nT)$ e $y_c(nT-T)$.

(b) Utilice la ecuación diferencial para obtener una expresión de $y_c(nT)$ y sustituya esta expresión en la obtenida en el apartado (a).

(c) Defina $x[n] = x_c(nT)$ e $y[n] = y_c(nT)$. Utilizando la notación y el resultado del apartado (b), obtenga una ecuación en diferencias que relacione $x[n]$ con $y[n]$, y determine la función de transferencia $H(z) = Y(z)/X(z)$ del sistema resultante en tiempo discreto.

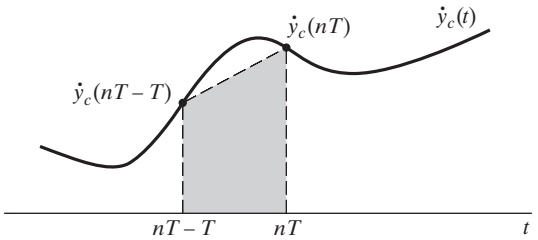


Figura P7.49

(d) Demuestre que para este ejemplo

$$H(z) = H_c(s)\big|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]};$$

es decir, demuestre que $H(z)$ se puede obtener directamente a partir de $H_c(s)$ mediante la transformación bilineal. Para ecuaciones diferenciales de orden superior, si se aplica repetidamente integración trapezoidal a la derivada de mayor orden llegaríamos a la misma conclusión. Por tanto, esta idea se aplica en general a sistemas en tiempo continuo con función de transferencia racional.

7.50. En este problema se considera un método de diseño de filtros que se podría denominar de *invarianza a la autocorrelación.* Considere un sistema en tiempo continuo estable con respuesta al impulso $h_c(t)$ y función de transferencia $H_c(s)$. La función de autocorrelación del sistema se define como

$$\phi_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(t)h_c(t+\tau)d\tau,$$

y para el caso de una respuesta al impulso real, se puede demostrar fácilmente que la transformada de Laplace de $\phi_c(\tau)$ es $\Phi_c(s) = H_c(s)H_c(-s)$. Considere similarmente un sistema en tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia $H(z)$. La función de autocorrelación del sistema en tiempo discreto se define como

$$\phi[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n+m],$$

y para el caso de respuesta al impulso real, $\Phi(z) = H(z)H(z^{-1})$.

La *invarianza a la autocorrelación* implica que el filtro en tiempo discreto se define igualando la función de autocorrelación del sistema en tiempo discreto y la función de autocorrelación muestreada del sistema en tiempo continuo. Es decir,

$$\phi[m] = T_d\phi_c(mT_d), \qquad -\infty < m < \infty.$$

El procedimiento de diseño que sigue propone la utilización de invarianza a la autocorrelación cuando $H_c(s)$ es una función racional con N polos de primer orden en $s_k, k = 1,2,\ldots,N$ y $M < N$ ceros:

1. Obtenga la descomposición en fracciones simples de $\Phi_c(s)$ en la forma

$$\Phi_c(s) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{B_k}{s+s_k}\right).$$

2. Forme la transformada Z

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{T_dA_k}{1-e^{s_kT_d}z^{-1}} + \frac{T_dB_k}{1-e^{-s_kT_d}z^{-1}}\right).$$

3. Obtenga los polos y ceros de $\Phi(z)$, y forme una función de transferencia de fase mínima $H(z)$ utilizando los polos y los ceros de $\Phi(z)$ que están en el *interior* de la circunferencia unidad.

(a) Justifique cada paso del procedimiento de diseño propuesto. Es decir, demuestre que la función de autocorrelación del sistema en tiempo discreto resultante es una versión muestreada de la función de autocorrelación del sistema en tiempo continuo. Para verificar el procedimiento, puede resultar útil probarlo con el sistema de primer orden cuya respuesta al impulso es

$$h_c(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

y con función de transferencia

$$H_c(s) = \frac{1}{s+\alpha}.$$

(b) ¿Cuál es la relación entre $|H(e^{j\omega})|^2$ y $|H_c(j\Omega)|^2$? ¿Qué tipos de funciones de respuesta en frecuencia serían adecuadas para aplicar el método de diseño basado en invarianza a la autocorrelación?

(c) ¿Es única la función de transferencia obtenida en el apartado 3? Si no lo es, describa la forma de obtener sistemas en tiempo discreto adicionales invariantes a la autocorrelación.

7.51. Sea $H_{\text{lp}}(Z)$ la función de transferencia de un filtro paso bajo en tiempo discreto. Las implementaciones de este sistema se pueden representar mediante grafos lineales de flujo de señales formados por sumadores, ganancias y elementos de retardo unidad como se muestra en la Figura P7.51-1. Se desea realizar un filtro paso bajo en el que la frecuencia de corte se pueda cambiar modificando un solo parámetro. La estrategia propuesta es sustituir cada elemento de retardo unidad del grafo de flujo que representa $H_{\text{lp}}(Z)$ por la red que se muestra en la Figura P7.51-2, siendo α real y $|\alpha| < 1$.

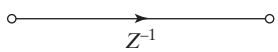


Figura P7.51-1

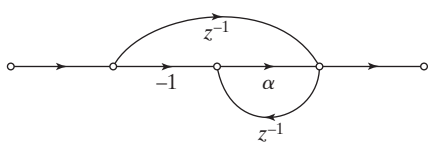


Figura P7.51-2

(a) Sea $H(z)$ la función de transferencia del filtro que se obtiene cuando la red de la Figura P7.51-2 se sustituye en cada arco de retardo unidad de la red que realiza $H_{\text{lp}}(Z)$. Demuestre que $H(z)$ y $H_{\text{lp}}(Z)$ se relacionan mediante una transformación del plano Z en el plano z.

(b) Si $H(e^{j\omega})$ y $H_{\text{lp}}(e^{j\theta})$ son las respuestas en frecuencia de los dos sistemas, determine la relación entre las variables de frecuencia ω y θ. Dibuje ω en función de θ para $\alpha = 0{,}5$ y $-0{,}5$, y demuestre que $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo. Además, si θ_p es la frecuencia de corte de la banda de paso del filtro paso bajo original $H_{\text{lp}}(Z)$, obtenga la ecuación de ω_p, la frecuencia de corte del nuevo filtro $H(z)$, en función de α y θ_p.

(c) Suponga que el filtro paso bajo original tiene como función de transferencia

$$H_{\text{lp}}(Z) = \frac{1}{1-0{,}9Z^{-1}}.$$

Dibuje el grafo de flujo de una realización de $H_{\text{lp}}(Z)$ y dibuje también el grafo de flujo de la implementación de $H(z)$ resultante de sustituir los elementos de retardo unidad del primer grafo de flujo por la red de la Figura P7.51-2 ¿Corresponde la red resultante a una ecuación en diferencias computable?

(d) Si $H_{\text{lp}}(Z)$ corresponde a un sistema FIR realizado en forma directa, ¿podría producirse una ecuación en diferencias computable modificando el grafo de flujo? Si el sistema FIR $H_{\text{lp}}(Z)$ es un sistema de fase lineal ¿sería también de fase lineal el sistema resultante $H(z)$? Si el sistema FIR tiene una respuesta al impulso de longitud $M+1$ muestras ¿cuál sería la longitud de la respuesta al impulso del sistema transformado?

(e) Para evitar las dificultades que surgen en el apartado (c) se sugiere que la red de la Figura P7.51-2 se puede poner en cascada con un elemento de retardo unidad, como se muestra en la Figura P7.51-3. Repita el análisis del apartado (a) cuando en lugar de cada elemento de retardo unidad se sustituye la red de la Figura P7.51-3. Determine una ecuación que exprese θ en función de ω, y demuestre que si $H_{\text{lp}}(e^{j\theta})$ es un filtro paso bajo, $H(e^{j\omega})$ no es un filtro paso bajo.

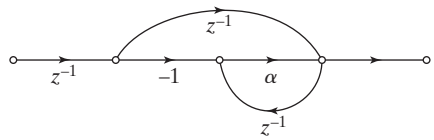


Figura P7.51-3

7.52. Si se dispone de un módulo básico de filtrado (un elemento hardware o una subrutina de computador), es a veces posible utilizarlo repetitivamente para realizar un nuevo filtro con características de respuesta en frecuencia más abruptas. Una forma es colocar el filtro en cascada consigo mismo dos o más veces, pero se puede demostrar fácilmente que, aunque los errores en la banda eliminada se elevan al cuadrado (reduciéndose por tanto ya que son menores que la unidad), esta solución aumenta el error de aproximación en la banda de paso. Otra solución, sugerida por Tukey (1977) se muestra en el diagrama de bloques de la Figura P7.52-1. Tukey denominó a esta solución "*twicing*".

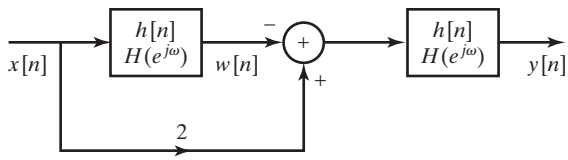


Figura P7.52-1

(a) Suponga que el sistema básico tiene una respuesta al impulso simétrica de duración finita. Es decir,

$$h[n] = \begin{cases} h[-n], & -L \le n \le L, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Determine si la respuesta al impulso global $g[n]$ es (i) FIR y (ii) simétrica.

(b) Suponga que $H(e^{j\omega})$ satisface las siguientes especificaciones del error de aproximación:

$$\begin{aligned} (1-\delta_1) \le H(e^{j\omega}) &\le (1+\delta_1), \qquad 0 \le \omega \le \omega_p, \\ -\delta_2 \le H(e^{j\omega}) &\le \delta_2, \qquad \omega_s \le \omega \le \pi. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que si el sistema básico tiene esas especificaciones, la respuesta en frecuencia global $G(e^{j\omega})$ (desde $x[n]$ a $y[n]$) cumplirá especificaciones de la forma

$$\begin{aligned} A \le G(e^{j\omega}) &\le B, \qquad 0 \le \omega \le \omega_p, \\ C \le G(e^{j\omega}) &\le D, \qquad \omega_s \le \omega \le \pi. \end{aligned}$$

Determine A, B, C y D en función de δ_1 y δ_2. Si $\delta_1 \ll 1$ y $\delta_2 \ll 1$, ¿cuáles son aproximadamente los máximos errores de aproximación en la banda de paso y en la banda eliminada de $G(e^{j\omega})$?

(c) Como se ha determinado en el apartado (b), el método de Tukey mejora el error de aproximación en la banda de paso, pero aumenta el error en la banda eliminada. Kaiser y Hamming (1977) generalizaron este método para mejorar *ambos* errores, en la banda de paso y en la banda eliminada. Denominaron a su solución "sharpening". La Figura P7.52-2 muestra esta solución en su forma más simple. Suponga de nuevo que la respuesta al impulso del sistema básico es la del apartado (a). Repita el apartado (b) para el sistema de la Figura P7.52-2.

(d) El sistema básico es no causal. Si su respuesta al impulso fuera la de un sistema FIR causal de fase lineal como

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

¿Cómo se deberían modificar los sistemas de las Figuras P7.52-1 y P7-52.2? ¿Qué tipos de sistemas FIR causales de fase lineal (I, II, III o IV) se podrían utilizar? ¿Cuáles serían las longitudes de las respuestas al impulso $g[n]$ de los sistemas de las Figuras P7.52-1 y P7.52-2 (en función de L)?

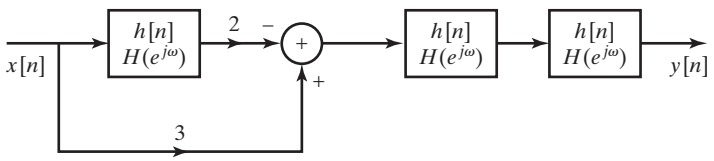


Figura P7.52-2

7.53. Considere el diseño de un filtro FIR paso bajo de fase lineal mediante el algoritmo de Parks-McClellan. Utilice el teorema de alternancia para argumentar que la aproximación debe decrecer monótonamente en la región intermedia entre los intervalos de aproximación de la banda de paso y la banda eliminada. *Sugerencia*: demuestre que para satisfacer el teorema de alternancia, todos los máximos y mínimos del polinomio trigonométrico deben estar en la banda de paso o en la banda eliminada.

7.54. La Figura P7.54 muestra la respuesta en frecuencia $A_e(e^{j\omega})$ de un sistema FIR en tiempo discreto cuya respuesta al impulso es

$$h_e[n] = \begin{cases} h_e[-n], & -L \le n \le L, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

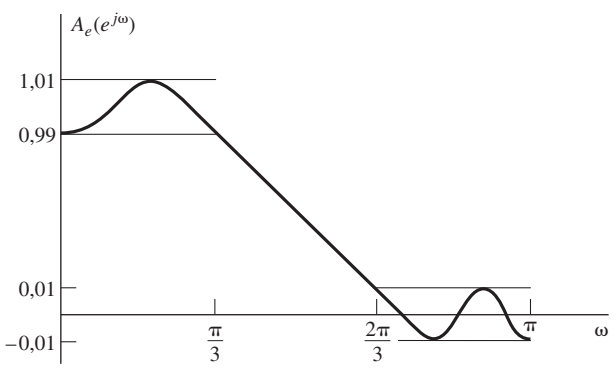


Figura P7.54

(a) Demuestre que $A_e(e^{j\omega})$ no puede corresponder a un filtro FIR generado por el algoritmo de Parks–McClellan con un límite de la banda de paso de $\pi/3$, un límite de la banda eliminada de $2\pi/3$, y una función de ponderación del error de la unidad en la banda de paso y en la banda eliminada. Explique claramente su razonamiento. *Sugerencia*: el teorema de alternancia dice que la aproximación óptima es única.

(b) Basándose en la Figura P7.54 y en la afirmación de que $A_e(e^{j\omega})$ no puede corresponder a un filtro óptimo, ¿qué se puede concluir sobre el valor de L?

7.55. Considere el sistema de la Figura P7.55

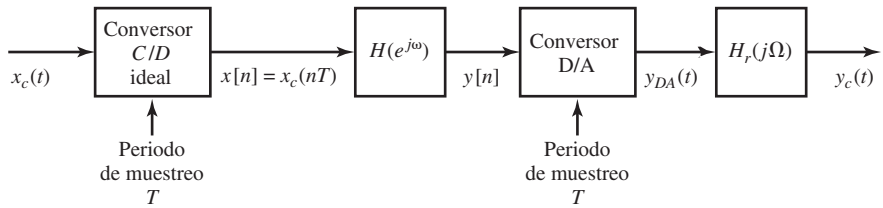


Figura P7.55

1. Suponga que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$ y que

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T, \end{cases}$$

es un filtro de reconstrucción paso bajo ideal.

2. El conversor D/A es un circuito de retención de orden cero, de forma que

$$Y_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]h_0(t - nT),$$

siendo

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(Se desprecia la cuantificación en el conversor D/A).

3. El segundo sistema de la Figura P7.55 es un sistema FIR en tiempo discreto de fase lineal con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$.

Se desea diseñar el sistema FIR utilizando el algoritmo de Parks–McClellan de forma que compense los efectos del sistema de retención de orden cero.

(a) La transformada de Fourier de la salida es $Y_c(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)X_c(j\Omega)$. Determine una expresión de $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ en función de $H(e^{j\Omega T})$ y T.

(b) Si el sistema FIR de fase lineal es tal que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 51$, y $T = 10^{-4}$ s, ¿cuál es el retardo total (en ms) entre $x_c(t)$ y $y_c(t)$?

(c) Suponga que cuando $T = 10^{-4}$ s, se desea que la respuesta en frecuencia efectiva sea de rizado constante (tanto en la banda de paso como en la banda eliminada) dentro de las siguientes tolerancias:

$$0{,}99 \leq |H_{\text{eff}}(j\Omega)| \leq 1{,}01, \qquad |\Omega| \leq 2\pi(1000),$$
$$|H_{\text{eff}}(j\Omega)| \leq 0{,}01, \qquad 2\pi(2000) \leq |\Omega| \leq 2\pi(5000).$$

Se desea conseguirlo diseñando un filtro óptimo de fase lineal (mediante el algoritmo de Parks–McClellan) que incluya la compensación del sistema de retención de orden cero. Proporcione una ecuación de la respuesta ideal $H_d(e^{j\omega})$ que se debería utilizar. Obtenga y dibuje la función de ponderación $W(\omega)$ que habría que utilizar. Dibuje una respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ "típica" que podría resultar.

(d) ¿Cómo se modificarían sus resultados del apartado (c) para incluir la compensación del módulo de un filtro de reconstrucción $H_r(j\Omega)$ con ganancia cero por encima de $\Omega = 2\pi(5000)$, pero con pendiente en la banda de paso?

7.56. Tras filtrar paso bajo una señal en tiempo discreto, a menudo se submuestrea o diezma, tal como se muestra en la Figura P7.56-1. Los filtros FIR de fase lineal son generalmente deseables en esas aplicaciones, pero si el filtro paso bajo de la figura tiene una banda de transición estrecha, el sistema FIR tendrá una respuesta al impulso larga y requerirá por tanto un gran número de multiplicaciones y sumas para cada muestra de salida.

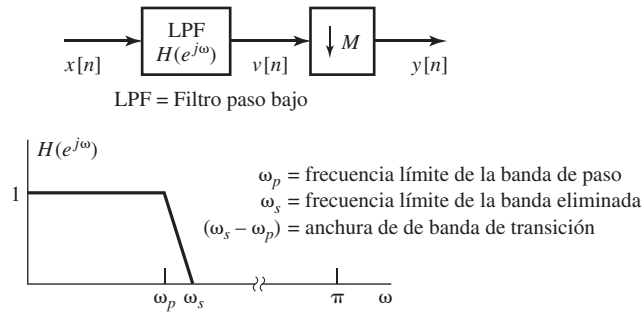


Figura P7.56-1

En este problema estudiaremos los méritos de una realización multietapa del sistema de la Figura P7.56-1. Estas realizaciones son particularmente útiles cuando ω_s es pequeño y el factor de diezmado M es grande. La Figura P7.56-2 muestra una realización multietapa general. La estrategia es utilizar una banda de transición más amplia en los filtros de las etapas iniciales, reduciéndose así la longitud de las respuestas al impulso de los filtros de esas etapas. Cuando se produce el diezmado, el número de muestras de señal se reduce, y se pueden reducir progresivamente las anchuras de las bandas de transición de los filtros que operan sobre la señal diezmada. De esta manera, se puede reducir el número total de operaciones necesarias para realizar el sistema de diezmado.

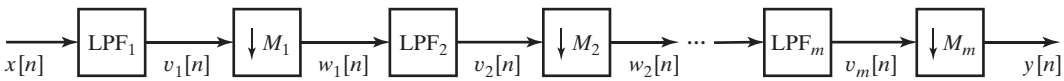


Figura P7.56-2

(a) Si no hay solapamiento como resultado del proceso de diezmado de la Figura P7.56-1, ¿cuál es el máximo factor de diezmado M permisible en función de ω_s?

(b) Sea $M = 100$, $\omega_s = \pi/100$ y $\omega_p = 0{,}9\pi/100$ en el sistema de la Figura P7.56-2. Si $x[n] = \delta[n]$, dibuje $V(e^{j\omega})$ y $Y(e^{j\omega})$.

Considere ahora una realización en dos etapas del sistema de diezmado con $M = 100$, como se indica en la Figura P7.56-3, siendo $M_1 = 50$, $M_2 = 2$, $\omega_{p1} = 0{,}9\pi/100$, $\omega_{p2} = 0{,}9\pi/2$ y $\omega_{s2} = \pi/2$. Se debe elegir ω_{s1} o, equivalentemente, la banda de transición del primer filtro paso bajo LPF_1, $(\omega_{s1} - \omega_{p1})$, de modo que la realización en dos etapas tenga las mismas frecuencias equivalentes en la banda de paso y en la banda eliminada que el sistema de diezmado de una etapa. (No estamos interesados en la forma detallada de la respuesta en frecuencia en la banda de transición, excepto en que ambos sistemas deben tener en dicha banda una respuesta monótona decreciente).

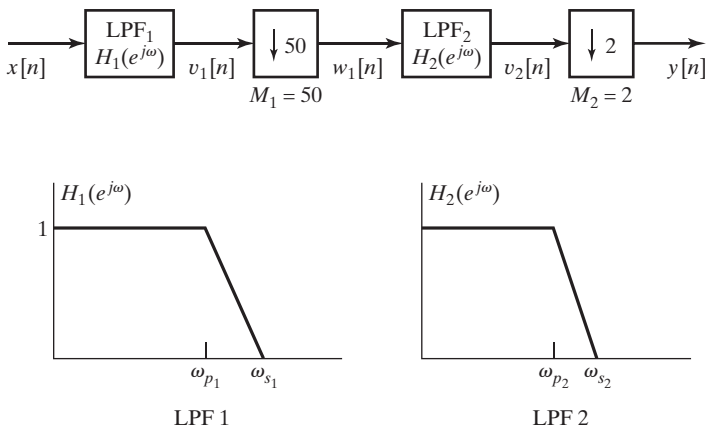


Figura P7.56-3

(c) Dada una ω_{s1} arbitraria y la entrada $x[n] = \delta[n]$, dibuje $V_1(e^{j\omega})$, $W_1(e^{j\omega})$, $V_2(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ para el sistema de diezmado de dos etapas de la Figura P7.56-3.

(d) Obtenga el valor *máximo* de ω_{s1} de forma que el sistema de diezmado de dos etapas tenga las mismas frecuencias de corte equivalentes en la banda de paso y la banda eliminada que el sistema de una sola etapa del apartado (b).

Además de tener una banda de transición no nula, los filtros paso bajo se diferencian del ideal por los errores de aproximación en la banda de paso y la banda eliminada, δ_p y δ_s, respectivamente. Suponga que se utiliza una aproximación FIR de fase lineal y rizado constante. De la Ecuación (7.117) se deduce que, para filtros paso bajo óptimos,

$$N \approx \frac{-10\log_{10}(\delta_p\delta_s) - 13}{2{,}324\Delta\omega} + 1, \qquad \text{(P7.56-1)}$$

donde N es la longitud de la respuesta al impulso y $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ es la banda de transición del filtro paso bajo. La Ecuación (P7.56-1) proporciona la base para comparar las dos realizaciones del sistema de diezmado. Podría utilizarse la Ecuación (7.76) en lugar de la Ecuación (P7.56-1) para estimar la longitud de la respuesta al impulso si los filtros se diseñan mediante el método de la ventana de Kaiser.

(e) Suponga que $\delta_p = 0{,}01$ y $\delta_s = 0{,}001$ para el filtro paso bajo en la realización de una sola etapa. Calcule la longitud N de la respuesta al impulso del filtro paso bajo y determine el número de multiplicaciones necesarias para calcular cada muestra de la salida. Aproveche la simetría de la respuesta al impulso del sistema FIR de fase lineal (observe que en esta aplicación de diezmado, sólo es necesario calcular una de cada M muestras a la salida, es decir, el compresor conmuta con las multiplicaciones del sistema FIR).

(f) Utilizando el valor de ω_{s1} obtenido en el apartado (d), calcule las longitudes de las respuestas al impulso N_1 y N_2 de los filtros paso bajo LPF_1 y LPF_2, respectivamente, en el sistema de diezmado de dos etapas de la Figura P7.56-3. Determine el número total de multiplicaciones necesarias para calcular cada muestra de la salida en el sistema de dos etapas.

(g) Si se utilizan las especificaciones del error de aproximación $\delta_p = 0{,}01$ y $\delta_s = 0{,}001$ en ambos filtros del sistema de diezmado de dos etapas, el rizado de la banda de paso puede ser superior a 0,01, ya que los rizados de la banda de paso de las dos etapas se pueden reforzar mutuamente. Es decir, $(1+\delta_p)(1+\delta_p) > (1+\delta_p)$. Para compensar este efecto, los filtros de la realización de dos etapas se pueden diseñar con la mitad del rizado en la banda de paso que la realización de una etapa. Por tanto, suponga que $\delta_p = 0{,}005$ y $\delta_s = 0{,}001$ en cada filtro del sistema de diezmado de dos etapas. Calcule las longitudes de la respuesta al impulso N_1 y N_2 de los filtros paso bajo LPF_1 y LPF_2, respectivamente, y determine el número total de multiplicaciones necesarias para calcular cada muestra de la salida.

(h) ¿Se debería reducir también la especificación del error de aproximación en la banda eliminada de los filtros del sistema de diezmado de dos etapas?

(i) *Opcional.* La combinación de $M_1 = 50$ y $M_2 = 2$ puede no producir el mínimo número total de multiplicaciones por cada muestra de salida. Son posibles otros valores enteros de M_1 y M_2 que cumplen $M_1M_2 = 100$. Determine los valores de M_1 y M_2 que minimizan el número de multiplicaciones por cada muestra de salida.

7.57. En este problema se desarrolla una técnica para diseñar filtros en tiempo discreto de fase mínima. Estos filtros tienen todos sus polos y ceros en el interior (o sobre) la circunferencia unidad (es decir, se permiten ceros sobre la circunferencia unidad). Consideremos primero el problema de transformar un filtro FIR paso bajo de fase lineal, de rizado constante y de tipo I en un sistema de fase mínima. Si $H(e^{j\omega})$ es la respuesta del filtro FIR de fase lineal de tipo I, entonces

1. La correspondiente respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

es real y M es un entero par.

2. Del apartado 1 se deduce que $H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$, siendo $A_e(e^{j\omega})$ real y $n_0 = M/2$ un entero.

3. El rizado de la banda de paso es δ_1. Es decir, en la banda de paso, $A_e(e^{j\omega})$ oscila entre $(1+\delta_1)$ y $(1-\delta_1)$, (véase la Figura P7.57-1).

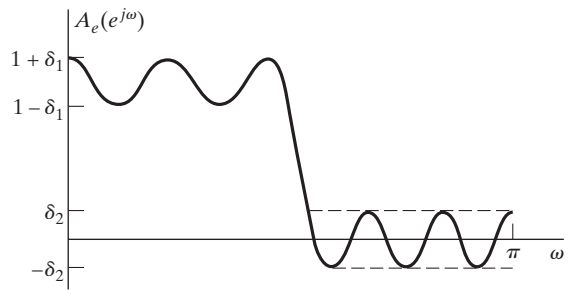


Figura P7.57-1

4. El rizado de la banda eliminada es δ_2. Es decir, en la banda eliminada, $-\delta_2 \le A_e(e^{j\omega}) \le \delta_2$ y $A_e(e^{j\omega})$ oscila entre $-\delta_2$ y $+\delta_2$, (véase la Figura P7.57-1).

La siguiente técnica fue propuesta por Herrmann y Schüssler (1970a) para transformar un sistema de fase lineal en un sistema de fase mínima con función de transferencia $H_{\min}(z)$ y respuesta al impulso $h_{\min}[n]$. En este problema supondremos que el sistema de fase mínima puede tener ceros *sobre* la circunferencia unidad:

Paso 1. Crear una nueva secuencia

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n], & n \neq n_0, \\ h[n_0] + \delta_2, & n = n_0. \end{cases}$$

Paso 2. Observar que $H_1(z)$ se puede expresar de la forma

$$H_1(z) = z^{-n_0} H_2(z) H_2(1/z) = z^{-n_0} H_3(z)$$

para algún $H_2(z)$, tal que tenga todos sus polos y ceros en el interior de la circunferencia unidad y $h_2[n]$ es real.

Paso 3. Definir

$$H_{\min}(z) = \frac{H_2(z)}{a}.$$

La constante del denominador $a = (\sqrt{1-\delta_1+\delta_2} + \sqrt{1+\delta_1+\delta_2})/2$ normaliza la banda de paso para que la respuesta en frecuencia resultante $H_{\text{mín}}(e^{j\omega})$ oscile alrededor de la unidad.

(a) Demuestre que si $h_1[n]$ se elige como en el paso 1, $H_1(e^{j\omega})$ se puede escribir como

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} H_3(e^{j\omega}),$$

siendo $H_3(e^{j\omega})$ real y no negativa para todos los valores de ω.

(b) Si $H_3(e^{j\omega}) \ge 0$, como se demostró en el apartado (a), demuestre que existe un $H_2(z)$ tal que

$$H_3(z) = H_2(z) H_2(1/z),$$

donde $H_2(z)$ es una función de transferencia de fase mínima y $h_2[n]$ es real (es decir, justifique el Paso 2).

(c) Demuestre que el nuevo filtro $H_{\min}(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo de rizado constante (es decir, que su característica de módulo es de la forma que se muestra en la Figura P7.57-2) evaluando δ_1' y δ_2'. ¿Cuál es la longitud de la nueva respuesta al impulso $h_{\min}[n]$?

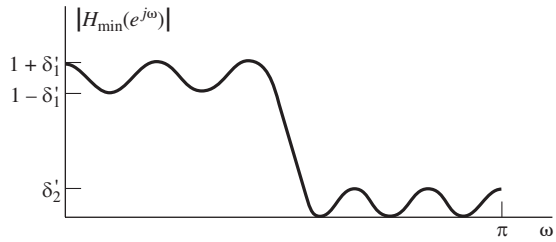


Figura P7.57-2

(d) En los apartados (a), (b) y (c) se ha supuesto que se parte de un filtro FIR de fase lineal de tipo I. ¿Funcionaría esta técnica si se suprime la restricción de fase lineal? ¿Funcionaría si se utiliza un filtro FIR de fase lineal de tipo II?

7.58. Suponga que se dispone de un programa que obtiene el conjunto de coeficientes $a[n], n = 0, 1, \ldots, L$, que minimiza

$$\max_{\omega \in F} \left\{ \left| W(\omega) \left[H_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^{L} a[n] \cos \omega n \right] \right| \right\},$$

dados L, F, $W(\omega)$ y $H_d(e^{j\omega})$. Hemos demostrado que la solución a este problema de optimización implica un sistema FIR no causal de fase cero cuya respuesta al impulso satisface $h_e[n] = h_e[-n]$. Retrasando $h_e[n]$ L muestras, se obtiene un sistema FIR de fase lineal causal con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{L} a[n] \cos \omega n = \sum_{n=0}^{2L} h[n] e^{-j\omega n},$$

donde la respuesta al impulso se relaciona con los coeficientes $a[n]$ por la expresión

$$a[n] = \begin{cases} 2h[M/2 - n] & \text{para } 1 \le n \le L, \\ h[M/2] & \text{para } n = 0, \end{cases}$$

y $M = 2L$ es el orden del polinomio de la función de transferencia (la longitud de la respuesta al impulso es $M + 1$.)

Los otros tres tipos de filtros FIR de fase lineal (II, III y IV) se pueden diseñar utilizando el programa disponible si se realizan modificaciones adecuadas a la función de peso $W(\omega)$ y a la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$. Para ver cómo se puede hacer, es necesario modificar las expresiones de la respuesta en frecuencia en la forma estándar supuesta por el programa.

(a) Suponga que se desea diseñar un sistema FIR de fase lineal de tipo II causal tal que $h[n] = h[M - n]$ para $n = 0, 1, \ldots, M$, donde M es un entero impar. Demuestre que la respuesta en frecuencia de este tipo de sistema se puede expresar como

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega \left(n - \tfrac{1}{2}\right),$$

y determine la relación entre los coeficientes $b[n]$ y $h[n]$.

(b) Demuestre que la suma

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n] \cos \omega \left(n - \tfrac{1}{2}\right)$$

se puede expresar como

$$\cos(\omega/2) \sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{b}[n] \cos \omega n$$

obteniendo una expresión de $b[n]$ para $n = 1, 2, \ldots, (M+1)/2$ en función de $\tilde{b}[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, (M-1)/2$. *Sugerencia*: verifique cuidadosamente que $b[n]$ se puede expresar en función de $\tilde{b}[n]$ y utilice la igualdad trigonométrica $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$.

(c) Si se desea utilizar el programa disponible para diseñar sistemas de tipo II (M impar) para unos valores de F, $W(\omega)$ y $H_d(e^{j\omega})$ dados, indique cómo obtener $\tilde{L}$, $\tilde{F}$, $\tilde{W}(\omega)$ y $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$ en función de M, F, $W(\omega)$ y $H_d(e^{j\omega})$, de forma que si ejecutamos el programa utilizando los valores $\tilde{L}$, $\tilde{F}$, $\tilde{W}(\omega)$ y $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$, podemos utilizar el conjunto de coeficientes resultante para determinar la respuesta al impulso del sistema de tipo II deseado.

(d) Los apartados (a)–(c) se pueden repetir para sistemas FIR de fase lineal causales de tipos III y IV donde $h[n] = -h[M-n]$. Para esos casos debe demostrar que en los sistemas de tipo III (M par), la respuesta al impulso se puede expresar como

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{M/2} c[n] \operatorname{sen} \omega n \\ &= e^{-j\omega M/2} \operatorname{sen} \omega \sum_{n=0}^{(M-2)/2} \tilde{c}[n] \cos \omega n, \end{aligned}$$

y para sistemas de tipo IV (M impar),

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \operatorname{sen} \omega \left(n - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= e^{-j\omega M/2} \operatorname{sen}(\omega/2) \sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{d}[n] \cos \omega n. \end{aligned}$$

Como en el apartado (b), es necesario expresar $c[n]$ en función de $\tilde{c}[n]$ y $d[n]$ en función de $\tilde{d}[n]$ utilizando la igualdad trigonométrica $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$. McClellan y Parks (1973) y Rabiner y Gold (1975) consideran con más detalle los aspectos de este problema.

7.59. En este problema se considera un método para obtener una realización de un filtro de fase lineal con frecuencia de corte variable. Suponga que se dispone de un filtro FIR de fase cero diseñado por el método de Parks-McClellan. La respuesta en frecuencia de este filtro se puede representar como

$$A_e(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{L} a_k (\cos\theta)^k,$$

y su función de transferencia se representa por tanto como

$$A_e(Z) = \sum_{k=0}^{L} a_k \left(\frac{Z + Z^{-1}}{2}\right)^k,$$

con $e^{j\theta} = Z$. (Utilizaremos Z para el sistema original y z para el sistema que se obtiene mediante la transformación del sistema original.)

(a) Utilizando la anterior expresión de la función de transferencia, dibuje un diagrama de bloques o un grafo de flujo de una realización del sistema que utilice multiplicaciones por los coeficientes a_k, sumas y sistemas elementales con función de transferencia $(Z + Z^{-1})/2$.

(b) ¿Cuál es la longitud de la respuesta al impulso del sistema? Se puede conseguir que la respuesta completa sea causal poniendo el sistema en cascada con un retardo de L muestras. Distribuya este retardo como retardos unidad de forma que todas las partes de la red sean causales.

(c) Suponga que obtenemos una nueva función de transferencia a partir de $A_e(Z)$ mediante la sustitución

$$B_e(z) = A_e(Z)\big|_{(Z+Z^{-1})/2=\alpha_0+\alpha_1[(z+z^{-1})/2]}.$$

Utilizando el grafo de flujo del apartado (a), dibuje el grafo de flujo de un sistema que realice la función de transferencia $B_e(z)$. ¿Cuál es la longitud de la respuesta al impulso de este sistema? Modifique la red del apartado (b) para que el sistema completo y todas las partes de la red sean causales.

(d) Si $A_e(e^{j\theta})$ es la respuesta en frecuencia del filtro original y $B_e(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia del filtro transformado, determine la relación entre θ y ω.

(e) La respuesta en frecuencia del filtro óptimo original se muestra en la Figura P7.59. Para el caso de $\alpha_1 = 1 - \alpha_0$ y $0 \le \alpha_0 < 1$, describa cómo cambia la respuesta en frecuencia $B_e(e^{j\omega})$ cuando cambia α_0. *Sugerencia*: dibuje $A_e(e^{j\theta})$ y $B_e(e^{j\omega})$ como funciones de $\cos\theta$ y $\cos\omega$. ¿Son los filtros resultantes óptimos en el sentido de tener los mínimos errores de aproximación ponderados máximos en la banda de paso y en la banda eliminada transformadas?

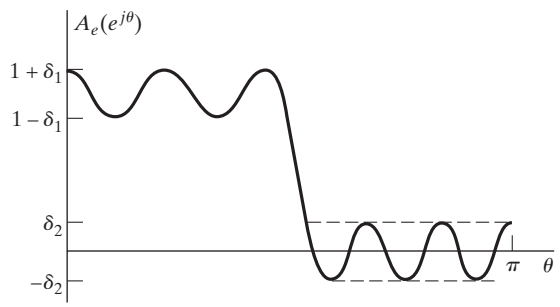


Figura P7.59

(f) *Opcional.* Repita el apartado (e) para el caso $\alpha_1 = 1 + \alpha_0$ y $-1 < \alpha_0 \le 0$.

7.60. En este problema se considera el efecto de transformar filtros en tiempo continuo en filtros en tiempo discreto sustituyendo las derivadas de la ecuación diferencial de un filtro en tiempo continuo por diferencias centrales, para obtener la ecuación en diferencias. La primera diferencia central de una secuencia $x[n]$ se define como

$$\Delta^{(1)}\{x[n]\} = x[n+1] - x[n-1],$$

y la k-ésima diferencia central se define recursivamente como

$$\Delta^{(k)}\{x[n]\} = \Delta^{(1)}\{\Delta^{(k-1)}\{x[n]\}\}.$$

Por consistencia, se define también la diferencia central de orden cero:

$$\Delta^{(0)}\{x[n]\} = x[n].$$

(a) Si $X(z)$ es la transformada Z de $x[n]$, determine la transformada Z de $\Delta^{(k)}\{x[n]\}$.

La transformación de un filtro en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo en un filtro en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo se realiza como sigue: sea un filtro en tiempo continuo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ especificado por una ecuación en diferencias de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^{M} b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}.$$

Entonces, el correspondiente filtro en tiempo discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ queda especificado por la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \Delta^{(k)}\{y[n]\} = \sum_{r=0}^{M} b_r \Delta^{(r)}\{x[n]\}.$$

(b) Si $H_c(s)$ es la función de transferencia racional de un sistema en tiempo continuo y $H_d(z)$ es la función de transferencia del sistema en tiempo discreto que se obtiene transformando la ecuación diferencial en una ecuación en diferencias como se indica en el apartado (a), entonces

$$H_d(z) = H_c(s)\big|_{s=m(z)}.$$

Determine $m(z)$.

(c) Suponga que $H_c(s)$ aproxima a un filtro paso bajo en tiempo continuo con frecuencia de corte $\Omega = 1$; es decir,

$$H(j\Omega) \approx \begin{cases} 1, & |\Omega| < 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Este filtro se transforma en un filtro en tiempo discreto utilizando diferencias centrales como se indica en el apartado (a). Dibuje la respuesta en frecuencia aproximada que se podría esperar que tuviera el filtro en tiempo discreto, suponiendo que es estable.

7.61. Sea $h[n]$ el filtro paso bajo óptimo de rizado constante de tipo I que se muestra en la Figura P7.61, diseñado con una función de peso $W(e^{j\omega})$ y con respuesta en frecuencia $H_d(e^{j\omega})$. Suponga por simplicidad que el filtro es de fase cero (es decir, no causal). Utilizaremos $h[n]$ para diseñar cinco filtros FIR diferentes, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
h_1[n] &= h[-n], \\
h_2[n] &= (-1)^n h[n], \\
h_3[n] &= h[n] * h[n], \\
h_4[n] &= h[n] - K\delta[n], \text{ siendo } K \text{ una constante}, \\
h_5[n] &= \begin{cases} h[n/2] & \text{para } n \text{ par}, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Para cada filtro $h_i[n]$, determine si $h_i[n]$ es óptimo en el sentido minimax. Es decir, determine si

$$h_i[n] = \min_{h_i[n]} \max_{\omega \in F} \left(W(e^{j\omega}) |H_d(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega})| \right)$$

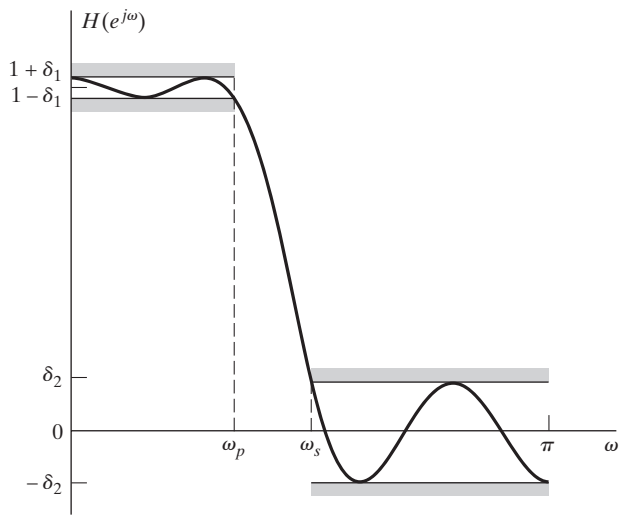


Figura P7.61

para algunos valores de $H_d(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$, constantes por tramos, siendo F una unión de intervalos cerrados disjuntos en $0 \leq \omega \leq \pi$. Si $h_i[n]$ es óptimo, determine los valores correspondientes de $H_d(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$. Si $h_i[n]$ no es óptimo, explique por qué.

7.62. Suponga que ha utilizado el algoritmo de Parks–McClellan para diseñar un filtro FIR causal de fase lineal. La función de transferencia de este sistema es $H(z)$. La longitud de la respuesta al impulso es de 25 muestras, es decir, $h[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > 24$, y $h[0] \neq 0$. En cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es "verdadera", "falsa" o "no se dispone de suficiente información":

(a) $h[n+12] = h[12-n]$ or $h[n+12] = -h[12-n]$ para $-\infty < n < \infty$.
(b) El sistema inverso es causal y estable.
(c) Se sabe que $H(-1) = 0$.
(d) El máximo error de aproximación ponderado es el mismo en todas las bandas de aproximación.
(e) El sistema se puede realizar con un grafo de flujo de señales sin vías de realimentación.
(f) El retardo de grupo es positivo para $0 < \omega < \pi$.

7.63. Considere el diseño de un filtro FIR paso banda de tipo I con fase lineal utilizando el algoritmo de Parks–McClellan. La longitud de la respuesta al impulso es $M+1 = 2L+1$. Recuerde que para sistemas de tipo I, la respuesta en frecuencia es de la forma $H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$, y que el algoritmo de Parks–McClellan obtiene la función $A_e(e^{j\omega})$ que minimiza el valor máximo de la función de error

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})], \qquad \omega \in F,$$

siendo F un subconjunto cerrado del intervalo $0 \leq \omega \leq \pi, W(\omega)$ es una función de peso y $H_d(e^{j\omega})$ define la respuesta en frecuencia deseada en los intervalos de aproximación F. El esquema de tolerancias del filtro paso banda se muestra en la Figura P7.63.

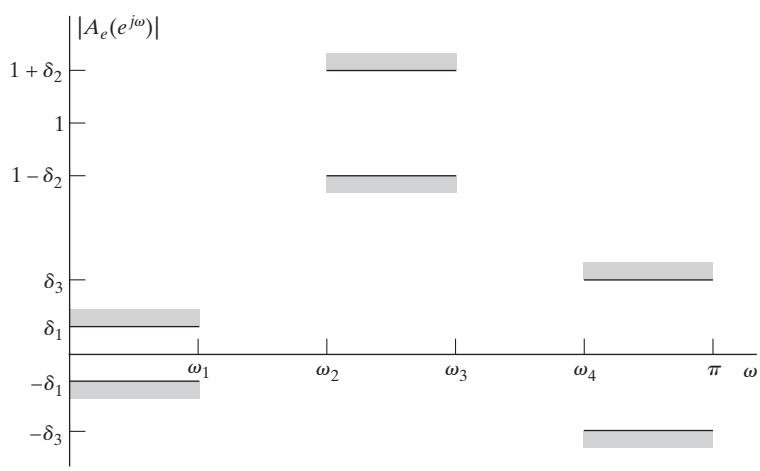


Figura P7.63

(a) Obtenga la ecuación de la respuesta deseada $H_d(e^{j\omega})$ dado el esquema de tolerancias de la Figura P7.63.
(b) Obtenga la ecuación de la función de peso $W(\omega)$ dado el esquema de tolerancias de la Figura P7.63.
(c) ¿Cuál es el número *mínimo* de alternancias de la función de error para el filtro óptimo?
(d) ¿Cuál es el número *máximo* de alternancias de la función de error para el filtro óptimo?
(e) Dibuje una función de error ponderada "típica" $E(\omega)$ que pueda ser la función de error de un filtro paso banda óptimo si $M = 14$. Suponga el *máximo* número de alternancias.
(f) Suponga ahora que M, ω_1, ω_2, ω_3, la función de ponderación y la función deseada no cambian, pero que ω_4 se *incrementa*, por lo que la banda de transición $(\omega_4 - \omega_3)$ también se incrementa. ¿Tendrá *necesariamente* el filtro óptimo para estas nuevas especificaciones un valor *menor* del máximo error

de aproximación que el filtro óptimo asociado a las especificaciones iniciales? Explique claramente su razonamiento.

(g) En el caso del filtro paso bajo, todos los mínimos y máximos locales de $A_e(e^{j\omega})$ deben estar en las bandas de aproximación $\omega \in F$. *No pueden* aparecer en las bandas intermedias de transición. Además, en al caso paso bajo, los mínimos y máximos locales que aparecen en las bandas de aproximación deben ser alternancias del error. Demuestre que esto no es necesariamente cierto en el caso del filtro paso banda. Concretamente, utilice el teorema de alternancia para demostrar que (i) los máximos y mínimos locales de $A_e(e^{j\omega})$ no están restringidos a las bandas de aproximación y (ii) que los máximos y mínimos locales en las bandas de aproximación no tienen que ser alternancias.

7.64. A menudo se desea transformar un filtro paso bajo prototipo en tiempo discreto en otra clase de filtro selectivo en frecuencia en tiempo discreto. En particular, la técnica de invarianza al impulso no se puede utilizar para transformar filtros paso alto o banda eliminada en tiempo continuo en filtros paso alto o banda eliminada en tiempo discreto. Por tanto, la solución tradicional ha sido diseñar un filtro paso bajo en tiempo discreto prototipo utilizando invarianza al impulso o la transformación bilineal, y emplear después una transformación algebraica para convertir el filtro paso bajo en tiempo discreto en el filtro selectivo en frecuencia deseado.

Para ilustrar este proceso, suponga que se tiene una determinada función de transferencia paso bajo $H_{\text{lp}}(Z)$ que se desea transformar en una nueva función de transferencia $H(z)$, con características paso bajo, paso alto, paso banda o banda eliminada, cuando se evalúa en la circunferencia unidad. Nótese que la variable compleja Z se asocia al filtro paso bajo prototipo y la variable compleja z al filtro transformado. Se define una transformación del plano Z en el plano z de la forma

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) \tag{P7.64-1}$$

tal que

$$H(z) = H_{\text{lp}}(Z)\big|_{Z^{-1}=G(z^{-1})}. \tag{P7.64-2}$$

En vez de expresar Z en función de z, en la Ecuación (P7.64-1) hemos supuesto que Z^{-1} se expresa en función de z^{-1}. Por tanto, de acuerdo con la Ecuación (P7.64-2), para obtener $H(z)$ a partir de $H_{\text{lp}}(Z)$, simplemente cambiaremos Z^{-1} en $H_{\text{lp}}(Z)$ por $G(z^{-1})$. Se obtiene así una representación adecuada, ya que $H_{\text{lp}}(Z)$ se expresa normalmente como una función racional de Z^{-1}.

Si $H_{\text{lp}}(Z)$ es la función de transferencia racional de un sistema causal y estable, sería natural requerir que la función de transferencia transformada $H(z)$ fuera una función racional en z^{-1} y que el sistema fuera causal y estable. Esto provoca las siguientes restricciones en la transformación $Z^{-1} = G(z^{-1})$:

1. $G(z^{-1})$ debe ser una función racional de z^{-1}.
2. El interior de la circunferencia unidad del plano Z se debe transformar en el interior de la circunferencia unidad del plano z.
3. La circunferencia unidad del plano Z se debe transformar en la circunferencia unidad del plano z.

En este problema se obtienen y se caracterizan las transformaciones algebraicas necesarias para transformar un filtro paso bajo en tiempo discreto en otro filtro paso bajo con diferente frecuencia de corte, o en un filtro paso alto en tiempo discreto.

(a) Sean θ y ω las variables de frecuencia (ángulos) en los planos Z y z, respectivamente, es decir, en las respectivas circunferencias unidad $Z = e^{j\theta}$ y $z = e^{j\omega}$. Demuestre que para que se cumpla la Condición 3, $G(z^{-1})$ debe ser un sistema paso todo, es decir,

$$|G(e^{-j\omega})| = 1. \tag{P7.64-3}$$

(b) Es posible demostrar que la forma más general de $G(z^{-1})$ que satisface las tres condiciones anteriores es

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \tag{P7.64-4}$$

Recordando la presentación sobre sistemas paso todo del Capítulo 5, debe resultar claro que una función $G(z^{-1})$, con la forma que se indica en la Ecuación (p7.64-4) cumple también la Ecuación (P7.64-3), es decir, es un sistema paso todo y por tanto cumple la Condición 3. La Ecuación (P7.64-4) cumple también claramente la Condición 1. Demuestre que la Condición 2 se cumple si y sólo si $|\alpha_k| < 1$.

(c) Se puede utilizar una función simple de primer orden $G(z^{-1})$ para transformar un filtro paso bajo prototipo $H_{\text{lp}}(Z)$ con frecuencia de corte θ_p en un nuevo filtro $H(z)$ con frecuencia de corte ω_p. Demuestre que

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

produce la transformación deseada para algún valor de α. Obtenga α en función de θ_p y ω_p. En el Problema 7.51 se utiliza esta idea para diseñar filtros paso bajo con frecuencias de corte ajustables.

(d) Considere el caso de un filtro paso bajo prototipo con $\theta_p = \pi/2$. Para cada uno de los siguientes valores de α, especifique la frecuencia de corte resultante ω_p del filtro transformado.

(I) $\alpha = -0{,}2679$.
(II) $\alpha = 0$.
(III) $\alpha = 0{,}4142$.

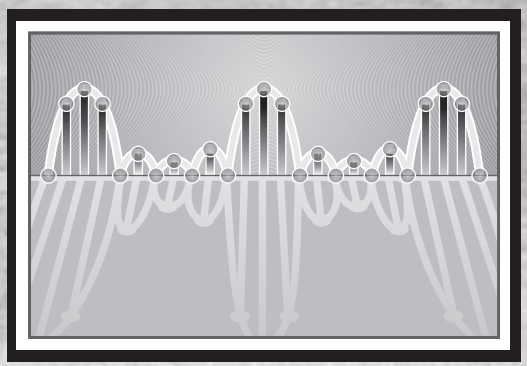
(e) Es también posible encontrar un sistema paso todo de primer orden $G(z^{-1})$ tal que el filtro paso bajo prototipo se transforme en un filtro paso alto en tiempo discreto con frecuencia de corte ω_p. Observe que esta transformación debe convertir $Z^{-1} = e^{j\theta_p} \rightarrow z^{-1} = e^{j\omega_p}$ y transformar también $Z^{-1} = 1 \rightarrow z^{-1} = -1$; es decir, transformar $\theta = 0$ en $\omega = \pi$. Obtenga $G(z^{-1})$ para esta transformación y obtenga también una expresión de α en función de θ_p y ω_p.

(f) Utilizando el mismo filtro prototipo y valores de α que en el apartado (d), dibuje las respuestas en frecuencia de los filtros paso alto resultantes de la transformación especificada en el apartado (e).

Se pueden usar transformaciones similares pero más complicadas para convertir el filtro paso bajo prototipo $H_{\text{lp}}(Z)$ en un filtro paso banda o banda eliminada. Constantinides (1970) describe estas transformaciones con más detalle.

8

La transformada discreta de Fourier



8.0. INTRODUCCIÓN

En los Capítulos 2 y 3 hemos presentado la representación de secuencias y de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante las transformadas de Fourier y Z, respectivamente. En el caso de secuencias de duración finita, es posible desarrollar una representación de Fourier alternativa denominada *transformada discreta de Fourier* (DFT, *discrete Fourier Transform*). La DFT es una secuencia, no una función de una variable continua, y corresponde a muestras equiespaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal. Además de su importancia teórica como representación de Fourier de secuencias, la DFT tiene un papel crucial en la realización de una gran variedad de algoritmos de tratamiento digital de señales. El motivo es que existen algoritmos eficientes para el cálculo de la DFT. Presentaremos en detalle estos algoritmos en el Capítulo 9. La aplicación de la DFT en análisis espectral se presentará en el Capítulo 10.

Aunque se pueden tomar diversos puntos de vista en la obtención e interpretación de la representación de una secuencia de duración finita mediante la DFT, hemos escogido basar nuestra presentación en la relación entre secuencias periódicas y secuencias de duración finita. Empezaremos por considerar el desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas. Aunque esta representación es importante por derecho propio, nosotros estaremos interesados en la aplicación de los resultados del desarrollo en serie de Fourier a la representación de secuencias de longitud finita. Para ello construiremos una secuencia periódica en la que cada periodo es idéntico a la secuencia de longitud finita. Como veremos, el desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica corresponde a la DFT de la secuencia de longitud finita. Por tanto, nuestra perspectiva será definir primero el desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas y estudiar sus propiedades. Luego repetiremos esencialmente los mismos razonamientos suponiendo que la secuencia que se desea representar es de longitud finita. Esta forma de presentar la DFT hace hincapié en la propiedad fundamental de la periodicidad inherente en la representación de la DFT y asegura que esta periodicidad no se pasa por alto cuando se aplica la DFT.

8.1. REPRESENTACIÓN DE SECUENCIA PERIÓDICAS: DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Considere una secuencia $\tilde{x}[n]$ que es periódica[1] de periodo N, de forma que $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+rN]$ para cualquier valor entero de n y r. Como en el caso de señales periódicas en tiempo continuo, esa secuencia se puede representar mediante un desarrollo en serie de Fourier en forma de una suma de secuencias exponenciales complejas armónicamente relacionadas. Es decir, exponenciales complejas con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $(2\pi/N)$ asociada a la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$. Estas exponenciales complejas periódicas son de la forma

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n+rN], \tag{8.1}$$

siendo k un entero, y el desarrollo en serie de Fourier tiene entonces la forma[2]

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{8.2}$$

La representación mediante el desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica en tiempo continuo requiere generalmente infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente, mientras que el desarrollo en serie de Fourier de cualquier señal en tiempo discreto de periodo N sólo requiere N exponenciales complejas relacionadas armónicamente. Para ver por qué, nótese que las exponenciales complejas relacionadas armónicamente $e_k[n]$ de la Ecuación (8.1) son idénticas para valores de k separados por N. Es decir, $e_0[n] = e_N[n], e_1[n] = e_{N+1}[n]$, y en general,

$$e_{k+\ell N}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+\ell N)n} = e^{j(2\pi/N)kn}e^{j2\pi\ell n} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n], \tag{8.3}$$

siendo ℓ un entero. Por tanto, el conjunto de N exponenciales complejas periódicas $e_0[n]$, $e_1[n]$, $\ldots$, $e_{N-1}[n]$ define todas las exponenciales complejas periódicas diferentes cuyas frecuencias son múltiplos enteros de $(2\pi/N)$. En consecuencia, la representación mediante el desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ sólo necesita utilizar N exponenciales complejas. Por conveniencia, elegimos k en el rango de 0 a $N-1$; por lo que la Ecuación (8.2) tiene la forma

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{8.4}$$

Sin embargo, tomar el valor de k variando sobre cualquier periodo completo de $\tilde{X}[k]$ sería igualmente válido.

Para obtener la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$ a partir de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$, utilizaremos la ortogonalidad del conjunto de las secuencias exponenciales complejas. Tras multiplicar ambos miembros de la Ecuación (8.4) por $e^{-j(2\pi/N)rn}$ y sumar desde $n=0$ hasta $n=N-1$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)(k-r)n}. \tag{8.5}$$

---

[1] De aquí en adelante utilizaremos la tilde (˜) para indicar secuencias periódicas siempre que sea importante distinguir claramente entre secuencias periódicas y no periódicas.

[2] La constante multiplicativa $1/N$ está incluida en la Ecuación (8.2) por conveniencia. Se podría absorber en la definición de $\tilde{X}[k]$.

Intercambiando el orden de la suma en el miembro derecho, la Ecuación (8.5) se transforma en

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \tag{8.6}$$

La siguiente igualdad expresa la ortogonalidad de las exponenciales complejas:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k-r = mN, \quad m \text{ un entero}, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases} \tag{8.7}$$

Esta identidad se puede demostrar fácilmente (véase el Problema 8.54) y cuando se aplica a la suma entre corchetes de la Ecuación (8.6) el resultado es

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r]. \tag{8.8}$$

Por tanto, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$ en la Ecuación (8.4) se obtienen a partir de $\tilde{x}[n]$ aplicando la relación

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \tag{8.9}$$

Nótese que la secuencia $\tilde{X}[k]$ es también periódica de periodo N si la Ecuación (8.9) se evalúa fuera del intervalo $0 \leq k \leq N-1$; es decir, $\tilde{X}[0] = \tilde{X}[N], \tilde{X}[1] = \tilde{X}[N+1]$ y, de forma más general,

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k], \end{aligned}$$

para cualquier entero k.

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se pueden interpretar como una secuencia de longitud finita dada por la Ecuación (8.9) para $k = 0, \ldots, (N-1)$, y que vale cero para otros valores de k. También se pueden interpretar como una secuencia periódica definida para todo k por la Ecuación (8.9). Claramente, ambas interpretaciones resultan aceptables ya que en la Ecuación (8.4) sólo utilizamos los valores de $\tilde{X}[k]$ en el intervalo $0 \leq k \leq (N-1)$. Una ventaja de interpretar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$ como una secuencia periódica es que entonces hay una dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia para la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier. Las Ecuaciones (8.9) y (8.4) forman una pareja de análisis-síntesis que denominaremos representación mediante el *desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto* (DFS, *Discrete Fourier Series*) de una secuencia periódica.

Por conveniencia de notación, esas ecuaciones se expresan muchas veces utilizando el valor complejo

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}. \tag{8.10}$$

Con esta notación, la pareja de análisis-síntesis se expresa como sigue:

$$\text{Ecuación de análisis:} \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}. \tag{8.11}$$

$$\text{Ecuación de síntesis:} \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \tag{8.12}$$

En ambas ecuaciones, $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{x}[n]$ son secuencias periódicas. Algunas veces será útil emplear la notación

$$\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] \tag{8.13}$$

para indicar las relaciones de las Ecuaciones (8.11) y (8.12). Los siguientes ejemplos ilustran el uso de estas ecuaciones.

Ejemplo 8.1 Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de un tren de impulsos periódico

Consideremos el tren de impulsos periódico

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \begin{cases} 1, & n = rN, \quad r \text{ cualquier entero,} \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.14}$$

Como $\tilde{x}[n] = \delta[n]$ para $0 \leq n \leq N-1$, aplicando la Ecuación (8.11) se obtienen los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1. \tag{8.15}$$

En este caso, $\tilde{X}[k] = 1$ para todo k. Por tanto, sustituyendo la Ecuación (8.15) en la Ecuación (8.12) llegamos a la representación

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{8.16}$$

El Ejemplo 8.1 ha presentado una representación útil de un tren de impulsos periódico en función de una suma de exponenciales complejas, donde todas las exponenciales complejas tienen el mismo módulo y fase. Esas exponenciales suman la unidad en múltiplos enteros de N y cero para otros valores enteros. Si observamos cuidadosamente las Ecuaciones (8.11) y (8.12), vemos que las dos ecuaciones son muy similares, ya que sólo difieren en la multiplicación por una constante y en el signo de los exponentes. Esta dualidad entre la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto $\tilde{X}[k]$ se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2 Dualidad en el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

En este ejemplo, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto son un tren de impulsos periódico

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N\delta[k - rN].$$

Sustituyendo $\tilde{Y}[k]$ en la Ecuación (8.12) se obtiene

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k]W_N^{-kn} = W_N^{-0} = 1.$$

En este caso, $\tilde{y}[n] = 1$ para todo n. Comparando este resultado con los resultados de $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{X}[k]$ del Ejemplo 8.1 vemos que $\tilde{Y}[k] = N\tilde{x}[k]$ e $\tilde{y}[n] = \tilde{X}[n]$. En la Sección 8.2.3 veremos que este ejemplo es un caso particular de una propiedad de dualidad más general.

Si la secuencia $\tilde{x}[n]$ es igual a la unidad sólo en una parte del periodo, se puede obtener también una expresión cerrada de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.3 Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de un tren de pulsos rectangulares periódico

En este ejemplo, $\tilde{x}[n]$ es la secuencia que se muestra en la Figura 8.1, cuyo periodo es $N = 10$. Utilizando la Ecuación (8.11),

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi/10)kn}. \tag{8.17}$$

Esta suma finita se puede expresar en forma cerrada

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^{k}} = e^{-j(4\pi k/10)}\frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)}{\operatorname{sen}(\pi k/10)}. \tag{8.18}$$

La Figura 8.2 muestra el módulo y la fase de la secuencia periódica $\tilde{X}[k]$.

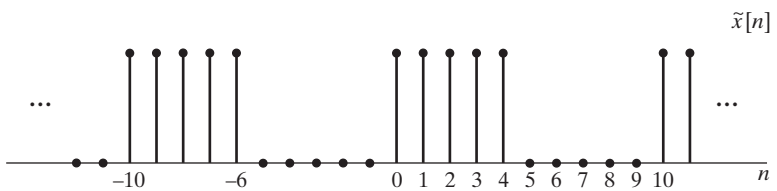


Figura 8.1 Secuencia periódica de periodo $N = 10$ de la que se calcula su desarrollo en serie de Fourier.

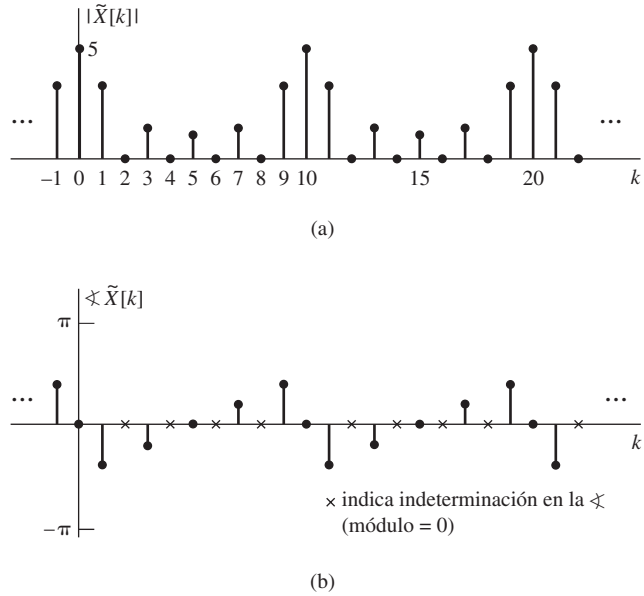


Figura 8.2 Módulo y fase de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia de la Figura 8.1.

Hemos demostrado que cualquier secuencia periódica se puede representar como una suma de secuencias exponenciales complejas. Las Ecuaciones (8.11) y (8.12) resumen los resultados clave. Como veremos posteriormente, estas relaciones son la base de la DFT, que trabaja sobre secuencias de longitud finita. Sin embargo, antes de presentar la DFT, consideraremos algunas de las propiedades básicas de la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier, y veremos posteriormente cómo se puede utilizar este desarrollo para calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de señales discretas periódicas.

8.2. PROPIEDADES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Como en el caso del desarrollo en serie de Fourier y las transformadas de Fourier y de Laplace de señales en tiempo continuo, y también para las transformadas Z de secuencias aperiódicas en tiempo discreto, ciertas propiedades del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto son de importancia fundamental para su utilización en problemas de tratamiento de señales. En esta sección resumiremos estas importantes propiedades. No es sorprendente que muchas de las propiedades básicas sean análogas a propiedades de la transformada Z y de la transformada de Fourier. Sin embargo, hay que ser cuidadosos en distinguir los casos en los que la periodicidad de $\tilde{x}[n]$ y de $\tilde{X}[k]$ pueda suponer diferencias importantes. Además, existe una dualidad exacta entre los dominios del tiempo y de la frecuencia en la representación basada en el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto que no existe en la representación de secuencias basada en la transformada de Fourier o en la transformada Z.

8.2.1. Linealidad

Consideremos dos secuencias periódicas $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$, ambas de periodo N, tales que

$$\tilde{x}_1[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k], \tag{8.19a}$$

y

$$\tilde{x}_2[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_2[k]. \tag{8.19b}$$

Entonces

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]. \tag{8.20}$$

La propiedad de linealidad se deduce inmediatamente de la forma de las Ecuaciones (8.11) y (8.12).

8.2.2. Desplazamiento de una secuencia

Si una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ tiene como coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, entonces $\tilde{x}[n-m]$ es una versión desplazada de $\tilde{x}[n]$ y

$$\tilde{x}[n-m] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} W_N^{km}\tilde{X}[k]. \tag{8.21}$$

La demostración de esta propiedad se considera en el Problema 8.55. Cualquier desplazamiento que sea mayor o igual que el periodo (es decir, $m \geq N$) no se puede distinguir en el dominio del tiempo de un desplazamiento más corto m_1 si $m = m_1 + m_2N$, siendo m_1 y m_2 enteros y $0 \leq m_1 \leq N-1$, (otra forma de decir esto es que $m_1 = m$ módulo N o que m_1 es el resto de dividir m entre N). Se puede demostrar fácilmente que con esta representación de m, $W_N^{km} = W_N^{km_1}$; es decir, como debe ser, la ambigüedad del desplazamiento en el dominio del tiempo se manifiesta también en la representación en el dominio de la frecuencia.

Como la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica es a su vez una secuencia periódica, se obtiene un resultado similar para un desplazamiento de los coeficientes de Fourier de un entero ℓ. Concretamente,

$$W_N^{-n\ell}\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k-\ell]. \tag{8.22}$$

Nótese la diferencia del signo de los exponentes en las Ecuaciones (8.21) y (8.22).

8.2.3. Dualidad

Debido a la fuerte similitud entre las ecuaciones de análisis y de síntesis de Fourier en tiempo continuo, se produce una dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. Sin embargo, para el caso de la transformada de Fourier en tiempo discreto de señales no periódicas no existe una dualidad similar, ya que las señales no periódicas en tiempo discreto y sus transformadas de Fourier son dos clases de funciones muy diferentes. La transformada de Fourier de una secuencia no periódica es siempre una función periódica de la variable de frecuencia continua.

Observando las Ecuaciones (8.11) y (8.12), vemos que las ecuaciones de análisis y síntesis del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto sólo difieren en un factor de $1/N$ y en el signo del exponente de W_N. Además, la secuencia periódica y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto son el mismo tipo de función: ambas son secuencias periódicas. Teniendo en cuenta el factor de $1/N$ y el cambio de signo en los exponentes de las Ecuaciones (8.11) y (8.12), la Ecuación (8.12) permite deducir que

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]W_N^{kn} \tag{8.23}$$

o, intercambiando los papeles de n y k en la Ecuación (8.23),

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk}. \tag{8.24}$$

Vemos que la Ecuación (8.24) es similar a la Ecuación (8.11). En otras palabras, la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia periódica $\tilde{X}[n]$ es $N\tilde{x}[-k]$, es decir, la secuencia periódica original en orden inverso y multiplicada por N. La propiedad de dualidad se puede resumir como sigue: si

$$\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k], \tag{8.25a}$$

entonces

$$\tilde{X}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k]. \tag{8.25b}$$

8.2.4. Propiedades de simetría

Como comentamos en la Sección 2.8, la transformada de Fourier de una secuencia no periódica tiene varias propiedades útiles de simetría. Las mismas propiedades de simetría aparecen en la representación de una secuencia periódica mediante su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto. La obtención de estas propiedades, que se puede hacer de forma similar a la del Capítulo 2, se deja como ejercicio (véase el Problema 8.56) Las propiedades resultantes se resumen a título de referencia, como las propiedades 9-17 de la Tabla 8.1 en la Sección 8.2.6.

8.2.5. Convolución periódica

Sean $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ dos secuencias periódicas, ambas de periodo N y cuyos coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto son, respectivamente, $\tilde{X}_1[k]$ y $\tilde{X}_2[k]$. Si formamos el producto

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k], \tag{8.26}$$

entonces, la secuencia periódica $\tilde{x}_3[n]$ que tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}_3[k]$ es

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]. \tag{8.27}$$

Este resultado no es sorprendente, ya que nuestra experiencia previa con transformadas nos sugiere que la multiplicación de funciones en el dominio de la frecuencia se corresponde con la convolución de funciones en el dominio del tiempo y la Ecuación (8.27) se parece mucho a una suma de convolución. La Ecuación (8.27) representa la suma de valores del producto de $\tilde{x}_1[m]$ por $\tilde{x}_2[n-m]$, que es una versión invertida y desplazada en el tiempo de $\tilde{x}_2[m]$, como en el caso de la convolución discreta no periódica. Sin embargo, las secuencias de la Ecuación (8.27) son periódicas de periodo N y la suma se realiza sólo en un periodo. Una convolución con la forma de la Ecuación (8.27) se denomina *convolución periódica*. Como en el caso de la convolución no periódica, la convolución periódica es conmutativa, es decir,

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m]\tilde{x}_1[n-m]. \tag{8.28}$$

Para demostrar que $\tilde{X}_3[k]$, dada por la Ecuación (8.26), es la secuencia de coeficientes de Fourier correspondiente a la señal $\tilde{x}_3[n]$ dada en la Ecuación (8.27), apliquemos primero la ecuación de análisis del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, representada en la Ecuación (8.11), a la Ecuación (8.27), con lo que se obtiene

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \right) W_N^{kn}, \tag{8.29}$$

que, tras intercambiar el orden de suma, se convierte en

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} \right). \tag{8.30}$$

La suma interna de índice n es el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia desplazada $\tilde{x}_2[n-m]$. Aplicando la propiedad de desplazamiento de la Sección 8.2.2 obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} = W_N^{km} \tilde{X}_2[k],$$

que se puede sustituir en la Ecuación (8.30), resultando

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \tilde{X}_2[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \right) \tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]. \tag{8.31}$$

En resumen,

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]. \tag{8.32}$$

Por tanto, la convolución periódica de secuencias periódicas corresponde a la multiplicación de las correspondientes secuencias periódicas de los coeficientes de sus desarrollos en serie de Fourier.

Como las convoluciones periódicas son algo diferentes de las aperiódicas, merece la pena considerar la mecánica de evaluación de la Ecuación (8.27). En primer lugar, hay que tener en cuenta que la Ecuación (8.27) expresa el producto de las secuencias $\tilde{x}_1[m]$ y $\tilde{x}_2[n-m] = \tilde{x}_2[-(m-n)]$ vistas como función de m con n fijo. Esto es lo mismo que en el caso de la convolución no periódica, pero con dos importantes diferencias:

1. La suma se realiza en el intervalo finito $0 \leq m \leq N-1$.
2. Los valores de $\tilde{x}_2[n-m]$ en el intervalo $0 \leq m \leq N-1$ se repiten periódicamente para valores de m fuera del intervalo.

El siguiente ejemplo ilustra estos detalles.

Ejemplo 8.4 Convolución periódica

En la Figura 8.3 se puede ver un ejemplo del procedimiento de la Ecuación (8.27) para formar la convolución periódica de dos secuencias periódicas. En la figura hemos presentado las secuencias $\tilde{x}_2[m]$,

$\tilde{x}_1[m]$, $\tilde{x}_2[-m]$, $\tilde{x}_2[1-m] = \tilde{x}_2[-(m-1)]$ y $\tilde{x}_2[2-m] = \tilde{x}_2[-(m-2)]$. Por ejemplo, para evaluar $\tilde{x}_3[n]$ según la Ecuación (8.27) en $n = 2$, se multiplica $\tilde{x}_1[m]$ por $\tilde{x}_2[2-m]$ y se suman los términos del producto $\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[2-m]$ en el intervalo $0 \le m \le N-1$, resultando $\tilde{x}_3[2]$. Cuando n cambia, la secuencia $\tilde{x}_2[n-m]$ se desplaza apropiadamente y la Ecuación (8.27) se evalúa para cada valor en el intervalo $0 \le n \le N-1$. Nótese que a medida que la secuencia $\tilde{x}_2[n-m]$ se desplaza a la derecha o a la izquierda, los valores que abandonan por uno de sus extremos el intervalo encerrado por las líneas de puntos reaparecen por el otro extremo debido a la periodicidad. Debido a la periodicidad de $\tilde{x}_3[n]$, no hay necesidad de continuar la evaluación de la Ecuación (8.27) fuera del intervalo $0 \le n \le N-1$.

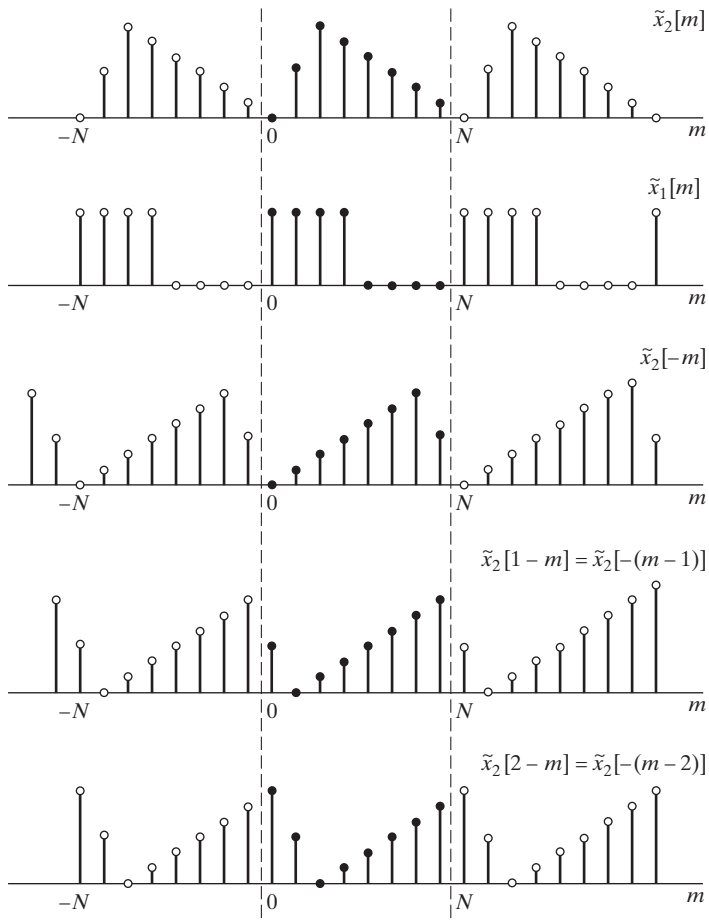


Figura 8.3 Procedimiento para formar la convolución periódica de dos secuencias periódicas.

El teorema de dualidad (Sección 8.2.3) sugiere que si los papeles del tiempo y la frecuencia se intercambian, se obtiene un resultado casi idéntico al resultado anterior. Es decir, la secuencia periódica

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n], \tag{8.33}$$

siendo $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ secuencias periódicas, ambas de periodo N, tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell], \tag{8.34}$$

que corresponden a $1/N$ veces la convolución periódica de $\tilde{X}_1[k]$ y $\tilde{X}_2[k]$. Este resultado se puede verificar también sustituyendo $\tilde{X}_3[k]$, dado por la Ecuación (8.34) en la relación del desarrollo en serie de Fourier de la Ecuación (8.12) para obtener $\tilde{x}_3[n]$.

8.2.6. Resumen de las propiedades de la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

La Tabla 8.1 resume las propiedades del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto que se han presentado en esta sección.

TABLA 8.1 RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Secuencia periódica (Periodo N)	Coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto (Periodo N)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$ periódica de periodo N
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$ periódicas de periodo N
3. $a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n-m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-\ell n}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k-\ell]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$ (convolución periódica)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell]$ (convolución periódica)
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $Re\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $jIm\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$Re\{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$jIm\{\tilde{X}[k]\}$
Las propiedades 15–17 sólo se aplican si $x[n]$ es real.	
15. Propiedades de simetría para $\tilde{x}[n]$ real.	$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ Re\{\tilde{X}[k]\} = Re\{\tilde{X}[-k]\} \\ Im\{\tilde{X}[k]\} = -Im\{\tilde{X}[-k]\} \\ \lvert\tilde{X}[k]\rvert = \lvert\tilde{X}[-k]\rvert \\ \angle\tilde{X}[k] = -\angle\tilde{X}[-k] \end{cases}$
16. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$Re\{\tilde{X}[k]\}$
17. $\tilde{x}_0[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$jIm\{\tilde{X}[k]\}$

8.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

Como se comentó en la Sección 2.7, la convergencia uniforme de la transformada de Fourier de una secuencia requiere que ésta sea absolutamente sumable, y la convergencia en sentido cuadrático medio requiere que sea de cuadrado sumable. Las secuencias periódicas no cumplen ninguna de las condiciones anteriores. Sin embargo, como comentamos brevemente en la Sección 2.7, se puede considerar que las secuencias que se pueden expresar como suma de exponenciales complejas admiten una representación mediante la transformada de Fourier de la forma de la Ecuación (2.147), es decir, como trenes de impulsos. De forma similar, a menudo es útil incorporar la representación de señales periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto en el contexto de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Esto se puede hacer interpretando la transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal periódica como un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia con valores proporcionales a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia. Concretamente, si $\tilde{x}[n]$ es una secuencia periódica de periodo N y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto son $\tilde{X}[k]$, la transformada de Fourier de $\tilde{x}[n]$ se define como el tren de impulsos

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \tag{8.35}$$

Observe que $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tiene la necesaria periodicidad de periodo 2π, ya que $\tilde{X}[k]$ ya que es periódica de periodo N y los impulsos se sitúan en múltiplos enteros de $2\pi/N$, siendo N entero. Para demostrar que $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tal como se define en la Ecuación (8.35), es la transformada de Fourier de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$, podemos sustituir la Ecuación (8.35) en la ecuación de la transformada inversa de Fourier, Ecuación (2.130), es decir,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}d\omega, \tag{8.36}$$

donde ε satisface la desigualdad $0 < \varepsilon < (2\pi/N)$. No debe olvidarse que al evaluar la transformada inversa de Fourier se puede integrar sobre cualquier intervalo de amplitud 2π, ya que el integrando $\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ es periódico de periodo 2π. En la Ecuación (8.36) los límites de integración son $0-\varepsilon$ y $2\pi-\varepsilon$, lo que significa que la integración se realiza desde inmediatamente antes de $\omega = 0$ hasta inmediatamente antes de $\omega = 2\pi$. Estos límites resultan apropiados porque incluyen al impulso en $\omega = 0$ y excluyen al impulso en $\omega = 2\pi$.[3] Intercambiando el orden de la integración y la suma resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega &= \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k]\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}.\end{aligned} \tag{8.37}$$

La forma final de la Ecuación (8.37) se obtiene porque sólo los impulsos correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, (N-1)$ se incluyen en el intervalo entre $\omega = 0-\varepsilon$ y $\omega = 2\pi-\varepsilon$.

Comparando las Ecuaciones (8.37) y (8.12), podemos ver que el miembro derecho final de la Ecuación (8.37) es exactamente igual que el desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$, especificado en la Ecuación

[3] Al usar límites 0 a 2π se presentaría un problema, ya que los impulsos en 0 y en 2π requieren un tratamiento especial.

(8.12). Por tanto, la transformada inversa de Fourier del tren de impulsos de la Ecuación (8.35) es la señal periódica $\tilde{x}[n]$, como se quería demostrar.

Aunque la transformada de Fourier de una secuencia periódica no converge en sentido normal, la introducción de los impulsos permite incluir formalmente las secuencias periódicas dentro del contexto del análisis basado en transformadas de Fourier. Esto se hizo también en el Capítulo 2 al obtener la transformada de Fourier de otras secuencias no sumables, como la secuencia constante bilateral (Ejemplo 2.19) o la secuencia exponencial compleja (Ejemplo 2.20). Aunque el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto es adecuado para la mayoría de los propósitos, la transformada de Fourier de la Ecuación (8.35) conduce a veces a expresiones más simples o más compactas, lo que simplifica el proceso de análisis.

Ejemplo 8.5 Transformada de Fourier de un tren de impulsos periódico en tiempo discreto

Consideremos el tren de impulsos periódico

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN], \tag{8.38}$$

que es la misma secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ considerada en el Ejemplo 8.1. De los resultados de ese ejemplo, se deduce que

$$\tilde{P}[k] = 1, \qquad \text{para todo } k. \tag{8.39}$$

Por tanto, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{p}[n]$ es

$$\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \tag{8.40}$$

El resultado del Ejemplo 8.5 es la base de una útil interpretación de la relación entre una señal periódica y una señal de longitud finita. Consideremos una señal de longitud finita $x[n]$ tal que $x[n] = 0$ excepto en el intervalo $0 \le n \le N-1$, y consideremos la convolución de $x[n]$ con el tren periódico de impulsos $\tilde{p}[n]$ del Ejemplo 8.5:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]. \tag{8.41}$$

La Ecuación (8.41) indica que $\tilde{x}[n]$ consiste en una serie de copias repetidas periódicamente de la secuencia de longitud finita $x[n]$. La Figura 8.4 ilustra cómo se puede formar una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ a partir de la secuencia de longitud finita $x[n]$ mediante la Ecuación (8.41). La transformada de Fourier de $x[n]$ es $X(e^{j\omega})$, y la de $\tilde{x}[n]$ es

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})\tilde{P}(e^{j\omega}) \\
&= X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right).
\end{aligned} \tag{8.42}$$

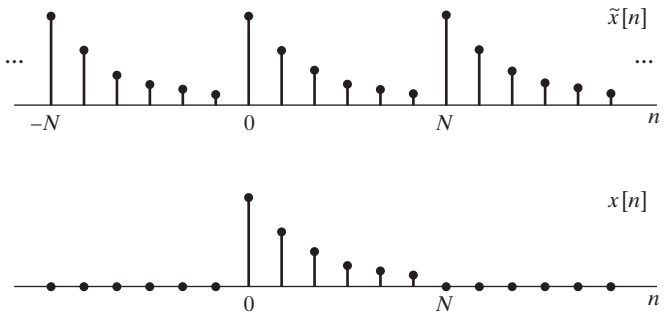


Figura 8.4 Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ formada repitiendo periódicamente una secuencia de longitud finita, $x[n]$. $x[n] = \tilde{x}[n]$ en un periodo y cero en el resto.

Comparando la Ecuación (8.42) con la Ecuación (8.35) se concluye que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=(2\pi/N)k}. \tag{8.43}$$

En otras palabras, la secuencia periódica $\tilde{X}[k]$ de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la Ecuación (8.11) se puede interpretar como muestras equiespaciadas de la transformada de Fourier de la secuencia de longitud finita que se obtiene extrayendo un periodo de $\tilde{x}[n]$; es decir,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.44}$$

Esto es también consistente con la Figura 8.4, donde se puede ver claramente que $x[n]$ se puede obtener a partir de $\tilde{x}[n]$ utilizando la Ecuación (8.44). Podemos verificar la Ecuación (8.43) todavía de otra forma. Como $x[n] = \tilde{x}[n]$ para $0 \le n \le N-1$ y $x[n] = 0$ en el resto,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n}. \tag{8.45}$$

Comparando la Ecuación (8.45) con la Ecuación (8.11) vemos de nuevo que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}. \tag{8.46}$$

Esto corresponde a muestrear la transformada de Fourier en N frecuencias equiespaciadas entre $\omega = 0$ y $\omega = 2\pi$ con un espaciado en frecuencia de $2\pi/N$.

Ejemplo 8.6 Relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier y la transformada de Fourier de un periodo

Consideremos de nuevo la secuencia $\tilde{x}[n]$ del Ejemplo 8.3, que se muestra en la Figura 8.1. Un periodo de dicha secuencia es

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.47}$$

La transformada de Fourier de un periodo de $\tilde{x}[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\omega n} = e^{-j2\omega} \frac{\text{sen}(5\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}. \tag{8.48}$$

Se puede demostrar que la Ecuación (8.46) se cumple en este ejemplo sustituyendo $\omega = 2\pi k/10$ en la Ecuación (8.48), con lo que resulta

$$\tilde{X}[k] = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)},$$

que es idéntica al resultado de la Ecuación (8.18). La Figura 8.5 muestra el módulo y la fase de $X(e^{j\omega})$. Nótese que la fase es discontinua en las frecuencias donde $X(e^{j\omega}) = 0$. La Figura 8.6 demuestra, superponiendo las Figuras 8.2 y 8.5, que las secuencias de las Figuras 8.2(a) y (b) son muestras de las Figuras 8.5(a) y (b), respectivamente.

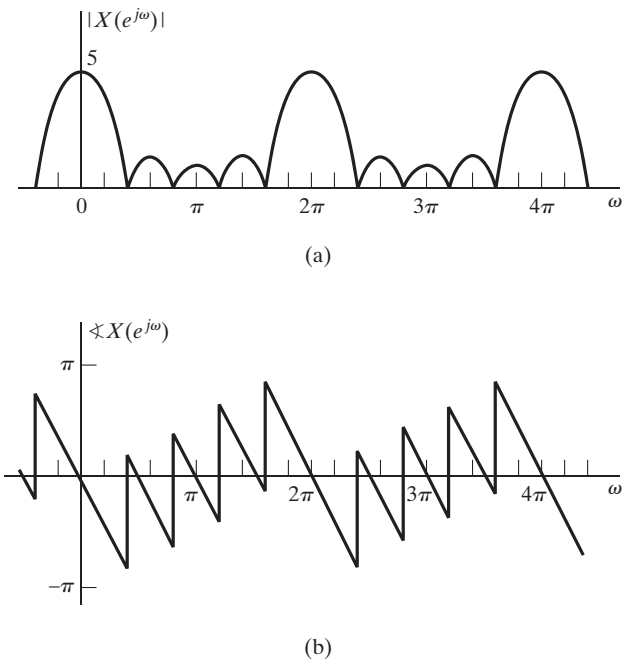


Figura 8.5 Módulo y fase de la transformada de Fourier de un periodo de la secuencia de la Figura 8.1.

8.4. MUESTREO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En esta sección presentaremos de forma más general la relación entre una secuencia no periódica con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ y la secuencia periódica con coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto que corresponden a muestras de $X(e^{j\omega})$ equiespaciadas en frecuencia. Encontraremos que estas relaciones son particularmente importantes al presentar la transformada discreta de Fourier y sus propiedades más adelante en este mismo capítulo.

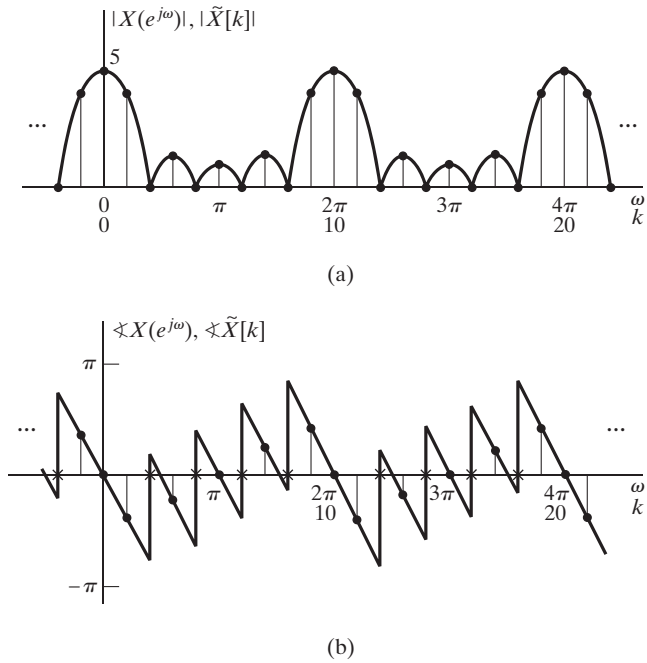


Figura 8.6 Superposición de las Figuras 8.2 y 8.5, para ilustrar que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica son muestras de la transformada de Fourier de un periodo.

Consideremos una secuencia no periódica $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, y supongamos que se obtiene una secuencia $\tilde{X}[k]$ muestreando la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$; es decir,

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \tag{8.49}$$

Como la transformada de Fourier es periódica en ω con periodo 2π, la secuencia resultante es periódica en k con periodo N. Además, como la transformada de Fourier es igual a la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad, se deduce que $\tilde{X}[k]$ se puede obtener muestreando $X(z)$ en N puntos equiespaciados de la circunferencia unidad. Es decir,

$$\tilde{X}[k] = X(z)|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \tag{8.50}$$

La Figura 8.7 muestra estos puntos de muestreo para $N = 8$. Dicha figura hace ver claramente que la secuencia de muestras es periódica, ya que los N puntos están equiespaciados comenzando en el ángulo cero. Por tanto, cuando k toma valores fuera del intervalo $0 \leq k \leq N-1$ la secuencia se repite periódicamente, ya que simplemente volvemos a recorrer la circunferencia unidad visitando el mismo conjunto de N puntos.

Nótese que la secuencia de muestras $\tilde{X}[k]$, periódica de periodo N, podría ser la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia $\tilde{x}[n]$. Para obtener esa secuencia, podemos sustituir simplemente los valores de $\tilde{X}[k]$ obtenidos por muestreo en la Ecuación (8.12):

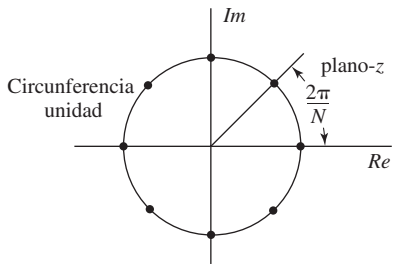


Figura 8.7 Puntos de la circunferencia unidad donde se muestrea $X(z)$ para obtener la secuencia periódica $\tilde{X}[k]$ $(N = 8)$.

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \tag{8.51}$$

Como no hemos hecho suposiciones sobre $x[n]$ excepto que su transformada de Fourier existe, podemos utilizar límites infinitos para indicar que la suma es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \tag{8.52}$$

realizada sobre todos los valores de $x[m]$ distintos de cero.

Sustituyendo la Ecuación (8.52) en la Ecuación (8.49) y sustituyendo posteriormente la expresión resultante de $\tilde{X}[k]$ en la Ecuación (8.51) se obtiene

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn}, \tag{8.53}$$

que, tras intercambiar el orden de suma, se convierte en

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m]. \tag{8.54}$$

Utilizando la Ecuación (8.7) o la (8.16) se puede ver que el término entre corchetes de la Ecuación (8.54) es el desarrollo en serie de Fourier del tren de impulsos periódico de los Ejemplos 8.1 y 8.2. Concretamente,

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN] \tag{8.55}$$

y, por tanto,

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN], \tag{8.56}$$

donde $*$ indica convolución aperiódica. Es decir, $\tilde{x}[n]$ es la secuencia periódica resultante de la convolución de $x[n]$ con un tren de impulsos periódico. Por tanto, la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$, correspondiente a los coeficientes $\tilde{X}[k]$ obtenidos muestreando $X(e^{j\omega})$, se forma a partir de $x[n]$ añadiendo infinitas réplicas de sí misma. Los desplazamientos son todos los múltiplos positivos y negativos de N, el periodo de la secuencia $\tilde{X}[k]$. Esto se ilustra en la Figura 8.8, donde la secuencia $x[n]$ es de longitud 9 y el valor de

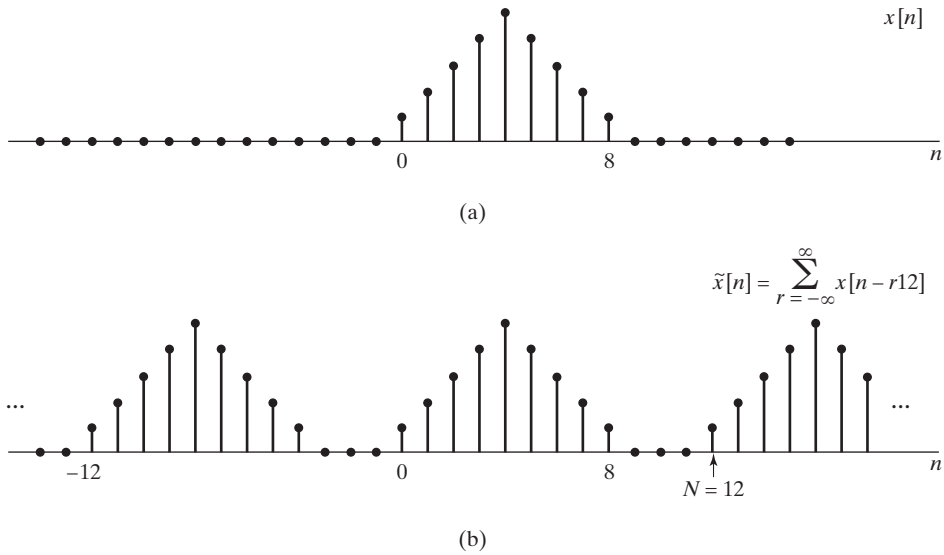


Figura 8.8 (a) Secuencia de longitud finita $x[n]$. (b) Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ correspondiente a muestrear la transformada de Fourier de $x[n]$ con $N = 12$.

N en la Ecuación (8.56) es $N = 12$. Por consiguiente, las réplicas desplazadas de $x[n]$ no se solapan, y en cada periodo de la secuencia $\tilde{x}[n]$ se puede reconocer a $x[n]$. Esto es consistente con la presentación de la Sección 8.3 y con el Ejemplo 8.6, donde demostramos que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica son muestras de la transformada de Fourier de un periodo. En la Figura 8.9 se utiliza la misma secuencia $x[n]$ pero el valor de N es ahora $N = 7$. En este caso, las réplicas de $x[n]$ se solapan y cada periodo de $\tilde{x}[n]$ no es ahora idéntico a $x[n]$. Sin embargo, en ambos casos sigue siendo válida la Ecuación (8.49), es decir, en ambos casos los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ son muestras de la transformada de Fourier de $x[n]$ separadas en frecuencia por múltiplos enteros de $2\pi/N$. Esto debería recordarnos nuestra presentación del muestreo en el Capítulo 4. La diferencia es que aquí estamos muestreando en el dominio de la frecuencia en vez de en el dominio del tiempo. Sin embargo, los aspectos generales de las representaciones matemáticas son muy similares.

En el ejemplo de la Figura 8.8, la secuencia original $x[n]$ se puede recuperar a partir de $\tilde{x}[n]$ extrayendo un periodo. Equivalentemente, la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ se puede recuperar a partir de las muestras espaciadas en frecuencia $2\pi/12$. Por el contrario, en la Figura 8.9, $x[n]$ no se puede recuperar extrayendo un periodo de $\tilde{x}[n]$, y equivalentemente, $X(e^{j\omega})$ no se puede recuperar a partir de sus muestras, ya que la separación entre las mismas es de sólo $2\pi/7$. En efecto, para el caso que se muestra en la Figura 8.8, la transformada de Fourier de $x[n]$ se ha muestreado con una separación suficientemente pequeña (en frecuencia) para que se pueda recuperar a partir de esas muestras. La Figura 8.9 muestra el caso en el que la transformada de Fourier se ha submuestreado. La relación entre $x[n]$ y un periodo de $\tilde{x}[n]$ en el caso submuestreado puede verse como una forma de solapamiento en el dominio del tiempo, esencialmente idéntico al solapamiento en el dominio de la frecuencia (presentado en el Capítulo 4) que se produce al submuestrear en el dominio del tiempo. Obviamente, el solapamiento en el dominio del tiempo sólo se puede evitar si $x[n]$ tiene longitud finita, lo mismo que el solapamiento en el dominio de la frecuencia sólo se podía evitar si las señales tenían transformadas de Fourier de banda limitada.

Esta exposición resalta varios conceptos importantes que desempeñan un papel central en el resto del capítulo. Hemos visto que las muestras de la transformada de Fourier de una secuencia no periódica $x[n]$ se pueden ver como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la

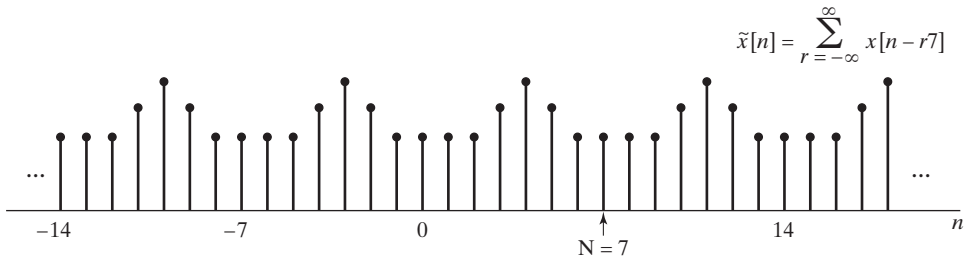


Figura 8.9 Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ correspondiente a muestrear la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ de la Figura 8.8(a) con $N = 7$.

secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ que se obtiene sumando réplicas periódicas de $x[n]$. Si $x[n]$ tiene longitud finita y tomamos un número suficiente de muestras equiespaciadas de su transformada de Fourier (específicamente, un número mayor o igual que la longitud de $x[n]$), entonces la transformada de Fourier se puede recuperar a partir de esas muestras, y por tanto, $x[n]$ se puede recuperar a partir de la correspondiente secuencia periódica $\tilde{x}[n]$. Concretamente, si $x[n] = 0$ fuera del intervalo $n = 0$, $n = N - 1$, entonces

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.57}$$

Si el intervalo de soporte de $x[n]$ es diferente del intervalo $0 \leq n \leq N - 1$ entonces debe modificarse apropiadamente la Ecuación (8.57).

Se puede obtener una relación directa entre $X(e^{j\omega})$ y sus muestras $\tilde{X}[k]$, es decir, una fórmula de interpolación de $X(e^{j\omega})$, (véase el Problema 8.57). Sin embargo, la esencia de nuestra discusión anterior es que para representar o recuperar $x[n]$ no es necesario conocer $X(e^{j\omega})$ en todas las frecuencias si $x[n]$ es finita. Dada una secuencia $x[n]$, de longitud finita, se puede formar una secuencia periódica utilizando la Ecuación (8.56), que a su vez se puede representar mediante un desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto. Alternativamente, dada la secuencia $\tilde{X}[k]$, de coeficientes de Fourier, se puede obtener $\tilde{x}[n]$ y utilizar entonces la Ecuación (8.57) para obtener $x[n]$. Cuando se utiliza de esta forma el desarrollo en serie de Fourier para representar secuencias de longitud finita, se denomina transformada discreta de Fourier (DFT). Al desarrollar, comentar y aplicar la DFT, siempre es importante recordar que la representación de la transformada de Fourier mediante sus muestras es realmente una representación de la secuencia de duración finita mediante una secuencia periódica, de forma que un periodo de esta última coincide con la secuencia de duración finita que se desea representar.

8.5. REPRESENTACIÓN DE FOURIER DE SECUENCIAS DE DURACIÓN FINITA: LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección formalizaremos el punto de vista sugerido al final de la sección anterior. Comenzaremos considerando una secuencia $x[n]$ con longitud finita de N muestras, de forma que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N - 1$. En muchos casos, será conveniente suponer que la longitud de la secuencia es N incluso aunque su longitud real sea $M \leq N$. En esos casos, simplemente las últimas $(N - M)$ muestras valdrán cero. Siempre podemos asociar a cada secuencia finita de longitud N una secuencia periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]. \tag{8.58a}$$

La secuencia de longitud finita $x[n]$ se puede recuperar a partir de $\tilde{x}[n]$ mediante la Ecuación (8.57), es decir,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.58b}$$

No debe olvidarse que, según vimos en la Sección 8.4, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ son muestras (separadas en frecuencia $2\pi/N$) de la transformada de Fourier de $x[n]$. Como se supone que $x[n]$ tiene longitud finita N, no hay solapamiento entre los términos $x[n-rN]$ para los diferentes valores de r. La Ecuación (8.58a) se puede escribir de otra forma:

$$\tilde{x}[n] = x[(n \text{ módulo } N)]. \tag{8.59}$$

Por conveniencia, utilizaremos la notación $((n))_N$ para indicar (n módulo N). Con esta notación, la Ecuación (8.59) se convierte en

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \tag{8.60}$$

Nótese que la Ecuación (8.60) es equivalente a la Ecuación (8.58a) sólo cuando la longitud de $x[n]$ es menor o igual que N. La secuencia de duración finita $x[n]$ se obtiene extrayendo un periodo de $\tilde{x}[n]$ como indica la Ecuación (8.58b).

Una manera informal pero útil de visualizar la Ecuación (8.59) es imaginarse que un dibujo de la secuencia $x[n]$ se enrolla alrededor de un cilindro con una circunferencia igual a la longitud de la secuencia. A medida que recorremos repetidamente la circunferencia del cilindro, vemos que la secuencia de longitud finita se repite periódicamente. Con esta interpretación, la representación de la secuencia de longitud finita mediante una secuencia periódica corresponde a enrollar la secuencia formando el cilindro. La recuperación de la secuencia de longitud finita a partir de la secuencia periódica utilizando la Ecuación (8.58b) se puede visualizar como desenrollar el cilindro y dejarlo plano, de modo que la secuencia se muestra en un eje de tiempos lineal en lugar de en un eje de tiempos circular (módulo N).

Como se definió en la Sección 8.1, la secuencia de coeficientes $\tilde{X}[k]$ del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ es también una secuencia periódica de periodo N. Para mantener una dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia, escogeremos los coeficientes de Fourier, que asociaremos a la secuencia de duración finita, también como una secuencia de duración finita correspondiente a un periodo de $\tilde{X}[k]$. Esta secuencia de duración finita, $X[k]$, se denomina transformada discreta de Fourier (DFT). Por tanto, la DFT, $X[k]$, se relaciona con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, $\tilde{X}[k]$, de la siguiente forma

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{8.61}$$

y

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ modulo } N)] = X[((k))_N]. \tag{8.62}$$

Recordamos de la Sección 8.1 que $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{x}[n]$ están relacionados por

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \tag{8.63}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \tag{8.64}$$

siendo $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$.

Como las sumas de las Ecuaciones (8.63) y (8.64) sólo involucran el intervalo entre cero y $(N-1)$, utilizando las Ecuaciones (8.58b)-(8.64) se deduce que

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{8.65}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.66}$$

Generalmente, las ecuaciones de análisis y síntesis de la DFT se expresan como sigue:

$$\text{Ecuación de análisis:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{8.67}$$

$$\text{Ecuación de síntesis:} \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{8.68}$$

Es decir, el hecho de que $X[k] = 0$ fuera del intervalo $0 \le k \le N-1$ y de que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \le n \le N-1$ están indicados implícitamente, pero no siempre se indican explícitamente. La relación entre $x[n]$ y $X[k]$ expresada en las Ecuaciones (8.67) y (8.68) se indica algunas veces como

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k]. \tag{8.69}$$

Al expresar las Ecuaciones (8.11) y (8.12) en la forma que indican las Ecuaciones (8.67) y (8.68) para secuencias de longitud finita, no hemos eliminado la periodicidad inherente. Como en el caso del desarrollo en serie de Fourier, la DFT $X[k]$ corresponde a muestras de la transformada de Fourier periódica $X(e^{j\omega})$, y si la Ecuación (8.68) se evalúa para valores de n fuera del intervalo $0 \le n \le N-1$, el resultado no será cero, sino una extensión periódica de $x[n]$. La periodicidad implícita está siempre presente. Algunas veces nos causará dificultades y algunas veces podremos explotarla, pero ignorarla completamente es fuente de problemas. Al definir la DFT, simplemente estamos reconociendo que estamos interesados sólo en los valores de $x[n]$ en el intervalo $0 \le n \le N-1$, ya que $x[n]$ es realmente cero fuera de ese intervalo, y que sólo estamos interesados en los valores de $X[k]$ en el intervalo $0 \le k \le N-1$ ya que son los únicos valores necesarios en la Ecuación (8.68) para reconstruir $X[n]$.

Ejemplo 8.7 DFT de un pulso rectangular

Para ilustrar la DFT de una secuencia de duración finita, consideremos la señal $x[n]$ que se muestra en la Figura 8.10(a). Para determinar la DFT podemos considerar que $x[n]$ es una secuencia de duración finita con cualquier longitud mayor o igual que $N = 5$. Considerada como una secuencia de longitud $N = 5$, la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$, cuyo desarrollo en serie de Fourier corresponde a la DFT de $x[n]$, se ilustra

en la Figura 8.10(b). Como la secuencia de la Figura 8.10(b) es constante en el intervalo $0 \leq n \leq 4$, se deduce que

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi k/5)n} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j(2\pi k/5)}} \\ &= \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto;} \end{cases}\end{aligned} \tag{8.70}$$

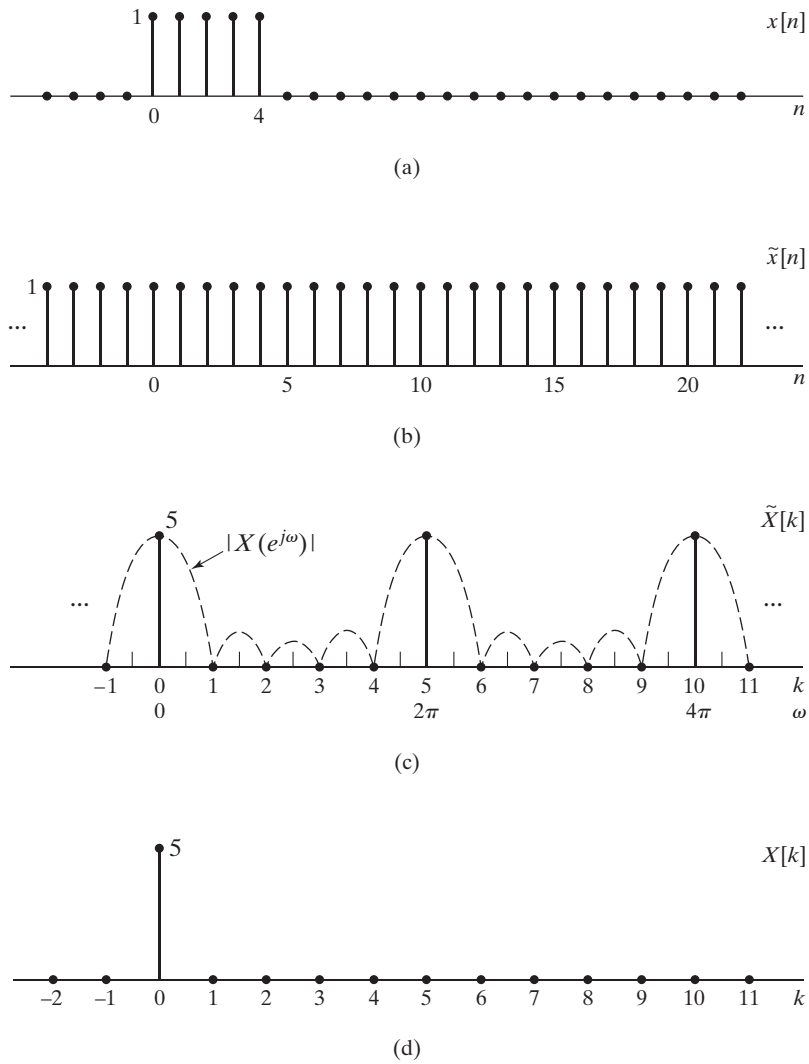


Figura 8.10 Ilustración de la DFT. (a) Secuencia de longitud finita $x[n]$. (b) Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ formada a partir de $x[n]$ con periodo $N = 5$. (c) Coeficientes $\tilde{X}[k]$ del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$. Para hacer hincapié en que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son muestras de la transformada de Fourier se muestra también $|X(e^{j\omega})|$. (d) DFT de $x[n]$.

Es decir, los únicos coeficientes $\tilde{X}[k]$ del desarrollo en serie que son distintos de cero están en $k = 0$ y en múltiplos enteros de $k = 5$ (todos los cuales representan a una exponencial compleja de la misma frecuencia). Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se muestran en la Figura 8.10(c). Se muestra también el módulo de la transformada de Fourier, $|X(e^{j\omega})|$. Puede verse claramente que, $\tilde{X}[k]$ es una secuencia de muestras de $X(e^{j\omega})$ a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/5$. De acuerdo con la Ecuación (8.61), la DFT de cinco puntos de $x[n]$ corresponde a la secuencia de longitud finita que se obtiene extrayendo un periodo de $\tilde{X}[k]$. La Figura 8.10(d) muestra la DFT de cinco puntos de $x[n]$.

Si en vez del caso anterior, consideramos ahora que $x[n]$ es de longitud $N = 10$, la Figura 8.11(b) muestra la secuencia periódica resultante, que es la misma que consideramos en el Ejemplo 8.3. Por tanto, $\tilde{X}[k]$ es como se muestra en las Figuras 8.2 y 8.6, y la DFT de 10 puntos $X[k]$ que se muestra en las Figuras 8.11(c) y 8.11(d) es un periodo de $\tilde{X}[k]$.

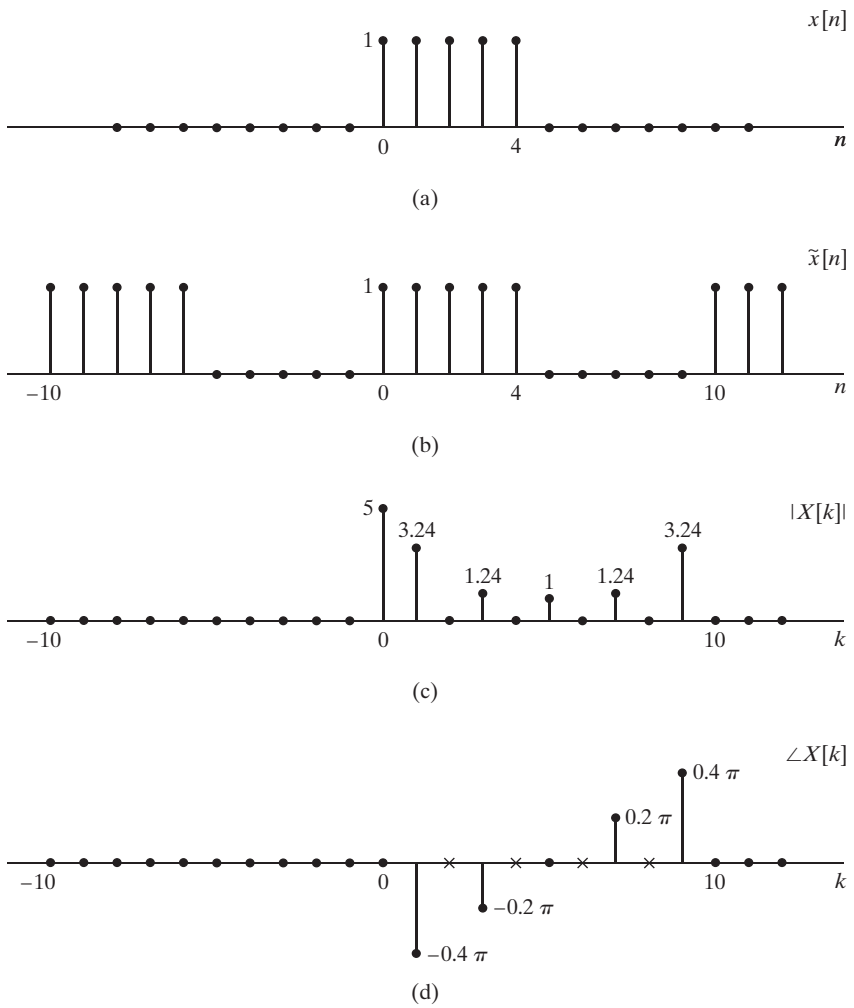


Figura 8.11 Ilustración de la DFT. (a) Secuencia de longitud finita $x[n]$. (b) Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ formada a partir de $x[n]$ con periodo $N = 10$. (c) Módulo de la DFT (d) Fase de la DFT (las x indican valores indeterminados.)

La distinción entre la secuencia de duración finita $x[n]$ y la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ relacionadas por las Ecuaciones (8.57) y (8.60) puede parecer menor, ya que utilizando esas ecuaciones es inmediato obtener una de ellas a partir de la otra. Sin embargo, la distinción es importante al considerar las propiedades de la DFT y al considerar el efecto sobre $x[n]$ de una modificación de $X[k]$. Esto resultará evidente en la sección siguiente, donde presentaremos las propiedades de la DFT.

8.6. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección consideraremos diversas propiedades de la DFT de secuencias de longitud finita. Nuestra presentación es paralela a la de la Sección 8.2 para secuencias periódicas. Sin embargo, se debe poner especial atención en la interacción del supuesto de longitud finita y la periodicidad implícita de la representación de secuencias de longitud finita mediante la DFT.

8.6.1. Linealidad

Si se combinan linealmente dos secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es decir,

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n], \tag{8.71}$$

la DFT de $x_3[n]$ es

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k]. \tag{8.72}$$

Es obvio que si $x_1[n]$ es de longitud N_1 y $x_2[n]$ es de longitud N_2, la longitud máxima de $x_3[n]$ será $N_3 = \text{máx}(N_1, N_2)$. Por tanto, para que la Ecuación (8.72) tenga sentido, ambas DFT se deben calcular con la misma longitud $N \geq N_3$. Si, por ejemplo, $N_1 < N_2$, entonces $X_1[k]$ será la DFT de $x_1[n]$ aumentada en $(N_2 - N_1)$ ceros. Es decir, la DFT de N_2 puntos de $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1[n] W_{N_2}^{kn}, \qquad 0 \leq k \leq N_2 - 1, \tag{8.73}$$

y la DFT de N_2 puntos de $x_2[n]$ es

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2[n] W_{N_2}^{kn}, \qquad 0 \leq k \leq N_2 - 1. \tag{8.74}$$

En resumen, si

$$x_1[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k] \tag{8.75a}$$

y

$$x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_2[k], \tag{8.75b}$$

entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} aX_1[k] + bX_2[k], \tag{8.76}$$

siendo todas las longitudes de las secuencias y sus DFT iguales al máximo de las longitudes de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Por supuesto, se pueden calcular DFT de longitud superior aumentando *ambas* secuencias con muestras de valor cero.

8.6.2. Desplazamiento circular de una secuencia

De acuerdo a la Sección 2.9.2 y a la propiedad 2 de la Tabla 2.2, si $X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x[n]$, entonces $e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la secuencia desplazada $x[n-m]$. En otras palabras, un desplazamiento de m puntos en el dominio del tiempo (si m es positivo corresponde a un retardo temporal y si m es negativo a un adelanto temporal) se traduce en el dominio de la frecuencia en la multiplicación de la transformada de Fourier por un factor de fase lineal $e^{-j\omega m}$. En la Sección 8.2.2 presentamos la correspondiente propiedad para los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica. Concretamente, si una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$, la secuencia desplazada $\tilde{x}[n-m]$ tendrá como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier $e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k]$. Consideremos ahora la operación en el dominio del tiempo correspondiente a la multiplicación de los coeficientes de la DFT de una secuencia de longitud finita $x[n]$ por el factor de fase lineal $e^{-j(2\pi k/N)m}$. Concretamente, sea $x_1[n]$ la secuencia de longitud finita cuya DFT es $e^{-j(2\pi k/N)m}X[k]$. Es decir, si

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k], \tag{8.77}$$

estamos interesados en una secuencia $x_1[n]$ tal que

$$x_1[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}X[k] = W_N^m X[k]. \tag{8.78}$$

Como la DFT de N puntos representa a una secuencia finita de longitud N, tanto $x[n]$ como $x_1[n]$ deben ser cero fuera del intervalo $0 \le n \le N-1$, y por tanto, $x_1[n]$ no se puede obtener mediante un simple desplazamiento temporal de $x[n]$. El resultado correcto se desprende directamente del resultado de la Sección 8.2.2 y de la interpretación de la DFT como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica $x_1[((n))_N]$. En particular, de las Ecuaciones (8.59) y (8.62) se deduce que

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] = X[((k))_N], \tag{8.79}$$

y similarmente, se puede definir una secuencia periódica $\tilde{x}_1[n]$ tal que

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k] = X_1[((k))_N], \tag{8.80}$$

donde, por hipótesis

$$X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}X[k]. \tag{8.81}$$

Por tanto, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}_1[n]$ son

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j[2\pi((k))_N/N]m}X[((k))_N]. \tag{8.82}$$

Observe que

$$e^{-j[2\pi((k))_N/N]m} = e^{-j(2\pi k/N)m}. \tag{8.83}$$

Es decir, como $e^{-j(2\pi k/N)m}$ es periódica de periodo N tanto en k como en m podemos obviar la notación $((k))_N$. Por tanto, la Ecuación (8.82) se convierte en

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k], \tag{8.84}$$

de forma que de la Sección 8.2.2 se deduce que

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[((n-m))_N]. \tag{8.85}$$

Por tanto, la secuencia de longitud finita $x_1[n]$ cuya DFT está dada por la Ecuación (8.81) es

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N], & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.86}$$

La Ecuación (8.86) nos indica cómo formar la secuencia $x_1[n]$ a partir de $x[n]$.

Ejemplo 8.8 Desplazamiento circular de una secuencia

La Figura 8.12 ilustra el procedimiento del desplazamiento circular para $m = -2$. Es decir, deseamos determinar $x_1[n] = x[((n+2))_N]$ para $N = 6$. Hemos demostrado que su DFT será $X_1[k] = W_6^{-2k}X[k]$. Concretamente, a partir de $x[n]$, se construye una secuencia periódica $\tilde{x}[n] = x[((n))_6]$, como se indica

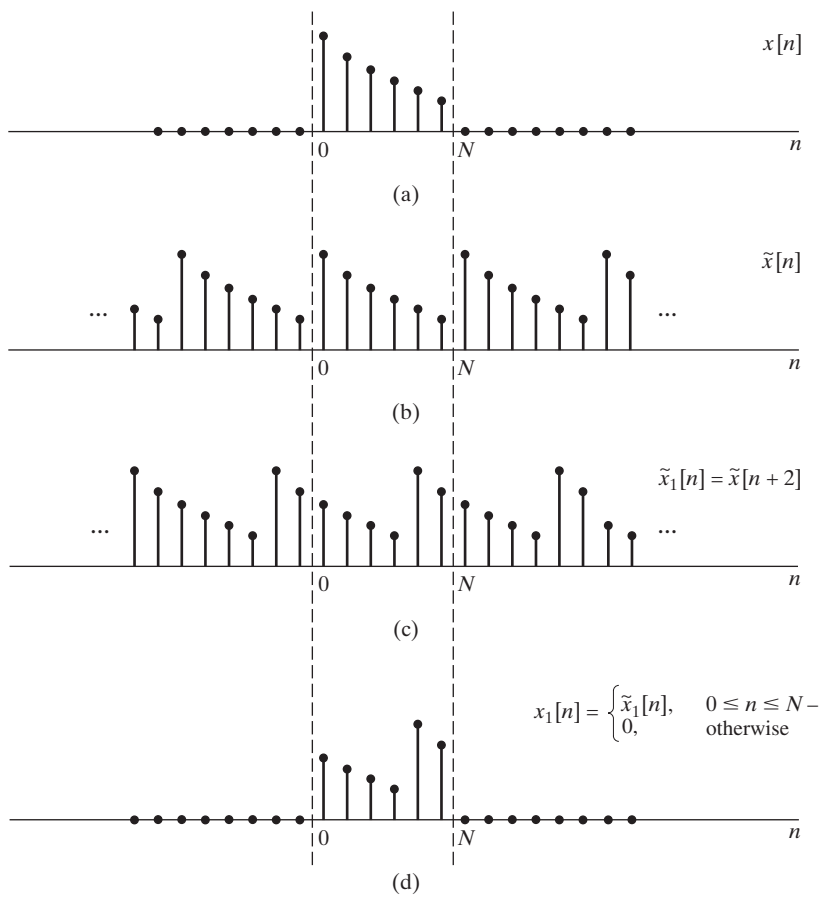


Figura 8.12 Desplazamiento circular de una secuencia de longitud finita, es decir, efecto en el dominio del tiempo de multiplicar la DFT de una secuencia por un factor de fase lineal.

en la Figura 8.12(b). De acuerdo a la Ecuación (8.85), desplazamos después $\tilde{x}[n]$ dos unidades a la izquierda, con lo que se obtiene $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n+2]$ como se muestra en la Figura 8.12(c). Finalmente, utilizando la Ecuación (8.86), extraemos un periodo de $\tilde{x}_1[n]$ para obtener $x_1[n]$, como se indica en la Figura 8.12(d).

Una comparación de las Figuras 8.12(a) y (d) indica claramente que $x_1[n]$ no corresponde a un desplazamiento lineal de $x[n]$, y de hecho, ambas secuencias están confinadas entre 0 y $(N-1)$. Observando la Figura 8.12 vemos que $x_1[n]$ se puede formar desplazando $x[n]$, de forma que los valores de dicha secuencia que dejan el intervalo entre 0 y $(N-1)$ por un extremo entren por el otro extremo. Otro punto interesante es que en el ejemplo que se muestra en la Figura 8.12(a), si formamos $x_2[n] = x[((n-4))_6]$ desplazando la secuencia a la derecha 4 unidades (módulo 6), obtenemos la misma secuencia que $x_1[n]$. En términos de la DFT, esto se produce porque $W_6^{4k} = W_6^{-2k}$ o de forma más general, $W_N^{mk} = W_N^{-(N-m)k}$, lo que implica que en un desplazamiento circular de N puntos, desplazarse m puntos en una dirección es lo mismo que desplazarse $N-m$ puntos en la dirección opuesta.

En la Sección 8.5 sugerimos la interpretación de formar la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ a partir de la secuencia de longitud finita $x[n]$ enrollando $x[n]$ en un cilindro con una circunferencia exactamente de N puntos. A medida que recorremos el cilindro repetidas veces, la secuencia que vemos es la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$. Un desplazamiento lineal de esta secuencia corresponde entonces a una rotación del cilindro. En el contexto de secuencias de longitud finita y de la DFT, este desplazamiento se denomina desplazamiento *circular* o *rotación* de la secuencia en el intervalo $0 \le n \le N-1$.

En resumen, la propiedad de desplazamiento circular de la DFT es

$$x[((n-m))_N], \quad 0 \le n \le N-1 \overset{DFT}{\longleftrightarrow} e^{-j(2\pi k/N)m} X[k] = W_N^m X[k]. \tag{8.87}$$

8.6.3. Dualidad

Como la DFT está tan estrechamente relacionada con el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, es razonable esperar que la DFT exhiba una propiedad de dualidad similar a la del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto que presentamos en la Sección 8.2.3. De hecho, un examen de las Ecuaciones (8.67) y (8.68) nos muestra que las ecuaciones de análisis y síntesis se diferencian sólo en el factor $1/N$ y en el signo del exponente de las potencias de W_N.

La propiedad de dualidad de la DFT se puede obtener explotando la relación entre la DFT y el desarrollo en serie de Fourier, como hicimos en la obtención de la propiedad de desplazamiento circular. Con este fin, consideremos $x[n]$ y su DFT $X[k]$, y construyamos las secuencias periódicas

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N], \tag{8.88a}$$

$$\tilde{X}[k] = X[((k))_N], \tag{8.88b}$$

de forma que

$$\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]. \tag{8.89}$$

De la propiedad de dualidad dada en las Ecuaciones (8.25),

$$\tilde{X}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k]. \tag{8.90}$$

Si definimos la secuencia periódica $\tilde{x}_1[n] = \tilde{X}[n]$, un periodo de la cual es la secuencia de duración finita $x_1[n] = X[n]$, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}_1[n]$ son $\tilde{X}_1[k] = N\tilde{x}[-k]$. Por tanto, la DFT de $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = \begin{cases} N\tilde{x}[-k], & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{8.91}$$

o equivalentemente

$$X_1[k] = \begin{cases} Nx[((-k))_N], & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.92}$$

En consecuencia, la propiedad de dualidad de la DFT se puede expresar como sigue: si

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k], \tag{8.93a}$$

entonces

$$X[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Nx[((-k))_N], \qquad 0 \le k \le N-1. \tag{8.93b}$$

La secuencia $Nx[((-k))_N]$ es $Nx[k]$ con el índice invertido y módulo N, que corresponde específicamente $((-k))_N = N-k$ para $1 \le k \le N-1$ y $((-k))_N = ((k))_N$ para $k = 0$. Como en el caso del desplazamiento módulo N, el proceso de invertir el índice módulo N se ve mejor en función de las secuencias periódicas subyacentes.

Ejemplo 8.9 Relación de dualidad de la DFT

Para ilustrar la relación de dualidad de las Ecuaciones (8.93), consideremos la secuencia $x[n]$ del Ejemplo 8.7. La Figura 8.13(a) muestra la secuencia de longitud finita $x[n]$, y las Figuras 8.13(b) y 8.13(c) son

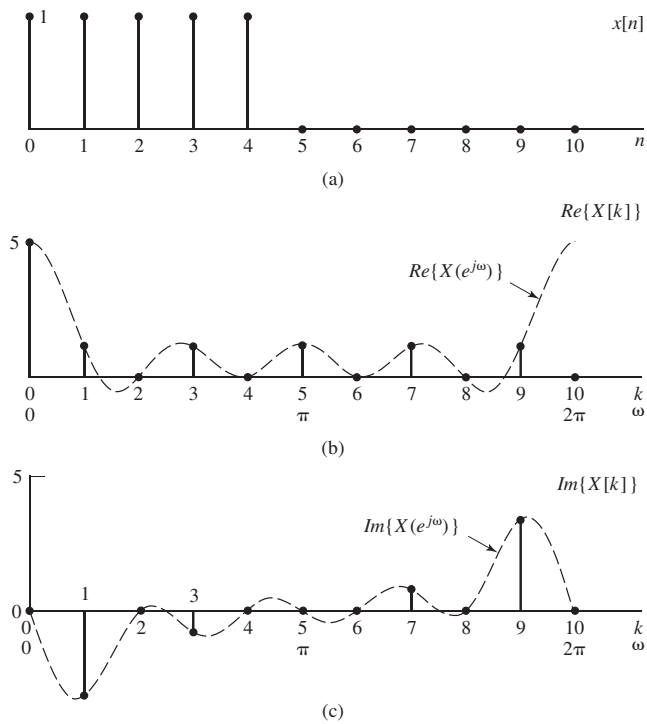


Figura 8.13 Ilustración de la dualidad. (a) Secuencia real de longitud finita $x[n]$. (b) y (c) Partes real e imaginaria de la correspondiente DFT $X[k]$.

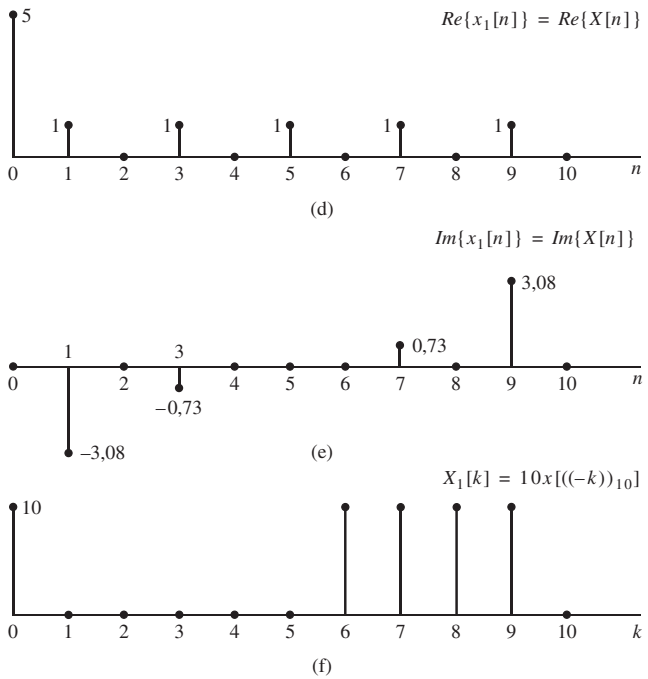


Figura 8.13 *Continuación* (d) y (e) Partes real e imaginaria de la secuencia dual $x_1[n] = X[n]$. (f) La DFT de $x_1[n]$.

las partes real e imaginaria, respectivamente, de la correspondiente DFT de 10 puntos, $X[k]$. Modificando simplemente el etiquetado del eje horizontal, obtenemos la secuencia compleja $x_1[n] = X[n]$, como se muestra en las Figuras 8.13(d) y 8.13(e). De acuerdo con la relación de dualidad de las Ecuaciones (8.93), la DFT de 10 puntos de la secuencia (compleja) $X[n]$ es la secuencia que se muestra en la Figura 8.13(f).

8.6.4. Propiedades de simetría

Como la DFT de $x[n]$ es idéntica a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica $\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$, las propiedades de simetría asociadas a la DFT se pueden deducir de las propiedades de simetría del desarrollo en serie de Fourier resumidas en la Tabla 8.1 de la Sección 8.2.6. Concretamente, utilizando las Ecuaciones (8.88) junto con las Propiedades 9 y 10 de dicha tabla tenemos que

$$x^*[n] \overset{DFJ}{\longleftrightarrow} X^*[((-k))_N], \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.94}$$

y

$$x^*[((-n))_N] \overset{DFJ}{\longleftrightarrow} X^*[k], \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{8.95}$$

Las Propiedades 11-14 de la Tabla 8.1 se refieren a la descomposición de una secuencia periódica en la suma de una secuencia simétrica conjugada y otra antisimétrica conjugada. Esto sugiere la descomposición de la secuencia de duración finita $x[n]$ en dos secuencias también finitas de longitud N correspondientes a un periodo de las componentes simétrica conjugada y antisimétrica conjugada de

$\tilde{x}[n]$. Denominaremos $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ a esas componentes de $x[n]$. Por tanto, con

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \tag{8.96}$$

y siendo la parte simétrica conjugada

$$\tilde{x}_e[n] = \tfrac{1}{2}\{\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]\}, \tag{8.97}$$

y siendo la parte antisimétrica conjugada

$$\tilde{x}_o[n] = \tfrac{1}{2}\{\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]\}, \tag{8.98}$$

definimos $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ como

$$x_{\text{ep}}[n] = \tilde{x}_e[n], \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.99}$$

$$x_{\text{op}}[n] = \tilde{x}_o[n], \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.100}$$

o, equivalentemente,

$$x_{\text{ep}}[n] = \tfrac{1}{2}\{x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]\}, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.101a}$$

$$x_{\text{op}}[n] = \tfrac{1}{2}\{x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]\}, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.101b}$$

donde tanto $x_{\text{ep}}[n]$ como $x_{\text{op}}[n]$ son secuencias de longitud finita, es decir, valen cero fuera del intervalo $0 \le n \le N-1$. Como $((-n))_N = (N-n)$ y $((n))_N = n$ para $0 \le n \le N-1$. las Ecuaciones (8.101) se pueden expresar también como

$$x_{\text{ep}}[n] = \tfrac{1}{2}\{x[n] + x^*[N-n]\}, \qquad 1 \le n \le N-1, \tag{8.102a}$$

$$x_{\text{ep}}[0] = Re\{x[0]\}, \tag{8.102b}$$

$$x_{\text{op}}[n] = \tfrac{1}{2}\{x[n] - x^*[N-n]\}, \qquad 1 \le n \le N-1, \tag{8.102c}$$

$$x_{\text{op}}[0] = jIm\{x[0]\}. \tag{8.102d}$$

Esta forma de expresar las ecuaciones resulta conveniente, ya que evita el cálculo de los índices módulo N.

Es claro que, $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ no son equivalentes a $x_e[n]$ y $x_o[n]$ tal como se definieron en la Ecuaciones (2.149a) y (2.149b). Sin embargo, se puede demostrar (véase el Problema 8.59) que

$$x_{\text{ep}}[n] = \{x_e[n] + x_e[n-N]\}, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.103}$$

y

$$x_{\text{op}}[n] = \{x_o[n] + x_o[n-N]\}, \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{8.104}$$

En otras palabras, $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ se pueden generar solapando $x_e[n]$ y $x_o[n]$ en el intervalo $0 \le n \le N-1$. Las secuencias $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ se denominan componentes *simétrica conjugada periódica* y *antisimétrica conjugada periódica* respectivamente, de $x[n]$. Cuando $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ son reales, se denominarán componente *par periódica* e *impar periódica* respectivamente. Nótese que las secuencias $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$

no son secuencias periódicas, sino que son secuencias de longitud finita que coinciden con un periodo de las secuencias periódicas $\tilde{x}_e[n]$ y $\tilde{x}_o[n]$, respectivamente.

Las Ecuaciones (8.101) y (8.102) definen $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$ en función de $x[n]$. La relación inversa, que expresa $x[n]$ en función de $x_{\text{ep}}[n]$ y $x_{\text{op}}[n]$, se puede obtener utilizando las Ecuaciones (8.97) y (8.98) para expresar $\tilde{x}[n]$ como

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n]. \tag{8.105}$$

Por tanto,

$$x[n] = \tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \qquad 0 \leq n \leq N-1. \tag{8.106}$$

Combinando las Ecuaciones (8.106) con las Ecuaciones (8.99) y (8.100) obtenemos

$$x[n] = x_{\text{ep}}[n] + x_{\text{op}}[n]. \tag{8.107}$$

Alternativamente, si se suman las Ecuaciones (8.102), se llega también a la Ecuación (8.107). Las propiedades de simetría de la DFT junto con las propiedades 11-14 de la Tabla 8.1 se pueden deducir ahora de forma directa:

$$Re\{x[n]\} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_{\text{ep}}[k], \tag{8.108}$$

$$jIm\{x[n]\} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_{\text{op}}[k], \tag{8.109}$$

$$x_{\text{ep}}[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Re\{X[k]\}, \tag{8.110}$$

$$x_{\text{op}}[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} jIm\{X[k]\}. \tag{8.111}$$

8.6.5. Convolución circular

En la Sección 8.2.5 demostramos que la multiplicación de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de dos secuencias periódicas corresponde a la convolución periódica de las secuencias. Ahora consideramos dos secuencias de *duración finita* $x_1[n]$ y $x_2[n]$, ambas de longitud N, cuyas DFT son $X_1[k]$ y $X_2[k]$, respectivamente. Deseamos determinar la secuencia $x_3[n]$, cuya DFT es $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$. Para determinar $x_3[n]$, se pueden aplicar los resultados de la Sección 8.2.5. Concretamente, $x_3[n]$ será un periodo de la secuencia $\tilde{x}_3[n]$, dado por la Ecuación (8.27). Por tanto,

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m], \qquad 0 \leq n \leq N-1, \tag{8.112}$$

o, equivalentemente,

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \leq n \leq N-1. \tag{8.113}$$

Como $((m))_N = m$ para $0 \leq m \leq N-1$, la Ecuación (8.113) se puede poner como

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \leq n \leq N-1. \tag{8.114}$$

La Ecuación (8.114) difiere de la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, definida en la Ecuación (2.49), en algunos aspectos importantes. En la convolución lineal, el cálculo de los valores de la secuencia $x_3[n]$

se realiza multiplicando dicha secuencia por una versión invertida y desplazada linealmente de la otra, y sumando los valores del producto $x_1[m]x_2[n-m]$ para todo m. Para obtener los valores sucesivos de la secuencia formada por la operación de convolución, una de las secuencias se desplaza sucesivamente en relación a la otra a lo largo de un eje lineal. Por el contrario, en la convolución definida en la Ecuación (8.114), la segunda secuencia se invierte circularmente en el tiempo y se desplaza circularmente con respecto a la primera. Por esta razón, la operación de combinar dos secuencias mediante la Ecuación (8.114) se denomina *convolución circular.* Más concretamente, diremos que la Ecuación (8.114) es una convolución circular de N puntos, identificando explícitamente el hecho de que ambas secuencias tienen longitud N (o inferior) y que las secuencias se desplazan módulo N. En algunas ocasiones la operación de formar una secuencia $x_3[n]$ para $0 \leq n \leq N-1$ utilizando la Ecuación (8.114) se indicará como

$$x_3[n] = x_1[n] \; \textcircled{N} \; x_2[n], \tag{8.115}$$

Es decir, el símbolo $\textcircled{N}$ indica convolución circular de N puntos.

Como la DFT de $x_3[n]$ es $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ y además $X_1[k]X_2[k] = X_2[k]X_1[k]$, se deduce directamente que

$$x_3[n] = x_2[n] \; \textcircled{N} \; x_1[n], \tag{8.116}$$

o, más concretamente,

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m]x_1[((n-m))_N]. \tag{8.117}$$

Es decir, la convolución circular, como la convolución lineal, es conmutativa.

Como la convolución circular es realmente como la convolución periódica, el Ejemplo 8.4 y la Figura 8.3 sirven también como ilustración. Sin embargo, si utilizamos la noción de desplazamiento circular, no es necesario construir las secuencias periódicas subyacentes como en el caso de la Figura 8.3. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8.10 Convolución circular con un impulso desplazado

El resultado de la Sección 8.6.2 proporciona un ejemplo de convolución circular. Sea $x_2[n]$ una secuencia de duración finita de longitud N y

$$x_1[n] = \delta[n-n_0], \tag{8.118}$$

siendo $0 < n_0 < N$. Claramente, $x_1[n]$ se puede considerar como una secuencia de duración finita

$$x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < n_0, \\ 1, & n = n_0, \\ 0, & n_0 < n \leq N-1. \end{cases} \tag{8.119}$$

como se muestra en la Figura 8.14 para $n_0 = 1$.

La DFT de $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = W_N^{kn_0}. \tag{8.120}$$

Si formamos el producto

$$X_3[k] = W_N^{kn_0} X_2[k], \tag{8.121}$$

y tenemos en cuenta lo expuesto en la Sección 8.6.2, vemos que la secuencia de duración finita correspondiente a $X_3[k]$ es la secuencia $x_2[n]$ rotada n_0 muestras a la derecha en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$.

Es decir, la convolución circular de una secuencia $x_2[n]$ con un impulso retardado una sola unidad produce una rotación de $x_2[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Este ejemplo se ilustra en la Figura 8.14 para $N = 5$ y $n_0 = 1$. En la figura se muestran primero las secuencias $x_2[m]$ y $x_1[m]$ y después $x_2[((0-m))_N]$ y $x_2[((1-m))_N]$. Observando esos dos casos se puede ver claramente que el resultado de la convolución circular de $x_2[n]$ con un impulso unidad desplazado una sola muestra será un desplazamiento circular de $x_2[n]$. La última secuencia que se muestra en la figura es $x_3[n]$, resultado de la convolución circular de $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

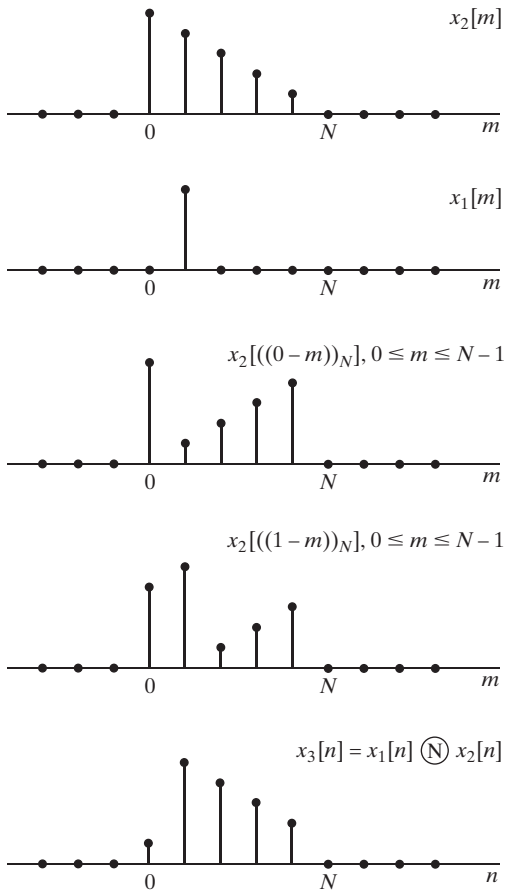


Figura 8.14 Convolución circular de una secuencia de longitud finita $x_2[n]$ con un impulso desplazado $x_1[n] = \delta[n-1]$.

Ejemplo 8.11 Convolución circular de dos pulsos rectangulares

Como otro ejemplo de convolución circular, sea

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{8.122}$$

que se representa en la Figura 8.15 para $L = 6$. Si llamamos N a la longitud de la DFT, entonces para $N = L$, las DFT de N puntos son

$$X_1[k] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.123}$$

Si multiplicamos explícitamente $X_1[k]$ y $X_2[k]$, obtenemos

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k = 0, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{8.124}$$

de donde se deduce que

$$x_3[n] = N, \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{8.125}$$

Este resultado se muestra en la Figura 8.15. Se puede ver claramente que, a medida que la secuencia $x_2[((n-m))_N]$ se rota con respecto a $x_1[m]$, la suma de los productos $x_1[m]x_2[((n-m))_N]$ será siempre igual a N.

Es posible, por supuesto, considerar $x_1[n]$ y $x_2[n]$ como secuencias de $2L$ puntos aumentándolas con L ceros. Si realizamos entonces una convolución circular de $2L$ puntos con las secuencias aumentadas, obtenemos la secuencia de la Figura 8.16, que se puede ver que es idéntica a la convolución lineal de las secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$. En la Sección 8.7 se comentará con mayor detalle esta importante observación.

Nótese que para $N = 2L$, como en la Figura 8.16,

$$X_1[k] = X_2[k] = \frac{1 - W_N^{Lk}}{1 - W_N^k},$$

por lo que la DFT de la secuencia triangular $x_3[n]$ de la Figura 8.16(e) es

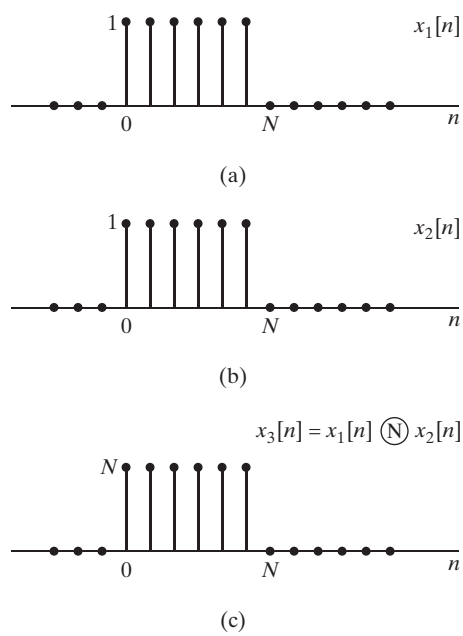


Figura 8.15 Convolución circular de N puntos de dos secuencias constantes de longitud N.

$$X_3[k] = \left(\frac{1 - W_N^{Lk}}{1 - W_N^k} \right)^2,$$

con $N = 2L$.

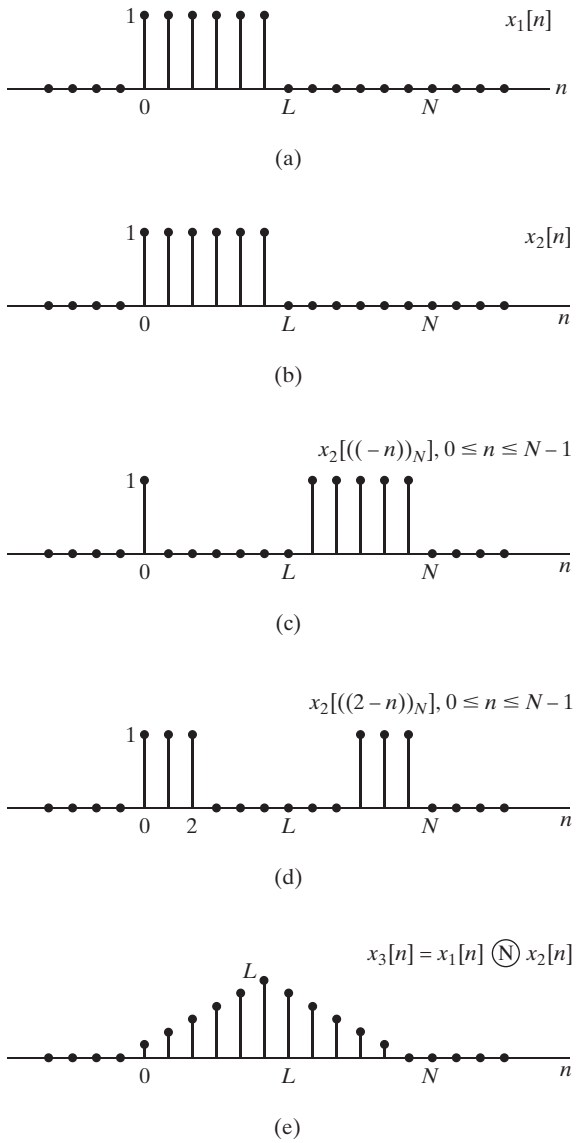


Figura 8.16 Convolución circular de $2L$ puntos de dos secuencias constantes de longitud L.

La propiedad de convolución circular se representa como

$$x_1[n] \circledN x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k]X_2[k]. \tag{8.126}$$

A la vista de la dualidad de las relaciones de la DFT no es sorprendente que la DFT de un producto de dos secuencias de N puntos sea la convolución circular de sus respectivas transformadas discretas de Fourier. Concretamente, si $x_3[n] = x_1[n]x_2[n]$, entonces

$$X_3[k] = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N] \tag{8.127}$$

o

$$x_1[n]x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}X_1[k] \circledN X_2[k]. \tag{8.128}$$

8.6.6. Resumen de las propiedades de la DFT

Las propiedades de la transformada discreta de Fourier que hemos presentado en la Sección 8.6 se resumen en la Tabla 8.2. Nótese que en todas las propiedades las expresiones resultantes especifican $x[n]$ en el intervalo $0 \le n \le N-1$ y $X[k]$ en el intervalo $0 \le k \le N-1$. Tanto $x[n]$ como $X[k]$ son cero fuera de esos intervalos.

8.7. CÁLCULO DE LA CONVOLUCIÓN LINEAL MEDIANTE LA DFT

En el Capítulo 9 veremos que existen algoritmos eficientes para calcular la transformada discreta de Fourier de una secuencia de longitud finita. Estos algoritmos tienen el nombre común de algoritmos de *transformada rápida de Fourier (FFT, Fast Fourier Transform)*. Como estos algoritmos están disponibles, es computacionalmente eficiente realizar la convolución de dos secuencias mediante el siguiente procedimiento:

(a) Calcular las transformadas discretas de Fourier de N puntos $X_1[k]$ y $X_2[k]$ de las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente.

(b) Calcular el producto $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ para $0 \le k \le N-1$.

(c) Calcular la secuencia $x_3[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]$ como la DFT inversa de $X_3[k]$.

En muchas aplicaciones de tratamiento digital de señales, nuestro interés es realizar una convolución lineal de dos secuencias. Es decir, deseamos implementar un sistema lineal e invariante con el tiempo. Esto ocurre, por ejemplo, al filtrar una secuencia como una señal de voz o una señal radar, o al calcular la función de autocorrelación de esas señales. Como vimos en la Sección 8.6.5, la multiplicación de transformadas discretas de Fourier corresponde a la convolución circular de las secuencias. Para obtener una convolución lineal hay que asegurar que la convolución circular tiene el efecto de la convolución lineal. Los comentarios del final del Ejemplo 8.15 sugieren cómo se puede hacer. Presentaremos ahora un análisis más detallado.

8.7.1. Convolución lineal de dos secuencias de longitud finita

Consideremos una secuencia $x_1[n]$ de L puntos de longitud y una secuencia $x_2[n]$ de P puntos de longitud. Supongamos que se desea combinar esas dos secuencias mediante una operación de convolución lineal para obtener una tercera secuencia

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]. \tag{8.129}$$

TABLA 8.2 RESUMEN DE PROPIEDADES DE LA DFT

Secuencia de longitud finita (Longitud N)	DFT de N puntos (Longitud N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1[k]+bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-\ell n}x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $Re\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]+X^*[((-k))_N]\}$
12. $jIm\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]-X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\text{ep}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x^*[((-n))_N]\}$	$Re\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x^*[((-n))_N]\}$	$jIm\{X[k]\}$
Las propiedades 15–17 sólo se aplican cuando $x[n]$ es real.	
15. Propiedades de simetría	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ Re\{X[k]\} = Re\{X[((-k))_N]\} \\ Im\{X[k]\} = -Im\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[((-n))_N]\}$	$Re\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[((-n))_N]\}$	$jIm\{X[k]\}$

La Figura 8.17(a) muestra una secuencia típica $x_1[m]$ y la Figura 8.17(b) una secuencia típica $x_2[n-m]$ para tres casos: $n=-1$, $0 \le n \le L-1$ y $n=L+P-1$. Es claro que el producto $x_1[m]x_2[n-m]$ es cero para todo m siempre que $n<0$ y $n>L+P-2$. Es decir, $x_3[n] \neq 0$ en el intervalo $0 \le n \le L+P-2$. Por tanto, $(L+P-1)$ es la longitud máxima de la secuencia $x_3[n]$ resultante de la convolución lineal de una secuencia de longitud L con otra secuencia de longitud P.

8.7.2. La convolución circular como una convolución lineal con solapamiento

Como muestran los Ejemplos 8.10 y 8.11, el que una convolución circular correspondiente al producto de dos DFT de N puntos tenga el mismo valor que la convolución lineal de las correspondientes secuencias de longitud finita dependerá de la longitud de la DFT en relación con la longitud de las secuencias de duración finita. Una interpretación extremadamente útil de la relación entra la convolución circular y la convolución lineal se puede establecer en términos de solapamiento temporal. Como esta interpretación es tan importante y útil para comprender la convolución circular, la desarrollaremos de varias formas.

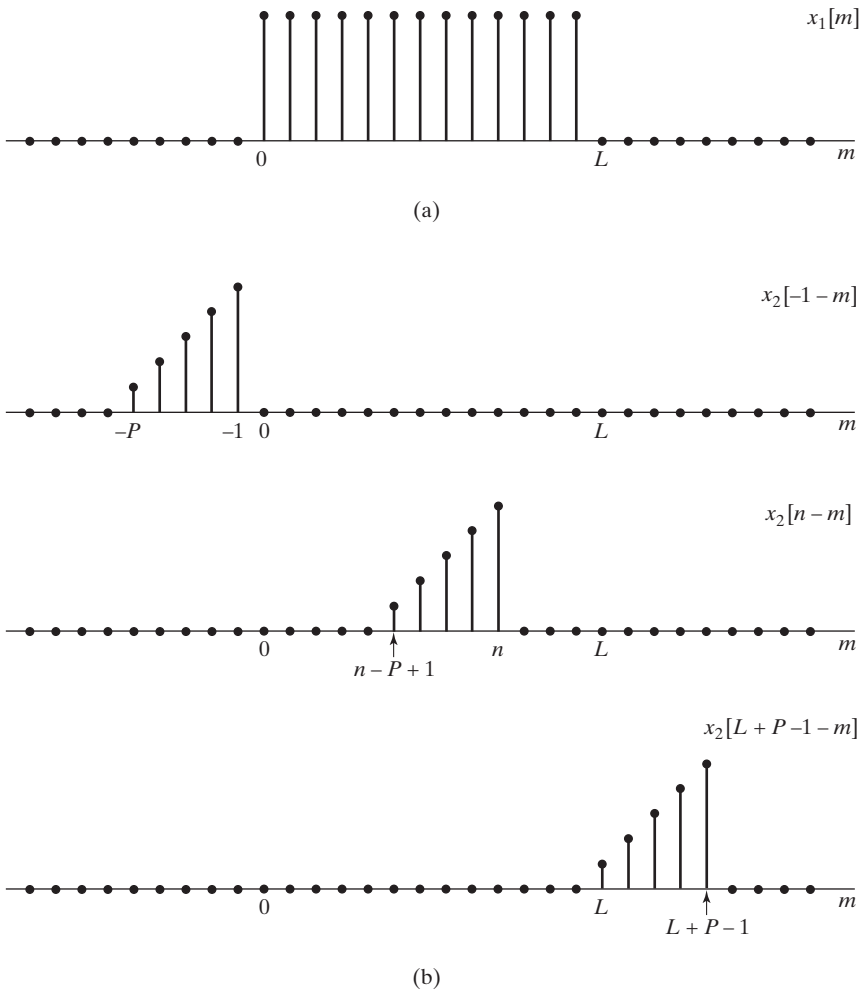


Figura 8.17 Ejemplo de convolución lineal de dos secuencias de longitud finita en el que se muestra que $x_3[n] = 0$ para $n \leq -1$ y para $n \geq L+P-1$. (a) Secuencia de longitud finita $x_1[m]$. (b) $x_2[n-m]$ para varios valores de n.

En la Sección 8.4 observamos que si la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de una secuencia $x[n]$ se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, la secuencia resultante corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \tag{8.130}$$

De nuestra presentación de la DFT se deduce que la secuencia de longitud finita

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{8.131}$$

es la DFT de un periodo de $\tilde{x}[n]$, como indica la Ecuación (8.130), es decir,

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.132}$$

Obviamente, si $x[n]$ tiene longitud menor o igual que N, no se producirá solapamiento temporal y $x_p[n] = x[n]$. Sin embargo, si la longitud de $x[n]$ es mayor que N, $x_p[n]$ puede no ser igual a $x[n]$ para algunos valores de n, o para ninguno. Utilizaremos de aquí en adelante el subíndice p para indicar que una secuencia es un periodo de la secuencia periódica resultante de realizar la DFT inversa de una transformada de Fourier muestreada. Se puede eliminar el subíndice si está claro que no se produce solapamiento.

La secuencia $x_3[n]$ de la Ecuación (8.129) tiene como transformada de Fourier

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}). \tag{8.133}$$

Si definimos una DFT

$$X_3[k] = X_3(e^{j(2\pi k/N)}), \qquad 0 \leq k \leq N-1, \tag{8.134}$$

es claro que, utilizando las Ecuaciones (8.133) y (8.134), también

$$X_3[k] = X_1(e^{j(2\pi k/N)})X_2(e^{j(2\pi k/N)}), \qquad 0 \leq k \leq N-1, \tag{8.135}$$

Y, por tanto,

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]. \tag{8.136}$$

Es decir, la secuencia resultante de realizar la DFT inversa de $X_3[k]$ es

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rN], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{8.137}$$

Y, utilizando la Ecuación (8.136), se deduce que

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]. \tag{8.138}$$

Es decir, la convolución circular de dos secuencias de longitud finita es equivalente a la convolución lineal de dichas secuencias, seguida por el solapamiento temporal que indica la Ecuación (8.137).

Nótese que si N es mayor o igual que L o P, $X_1[k]$ y $X_2[k]$ representan exactamente a $x_1[n]$ y $x_2[n]$, pero $x_{3p}[n] = x_3[n]$ para todo n sólo si N es mayor o igual que la longitud de la secuencia $x_3[n]$. Como vimos en la Sección 8.7.1, si $x_1[n]$ tiene una longitud de L y $x_2[n]$ tiene una longitud de P, la longitud máxima de $x_3[n]$ es de $(L+P-1)$. Por tanto, la convolución circular correspondiente a $X_1[k]X_2[k]$ es idéntica a la convolución lineal correspondiente a $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$ si N, la longitud de las DFT, cumple que $N \geq L+P-1$.

Ejemplo 8.12 La convolución circular como convolución lineal con solapamiento

Los resultados del Ejemplo 8.11 se pueden entender fácilmente a la luz de la interpretación que se acaba de presentar. Nótese que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son secuencias constantes idénticas con longitudes $L = P = 6$, como se muestra en la Figura 8.18(a). La convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es de longitud $L+P-1 = 11$

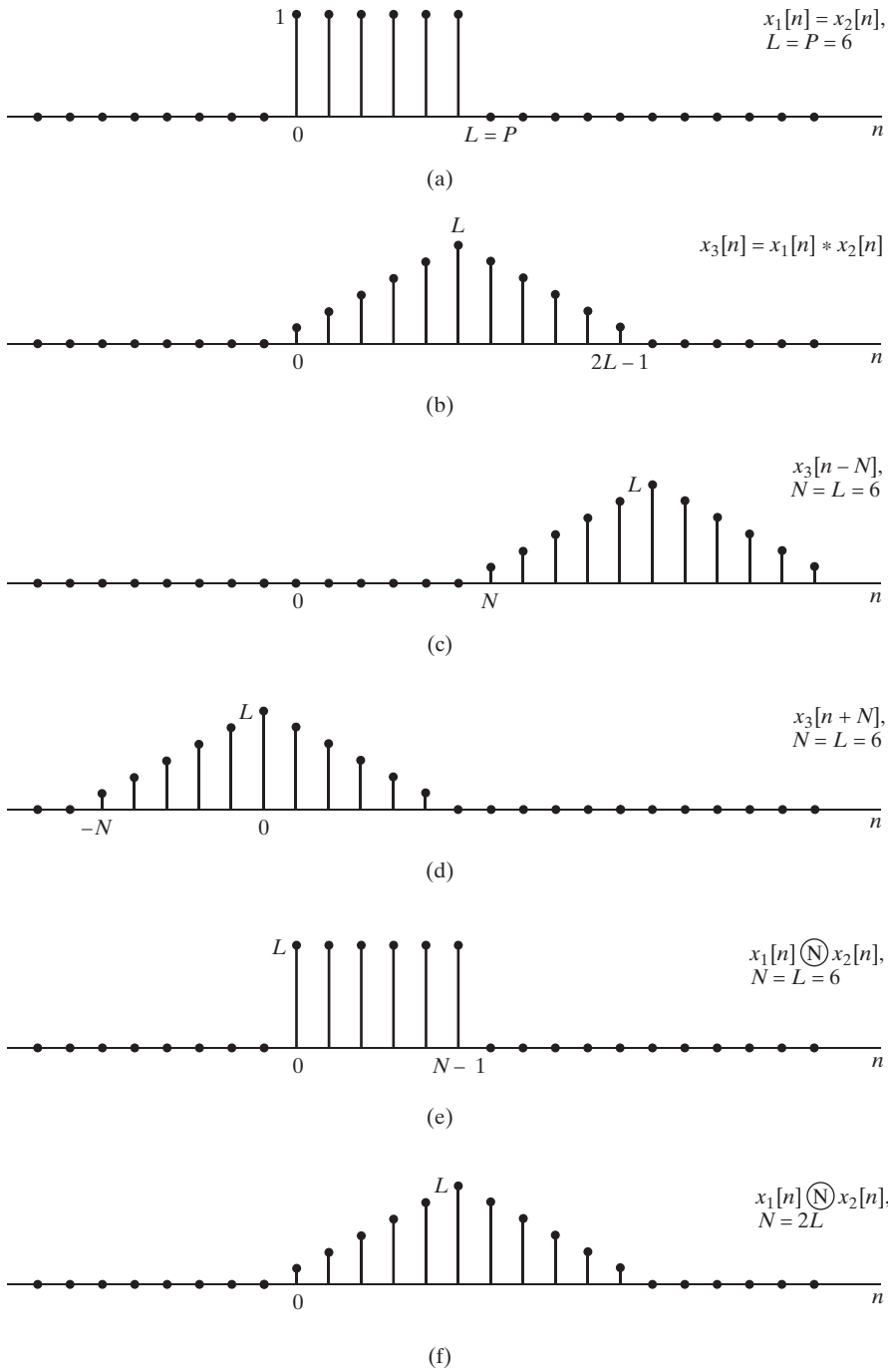


Figura 8.18 Ilustración de que la convolución circular es equivalente a la convolución lineal seguida por un solapamiento. (a) Las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ que se van a convolucionar. (b) La convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. (c) $x_3[n-N]$ para $N = 6$. (d) $x_3[n+N]$ para $N = 6$. (e) $x_1[n]$ $\textcircled{6}$ $x_2[n]$, que es igual a la suma de (b), (c) y (d) en el intervalo $0 \leq n \leq 5$. (f) $x_1[n]$ $\textcircled{12}$ $x_2[n]$.

y tiene la forma triangular que se muestra en la Figura 8.18(b). En las Figuras 8.18(c) y (d) se muestran dos de las versiones desplazadas $x_3[n-rN]$ de la Ecuación (8.137), $x_3[n-N]$ y $x_3[n+N]$ para $N=6$. La convolución circular de N puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se puede formar utilizando la Ecuación (8.137). Esto se muestra en la Figura 8.18(e) para $N=L=6$ y en la Figura 8.18(f) para $N=2L=12$. Nótese que, para $N=L=6$, sólo $x_3[n]$ y $x_3[n+N]$ contribuyen al resultado. Para $N=2L=12$, sólo $x_3[n]$ contribuye al resultado. Como la longitud de la convolución lineal es $(2L-1)$, el resultado de la convolución circular para $N=2L$ es idéntico al resultado de la convolución lineal para todo $0 \leq n \leq N-1$. De hecho, esto sería también cierto para $N=2L-1=11$.

Como indica el Ejemplo 8.12, el solapamiento temporal en la convolución circular de las dos secuencias de longitud finita se puede evitar si $N \geq L+P-1$. Además, resulta claro que si $N=L=P$, todos los valores de la convolución circular pueden ser diferentes de los de la convolución lineal. Sin embargo, si $P<L$, algunos valores de la convolución circular coincidirán con los valores correspondientes de la convolución lineal. La interpretación de solapamiento temporal es útil para demostrarlo.

Consideremos dos secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$, siendo $x_1[n]$ de longitud L y $x_2[n]$ de longitud P, con $P<L$, como se muestra en las Figuras 8.19(a) y (b), respectivamente. Consideremos primero la convolución circular de L puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, y preguntémonos qué valores de dicha convolución circular serían idénticos a los valores que se obtendrían mediante una convolución lineal y cuáles no. La convolución lineal de $x_1[n]$ con $x_2[n]$ será una secuencia de longitud finita de $(L+P-1)$ muestras, como se indica en la Figura 8.19(c). Para determinar la convolución circular de L puntos utilizaremos las Ecuaciones (8.137) y (8.138) de forma que

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} x_1[n] \textcircled{L} x_2[n] = \displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.139}$$

La Figura 8.20(a) muestra el término de $r=0$ en la Ecuación (8.139), y las Figuras 8.20(b) y 8.20(c) muestran los términos de $r=-1$ y $r=+1$, respectivamente. Observando la Figura 8.20 resulta claro que, en el intervalo $0 \leq n \leq L-1$, $x_{3p}[n]$ sólo está influenciada por $x_3[n]$ y $x_3[n+L]$.

En general, siempre que $P<L$, sólo el término $x_3[n+L]$ se solapará en el intervalo $0 \leq n \leq L-1$. Más concretamente, cuando se suman esos términos, los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n+L]$, que se extienden desde $n=0$ hasta $n=P-2$, se sumarán con los $(P-1)$ primeros puntos de $x_3[n]$ y los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n]$, que se extienden desde $n=L$ hasta $n=L+P-2$, contribuirán sólo al siguiente periodo del resultado periódico $\tilde{x}_3[n]$. Después, se forma $x_{3p}[n]$ extrayendo la porción de $0 \leq n \leq L-1$. Como los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n+L]$ y los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n]$ son idénticos, el proceso de formar la convolución circular $x_{3p}[n]$ se puede ver de forma alternativa como una convolución lineal con solapamiento, tomando los $(P-1)$ valores de $x_3[n]$ desde $n=L$ hasta $n=L+P-2$ y sumándoselos a los primeros $(P-1)$ valores de $x_3[n]$. La Figura 8.21 ilustra este proceso para el caso de $P=4$ y $L=8$. En la Figura 8.21(a) se muestra la convolución lineal $x_3[n]$, donde los puntos para $n \geq L$ se indican como círculos abiertos. Nótese que sólo $(P-1)$ puntos para $n \geq L$ son distintos de cero. La Figura 8.21(b) muestra la formación de $x_{3p}[n]$ "enrollando $x_3[n]$ sobre sí misma". Los primeros $(P-1)$ puntos se encuentran distorsionados por el solapamiento temporal, y los restantes puntos desde $n=P-1$ hasta $n=L-1$ (los últimos $L-P+1$ puntos) *no* están distorsionados. Es decir, son idénticos a los que se obtendrían mediante convolución lineal.

De esta exposición debe quedar claro que, si la convolución circular es de longitud suficiente con respecto a las longitudes de las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, el solapamiento con valores distintos de cero se puede evitar, en cuyo caso la convolución lineal y la circular serán idénticas. Concretamente, si para el caso que se ha considerado, $x_3[n]$ se replica con periodo $N \geq L+P-1$, no ocurrirá solapamiento con

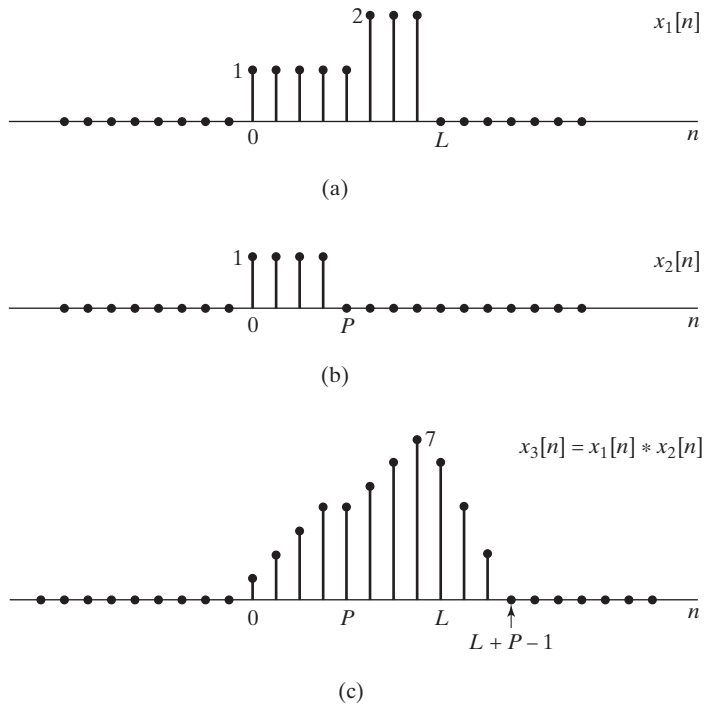


Figura 8.19 Un ejemplo de convolución lineal de dos secuencias de longitud finita.

valores distintos de cero. Las Figuras 8.21(c) y 8.21(d) ilustran de nuevo este caso para $P = 4$ y $L = 8$, con $N = 11$.

8.7.3. Realización de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante la DFT

La presentación anterior se ha centrado en las formas de obtener una convolución lineal a partir de una convolución circular. Como los sistemas lineales e invariantes con el tiempo se pueden realizar mediante convolución, esto implica que la convolución circular (realizada con el procedimiento sugerido al principio de la Sección 8.7) se puede utilizar para realizar estos sistemas. Para ver cómo se puede hacer, consideremos en primer lugar una secuencia de entrada $x[n]$ de L y una respuesta al impulso $h[n]$ de P puntos. La convolución lineal de esas dos secuencias, que se denominará $y[n]$, es una secuencia de duración finita de longitud $(L+P-1)$. Por consiguiente, cono se comentó en la Sección 8.7.2, para que la convolución circular y la lineal sean idénticas, la convolución circular debe tener al menos una longitud de $(L+P-1)$ puntos. La convolución circular se puede realizar multiplicando las DFT de $x[n]$ y $h[n]$. Como deseamos que el producto represente la DFT de la convolución lineal de $x[n]$ y $h[n]$, cuya longitud es de $(L+P-1)$ puntos, las DFT que vamos a calcular deben tener al menos esa longitud. Es decir, tanto $x[n]$ como $h[n]$ se deben aumentar con valores de amplitud cero. Este proceso se denomina comúnmente *relleno con ceros*.

Este procedimiento permite el cálculo de la convolución lineal de dos secuencias de longitud finita utilizando la transformada discreta de Fourier. Es decir, la salida de un sistema FIR cuya entrada es también de longitud finita se puede calcular con la DFT. En muchas aplicaciones, como filtrado de señales de voz, la señal de entrada es de duración indefinida. Aunque teóricamente podríamos almacenar

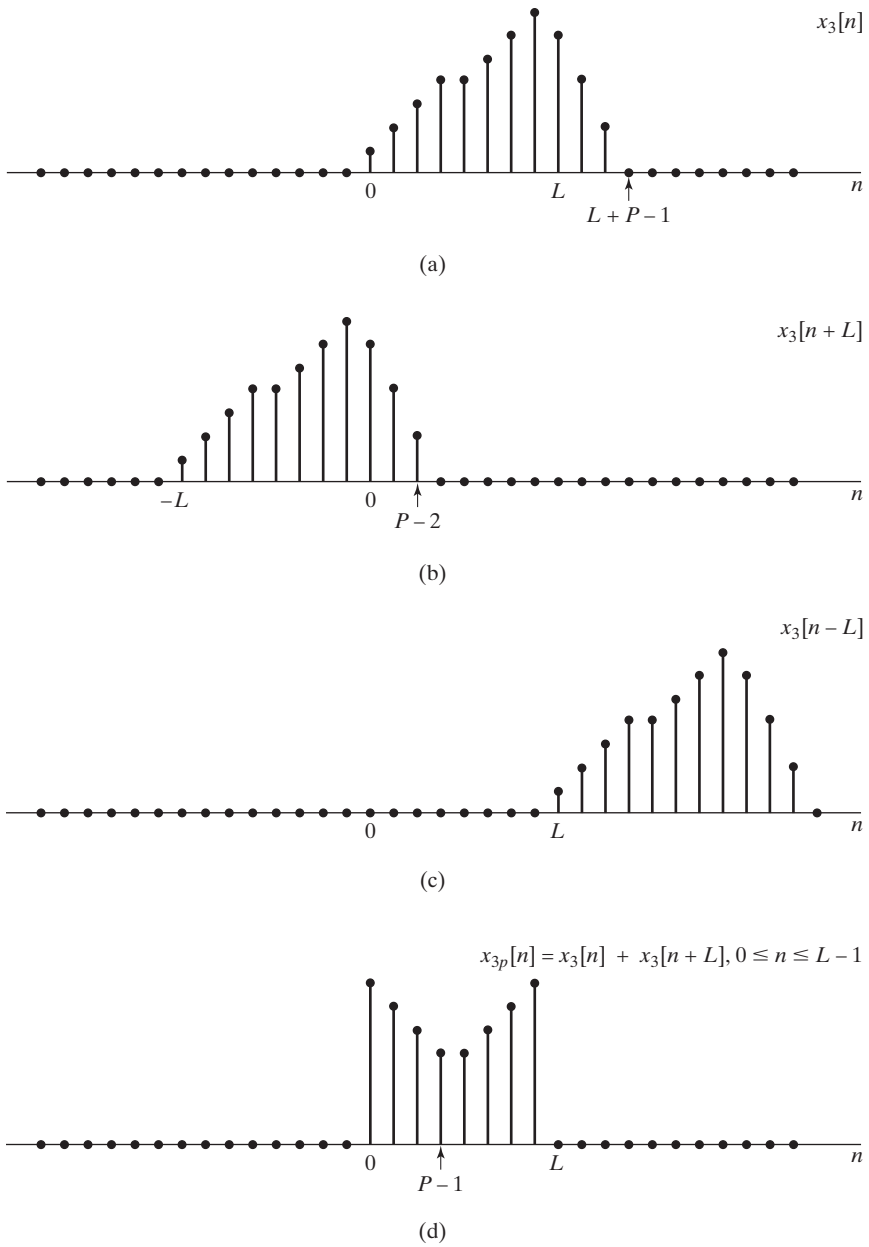


Figura 8.20 Interpretación de la convolución circular como una convolución lineal seguida por una solapamiento, para la convolución lineal de las dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de la Figura 8.19.

la señal completa y realizar después el procedimiento comentado utilizando una DFT de un gran número de puntos, esto es bastante poco práctico. Otra consideración es que en este método de filtrado, no se pueden calcular muestras filtradas hasta haber almacenado toda la señal de entrada. En general es deseable evitar este gran retardo de proceso. La solución a ambos problemas es utilizar *convolución por bloques*. En este procedimiento, la señal que se va a filtrar se divide en secciones de longitud L.

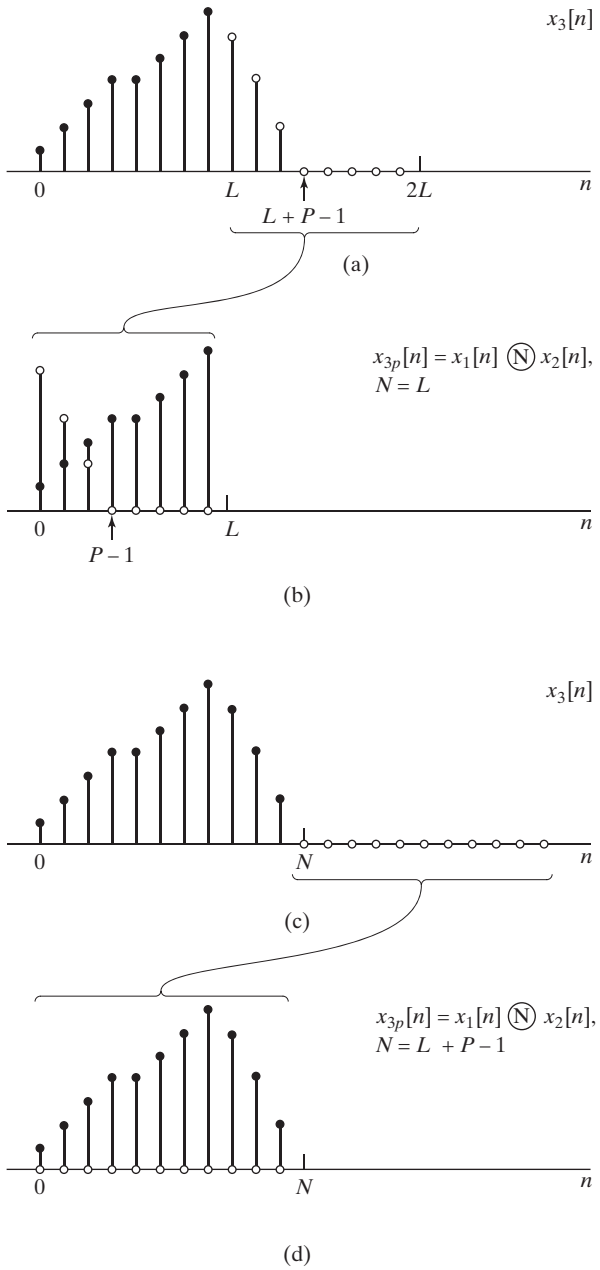


Figura 8.21 Ilustración de la forma en que el resultado de la convolución se "enrolla". (a) y (b) $N = L$, de forma que la "cola" de solapamiento solapa con las primeras $(P - 1)$ muestras. (c) y (d) $N = (L + P - 1)$, de forma que no hay solapamiento.

Cada sección se convoluciona con la respuesta del filtro de longitud finita y las secciones filtradas se combinan de forma apropiada. El filtrado lineal de cada bloque se puede realizar utilizando la DFT.

Como ilustración y para desarrollar el procedimiento de combinación de las secciones filtradas, consideremos la respuesta al impulso $h[n]$ de longitud P y la señal $x[n]$ que se muestran en la Figura 8.22. De aquí en adelante supondremos que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y que la longitud de $x[n]$ es mucho mayor que P. La secuencia $x[n]$ se puede representar como una suma de segmentos de longitud finita L,

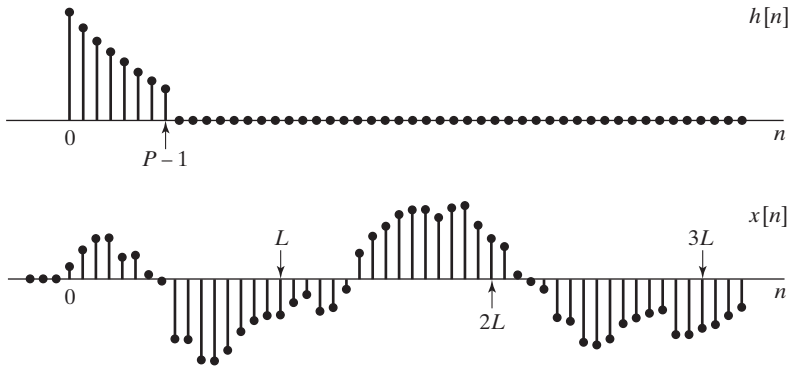


Figura 8.22 La respuesta al impulso de longitud finita $h[n]$ y la señal $x[n]$ de longitud indefinida que se van a filtrar.

es decir,

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL], \tag{8.140}$$

siendo

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.141}$$

La Figura 8.23(a) ilustra esta segmentación para la señal $x[n]$ de la Figura 8.22. Observe que dentro de cada segmento $x_r[n]$, la primera muestra está en $n = 0$. Sin embargo, la muestra cero de $x_r[n]$ es la muestra rL de la secuencia $x[n]$. Esto se muestra en la Figura 8.23(a) dibujando los segmentos en sus posiciones desplazadas pero indicando la redefinición del origen de tiempos.

Como la convolución es una operación lineal e invariante con el tiempo, se deduce de la Ecuación (8.140) que

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \tag{8.142}$$

siendo

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]. \tag{8.143}$$

Como las secuencias $x_r[n]$ sólo tienen L valores distintos de cero y $h[n]$ es de longitud P, cada uno de los términos $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ es de longitud $(L + P - 1)$. Por tanto, la convolución lineal $x_r[n] * h[n]$ se puede obtener por el procedimiento descrito anteriormente utilizando transformadas DFT de N puntos, siendo $N \geq L + P - 1$. Como el comienzo de cada sección de entrada está separado de sus vecinos por L puntos y cada sección filtrada es de longitud $(L + P - 1)$, los puntos distintos de cero de las secciones filtradas se solaparán $(P - 1)$ puntos, y esas muestras de solapamiento se deben sumar al realizar la suma de la Ecuación (8.142). Esto se puede ver en la Figura 8.23(b), que muestra las secciones filtradas, $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$. De la misma forma que la señal de entrada se reconstruye sumando los segmentos desplazados de la Figura 8.23(a), el resultado filtrado $x[n] * h[n]$ se construye sumando las secciones filtradas desplazadas que se muestran en la Figura 8.23(b). Este procedimiento de construcción de la salida filtrada se denomina a menudo *método de solapamiento–suma*, ya que las secciones filtradas se solapan y se suman al construir la salida. El solapamiento se produce porque la convolución lineal de cada sección con la respuesta al impulso es, en general, mayor que la longitud de la sección. El método

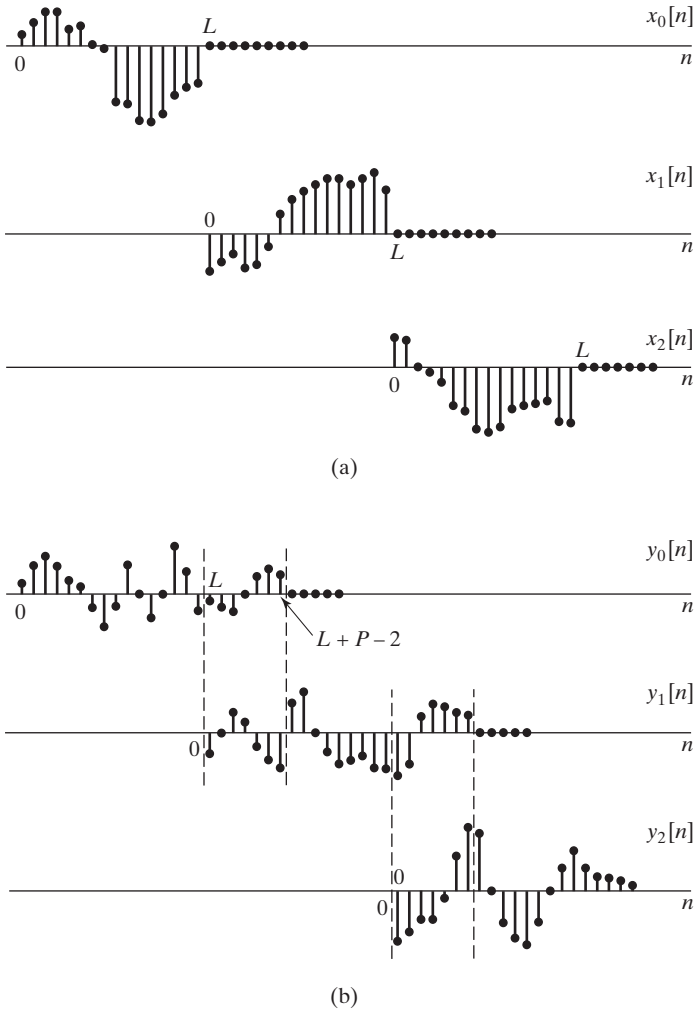
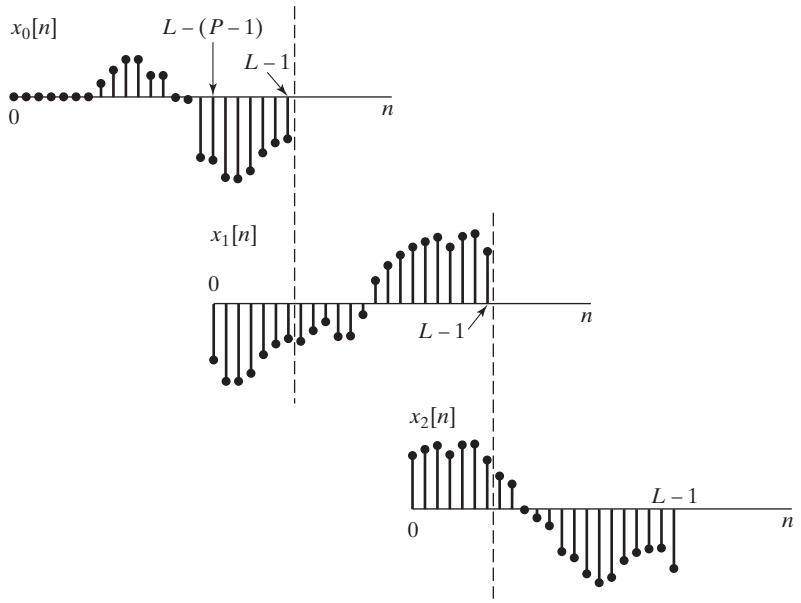


Figura 8.23 (a) Descomposición de la señal $x[n]$ de la Figura 8.22 en secciones de longitud L que no se solapan. (b) Resultado de convolucionar cada sección con $h[n]$.

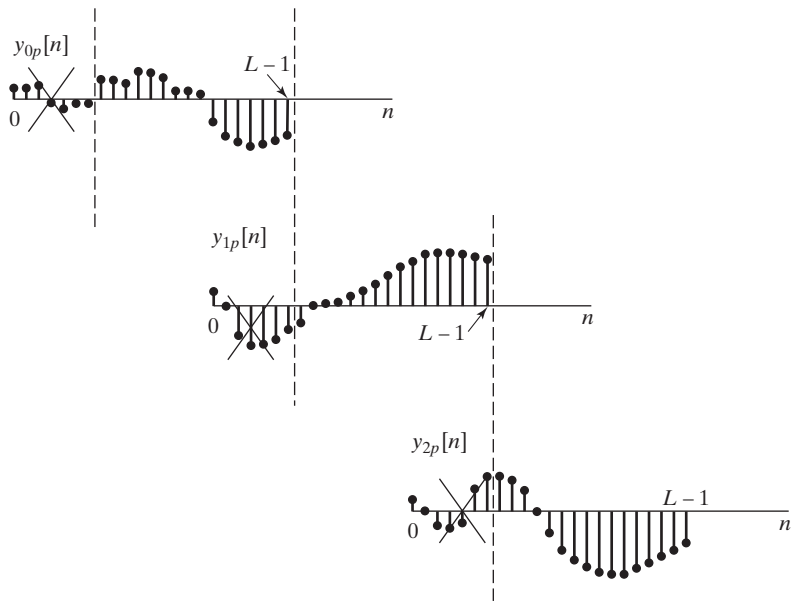
de solapamiento–suma para realizar convolución por bloques no está ligado a la DFT ni a la convolución circular. Se puede ver claramente que todo lo que se requiere es calcular las convoluciones de menor longitud y combinar los resultados adecuadamente.

Un procedimiento alternativo de convolución por bloques denominado generalmente *método de solapamiento–almacenamiento*, consiste en realizar una convolución circular de L puntos de la respuesta al impulso $h[n]$ de P puntos con un segmento de L puntos, $x_r[n]$ e identificar la parte de la convolución circular que corresponde a la convolución lineal. Los segmentos de salida resultantes se "pegan juntos" para formar la salida. Concretamente, veremos que si una secuencia de L puntos se convoluciona circularmente con una secuencia de P puntos ($P < L$), los primeros $(P-1)$ puntos del resultado son incorrectos y los restantes puntos son idénticos a los que se obtendrían realizando la convolución lineal. Por tanto, se puede dividir $x[n]$ en secciones de longitud L de forma que cada sección de entrada se solape con la sección precedente $(P-1)$ puntos. Es decir, si definimos las secciones como

$$x_r[n] = x[n + r(L-P+1) - P + 1], \qquad 0 \le n \le L-1, \tag{8.144}$$



(a)



(b)

Figura 8.24 (a) Descomposición de la señal $x[n]$ de la Figura 8.22 en secciones que solapan de longitud L. (b) Resultado de convolucionar cada sección con $h[n]$. Se indican las porciones de cada sección filtrada que se descartan para formar la convolución lineal.

donde, como antes, hemos definido el origen de tiempos para cada sección al principio de esa sección en vez de en el origen de $x[n]$. Este método de seccionar la secuencia se muestra en la Figura 8.24(a). La convolución circular de cada sección con $h[n]$ se denomina $y_{rp}[n]$, donde el subíndice extra p indica que $y_{rp}[n]$ es el resultado de una convolución circular con solapamiento temporal. La Figura 8.24(b) muestra estas secuencias. La parte de cada sección de salida en la región $0 \leq n \leq P-2$ es la parte que hay que descartar. Las restantes muestras de las secciones sucesivas se van colocando una detrás de otra para formar la salida filtrada. Es decir,

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L-P+1) + P - 1], \tag{8.145}$$

siendo

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P-1 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{8.146}$$

Este procedimiento se denomina método de solapamiento-almacenamiento porque los segmentos de entrada se solapan de forma que cada sección de entrada sucesiva consta de $(L-P+1)$ nuevos puntos y $(P-1)$ puntos almacenados de la sección anterior.

La utilidad de los métodos de solapamiento-suma y solapamiento-almacenamiento para realizar la convolución por bloques puede no resultar inmediatamente aparente. En el Capítulo 9 consideraremos algoritmos altamente eficientes para realizar la DFT. Estos algoritmos, denominados colectivamente transformada rápida de Fourier (FFT) son tan eficientes que, incluso para respuestas al impulso FIR de longitud modesta (del orden de 25 o 30), puede ser más ventajoso realizar la convolución por bloques utilizando la DFT que realizar la convolución lineal directamente. La longitud P para la que el método de la DFT empieza a ser más eficiente es, por supuesto, dependiente del hardware y del software disponible para realizar los cálculos (véase Stockam, 1966 y Helms, 1967).

8.8. LA TRANSFORMADA DISCRETA DEL COSENO (DCT)

La DFT es quizá el ejemplo más común de una clase general de transformadas de longitud finita de la forma

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\phi_k^*[n], \tag{8.147}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} A[k]\phi_k[n], \tag{8.148}$$

siendo las secuencias $\phi_k[n]$, denominadas *secuencias de la base,* ortogonales entre sí. Es decir,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \tag{8.149}$$

En el caso de la DFT, las secuencias de la base son las exponenciales complejas periódicas $e^{j2\pi kn/N}$, y la secuencia $A[k]$ es, en general, compleja incluso aunque la secuencia $x[n]$ sea real. Es natural preguntarse si existen conjuntos de secuencias de la base reales que produzcan secuencias de transformada $A[k]$ con valores reales cuando $x[n]$ sea real. Esta idea ha llevado a la definición de otras representaciones basadas

en transformadas ortogonales, como las transformadas de Haar, las transformadas de Hadamard (Elliot y Rao, 1982) y las transformadas de Hartley (Bracewell, 1983, 1984, 1989) (la definición y propiedades de la transformada de Hartley se consideran en el Problema 8.68). La DCT (*Discrete Cosine Transform*) o transformada discreta del coseno es otra transformada ortogonal para secuencias reales (véase Ahmed, Natarajan y Rao, 1974 y Rao y Yip, 1990). La DCT está relacionada muy de cerca con la DFT y se ha convertido en una herramienta útil e importante en diversas aplicaciones de tratamiento de señales, particularmente en la compresión de voz e imagen. En esta sección concluiremos nuestra presentación de la DFT abordando la DCT y mostrando su relación con la DFT.

8.8.1. Definiciones de la DCT

La DCT es una transformada con la forma de las Ecuaciones (8.147) y (8.148) en donde las secuencias de la base $\phi_k[n]$ son cosenos. Como los cosenos son periódicos y tienen simetría par, la extensión de $x[n]$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq (N-1)$ en la ecuación de síntesis (8.148) será periódica y simétrica. En otras palabras, de la misma forma que la DFT asume la hipótesis implícita de periodicidad, la DCT asume las hipótesis implícitas de periodicidad y *simetría par*.

En el desarrollo de la DFT representamos las secuencias de longitud finita formando primero secuencias periódicas a partir de las cuales se recuperaban las secuencias de longitud finita, y empleando después un desarrollo en función de exponenciales complejas periódicas. De forma similar, la DCT corresponde a formar una secuencia periódica y simétrica a partir de la secuencia de longitud finita de tal forma que se pueda recuperar de forma única dicha secuencia de longitud finita. Dado que existen muchas formas de hacer esto, hay muchas definiciones de la DCT. En la Figura 8.25 se pueden ver 17 muestras de cuatro ejemplos de extensiones simétricas y periódicas de una secuencia de cuatro puntos. La secuencia de longitud finita original se muestra en cada una de las subfiguras como muestras con puntos negros. Las secuencias son todas periódicas (de periodo 16 o inferior). En cada caso, la secuencia de longitud finita se puede extraer fácilmente con los cuatro primeros puntos de un periodo. Por conveniencia, llamaremos $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$, $\tilde{x}_3[n]$ y $\tilde{x}_4[n]$, a las secuencias periódicas que se obtienen replicando con periodo 16 cada una de las cuatro subsecuencias de las Figuras 8.25(a), (b), (c) y (d), respectivamente. Nótese que $\tilde{x}_1[n]$ tiene periodo $(2N-2) = 6$ y simetría par alrededor de $n = 0$ y $n = (N-1) = 3$. La secuencia $\tilde{x}_2[n]$ tiene periodo $2N = 8$ y simetría par alrededor de los puntos de "mitad de muestra" $n = -\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{2}$. La secuencia $\tilde{x}_3[n]$ tiene periodo $4N = 16$ y simetría par alrededor de $n = 0$ y $n = 8$. La secuencia $\tilde{x}_4[n]$ tiene también periodo $4N = 16$ y simetría par alrededor de los puntos de "mitad de muestra" $n = -\frac{1}{2}$ y $n = (2N - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$.

Los cuatro casos diferentes que se muestran en la Figura 8.25 ilustran la periodicidad implícita en las cuatro formas comunes de la DCT, denominadas respectivamente DCT-1, DCT-2, DCT-3 y DCT-4. Se puede demostrar (véase Martucci, 1994) que hay cuatro formas más de crear una secuencia periódica par a partir de $x[n]$, lo que implica otras cuatro posibles DCT. Además, es también posible crear ocho secuencias periódicas reales con simetría impar a partir de $x[n]$, lo que nos conduciría a ocho versiones diferentes de la *transformada discreta del seno* (DST, *discrete sine transform*), en la que las funciones de la base de la representación ortonormal son senos. Estas transformadas constituyen una familia de 16 transformadas ortonormales de secuencias reales. De todas ellas, las que más se utilizan son la DCT-1 y la DCT-2, por lo que en el resto de esta exposición nos centraremos en ellas.

8.8.2. Definición de la DCT-1 y la DCT-2

Todas las extensiones periódicas que conducen a las diferentes formas de la DCT se pueden ver como una suma de copias desplazadas de las secuencias de N puntos $\pm x[n]$ y $\pm x[-n]$. Las diferencias entre

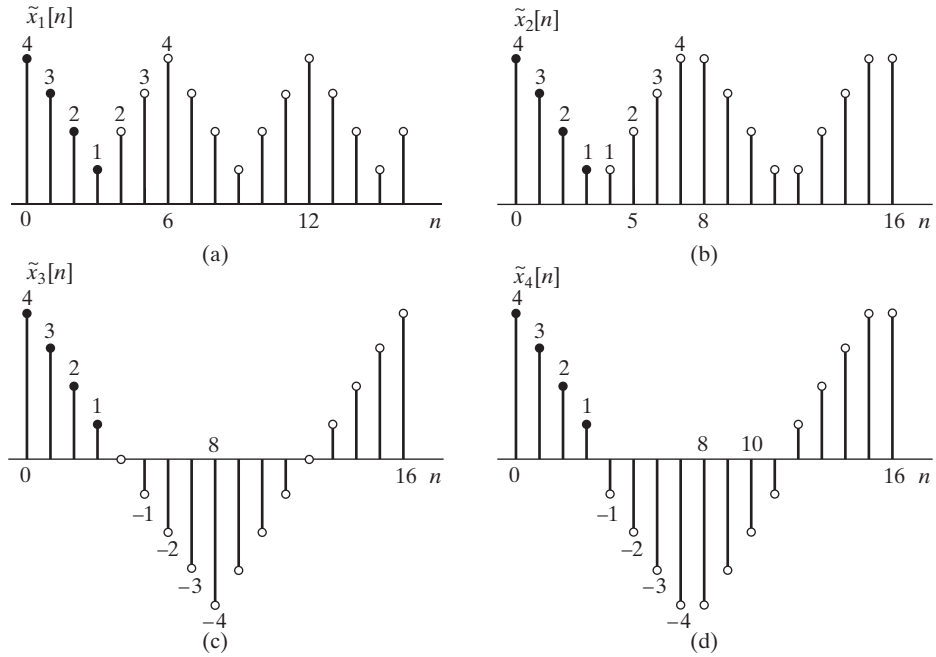


Figura 8.25 Cuatro formas de extender una secuencia de cuatro puntos $x[n]$ de forma periódica y simétrica. La secuencia de longitud finita $x[n]$ se dibuja con puntos negros. (a) Extensión periódica de tipo 1 para la DCT-1. (b) Extensión periódica de tipo 2 para la DCT-2. (c) Extensión periódica de tipo 3 para la DCT-3. (d) Extensión periódica de tipo 4 para la DCT-4.

las extensiones para la DCT-1 y la DCT-2 dependen de si los puntos extremos se solapan con versiones desplazadas de sí mismos y, si es así, qué puntos extremos se solapan. Para la DCT-1, $x[n]$ se modifica primero en sus extremos y después se extiende para que su periodo sea $2N-2$. La secuencia periódica resultante es

$$\tilde{x}_1[n] = x_\alpha[((n))_{2N-2}] + x_\alpha[((-n))_{2N-2}], \tag{8.150}$$

donde $x_\alpha[n]$ es la secuencia modificada $x_\alpha[n] = \alpha[n]x[n]$, con

$$\alpha[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \text{ y } N-1, \\ 1, & 1 \le n \le N-2. \end{cases} \tag{8.151}$$

La ponderación de los extremos compensa el hecho de que se doblan cuando los dos términos de la Ecuación (8.150) se solapan en $n = 0$, $n = (N-1)$ y en los correspondientes puntos separados de esos por múltiplos enteros de $(2N-2)$. Con esta ponderación, se puede verificar fácilmente que $x[n] = \tilde{x}_1[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. La secuencia periódica resultante $\tilde{x}_1[n]$ tiene simetría periódica par alrededor de los puntos $n = 0$ y $n = N-1$, $2N-2$, etc. Denominaremos a esta simetría, simetría periódica de *tipo-1*. La Figura 8.25 (a) es un ejemplo de simetría de tipo-1 donde $N = 4$ y la secuencia periódica $\tilde{x}_1[n]$ tiene periodo $2N-2 = 6$. La DCT-1 se define mediante la pareja de transformadas

$$X^{c1}[k] = 2\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right), \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{8.152}$$

$$x[n] = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k]X^{c1}[k]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right), \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.153}$$

donde $\alpha[n]$ se define en la Ecuación (8.151).

Para el caso de la DCT-2, $x[n]$ se extiende hasta tener periodo $2N$, y la secuencia periódica es

$$\tilde{x}_2[n] = x[((n))_{2N}] + x[((-n-1))_{2N}], \tag{8.154}$$

Como los puntos extremos no se solapan, no se requiere modificarlos para asegurar que $x[n] = \tilde{x}_2[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. En este caso, que denominaremos simetría periódica de *tipo-2*, la secuencia periódica $\tilde{x}_2[n]$ tiene simetría periódica par alrededor de los puntos de "mitad de muestra" $-1/2$, $N-1/2$, $2N-1/2$, etc. Esto se ilustra en la Figura 8.25(b) para $N = 4$ y periodo $2N = 8$. La DCT-2 se define mediante la pareja de transformadas

$$X^{c2}[k] = 2\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{8.155}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]X^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.156}$$

donde la DCT-2 inversa utiliza la función de ponderación

$$\beta[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ 1, & 1 \le k \le N-1. \end{cases} \tag{8.157}$$

En muchos casos, las definiciones de la DCT incluyen factores de normalización que producen transformaciones *unitarias*.[4] Por ejemplo, la DCT-2 se define a menudo como

$$\tilde{X}^{c2}[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}\tilde{\beta}[k]\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{8.158}$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\beta}[k]\tilde{X}^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{8.159}$$

siendo

$$\tilde{\beta}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0, \\ 1, & k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{8.160}$$

Comparando estas ecuaciones con las Ecuaciones (8.155) y (8.156), podemos ver que los factores multiplicativos 2, $1/N$ y $\beta[k]$ se han redistribuido entre las transformadas directa e inversa (se puede aplicar

[4]Para que la DCT sea una transformación unitaria debe ser ortonormal y además tener la propiedad de que $\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2 = \sum_{k=0}^{N-1}(X^{c2}[k])^2$.

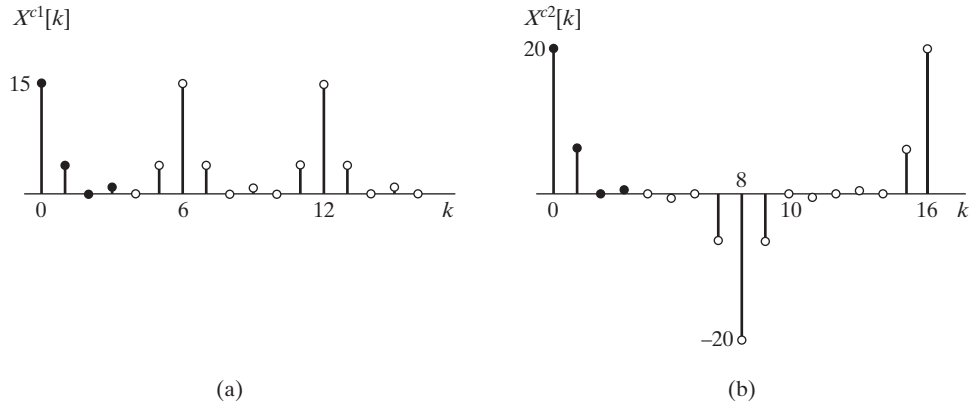


Figura 8.26 DCT-1 y DCT-2 de la secuencia de cuatro puntos utilizada en la Figura 8.25. (a) DCT-1. (b) DCT-2.

una normalización similar para definir una versión normalizada de la DCT-1). Aunque esta normalización crea una transformación unitaria, las definiciones de las Ecuaciones (8.152) y (8.153) y de las Ecuaciones (8.155) y (8.156) son más fáciles de relacionar con la DFT tal como la hemos definido en este capítulo. Por tanto, en la presentación que sigue, utilizaremos las definiciones anteriores en lugar de las definiciones normalizadas que se pueden encontrar, por ejemplo, en Rao y Yip (1990) y en muchos otros textos.

Aunque normalmente evaluaremos la DCT sólo para $0 \leq k \leq N-1$, nada evita que se evalúen las ecuaciones de la DCT fuera de ese intervalo, como se ilustra en la Figura 8.26, donde los valores de la DCT en el intervalo $0 \leq k \leq N-1$ se muestran con puntos negros. Estas figuras ilustran que las DCT son también secuencias periódicas. Sin embargo, la simetría de la secuencia transformada no es siempre la misma simetría periódica implícita de la secuencia de entrada. Mientras que $\tilde{x}_1[n]$ y la extensión de $X^{c1}[k]$ tienen ambas simetría de tipo 1, comparando las Figuras 8.25(c) y 8.26(b) podemos ver que $X^{c2}[k]$ tiene la misma simetría que $\tilde{x}_3[n]$ y no la de $\tilde{x}_2[n]$. Además, $X^{c2}[n]$ se extiende con periodo $4N$, mientras que el periodo de $\tilde{x}_2[n]$ es de $2N$.

Como las DCT son transformadas ortogonales, tienen propiedades con forma similar a las de la DFT. Estas propiedades se elaboran en detalle en Ahmed, Natarajan y Rao (1974) y en Rao y Yip (1990).

8.8.3. Relación entre la DFT y la DCT-1

Como podría esperarse, existe una estrecha relación entre la DFT y las diversas clases de DCT de secuencias de longitud finita. Para desarrollar esta relación debemos tener en cuenta que, como en la DCT-1, $\tilde{x}_1[n]$ se construye a partir de $x_1[n]$ mediante las Ecuaciones (8.150) y (8.151), tomando un periodo de la secuencia periódica $\tilde{x}_1[n]$ se define la secuencia de longitud finita

$$x_1[n] = x_\alpha[((n))_{2N-2}] + x_\alpha[((-n))_{2N-2}] = \tilde{x}_1[n], \qquad n = 0, 1, \ldots, 2N-3, \tag{8.161}$$

donde $x_\alpha[n] = \alpha[n]x[n]$ es la secuencia real de N puntos con los extremos divididos por 2. A partir de la Ecuación (8.161) se deduce que la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia de $(2N-2)$ puntos $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = X_\alpha[k] + X_\alpha^*[k] = 2Re\{X_\alpha[k]\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-3, \tag{8.162}$$

donde $X_\alpha[k]$ es la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia de N puntos $\alpha[n]x[n]$;es decir, $\alpha[n]x[n]$ se rellena con $(N-2)$ muestras de valor cero. Utilizando la definición de DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia ampliada con ceros obtenemos para $k = 0, 1 \ldots, N-1$,

$$X_1[k] = 2Re\{X_\alpha[k]\} = 2\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right) = X^{c1}[k]. \tag{8.163}$$

Por tanto, la DCT-1 de una secuencia de N puntos es idéntica a la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia ampliada simétricamente $x_1[n]$, y es igual también a dos veces la parte real de los primeros N puntos de la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia ponderada $x_\alpha[n]$.

Como veremos en el Capítulo 9, existen algoritmos computacionales rápidos para el cálculo de la DFT. Estos algoritmos se pueden utilizar para calcular las DFT $X_\alpha[k]$ o $X_1[k]$ en la Ecuación (8.163), proporcionando así un procedimiento adecuado y rápidamente disponible para el cómputo rápido de la DCT-1. Como la definición de la DCT-1 sólo involucra coeficientes reales, existen también algoritmos eficientes para calcular de forma más directa la DCT-1 de secuencias reales, sin necesidad de multiplicaciones ni sumas complejas (véase Ahmed, Natarajan y Rao, 1974 y Chen y Fralick, 1977).

La DCT-1 inversa se puede calcular también utilizando la DFT inversa. Sólo es necesario utilizar la Ecuación (8.163) para construir $X_1[k]$ a partir de $X^{c1}[k]$ y calcular después la DFT inversa de $(2N-2)$ puntos. Concretamente,

$$X_1[k] = \begin{cases} X^{c1}[k], & k = 0, \ldots, N-1, \\ X^{c1}[2N-2-k], & k = N, \ldots, 2N-3, \end{cases} \tag{8.164}$$

y, utilizando la definición de DFT inversa de $(2N-2)$ puntos, se puede calcular la secuencia extendida simétricamente

$$x_1[n] = \frac{1}{2N-2}\sum_{k=0}^{2N-3} X_1[k]e^{j2\pi kn/(2N-2)}, \qquad n = 0, 1, \ldots, 2N-3, \tag{8.165}$$

de donde se puede obtener $x[n]$ extrayendo los primeros N puntos. Es decir, $x[n] = x_1[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Sustituyendo la Ecuación (8.164) en la Ecuación (8.165), se deduce también que la relación de la DCT-1 inversa se puede expresar en función de $X^{c1}[k]$ y funciones coseno, como en la Ecuación (8.153). Esto se sugiere como ejercicio en el Problema 8.71.

8.8.4. Relación entre la DFT y la DCT-2

Es también posible expresar la DCT-2 de una secuencia de longitud finita $x[n]$ en función de la DFT. Para desarrollar la relación podemos observar que tomando un periodo de la secuencia periódica $\tilde{x}_2[n]$ se define la secuencia de $2N$ puntos

$$x_2[n] = x[((n))_{2N}] + x[((-n-1))_{2N}] = \tilde{x}_2[n], \qquad n = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{8.166}$$

donde $x[n]$ es la secuencia real original de N puntos. Utilizando la Ecuación (8.166), se deduce que la DFT de $2N$ puntos de la secuencia real de $2N$ puntos $x_2[n]$ es

$$X_2[k] = X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{8.167}$$

donde $X[k]$ es la DFT de $2N$ puntos de la secuencia de N puntos $x[n]$. Es decir, en este caso, $x[n]$ se rellena con N muestras de valor cero. Utilizando la Ecuación (8.167) obtenemos

$$\begin{aligned} X_2[k] &= X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)} \\ &= e^{j\pi k/(2N)}\left(X[k]e^{-j\pi k/(2N)} + X^*[k]e^{j\pi k/(2N)}\right) \\ &= e^{j\pi k/(2N)} 2Re\left\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\right\}. \end{aligned} \tag{8.168}$$

A partir de la definición de la DFT de $2N$ puntos de la secuencia ampliada con ceros se deduce que

$$Re\left\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right). \tag{8.169}$$

Por tanto, utilizando las Ecuaciones (8.155), (8.167) y (8.169), se puede expresar $X^{c2}[k]$ en función de $X[k]$, la DFT de $2N$ puntos de la secuencia de N puntos $x[n]$, de la siguiente forma

$$X^{c2}[k] = 2Re\left\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\right\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{8.170}$$

o en función de la DFT de $2N$ puntos de la secuencia extendida simétricamente $x_2[n]$ definida en la Ecuación (8.166) como

$$X^{c2}[k] = e^{-j\pi k/(2N)} X_2[k], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{8.171}$$

y equivalentemente

$$X_2[k] = e^{j\pi k/(2N)} X^{c2}[k], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{8.172}$$

Como en el caso de la DCT-1, se pueden utilizar algoritmos rápidos para calcular las DFT de las Ecuaciones (8.170) y (8.171). Makhoul (1980) considera otras formas de utilizar la DFT para calcular la DCT-2 (véase también el Problema 8.72). Además, en (Rao y Yip, 1990) se desarrollan algoritmos rápidos para el cálculo de la DCT-2.

La DCT-2 inversa se puede calcular también utilizando la DFT inversa. El procedimiento utiliza la Ecuación (8.172) junto con la propiedad de simetría de la DCT-2. Concretamente, se puede verificar fácilmente por sustitución directa en la Ecuación (8.155) que

$$X^{c2}[2N-k] = -X^{c2}[k], \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{8.173}$$

de donde se deduce que

$$X_2[k] = \begin{cases} X^{c2}[0], & k = 0, \\ e^{j\pi k/(2N)} X^{c2}[k], & k = 1, \ldots, N-1, \\ 0, & k = N, \\ -e^{j\pi k/(2N)} X^{c2}[2N-k], & k = N+1, N+2, \ldots, 2N-1. \end{cases} \tag{8.174}$$

Utilizando la definición de DFT inversa se puede calcular la secuencia extendida simétricamente

$$x_2[n] = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} X_2[k]e^{j2\pi kn/(2N)}, \qquad n = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{8.175}$$

de donde se puede obtener $x[n] = x_2[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Sustituyendo la Ecuación (8.174) en la Ecuación (8.175) se puede demostrar fácilmente que la relación de la DCT-2 inversa es la de la Ecuación (8.156) (véase el Problema 8.73).

8.8.5. Propiedad de compactación de la energía de la DCT-2

La DCT-2 se utiliza en muchas aplicaciones de compresión de datos con preferencia sobre la DFT debido a una propiedad que se denomina frecuentemente "compactación de la energía". Concretamente, la DCT-2 de una secuencia de longitud finita tiene a menudo los coeficientes más concentrados en los índices bajos que la DFT. La importancia de este hecho surge del teorema de Parseval, que para la DCT-1 es

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]|x[n]|^2 = \frac{1}{2N-2}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k]|X^{c1}[k]|^2, \tag{8.176}$$

y para la DCT-2

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]|X^{c2}[k]|^2, \tag{8.177}$$

donde $\beta[k]$ está definida en la Ecuación (8.157). Se dice que la DCT está concentrada en los índices bajos de la transformada si los restantes coeficientes de la misma se pueden poner a cero sin afectar significativamente a la energía de la señal. El siguiente ejemplo ilustra esta propiedad de compactación de la energía.

Ejemplo 8.13 Compactación de la energía de la DCT-2

Considere una entrada de prueba de la forma

$$x[n] = a^n \cos(\omega_0 n + \phi), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{8.178}$$

Esta señal se muestra en la Figura 8.27 para $a = 0{,}9$, $\omega_0 = 0{,}1\pi$, $\phi = 0$ y $N = 32$.

Las partes real e imaginaria de la DFT de 32 puntos de la secuencia de 32 puntos presentada en la Figura 8.27 se ilustran en las Figuras 8.28(a) y (b), respectivamente. La Figura 8.28(c) muestra la DCT-2 de la secuencia. En el caso de la DFT, las partes real e imaginaria se muestran para $k = 0, 1, \ldots, 16$. Como la señal es real, $X[0]$ y $X[16]$ son reales. Los restantes valores son complejos y simétricos conjugados. Por tanto, los 32 números reales de las Figuras 8.28(a) y (b) especifican completamente la DFT de 32 puntos. En el caso de la DCT-2 se muestran los 32 valores reales. Se puede ver claramente que los valores de la DCT-2 están altamente concentrados en índices bajos, por lo que el teorema de Parseval sugiere que la energía de la secuencia está más concentrada en la representación de la DCT-2 que en la representación de la DFT.

Esta propiedad de concentración de la energía se puede cuantificar truncando las dos representaciones y comparando el valor cuadrático medio del error de aproximación cuando ambas utilizan el mismo número de coeficientes reales. Para hacer esto definimos

$$x_m^{\text{dft}}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} T_m[k]X[k]e^{j2\pi kn/N}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{8.179}$$

donde, en este caso, $X[k]$ es la DFT de N puntos de $x[n]$ y

$$T_m[k] = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le (N-1-m)/2, \\ 0, & (N+1-m)/2 \le k \le (N-1+m)/2, \\ 1, & (N+1+m)/2 \le k \le N-1. \end{cases}$$

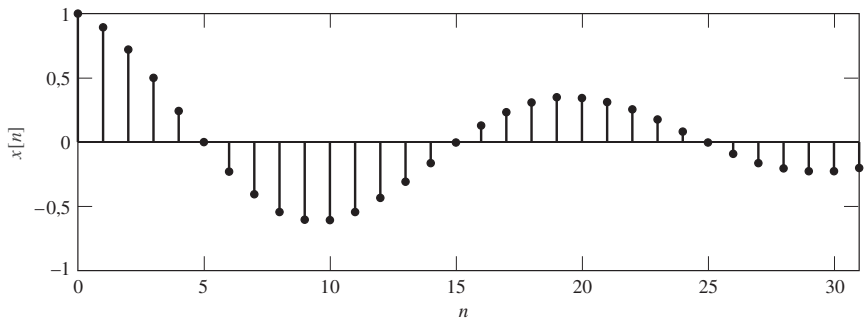


Figura 8.27 Señal de prueba para comparar la DFT y la DCT.

Si $m = 1$, el término $X[N/2]$ se elimina. Si $m = 3$, los términos $X[N/2]$ y $X[N/2-1]$ y su correspondiente complejo conjugado $X[N/2+1]$ se eliminan, y así sucesivamente. Es decir, $x_m^{\text{dft}}[n]$ para $m = 1, 3, 5, \ldots, N-1$ es la secuencia que se sintetiza omitiendo simétricamente m coeficientes de la DFT.[5] Con la excepción del valor de la DFT, $X[N/2]$, que es real, cada valor de la DFT omitido y su correspondiente complejo conjugado corresponde realmente a omitir dos números reales. Por ejemplo, el caso de $m = 5$ correspondería a poner a cero los coeficientes $X[14]$, $X[15]$, $X[16]$, $X[17]$ y $X[18]$ al sintetizar $x_5^{\text{dft}}[n]$ a partir de la DFT de 32 puntos que se muestra en las Figuras 8.28 (a) y (b).

Asimismo, se puede truncar la representación de la DCT-2 con lo que se obtiene

$$x_m^{\text{dct}}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-m} \beta[k] X^{c2}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{8.180}$$

En este caso, si $m = 5$, se omiten los coeficientes de la DCT-2 $X^{c2}[27], \ldots, X^{c2}[31]$ en la síntesis de $x_m^{\text{dct}}[n]$ a partir de los valores de la DCT-2 que se muestran en la Figura 8.28(c). Como esos coeficientes son muy pequeños, $x_5^{\text{dct}}[n]$ diferirá muy poco de $x[n]$.

Para demostrar cómo dependen de m los errores de aproximación de la DFT y de la DCT-2 definimos

$$E^{\text{dft}}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m^{\text{dft}}[n]|^2$$

y

$$E^{\text{dct}}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m^{\text{dct}}[n]|^2$$

que son los valores cuadráticos medios de los errores de aproximación para la DFT y la DCT truncadas, respectivamente. Estos errores se muestran en la Figura 8.29, donde $E^{\text{dft}}[m]$ se indica con el símbolo $\circ$ y $E^{\text{dct}}[m]$ con el símbolo $\bullet$. En los casos especiales de $m = 0$ (sin truncamiento) y de $m = N-1$ (sólo se retiene el valor de la componente continua), la función de truncamiento de la DFT es $T_0[k] = 1$ para $0 \le k \le N-1$ y $T_{N-1}[k] = 0$ para $1 \le k \le N-1$ y $T_{N-1}[0] = 1$. En estos casos, ambas representaciones producen el mismo error. Para valores de $1 \le m \le 30$, el error de la DFT crece constantemente a medida que m crece, mientras que el error de la DCT permanece en valores muy pequeños hasta $m = 25$, lo que implica que los 32 valores de la secuencia $x[n]$ se pueden representar con un error más pequeño que utilizando sólo siete coeficientes de la DCT.

[5]Por simplicidad supondremos que N es un número entero par.

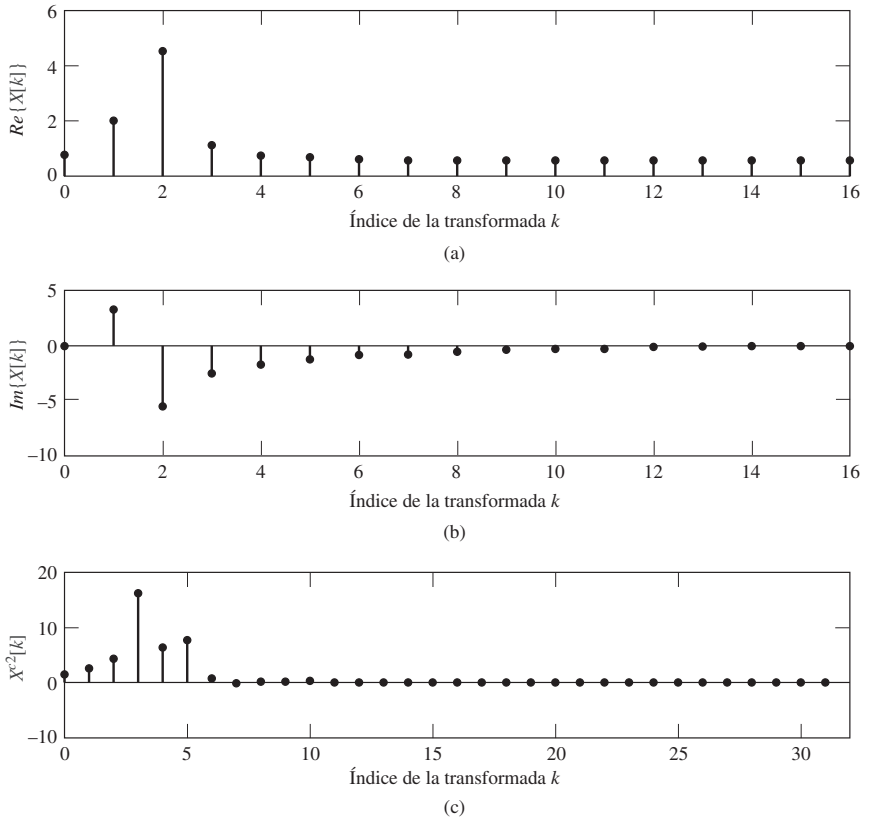


Figura 8.28 (a) Parte real de la DFT de 32 puntos. (b) Parte imaginaria de la DFT de 32 puntos. (c) DCT-2 de 32 puntos de la señal de prueba de la Figura 8.27.

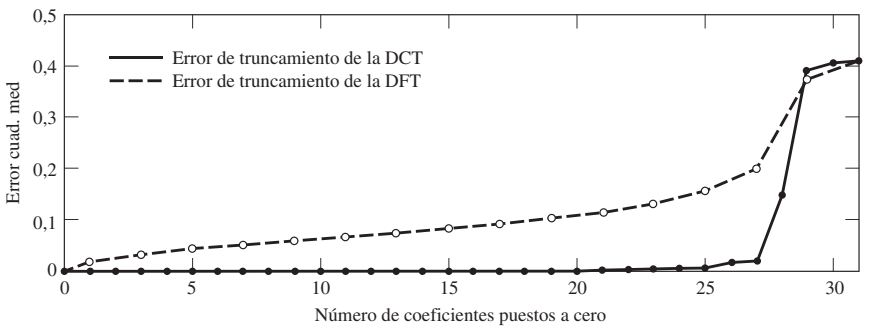


Figura 8.29 Comparación de los errores de truncamiento de la DFT y de la DCT.

La señal del Ejemplo 8.13 es una señal de baja frecuencia con fase cero que decrece exponencialmente. Hemos escogido este ejemplo muy cuidadosamente para resaltar la propiedad de compactación de la energía. No se producen resultados tan espectaculares para cualquier señal $x[n]$. Las señales paso alto e incluso algunas señales con la forma de la Ecuación (8.178) no permiten obtener diferencias tan

importantes. No obstante, en muchos casos de interés relativos a la compresión de datos, la DCT-2 proporciona una clara ventaja sobre la DFT. Se puede demostrar (véase Rao y Yip, 1990) que la DCT es casi óptima en el sentido de obtener el mínimo valor cuadrático medio del error de truncamiento para secuencias con funciones de correlación de tipo exponencial.

8.8.6. Aplicaciones de la DCT

La aplicación más importante de la DCT-2 es la compresión de señales, que es un aspecto clave de muchos algoritmos estandarizados (véanse Jayant y Noll, 1984 y Rao y Hwang, 1996, Taubman y Marcellin, 2002, Bosi y Glodberg, 2003 y Spanias, Painter y Atti, 2007). En esta aplicación, los bloques de la señal se representan mediante sus transformadas del coseno. La popularidad de la DCT en compresión de señales se debe a su propiedad de compactación de la energía, que hemos ilustrado con un ejemplo simple en la sección anterior.

Las DCT son transformadas ortogonales como la DFT y por tanto tienen muchas propiedades similares a las de la DFT que las hacen muy flexibles para manejar las señales que representan. Una de las propiedades más importantes de la DFT es que la convolución periódica de dos secuencias de longitud finita corresponde a la multiplicación de sus correspondientes DFT. En la Sección 8.7 hemos visto que es posible explotar esta propiedad para calcular convoluciones lineales calculando solamente las DFT. En el caso de la DCT, el correspondiente resultado es que la multiplicación de transformadas DCT corresponde a la convolución periódica de las secuencias simétricamente extendidas subyacentes. Sin embargo, surgen otras complicaciones adicionales. Por ejemplo, la convolución periódica de dos secuencias periódicas simétricas de tipo 2 no es una secuencia de tipo 2, sino una secuencia de tipo 1. Alternativamente, la convolución periódica de una secuencia de tipo 1 con una de tipo 2 del mismo periodo implícito es una secuencia de tipo 2. Por tanto, se requiere una mezcla de transformadas DCT para efectuar la convolución por transformación inversa del producto de las mismas. Hay disponibles muchas más formas de hacer esto, ya que tenemos muchas definiciones diferentes de DCT entre las que elegir. Cada combinación diferente correspondería a la convolución periódica de una pareja de secuencias finitas extendidas periódicamente. Martucci (1994) ofrece una presentación completa del uso de las transformadas DCT y DST para realizar la convolución periódica simétrica.

La multiplicación de transformadas DCT corresponde a un tipo especial de convolución periódica con algunas características que la pueden hacer útil en algunas aplicaciones. Como hemos visto para el caso de la DFT, la convolución periódica se caracteriza por sus efectos en los extremos. De hecho, incluso la convolución lineal de dos secuencias de longitud finita tiene efectos en los extremos a medida que la respuesta al impulso "entra y sale" de la secuencia de entrada. Los efectos en los extremos para la convolución periódica simétrica son diferentes de la convolución ordinaria y de la convolución periódica, realizadas mediante multiplicación de transformadas DFT. La extensión simétrica crea simetría en los puntos extremos. Esto implica un "suavizado" de los límites que mitiga los efectos de borde que aparecen al convolucionar secuencias de longitud finita. Un área en la que la convolución simétrica es particularmente útil es el filtrado de imagen donde aparecen efectos de borde objetables debidos a artefactos de bloques. En esos casos, la DCT puede ser superior a la DFT o incluso a la convolución lineal ordinaria. Al realizar la convolución periódica simétrica multiplicando las DCT, se puede forzar el mismo resultado que en la convolución ordinaria extendiendo las secuencias con un número suficiente de muestras de valor cero situadas al comienzo y al final de cada secuencia.

8.9. RESUMEN

En este capítulo hemos presentado las representaciones de Fourier discretas de secuencias de longitud finita. La mayor parte de nuestra exposición se ha centrado en la transformada discreta de Fourier (DFT),

que se basa en la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto. Definiendo una secuencia periódica en la que cada periodo es idéntico a la secuencia de duración finita, la DFT coincide con un periodo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto. Debido a la importancia de esta periodicidad subyacente, hemos examinado primero las propiedades del desarrollo en serie de Fourier discreto y después hemps interpretado esas propiedades en términos de secuencias de longitud finita. Un resultado importante es que los valores de la DFT son iguales a las muestras de la transformada Z en puntos equiespaciados de la circunferencia unidad. Esto conduce a la noción de solapamiento temporal en la interpretación de las propiedades de la DFT, un concepto utilizado ampliamente en el estudio de la convolución circular y de su relación con la convolución lineal. A continuación, hemos empleado estos resultados para demostrar cómo se puede utilizar la DFT para realizar la convolución lineal de una respuesta al impulso de longitud finita con una señal de longitud indefinida.

El capítulo finaliza con una introducción a la transformada discreta del coseno (DCT). Se demuestra que la DCT y la DFT están estrechamente relacionadas y que comparten un supuesto implícito de periodicidad. La propiedad de concentración de la energía, que es la principal razón de la popularidad de la DCT en compresión de datos, se ha ilustrado con un ejemplo.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

8.1. Suponga que $x_c(t)$ es una señal periódica en tiempo continuo de periodo 1 ms, cuyo desarrollo en serie de Fourier es

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j(2000\pi kt)}.$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier a_k son cero para $|k| > 9$. $x_c(t)$ se muestrea con periodo $T = \frac{1}{6} \times 10^{-3}$ s para formar la señal $x[n]$. Es decir,

$$x[n] = x_c\left(\frac{n}{6000}\right).$$

(a) ¿Es $x[n]$ periódica? Si lo es, ¿cuál es su periodo?
(b) ¿Es la frecuencia de muestreo superior a la frecuencia de Nyquist? Es decir, ¿es T lo suficientemente pequeño como para evitar el solapamiento?
(c) Obtenga los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x[n]$ en función de a_k.

8.2. Suponga que $\tilde{x}[n]$ es una secuencia periódica de periodo N. $\tilde{x}[n]$ es también periódica de periodo $3N$. Sean $\tilde{X}[k]$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{x}[n]$ considerada como una secuencia periódica de periodo N, y sean $\tilde{X}_3[k]$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{x}[n]$ considerada como una secuencia periódica de periodo $3N$.

(a) Exprese $\tilde{X}_3[k]$ en función de $\tilde{X}[k]$.
(b) Calculando explícitamente $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{X}_3[k]$, verifique su resultado del apartado (a) para la secuencia $\tilde{x}[n]$, dada en la Figura P8.2.

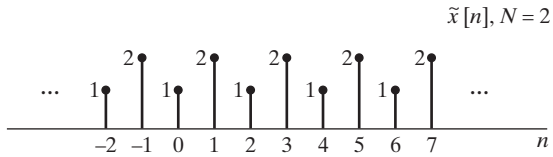


Figura P8.2

8.3. La Figura P8.3 muestra tres secuencias periódicas: $\tilde{x}_1[n]$ a $\tilde{x}_3[n]$. Estas secuencias se pueden desarrollar en serie de Fourier:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}.$$

(a) ¿Para qué secuencias se puede escoger el origen de tiempos de forma que todos los valores de $\tilde{X}[k]$ sean reales?

(b) ¿Para qué secuencias se puede escoger el origen de tiempos de forma que todos los valores de $\tilde{X}[k]$ sean imaginarios (excepto cuando k es un múltiplo entero de N)?

(c) ¿Para qué secuencias $\tilde{X}[k] = 0$ para $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6$?

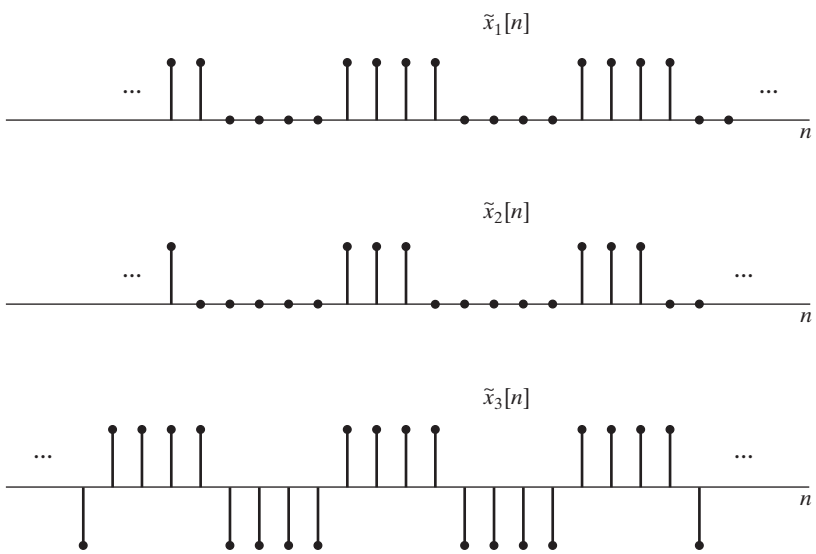


Figura P8.3

8.4. Considere la secuencia $x[n]$ dada por $x[n] = \alpha^n u[n]$. Suponga que $|\alpha| < 1$. A partir de $x[n]$ se construye una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ de la siguiente forma:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN].$$

(a) Determine la transformada de Fourier de $x[n]$, $X(e^{j\omega})$.

(b) Determine el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{x}[n]$, $\tilde{X}[k]$.

(c) ¿Cómo se relaciona $\tilde{X}[k]$ con $X(e^{j\omega})$?

8.5. Calcule la DFT de cada una de las siguientes secuencias de longitud finita considerando que tienen longitud N (siendo N un número par):

(a) $x[n] = \delta[n]$,

(b) $x[n] = \delta[n - n_0], \qquad 0 \le n_0 \le N-1$,

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \quad 0 \le n \le N-1, \\ 0, & n \text{ impar}, \quad 0 \le n \le N-1, \end{cases}$

(d) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N/2-1, \\ 0, & N/2 \le n \le N-1, \end{cases}$

(e) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases}$

8.6. Considere la secuencia compleja

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\omega_0 n}, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases}$$

(a) Obtenga la transformada de Fourier de $x[n]$, $X(e^{j\omega})$.

(b) Obtenga la DFT de N puntos $X[k]$ de la secuencia de longitud finita $x[n]$.

(c) Obtenga la DFT de $x[n]$ para el caso de $\omega_0 = 2\pi k_0/N$, siendo k_0 un entero.

8.7. Considere la secuencia de longitud finita $x[n]$ que se muestra en la Figura P8.7. Sea $X(z)$ la transformada Z de $x[n]$. Si muestreamos $X(z)$ en los puntos $z = e^{j(2\pi/4)k}, k = 0,1,2,3$, se obtiene

$$X_1[k] = X(z)\big|_{z=e^{j(2\pi/4)k}}, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Dibuje la secuencia $x_1[n]$ que se obtiene mediante la DFT inversa de $X_1[k]$.

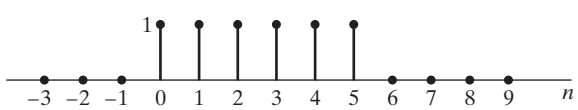


Figura P8.7

8.8. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de la secuencia $x[n] = (0{,}5)^n u[n]$. Sea $y[n]$ una secuencia de duración finita de longitud 10. Es decir, $y[n] = 0, n < 0$ e $y[n] = 0$, para $n \ge 10$. La DFT de 10 puntos de $y[n]$, denominada $Y[k]$, corresponde a 10 muestras equiespaciadas de $X(e^{j\omega})$. Es decir, $Y[k] = X(e^{j2\pi k/10})$. Determine $y[n]$.

8.9. Considere una secuencia de duración finita $x[n]$ de 20 puntos de forma que $x[n] = 0$ para $0 \le n \le 19$, y sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de $x[n]$.

(a) Si se desea evaluar $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 4\pi/5$ calculando una DFT de M puntos, determine el mínimo valor posible de M y desarrolle un método para obtener $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 4\pi/5$ utilizando ese valor de M.

(b) Si se desea evaluar $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 10\pi/27$ calculando una DFT de L puntos, determine el mínimo valor posible de L y desarrolle un método para obtener $X(e^{j10\pi/27})$ utilizando ese valor de L.

8.10. Las dos secuencias de ocho puntos $x_1[n]$ y $x_2[n]$ que se muestran en la Figura P8.10 tienen como DFT las secuencias $X_1[k]$ y $X_2[k]$, respectivamente. Determine la relación entre $X_1[k]$ y $X_2[k]$.

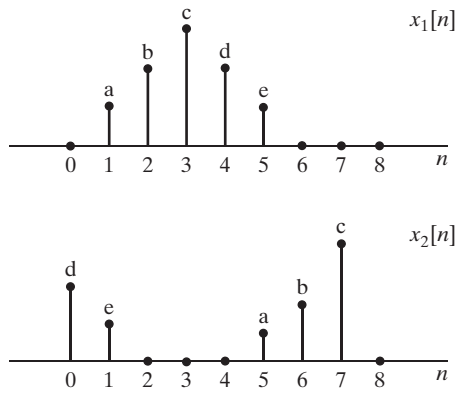


Figura P8.10

8.11. La Figura P8.11 muestra dos secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Dibuje su convolución circular de seis puntos.

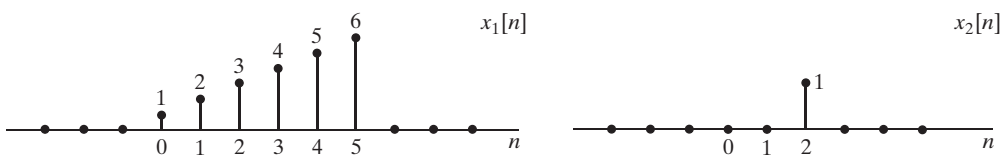


Figura P8.11

8.12. Suponga que se tienen dos secuencias de cuatro puntos $x[n]$ y $h[n]$ cuyos valores son:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3,$$
$$h[n] = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

(a) Calcule la DFT de cuatro puntos $X[k]$.
(b) Calcule la DFT de cuatro puntos $H[k]$.
(c) Calcule $y[n] = x[n] \textcircled{4} h[n]$ realizando directamente la convolución circular.
(d) Calcule la secuencia $y[n]$ del apartado (c) multiplicando las DFT de $x[n]$ y $h[n]$ y realizando la DFT inversa.

8.13. Considere la secuencia de longitud finita $x[n]$ que se muestra en la Figura P8.13. $X[k]$ es la DFT de cinco puntos de $x[n]$. Dibuje la secuencia $y[n]$ cuya transformada de Fourier es

$$Y[k] = W_5^{-2k} X[k].$$

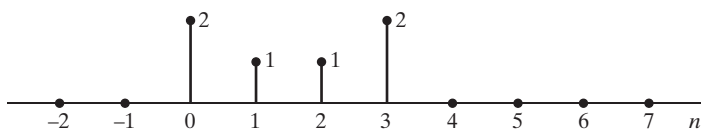


Figura P8.13

8.14. La Figura P8.14 muestra dos señales de longitud finita, $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Suponga que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son cero fuera de la región que se muestra en la figura. Sea $x_3[n]$ la convolución circular de ocho puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Es decir, $x_3[n] = x_1[n] \textcircled{8} x_2[n]$. Determine $x_3[2]$.

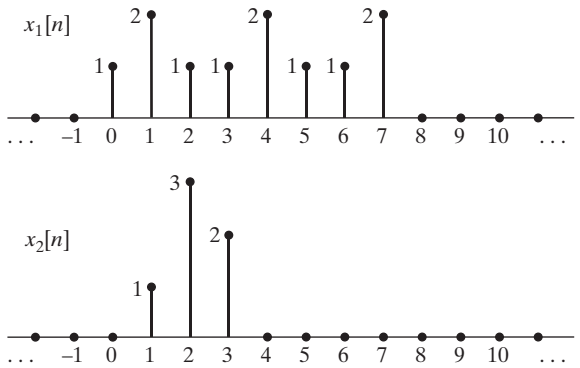


Figura P8.14

8.15. La Figura P8.15-1 muestra dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$. El valor de $x_2[n]$ en el instante $n = 3$ no se conoce, sino que se muestra como una variable a. La Figura P8.15-2 muestra $y[n]$, la convolución circular de cuatro puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Basándose en la gráfica de $y[n]$, ¿se puede especificar a de forma única? Si es así, ¿cuánto vale a? Si no es así, proporcione dos posibles valores de a que produzcan la secuencia $y[n]$ que se muestra.

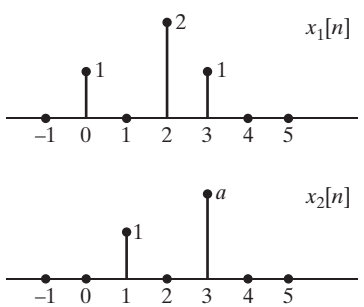


Figura P8.15-1

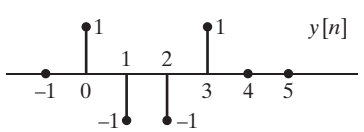


Figura P8.15-2

8.16. La Figura P8.16-1 muestra una secuencia en tiempo discreto de seis puntos $x[n]$. Suponga que $x[n] = 0$ fuera del intervalo mostrado. El valor de $x[4]$ no se conoce y se representa como b. Tenga en cuenta que la muestra que se indica en la figura con amplitud b no tiene por qué estar a escala. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ y sean $X_1[k]$ muestras de $X(e^{j\omega})$ cada $\pi/2$. Es decir,

$$X_1[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(\pi/2)k}, \qquad 0 \le k \le 3.$$

La secuencia de cuatro puntos $x_1[n]$ que resulta de obtener la DFT inversa de cuatro puntos de $X_1[k]$ se ilustra en la Figura P8.16-2. Basándose en esta figura, ¿se puede determinar b de forma única? Si es así, indique el valor de b.

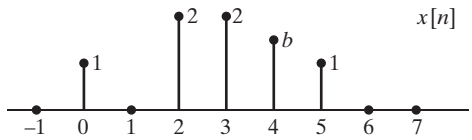


Figura P8.16-1

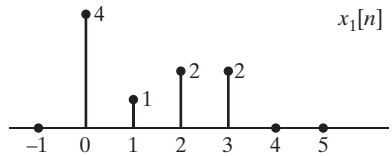


Figura P8.16-2

8.17. La Figura P8.17 muestra dos secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$. ¿Cuál es el mínimo valor de N para el que la convolución circular de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es igual a la convolución lineal de esas secuencias, es decir, tal que $x_1[n] \; \text{Ⓝ} \; x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$?

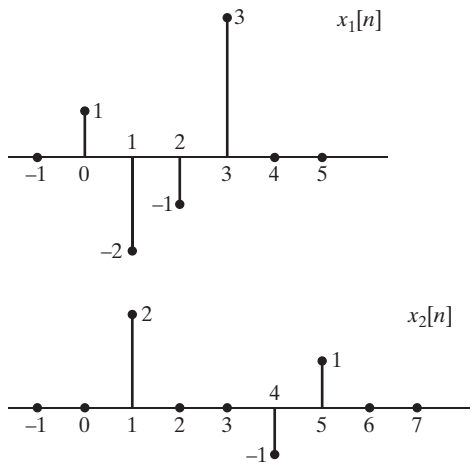


Figura P8.17

8.18. La Figura P8.18-1 muestra una secuencia $x[n]$ cuyo valor $x[3]$ es la constante desconocida c. La muestra de amplitud c no está necesariamente a escala. Sea

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\pi 3k/5},$$

siendo $X[k]$ la DFT de cinco puntos de $x[n]$. La secuencia $x_1[n]$, que se muestra en la Figura P8.18-2, es la DFT inversa de $X_1[k]$. ¿Cuál es el valor de c?

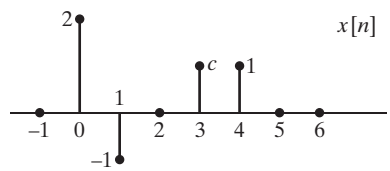


Figura P8.18-1

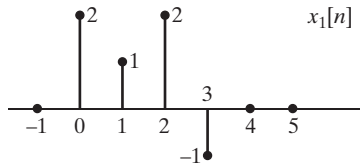


Figura P8.18-2

8.19. La Figura P8.19 muestra dos secuencias de longitud finita $x[n]$ y $x_1[n]$. Las DFT de esas dos secuencias, $X[k]$ y $X_1[k]$, respectivamente, están relacionadas por la ecuación

$$X_1[k] = X[k]e^{-j(2\pi km/6)},$$

donde m es una constante desconocida. ¿Es posible determinar un valor de m consistente con la Figura P8.19? ¿Es único ese valor? Si lo es, justifique la respuesta. Si no lo es, determine otro valor de m que sea consistente con la información proporcionada.

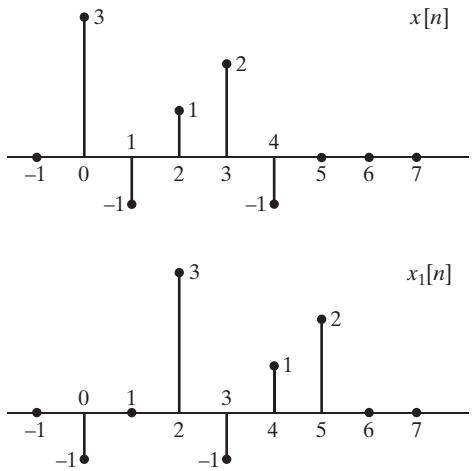


Figura P8.19

8.20. La Figura P8.20 muestra dos secuencias de longitud finita $x[n]$ y $x_1[n]$. Las DFT de N puntos de esas dos secuencias, $X[k]$ y $X_1[k]$, respectivamente, están relacionadas por la ecuación

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\pi k2/N},$$

siendo N una constante desconocida. ¿Es posible determinar un valor de N consistente con la Figura P8.20? ¿Es único ese valor de N? Si lo es, justifique la respuesta. Si no lo es, determine otro valor de N que sea consistente con la información proporcionada.

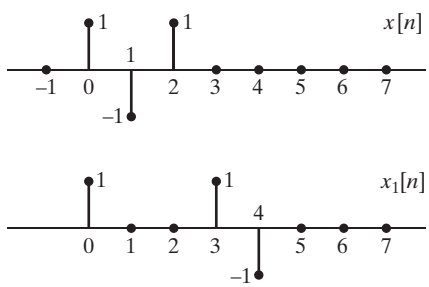


Figura P8.20

Problemas básicos

8.21. **(a)** La Figura P8.21-1 muestra dos secuencias periódicas, $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$, de periodo $N = 7$. Obtenga una secuencia $\tilde{y}_1[n]$ cuyo desarrollo en serie de Fourier sea igual al producto de los desarrollos en serie de Fourier de $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$. Es decir,

$$\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k].$$

(b) La Figura P8.21-2 muestra una secuencia periódica $\tilde{x}_3[n]$ de periodo $N = 7$. Obtenga una secuencia $\tilde{y}_2[n]$ cuyo desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto sea igual al producto de los desarrollos en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_3[n]$. Es decir,

$$\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_3[k].$$

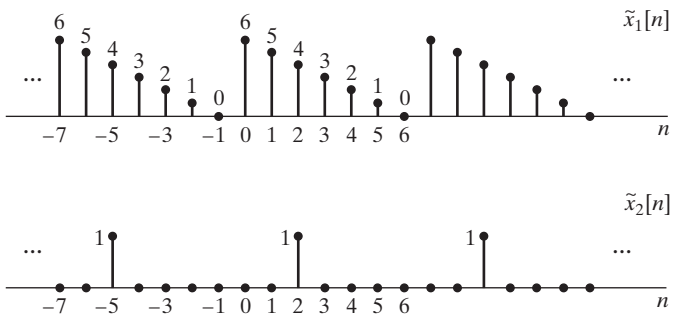


Figura P8.21-1

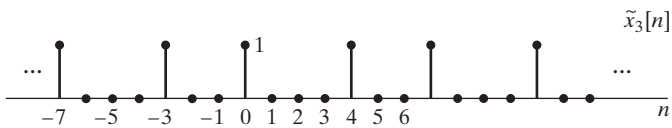


Figura P8.21-2

8.22. Considere una secuencia de N puntos $x[n]$, es decir,

$$x[n] = 0 \text{ para } n > N-1 \text{ y } n < 0.$$

La transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ es $X(e^{j\omega})$ y la DFT de N puntos de $x[n]$ es $X[k]$.

Si $Re\{X[k]\} = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$, ¿puede concluirse que $Re \quad X(e^{j\omega}) \quad = 0$ para $-\pi \leq \omega \leq \pi$? Si su respuesta es afirmativa, explique por qué. Si no lo es, proporcione un contraejemplo.

8.23. Considere la secuencia real de longitud finita $x[n]$ que se muestra en la Figura P8.23.

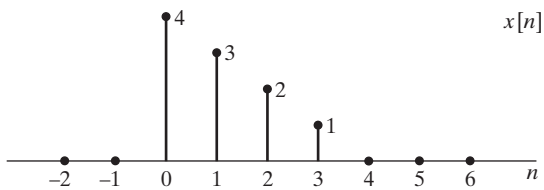


Figura P8.23

(a) Dibuje la secuencia de longitud finita $y[n]$ cuya DFT de seis puntos es

$$Y[k] = W_6^{5k} X[k],$$

siendo $X[k]$ la DFT de seis puntos de $x[n]$.

(b) Dibuje la secuencia de longitud finita $w[n]$ cuya DFT de seis puntos es

$$W[k] = Im\{X[k]\}.$$

(c) Dibuje la secuencia de longitud finita $q[n]$ cuya DFT de tres puntos es

$$Q[k] = X[2k+1], \qquad k = 0, 1, 2.$$

8.24. La Figura P8.24 muestra una secuencia $x[n]$ de longitud finita. Dibuje las secuencias

$$x_1[n] = x[((n-2))_4], \qquad 0 \le n \le 3,$$

y

$$x_2[n] = x[((-n))_4], \qquad 0 \le n \le 3.$$

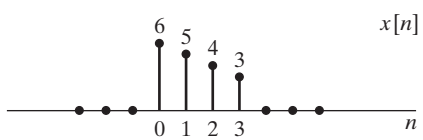


Figura P8.24

8.25. Considere la señal $x[n] = \delta[n-4] + 2\delta[n-5] + \delta[n-6]$.

(a) Calcule, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$. Escriba expresiones del módulo y la fase de $X(e^{j\omega})$, y dibuje dichas funciones.

(b) Calcule todos los valores de N para los que la DFT de N puntos es un conjunto de números reales.

(c) ¿Puede encontrar una señal causal $x_1[n]$ de tres puntos (es decir, $x_1[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > 2$) de forma que su DFT de tres puntos sea:

$$X_1[k] = |X[k]| \qquad k = 0, 1, 2$$

siendo $X[k]$ la DFT de tres puntos de $x[n]$?

8.26. Hemos demostrado que la DFT $X[k]$ de una secuencia de longitud finita $x[n]$ coincide con muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ de dicha secuencia en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/N)k$. Es decir, $X[k] = X(e^{j(2\pi/N)k})$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Considere ahora una secuencia $y[n] = e^{-j(\pi/N)n} x[n]$ cuya DFT es $Y[k]$.

(a) Determine la relación entre la DFT $Y[k]$ y la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$.

(b) El resultado del apartado (a) demuestra que $Y[k]$ es una versión de $X(e^{j\omega})$ muestreada de forma diferente. ¿A qué frecuencias está muestreada $X(e^{j\omega})$?

(c) Dada la DFT modificada $Y[k]$, ¿cómo recuperaría la secuencia original $x[n]$?

8.27. La DFT de 10 puntos correspondiente a una secuencia de 10 puntos $g[n]$ es

$$G[k] = 10\,\delta[k]\,.$$

Calcule $G(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $g[n]$.

8.28. Considere la secuencia de seis puntos

$$x[n] = 6\delta[n] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

que se muestra en la Figura P8.28.

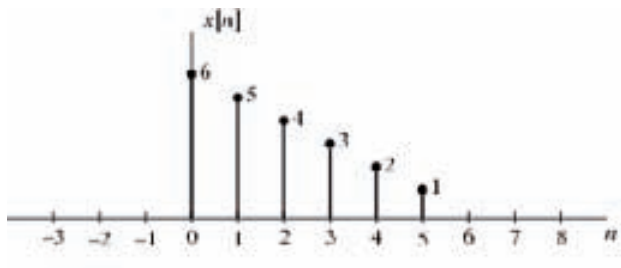


Figura P8.28

(a) Determine $X[k]$, la DFT de seis puntos de $x[n]$. Exprese su respuesta en función de $W_6 = e^{-j2\pi/6}$.

(b) Dibuje la secuencia $w[n]$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, que se obtiene calculando la DFT inversa de seis puntos de $W[k] = W_6^{-2k} X[k]$.

(c) Utilice algún método adecuado para evaluar la convolución circular de seis puntos de $x[n]$ con la secuencia $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$. Dibuje el resultado.

(d) Si se convoluciona la señal $x[n]$ con la $h[n]$ dada mediante una convolución circular de N puntos, ¿cómo se debería elegir N para que el resultado de la convolución circular fuera idéntico al de la convolución lineal? Es decir, debe seleccionarse N de forma que

$$\begin{aligned} y_p[n] &= x[n] \; \text{Ⓝ} \, h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[((n-m))_N] \\ &= x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[n-m] \quad \text{for } 0 \le n \le N-1. \end{aligned}$$

(e) En ciertas aplicaciones, como en sistemas de comunicaciones multiportadora (véase Starr et al., 1999), la convolución lineal de una secuencia $x[n]$ con longitud finita de L muestras con una respuesta al impulso $h[n]$ también de longitud finita y más corta que $x[n]$ debe ser idéntica (en el intervalo $0 \le n \le L-1$) al resultado que se habría obtenido mediante la convolución circular de L puntos de $x[n]$ con $h[n]$. Esto se puede conseguir aumentando apropiadamente la secuencia $x[n]$. Partiendo de la gráfica de la Figura P8.28, donde $L = 6$, añada muestras a la secuencia $x[n]$ para producir una nueva secuencia $x_1[n]$ tal que con la secuencia $h[n]$ dada en el apartado (c), la convolución ordinaria $y_1[n] = x_1[n] * h[n]$ satisfaga la ecuación

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] h[n-m] \\ &= y_p[n] = x[n] \; \text{Ⓛ} \, h[n] = \sum_{m=0}^{5} x[m] h[((n-m))_6] \quad \text{para } 0 \le n \le 5. \end{aligned}$$

(f) Generalice el resultado del apartado (e) para el caso en el que $h[n]$ es una secuencia distinta de cero en $0 \le n \le M$ y $x[n]$ es distinta de cero en $0 \le n \le L-1$, con $M < L$. Es decir, indique cómo construir una secuencia $x_1[n]$ a partir de $x[n]$ de forma que la convolución lineal $x_1[n] * h[n]$ sea igual a la convolución circular de L puntos entre $x[n]$ Ⓛ$h[n]$ para $0 \le n \le L-1$.

8.29. Considere la secuencia real de cinco puntos

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4].$$

La autocorrelación determinista de esta secuencia es la transformada inversa de Fourier en tiempo discreto de

$$C(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2,$$

siendo $X^*(e^{j\omega})$ el complejo conjugado de $X(e^{j\omega})$. Para la señal $x[n]$, dada, se puede obtener que su autocorrelación es

$$c[n] = x[n] * x[-n].$$

(a) Dibuje la secuencia $c[n]$. Observe que $c[-n] = c[n]$ para todo n.

(b) Suponga ahora que se calcula la DFT de cinco puntos ($N = 5$) de la secuencia $x[n]$. Denomine $X_5[k]$ a esta DFT. Seguidamente, se calcula la DFT inversa de $C_5[k] = X_5[k]X_5^*[k]$. Dibuje la secuencia $c_5[n]$ resultante. ¿Cómo se relaciona $c_5[n]$ con la secuencia $c[n]$ del apartado (a)?

(c) Suponga ahora que se calcula la DFT de diez puntos ($N = 10$) de la secuencia $x[n]$. Denomine $X_{10}[k]$ a esta DFT. Seguidamente, se calcula la DFT inversa de $C_{10}[k] = X_{10}[k]X_{10}^*[k]$. Dibuje la secuencia $c_{10}[n]$ resultante.

(d) Suponga ahora que se utiliza $X_{10}[k]$ para formar $D_{10}[k] = W_{10}^{5k}C_{10}[k] = W_{10}^{5k}X_{10}[k]X_{10}^*[k]$, siendo $W_{10} = e^{-j(2\pi/10)}$. A continuación, se calcula la DFT inversa de $D_{10}[k]$. Dibuje la secuencia resultante $d_{10}[n]$.

8.30. Considere dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$, y sea $y[n]$ su convolución ordinaria (lineal), $y[n] = x[n] * h[n]$. Suponga que $x[n]$ es cero fuera del intervalo $21 \le n \le 31$, y que $h[n]$ es cero fuera del intervalo $18 \le n \le 31$.

(a) La señal $y[n]$ será cero fuera del intervalo $N_1 \le n \le N_2$. Determine valores numéricos de N_1 y N_2.

(b) Suponga ahora que se calcula la DFT de 32 puntos de

$$x_1[n] = \begin{cases} 0 & n = 0, 1, \ldots, 20 \\ x[n] & n = 21, 22, \ldots, 31 \end{cases}$$

y

$$h_1[n] = \begin{cases} 0 & n = 0, 1, \ldots, 17 \\ h[n] & n = 18, 19, \ldots, 31 \end{cases}$$

(Es decir, se incluyen las muestras de valor cero al principio de cada secuencia). Seguidamente se forma el producto $Y_1[k] = X_1[k]H_1[k]$. Si se define $y_1[n]$ como la DFT inversa de 32 puntos de $Y_1[k]$, ¿cómo se relaciona $y_1[n]$ con la convolución ordinaria $y[n]$? Es decir, proporcione una ecuación que exprese $y_1[n]$ en función de $y[n]$ para $0 \le n \le 31$.

(c) Suponga que es libre de escoger la longitud de la DFT (N) en el apartado (b), de forma que las secuencias pueden tener ceros añadidos en sus extremos. ¿Cuál es el *mínimo* valor de N tal que $y_1[n] = y[n]$ para $0 \le n \le N-1$?

8.31. Considere la secuencia $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$.

(a) Determine la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ y la transformada de Fourier en tiempo discreto $Y(e^{j\omega})$ de la secuencia $y[n] = x[-n]$.

(b) Utilizando los resultados obtenidos en el apartado (a), determine una expresión para

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}).$$

(c) Utilizando sus resultados del apartado (a), obtenga una expresión de $w[n] = x[n] * y[n]$.

(d) Utilizando el resultado del apartado (b), dibuje $y_p[n] = x[((-n))_4]$ en función de n para $0 \le n \le 3$.

(e) Utilice ahora algún método adecuado para evaluar la convolución circular de cuatro puntos de $x[n]$ con $y_p[n]$. Denomine a su resultado $w_p[n]$ y dibújelo.

(f) Si se convoluciona $x[n]$ con $y_p[n] = x[((-n))_N]$, ¿cómo debería elegirse N para evitar el solapamiento en el dominio del tiempo?

8.32. Considere una secuencia $x[n]$ de duración finita con longitud P, tal que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n \geq P$. Se desea calcular muestras de la transformada de Fourier en las N frecuencias equiespaciadas

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Determine y justifique procedimientos para calcular las N muestras de la transformada de Fourier utilizando sólo una DFT de N puntos en los dos casos siguientes:

(a) $N > P$.
(b) $N < P$.

8.33. Un filtro FIR tiene una respuesta al impulso de 10 puntos, es decir,

$$h[n] = 0 \qquad \text{para } n < 0 \text{ y para } n > 9.$$

Sabiendo que la DFT de 10 puntos de $h[n]$ está dada por

$$H[k] = \frac{1}{5}\delta[k-1] + \frac{1}{3}\delta[k-7],$$

calcule $H(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $h[n]$.

8.34. Suponga que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son dos secuencias finitas de longitud N, es decir, $x_1[n] = x_2[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Sea $x_1[n]$ la transformada Z de $X_1(z)$ y sea $X_2[k]$ la DFT de N puntos de $x_2[n]$. Las dos transformadas $X_1(z)$ y $X_2[k]$ se relacionan de la siguiente forma:

$$X_2[k] = X_1(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Determine la relación entre $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

Problemas avanzados

8.35. La Figura P8.35-1 ilustra una secuencia en tiempo discreto $x[n]$ de seis puntos. Suponga que $x[n]$ es cero fuera del intervalo que se muestra.

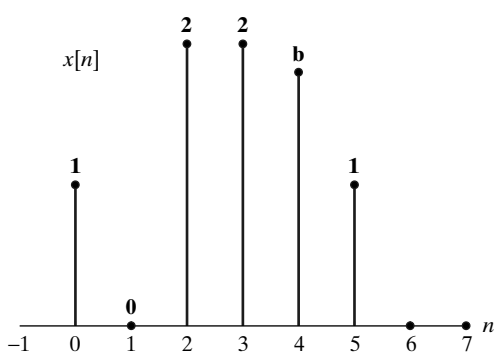


Figura P8.35-1

El valor de $x[4]$ no es conocido y se representa como b. La correspondiente muestra de la figura no se representa a escala. Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ y sea $X_1[k]$ las muestras de $X(e^{j\omega})$ en $\omega_k = 2\pi k/4$, es decir,

$$X_1[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi k}{2}}, \qquad 0 \le k \le 3.$$

La secuencia de cuatro puntos $x_1[n]$ que resulta de calcular la DFT inversa de cuatro puntos de $X_1[k]$ se muestra en la Figura P8.35-2. Basándose en esa figura, ¿es posible determinar de forma única el valor de b? En caso afirmativo, obtenga el valor de b.

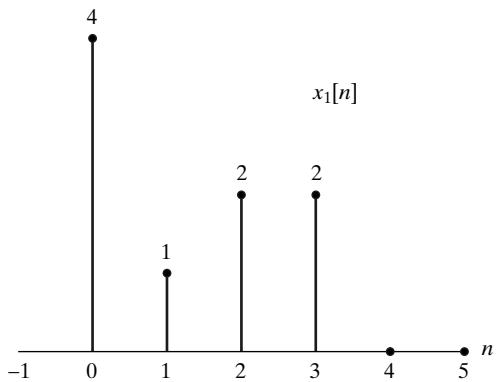


Figura P8.35-2

8.36. **(a)** Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal

$$x[n] = (1/2)^n u[n].$$

Obtenga una secuencia $g[n]$ de longitud 5 cuya DFT de cinco puntos $G[k]$ sea idéntica a las muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ en $\omega_k = 2\pi k/5$, es decir,

$$g[n] = 0 \text{ para } n < 0, \ n > 4$$

y

$$G[k] = X(e^{j2\pi k/5}) \text{ para } k = 0, 1, \ldots, 4.$$

(b) Sea $w[n]$ una secuencia que es estrictamente distinta de cero para $0 \le n \le 9$ y cero en el resto, es decir,

$$w[n] \neq 0, \quad 0 \le n \le 9$$

$$w[n] = 0 \quad \text{en el resto}$$

Determine un posible valor de $w[n]$ tal que la transformada de Fourier en tiempo discreto $W(e^{j\omega})$ es igual a $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega = 2\pi k/5$, $k = 0, 1, \ldots, 4$, es decir,

$$W(e^{j2\pi k/5}) = X(e^{j2\pi k/5}) \text{ para } k = 0, 1, \ldots, 4.$$

8.37. Un filtro S en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo se va a implementar utilizando el método solapamiento–almacenamiento. En este método, la entrada se divide en bloques *con solapamiento* en contraposición al método solapamiento–suma, en el que los bloques de entrada no se solapan. En esta implementación, la señal de entrada $x[n]$ se divide en bloques $x_r[n]$ de 256 puntos con solapamiento. Los bloques

adyacentes solapan 255 muestras, de forma que sólo se diferencian en una muestra. Esto se representa en la Ecuación (P8.37-1), que indica la relación entre $x_r[n]$ y $x[n]$,

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n+r] & 0 \le n \le 255 \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{P8.37-1}$$

donde r varía a lo largo de todos los enteros y se obtiene un bloque $x_r[n]$ diferente para cada valor de r. Cada bloque se procesa calculando la DFT de 256 puntos de $x_r[n]$, multiplicando el resultado por $H[k]$ dada en la Ecuación (P8.37-2), y calculando la DFT inversa de 256 puntos del producto resultante.

$$H[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 31 \\ 0 & 32 \le k \le 224 \\ 1 & 225 \le k \le 255 \end{cases} \tag{P8.37-2}$$

Se "guarda" una muestra del cálculo correspondiente a cada bloque (en este caso un único valor por bloque) como parte de la salida total.

(a) ¿Es S un filtro ideal selectivo en frecuencia? Justifique su respuesta.
(b) ¿Es real la respuesta al impulso de S? Justifique su respuesta.
(c) Determine la respuesta al impulso de S.

8.38. $x[n]$ es una secuencia real con una longitud finita de 512 muestras, es decir

$$x[n] = 0 \qquad n < 0, n \ge 512$$

que se encuentra almacenada en una memoria de datos de 512 puntos. Se sabe que $X[k]$, la DFT de 512 puntos de $x[n]$, tiene la propiedad

$$X[k] = 0 \qquad 250 \le k \le 262.$$

Al almacenar los datos, uno de los puntos ha podido ser alterado. Concretamente, si $s[n]$ indica los datos almacenados, $s[n] = x[n]$ excepto posiblemente en una posición de memoria desconocida n_0. Para comprobar y posiblemente corregir los datos, se puede examinar $S[k]$, la DFT de 512 puntos de $s[n]$.

(a) Especifique si, examinando $S[k]$, es posible, y cómo *detectar* si se ha producido un error en uno de los datos, es decir, si $s[n] = x[n]$ para todo n o no.

En los apartados (b) y (c) suponga que se sabe con seguridad que se ha alterado uno de los datos; es decir, que $s[n] = x[n]$ *excepto* en $n = n_0$.

(b) En este apartado, suponga que el valor de n_0 es desconocido. Especifique un procedimiento para determinar el valor de n_0 a partir de $S[k]$.
(c) En este apartado, suponga que el valor de n_0 es conocido. Especifique un procedimiento para determinar el valor de $x[n_0]$ a partir de $S[k]$.

8.39. En el sistema que se muestra en la Figura 8.39, $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son secuencias causales de 32 puntos. Es decir, ambas son cero fuera del intervalo $0 \le n \le 31$. $y[n]$ es la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, es decir, $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$.

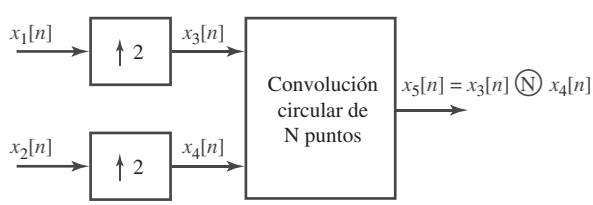


Figura P8.39

(a) Determine los valores de N para los que es posible recuperar todos los valores de $y[n]$ a partir de $x_5[n]$.
(b) Especifique explícitamente cómo recuperar $y[n]$ a partir de $x_5[n]$ en el caso del *mínimo* valor de N determinado en el apartado (a).

8.40. La Figura P8.40 muestra tres secuencias reales de siete puntos ($x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$). Para cada una de esas secuencias, especifique si la DFT de siete puntos se puede expresar de la forma

$$X_i[k] = A_i[k]e^{-j(2\pi k/7)k\alpha_i} \qquad k = 0, 1, \ldots, 6$$

siendo $A_i[k]$ real y $2\alpha_i$ un entero. Incluya una breve explicación. Para cada secuencia que se pueda expresar de esta forma, especifique todos los correspondientes valores de α_i para $0 \leq \alpha_i < 7$.

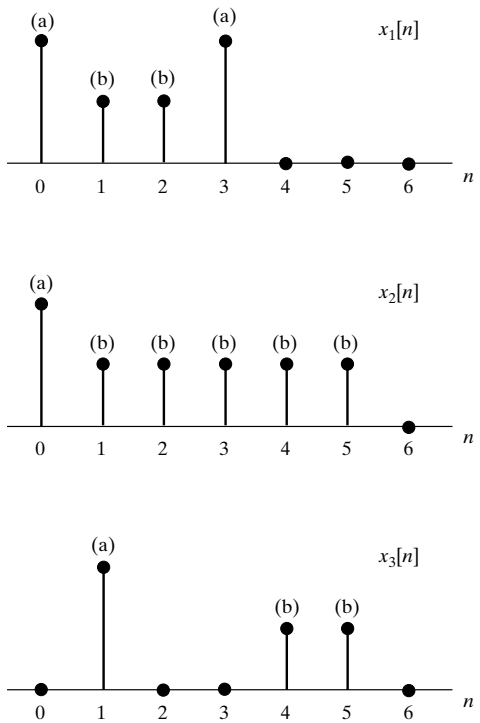


Figura P8.40

8.41. Suponga que $x[n]$ es una secuencia compleja de ocho puntos, cuya parte real, $x_r[n]$ y cuya parte imaginaria $x_i[n]$, se muestran en la Figura P8.41 (es decir, $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$). Sea $y[n]$ la secuencia compleja de cuatro puntos tal que $Y[k]$, la DFT de cuatro puntos de $y[n]$, coincide con los valores de índice impar de $X[k]$, la DFT de ocho puntos de $x[n]$ (los valores de índice impar de $X[k]$ son aquellos para los que $k = 1, 3, 5, 7$). Determine los valores numéricos de $y_r[n]$ e $y_i[n]$, las partes real e imaginaria de $y[n]$.

8.42. $x[n]$ es una secuencia de longitud finita cuya longitud es de 1024, es decir,

$$x[n] = 0 \text{ para } n < 0,\ n > 1023.$$

La autocorrelación de $x[n]$ se define como

$$c_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m],$$

y $X_N[k]$ se define como la DFT de N puntos de $x[n]$, con $N \geq 1024$.

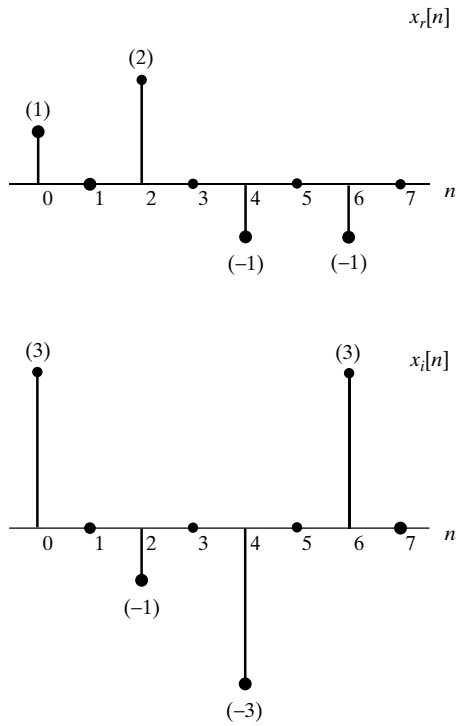


Figura P8.41

Estamos interesados en calcular $c_{xx}[m]$. Se propone un procedimiento que empieza por calcular la DFT inversa de N puntos de $|X_N[k]|^2$ obteniéndose una secuencia de N puntos $g_N[n]$, es decir,

$$g_N[n] = \text{IDFT de } N \text{ puntos} \left\{ |X_N[k]|^2 \right\} .$$

(a) Determine el mínimo valor de N de forma que $c_{xx}[m]$ se pueda obtener a partir de $g_N[n]$. Especifique también cómo obtendría $c_{xx}[m]$ a partir de $g_N[n]$.

(b) Determine el mínimo valor de N de forma que $c_{xx}[m]$ para $|m| \leq 10$ se pueda obtener a partir de $g_N[n]$. Especifique también cómo obtendría esos valores a partir de $g_N[n]$.

8.43. En la Figura P8.43, $x[n]$ es una secuencia de longitud finita de 1024 muestras. Se obtiene la secuencia $R[k]$ mediante la DFT de 1024 puntos de $x[n]$ y el resultado se comprime por dos.

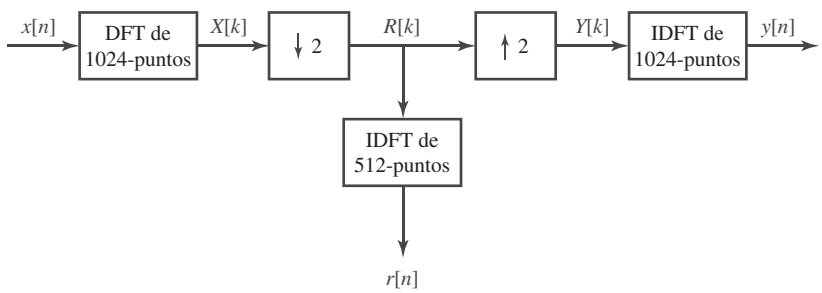


Figura P8.43

(a) Elija la afirmación más precisa sobre $r[n]$, la DFT inversa de 512 puntos de $R[k]$. Justifique su elección con unas pocas frases concisas.

(I) $r[n] = x[n],\ 0 \le n \le 511$

(II) $r[n] = x[2n],\ 0 \le n \le 511$

(III) $r[n] = x[n] + x[n+512],\ 0 \le n \le 511$

(IV) $r[n] = x[n] + x[-n+512],\ 0 \le n \le 511$

(V) $r[n] = x[n] + x[1023-n],\ 0 \le n \le 511$

En todos los casos $r[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \le n \le 511$.

(b) La secuencia $Y[k]$ se obtiene expandiendo $R[k]$ por un factor de 2. Escoja la afirmación más precisa sobre $y[n]$, la DFT inversa de 1024 puntos de $Y[k]$. Justifique su elección con unas pocas frases concisas.

(I) $y[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n+512]\right), & 0 \le n \le 511 \\ \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-512]\right), & 512 \le n \le 1023 \end{cases}$

(II) $y[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le 511 \\ x[n-512], & 512 \le n \le 1023 \end{cases}$

(III) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

(IV) $y[n] = \begin{cases} x[2n], & 0 \le n \le 511 \\ x[2(n-512)], & 512 \le n \le 1023 \end{cases}$

(V) $y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[1023-n]\right),\ 0 \le n \le 1023$

En todos los casos $y[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \le n \le 1023$.

8.44. La Figura P8.44 muestra dos secuencias finitas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de longitud 7. $X_i(e^{j\omega})$ indica la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x_i[n]$ y $X_i[k]$ indica la DFT de siete puntos de $x_i[n]$.

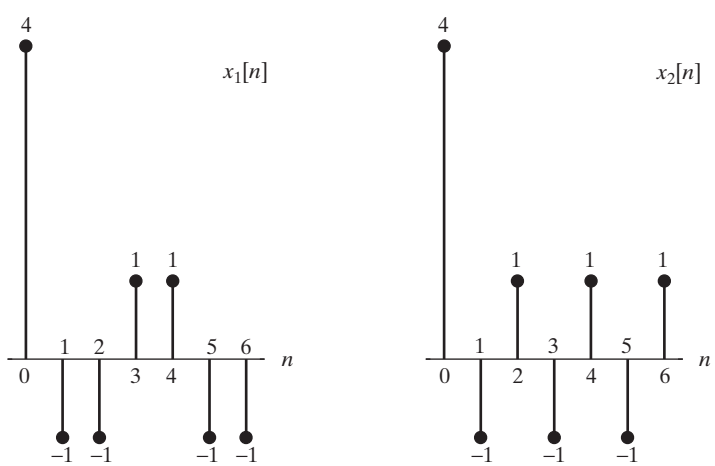


Figura P8.44

Para cada una de las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, indique si se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $X_i(e^{j\omega})$ se puede expresar de la forma

$$X_i(e^{j\omega}) = A_i(\omega)e^{j\alpha_i\omega}, \quad \text{para } \omega \in (-\pi, \pi),$$

siendo $A_i(\omega)$ real y α_i una constante.

(b) $X_i[k]$ se puede expresar de la forma

$$X_i[k] = B_i[k]e^{j\beta_i k},$$

siendo $B_i[k]$ real y β_i una constante.

8.45. La secuencia $x[n]$ tiene una longitud de 128 puntos (es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > 127$), y $x[n]$ tiene al menos una muestra distinta de cero. La transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ se denomina $X(e^{j\omega})$. ¿Cuál es el máximo entero M para el que es posible que $X(e^{j2\pi k/M})$ sea cero para todos los valores de k? Construya un ejemplo para el M máximo encontrado.

8.46. Cada apartado de este problema se puede resolver de forma independiente. En todos los apartados se utiliza la señal $x[n]$ dada por

$$x[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4] - \delta[n-6].$$

(a) Sea $X\left(e^{j\omega}\right)$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$. Se define

$$R[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{4}}, \qquad 0 \le k \le 3$$

Dibuje la señal $r[n]$, la DFT inversa de $R[k]$.

(b) Sea $X[k]$ la DFT de ocho puntos de $x[n]$ y sea $H[k]$ la DFT de ocho puntos de la respuesta al impulso $h[n]$ dada por

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-4].$$

Defina $Y[k] = X[k]H[k]$ para $0 \le k \le 7$. Dibuje $y[n]$, la DFT de ocho puntos de $Y[k]$.

8.47. Considere una señal $x_c(t)$ en tiempo continuo limitada en el tiempo, cuya duración es de 100 ms. Suponga que esta señal tiene una transformada de Fourier de banda limitada tal que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \ge 2\pi(10,000)$ rad/s. Es decir, suponga que el solapamiento es despreciable. Se desea obtener muestras de $X_c(j\Omega)$ separadas 5 Hz en el intervalo $0 \le \Omega \le 2\pi$ (10.000). Esto se puede hacer mediante una DFT de 4000 puntos. Concretamente, se desea obtener una secuencia $x[n]$ de 4000 puntos, de forma que su DFT de 4000 puntos esté relacionada con $X_c(j\Omega)$ de la siguiente forma:

$$X[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot k), \qquad k = 0, 1, \ldots, 1999, \tag{P8.47-1}$$

siendo α un factor de escala conocido. Se propone el siguiente método para obtener una secuencia de 4000 puntos cuya DFT proporcione las muestras deseadas de $X_c(j\Omega)$. Primero, se muestrea $x_c(t)$ con un periodo de muestreo de $T = 50\mu$s. Seguidamente, la secuencia de 2000 puntos resultante se utiliza para formar la secuencia $\hat{x}[n]$ como sigue:

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x_c(nT), & 0 \le n \le 1999, \\ x_c((n-2000)T), & 2000 \le n \le 3999, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{P8.47-2}$$

Finalmente, se calcula la DFT de 4000 puntos $\hat{X}[k]$ de esa secuencia. Para este método, determine cómo se relaciona $\hat{X}[k]$ con $X_c(j\Omega)$. Ilustre esta relación mediante un dibujo de una transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ "típica". Indique explícitamente si $\hat{X}[k]$ es el resultado deseado o no lo es, es decir, si $\hat{X}[k]$ es igual a $X[k]$ como se especifica en le Ecuación (P8.47-1).

8.48. $x[n]$ es una secuencia real finita de longitud 1024, es decir,

$$x[n] = 0 \qquad n < 0, n \geq 1023.$$

Sólo se conocen las siguientes muestras de la DFT de 1024 puntos de $x[n]$

$$X[k] \qquad k = 0, 16, 16 \times 2, 16 \times 3, \ldots, 16 \times (64-1)$$

Además, se observa $s[n]$, que es una versión alterada de $x[n]$, con sus 64 primeros puntos alterados; es decir, $s[n] = x[n]$ para $n \geq 64$, y $s[n] \neq x[n]$ para $0 \leq n \leq 63$. Describa un procedimiento para recuperar las primeras 64 muestras de $x[n]$ utilizando bloques que calculen la DFT y la DFT inversa, multiplicadores y sumadores.

8.49. La correlación cruzada determinista entre dos secuencias reales se define como

$$c_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]x[n+m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[-m]x[n-m] = y[-n] * x[n] \qquad -\infty < n < \infty$$

(a) Demuestre que la transformada de Fourier en tiempo discreto de $c_{xy}[n]$ es $C_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$.

(b) Suponga que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 99$ e $y[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 49$. La correspondiente función de correlación cruzada $c_{xy}[n]$ será distinta de cero sólo en un intervalo de longitud finita $N_1 \leq n \leq N_2$. ¿Cuánto valen N_1 y N_2?

(c) Suponga que se desea calcular valores de $c_{xy}[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq 20$ utilizando el siguiente procedimiento:

(I) Calcular $X[k]$, la DFT de N puntos de $x[n]$.
(II) Calcular $Y[k]$, la DFT de N puntos de $y[n]$.
(III) Calcular $C[k] = X[k]Y^*[k]$ para $0 \leq k \leq N-1$.
(IV) Calcular $c[n]$, la DFT inversa de $C[k]$.

¿Cuál es el valor *mínimo* de N tal que $c[n] = c_{xy}[n]$, $0 \leq n \leq 20$? Explique su razonamiento.

8.50. La DFT de una secuencia de longitud finita corresponde a muestras de su transformada Z en la circunferencia unidad. Por ejemplo, la DFT de una secuencia $x[n]$ de 10 puntos corresponde a muestras de $X(z)$ en los 10 puntos equiespaciados que se muestran en la Figura P8.50-1. Se desea calcular las muestras equiespaciadas de $X(z)$ en el contorno que se muestra en la Figura P8.50-2, es decir, se desea obtener

$$X(z)\big|_{z=0{,}5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}.$$

Demuestre cómo se debe modificar $x[n]$ para obtener una secuencia $x_1[n]$ tal que su DFT corresponda a las muestras deseadas de $X(z)$.

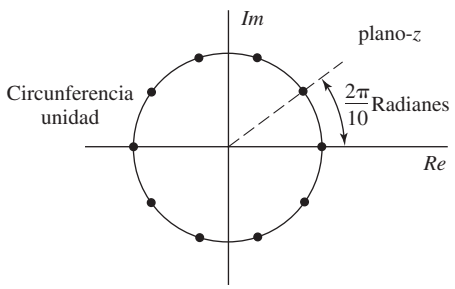


Figura P8.50-1

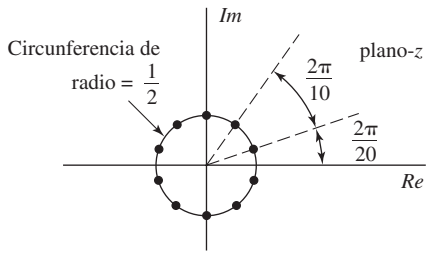


Figura P8.50-2

8.51. Sea $w[n]$ la convolución circular de $x[n]$ e $y[n]$. Sea $g[n]$ la convolución circular de 40 puntos de $x[n]$ e $y[n]$:

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k],$$

$$g[n] = x[n] \textcircled{40} y[n] = \sum_{k=0}^{39} x[k]y[((n-k))_{40}].$$

(a) Determine los valores de n para los que $w[n]$ puede ser distinta de cero.
(b) Determine los valores de n para los que se puede obtener $w[n]$ a partir de $g[n]$. Especifique explícitamente en qué valores del índice n de $g[n]$ aparecen esos valores de $w[n]$.

8.52. Sea $x[n] = 0,\ \ n < 0, n > 7$, una secuencia real de ocho puntos y sea $X[k]$ su DFT de ocho puntos.

(a) Evalúe

$$\left(\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j(2\pi/8)kn}\right)\Bigg|_{n=9}$$

en función de $x[n]$.

(b) Sea $v[n] = 0, n < 0, n > 7$, una secuencia de ocho puntos, y sea $V[k]$ su DFT de ocho puntos. Si $V[k] = X(z)$ en $z = 2\exp(j(2\pi k + \pi)/8)$ para $k = 0, \ldots, 7$, siendo $X(z)$ la transformada Z de $x[n]$, exprese $v[n]$ en función de $x[n]$.

(c) Sea $w[n] = 0, n < 0, n > 3$, una secuencia de cuatro puntos, y sea $W[k]$ su DFT de cuatro puntos. Si $W[k] = X[k] + X[k+4]$, exprese $w[n]$ en función de $x[n]$.

(d) Sea $y[n] = 0, n < 0, n > 7$, una secuencia de ocho puntos, y sea $Y[k]$ su DFT de ocho puntos. Si

$$Y[k] = \begin{cases} 2X[k], & k = 0,2,4,6, \\ 0, & k = 1,3,5,7, \end{cases}$$

exprese $y[n]$ en función de $x[n]$.

8.53. Lea cuidadosamente cada apartado de este problema para así detectar las diferencias entre ellos.

(a) Considere la señal

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0{,}5\cos(3\pi n/4), & 0 \le n \le 7, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

que se puede representar mediante la ecuación de la DFT inversa

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X_8[k]e^{j(2\pi k/8)n}, & 0 \le n \le 7, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo $X_8[k]$ la DFT de 8 puntos de $x[n]$. Dibuje $X_8[k]$ para $0 \le k \le 7$.

(b) Determine $V_{16}[k]$, la DFT de 16 puntos de la secuencia de 16 puntos

$$v[n] = \begin{cases} 1+\cos(\pi n/4) - 0{,}5\cos(3\pi n/4), & 0 \le n \le 15, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Dibuje $V_{16}[k]$ para $0 \le k \le 15$.

(c) Finalmente, considere $|X_{16}[k]|$, el módulo de la DFT de 16 puntos de la secuencia de 8 puntos

$$x[n] = \begin{cases} 1+\cos(\pi n/4) - 0{,}5\cos(3\pi n/4), & 0 \le n \le 7, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Dibuje $|X_{16}[k]|$ para $0 \le k \le 15$ *sin evaluar explícitamente la expresión de la DFT*. No se podrán obtener todos los valores de $|X_{16}[k]|$ por simple inspección de los apartados (a) y (b), pero se deben poder obtener de forma exacta algunos valores. Dibuje los valores que pueda obtener exactamente con puntos negros, y dibuje estimaciones de los otros valores con círculos abiertos.

Problemas de ampliación

8.54. Al obtener la ecuación de análisis del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto utilizamos la identidad de la Ecuación (8.7). Para verificar esta identidad, consideraremos de forma separada las dos condiciones $k-r = mN$ y $k-r \neq mN$.

(a) Para $k-r = mN$, demuestre que $e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1$ y, a partir de este resultado, que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1 \qquad \text{para } k-r = mN. \tag{P8.54-1}$$

(b) Como k y r son enteros en la Ecuación (8.7), se puede hacer el cambio $k-r = \ell$ y considerar la suma

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)\ell n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)\ell}]^n. \tag{P8.54-2}$$

Como es la suma de un número finito de términos de una serie geométrica, se puede expresar de forma cerrada como

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)\ell}]^n = \frac{1}{N}\frac{1-e^{j(2\pi/N)\ell N}}{1-e^{j(2\pi/N)\ell}}. \tag{P8.54-3}$$

¿Para qué valores de ℓ queda indeterminado el miembro derecho de la Ecuación (P5.84-3)? Es decir, ¿son cero tanto el numerador como el denominador?

(c) A partir del resultado del apartado (b), demuestre que si $k-r \neq mN$, entonces

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 0. \tag{P8.54-4}$$

8.55. En la Sección 8.2, establecimos la propiedad de que si

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m],$$

entonces

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km}\tilde{X}[k],$$

donde $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{X}_1[k]$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{x}_1[n]$, respectivamente. En este problema consideraremos la demostración de esa propiedad.

(a) Utilizando la Ecuación (8.11), junto con los cambios de variable apropiados, demuestre que $\tilde{X}_1[k]$ se puede expresar como

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \tag{P8.55-1}$$

(b) La suma de la Ecuación (P8.55-1) se puede escribir como

$$\sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = \sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{N-1-m} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \tag{P8.55-2}$$

Utilizando el hecho de que $\tilde{x}[r]$ y W_N^{kr} son periódicas, demuestre que

$$\sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = \sum_{r=N-m}^{N-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr}. \tag{P8.55-3}$$

(c) A partir de los resultados de los apartados (a) y (b), demuestre que

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r] W_N^{kr} = W_N^{km} \tilde{X}[k].$$

8.56. **(a)** La Tabla 8.1 muestra varias propiedades de simetría del desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas. Algunas de ellas serán repetidas en este problema. Demuestre que cada una de ellas es cierta. Al realizar las demostraciones, puede utilizar la definición de desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto y cualquier otra propiedad anterior de la lista (por ejemplo, para demostrar la propiedad 3 se pueden utilizar las propiedades 1 y 2).

Secuencia	*Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto*
1. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
2. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
3. $Re\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k]$
4. $jIm\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k]$

(b) Utilizando las propiedades demostradas en el apartado (a), demuestre que dada una secuencia real periódica $\tilde{x}[n]$, se cumplen las siguientes propiedades de simetría del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto:

1. $Re\{\tilde{X}[k]\} = Re\{\tilde{X}[-k]\}$
2. $Im\{\tilde{X}[k]\} = -Im\{\tilde{X}[-k]\}$
3. $|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[-k]|$
4. $\angle\tilde{X}[k] = -\angle\tilde{X}[-k]$

8.57. En la Sección 8.4 indicamos que se puede obtener una relación directa entre $X(e^{j\omega})$ y $\tilde{X}[k]$ siendo $\tilde{X}[k]$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de una secuencia periódica y $X(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de un periodo. Como $\tilde{X}[k]$ corresponde a muestras de $X(e^{j\omega})$, la relación entre ambas será una fórmula de interpolación.

Una forma de obtener la relación deseada es basándose en el contenido de la Sección 8.4, la relación de la Ecuación (8.54) y la propiedad de modulación de la Sección 2.9.7. El procedimiento es el siguiente:

1. Siendo $\tilde{X}[k]$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{x}[n]$, exprese la transformada de Fourier $\tilde{X}(e^{j\omega})$ de $\tilde{x}[n]$, en forma de un tren de impulsos, es decir, versiones escaladas y desplazadas de funciones impulso $S(\omega)$.
2. Utilizando la Ecuación (8.57), $x[n]$ se puede expresar como $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, siendo $w[n]$ una ventana apropiada de longitud finita.
3. Como $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, utilizando el resultado de la Sección 2.9.7, $X(e^{j\omega})$ se puede expresar como la convolución (periódica) de $\tilde{X}(e^{j\omega})$ con $W(e^{j\omega})$.

Realizando en detalle el procedimiento anterior, demuestre que $X(e^{j\omega})$ se puede expresar como

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]\frac{\operatorname{sen}[(\omega N - 2\pi k)/2]}{\operatorname{sen}\{[\omega - (2\pi k/N)]/2\}}e^{-j[(N-1)/2](\omega - 2\pi k/N)}.$$

Especifique explícitamente los límites de la suma.

8.58. Sea $X[k]$ la DFT de N puntos de la secuencia de N puntos $x[n]$.

(a) Demuestre que si

$$x[n] = -x[N-1-n],$$

entonces $X[0] = 0$. Considere separadamente los casos de N par y N impar.

(b) Demuestre que si N es par y si

$$x[n] = x[N-1-n],$$

entonces $X[N/2] = 0$.

8.59. En la Sección 2.8, las componentes conjugada simétrica y conjugada antisimétrica de una secuencia $x[n]$ se han definido, respectivamente, como

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]),$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]).$$

En la Sección 8.6.4, vimos que era conveniente definir respectivamente las componentes conjugada simétrica y conjugada antisimétrica periódicas de una secuencia de duración finita N como

$$x_{\text{ep}}[n] = \tfrac{1}{2}\{x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]\}, \qquad 0 \le n \le N-1,$$

$$x_{\text{op}}[n] = \tfrac{1}{2}\{x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]\}, \qquad 0 \le n \le N-1.$$

(a) Demuestre que $x_{\text{ep}}[n]$ se puede relacionar con $x_e[n]$ y que $x_{\text{op}}[n]$ se puede relacionar con $x_o[n]$ mediante las ecuaciones

$$x_{\text{ep}}[n] = (x_e[n] + x_e[n-N]), \qquad 0 \le n \le N-1,$$

$$x_{\text{op}}[n] = (x_o[n] + x_o[n-N]), \qquad 0 \le n \le N-1.$$

(b) Si $x[n]$ se considera como una secuencia de longitud N en general, $x_e[n]$ no se puede recuperar a partir de $x_{\text{ep}}[n]$, y $x_o[n]$ no se puede recuperar a partir de $x_{\text{op}}[n]$. Demuestre que si $x[n]$ se considera como una secuencia de longitud N y $x[n] = 0$ para $n > N/2, x_e[n]$ se puede obtener a partir de $x_{\text{ep}}[n]$, y $x_o[n]$ se puede obtener a partir de $x_{\text{op}}[n]$.

8.60. Demuestre, a partir de las Ecuaciones (8.65) y (8.66), que si $x[n]$ es una secuencia de N puntos y $X[k]$ es su DFT de N puntos,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2.$$

Esta ecuación se conoce comúnmente como la *relación de Parseval* para la DFT.

8.61. Sea $x[n]$ una secuencia finita de longitud N, real y no negativa. Es decir, $x[n]$ es real y no negativa para $0 \leq n \leq N-1$ y es cero para los restantes valores de n. La DFT de n puntos de $x[n]$ se denomina $X[k]$, y su transformada de Fourier es $X(e^{j\omega})$.

Determine si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa. Si indica que una afirmación es verdadera, explique claramente el razonamiento seguido. Si indica que es falsa, construya un contraejemplo.

(a) Si $X(e^{j\omega})$ se puede expresar de la forma

$$X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega},$$

siendo $B(\omega)$ real y α una constante real, $X[k]$ se puede expresar de la forma

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k},$$

siendo $A[k]$ real y γ una constante real.

(b) Si $X[k]$ se puede expresar de la forma

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k},$$

siendo $A[k]$ real y γ una constante real, entonces $X(e^{j\omega})$ se puede expresar de la forma

$$X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega},$$

siendo $B(\omega)$ real y α una constante real.

8.62. Sean $x[n]$ y $y[n]$ dos secuencias reales, positivas y de longitud 256. Es decir,

$$\begin{aligned} x[n] &> 0, \qquad 0 \leq n \leq 255, \\ y[n] &> 0, \qquad 0 \leq n \leq 255, \\ x[n] = y[n] &= 0, \qquad \text{en el resto.} \end{aligned}$$

$r[n]$ indica la convolución *lineal* de $x[n]$ e $y[n]$. $R(e^{j\omega})$ indica la transformada de Fourier de $r[n]$. $R_s[k]$ indica la secuencia formada por 128 muestras equiespaciadas de $R(e^{j\omega})$. Es decir,

$$R_s[k] = R(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/128}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 127.$$

Dadas $x[n]$ e $y[n]$, se desea obtener la secuencia $R_s[k]$ de la forma más eficiente posible. Los *únicos* módulos disponibles son los que indica la Figura P8.62. Los costes asociados a cada módulo son los siguientes:

Los módulos I y II son gratuitos.
El módulo III cuesta 10 unidades.
El módulo IV cuesta 50 unidades.
El módulo V cuesta 100 unidades.

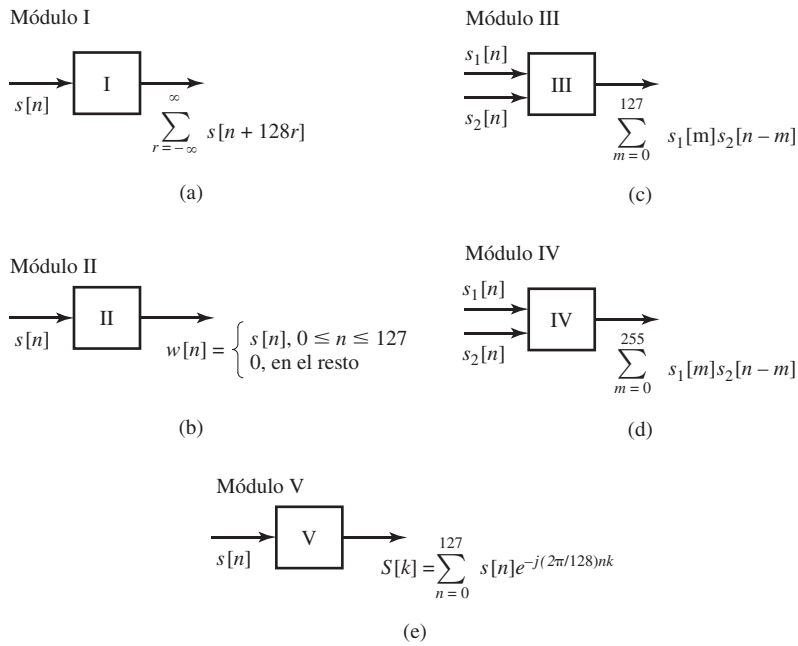


Figura P8.62

Conectando apropiadamente una o más unidades de cada módulo, construya un sistema cuyas entradas sean $x[n]$ e $y[n]$ y cuya salida sea $R_s[k]$. Las consideraciones importantes a tener en cuenta son (a) el funcionamiento correcto del sistema y (b) la eficiencia del sistema. Cuanto menor sea el coste *total*, más eficiente es el sistema.

8.63. Sea $y[n]$ la salida de un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable, con función de transferencia $H(z) = 1/(z - bz^{-1})$, siendo b una constante conocida. Se desea recuperar la señal de entrada $x[n]$ operando sobre $y[n]$.

Se propone el siguiente procedimiento para recuperar parte de la señal $x[n]$ a partir de los datos $y[n]$:

1. Utilizando $y[n], 0 \le n \le N-1$, calcular $Y[k]$, la DFT de N puntos de $y[n]$.
2. Formar
$$V[k] = (W_N^{-k} - bW_N^k)Y[k].$$
3. Calcular la DFT inversa de $V[k]$ para obtener la señal $v[n]$.

¿Para qué valores del índice n dentro del intervalo de valores $n = 0, 1, \ldots, N-1$ se garantiza la igualdad

$$x[n] = v[n]?$$

8.64. Vernet (Vernet, 1971) propuso una transformada discreta de Fourier modificada (MDFT, *Modified DFT*) basada en calcular muestras de la transformada Z en la circunferencia unidad con un desplazamiento respecto a las muestras que se calculan en la DFT. Concretamente, si $X_M[k]$ representa la MDFT de la secuencia $x(n)$,

$$X_M[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j[2\pi k/N+\pi/N]}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Suponga que N es par.

(a) La MDFT de N puntos de una secuencia $x[n]$ corresponde a la DFT de N puntos de otra secuencia $x_M[n]$, que se puede obtener fácilmente a partir de $x[n]$. Determine $x_M[n]$ en función de $x[n]$.

(b) Si $x[n]$ es real, no todos los puntos de la DFT son independientes, ya que la DFT es simétrica conjugada. Es decir, $X[k] = X^*[((-k))_N]$ para $0 \leq k \leq N-1$. De forma similar, si $x[n]$ es real, no todos los puntos de la MDFT son independientes. Determine, para el caso de $x[n]$ real, la relación existente entre los puntos de $X_M[k]$.

(c) (I) Sea $R[k] = X_M[2k]$; es decir, $R[k]$ contiene las muestras de índice par de $X_M[k]$. A partir de su respuesta del apartado (b), demuestre que $X_M[k]$ se puede recuperar a partir de $R[k]$.

(II) $R[k]$ se puede considerar como la MDFT de $N/2$ puntos de una secuencia $r[n]$. Determine una expresión simple que relacione directamente $r[n]$ con $x[n]$.

De acuerdo con los apartados (b) y (c), la MDFT de N puntos de una secuencia real $x[n]$ se puede calcular formando $r[n]$ a partir de $x[n]$ y calculando después la DFT de $N/2$ puntos de $r[n]$. Los dos apartados que siguen están orientados a demostrar que la MDFT se puede utilizar para realizar la convolución lineal.

(d) Considere tres secuencias $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$, todas ellas de longitud N. Sean $X_{1M}[k]$, $X_{2M}[k]$ y $X_{3M}[k]$, respectivamente, las MDFT de las tres secuencias. Si

$$X_{3M}[k] = X_{1M}[k]X_{2M}[k],$$

exprese $x_3[n]$ en función de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. La expresión obtenida debe tener la forma de una sola suma sobre una "combinación" de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ del mismo estilo que la convolución circular (pero no idéntica a ésta).

(e) Es conveniente denominar al resultado del apartado (d) convolución circular modificada. Si las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ valen cero para $n \geq N/2$, demuestre que la convolución circular modificada de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es idéntica a la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

8.65. En algunas aplicaciones de teoría de la codificación es necesario calcular la convolución circular de 63 puntos de dos secuencias de 63 puntos, $x[n]$ y $h[n]$. Suponga que los únicos dispositivos de cómputo disponibles para realizar los cálculos son multiplicadores, sumadores y procesadores que calculan transformadas DFT de N puntos, siendo N una potencia de 2.

(a) Es posible calcular la convolución circular de 63 puntos de $x[n]$ y $h[n]$ utilizando transformadas DFT de 64 puntos, DFT inversas y el método de solapamiento–suma. ¿Cuántas DFT son necesarias? *Sugerencia*: considere cada secuencia de 63 puntos como la suma de una secuencia de 32 puntos con otra secuencia de 31 puntos.

(b) Especifique un algoritmo que calcule la convolución circular de 63 puntos de $x[n]$ y $h[n]$ utilizando dos DFT de 128 puntos y una DFT inversa de 128 puntos.

(c) Se podría calcular también la convolución circular de 63 puntos de $x[n]$ y $h[n]$ calculando su convolución lineal en el dominio del tiempo y solapando los resultados. En términos de multiplicaciones, ¿cuál de los tres métodos propuestos es el más eficiente?, ¿cuál es el menos eficiente? (suponga que una multiplicación compleja requiere cuatro multiplicaciones reales y que $x[n]$ y $h[n]$ son reales.)

8.66. Se desea filtrar una cadena de datos muy larga con un filtro FIR cuya respuesta al impulso tiene una longitud de 50 muestras. Se desea realizar este filtro con una DFT utilizando el método de solapamiento–almacenamiento. El procedimiento es el siguiente:

1. Las secciones de entrada se solapan V muestras.
2. De la salida de cada sección se extraen M muestras de forma que cuando se colocan una tras otra, la secuencia resultante es la salida filtrada deseada.

Suponga que los segmentos de entrada tienen una longitud de 100 muestras y que el tamaño de la DFT es de 128 $(= 2^7)$ muestras. Suponga además que la secuencia de salida de la convolución circular se indexa desde el 0 hasta el 127.

(a) Determine V.

(b) Determine M.

(c) Determine el índice del comienzo y del final de los M puntos extraídos. Es decir, determine cuáles de los 128 puntos de la convolución circular se extraen para colocarlos a continuación del resultado de la sección anterior.

8.67. Un problema que aparece muchas veces en la práctica es aquel en el que una señal distorsionada $y[n]$ es la salida que resulta cuando una señal deseada $x[n]$ se ha filtrado con un sistema lineal e invariante en el tiempo. Se desea recuperar la señal original $x[n]$ procesando la señal de salida $y[n]$. En teoría, $x[n]$ se puede recuperar a partir de $y[n]$ pasando $y[n]$ por el filtro inverso cuya función de transferencia es igual al inverso de la función de transferencia del filtro que produce la distorsión.

Suponga que la distorsión es causada por un filtro FIR cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] - 0{,}5\delta[n - n_0],$$

siendo n_0 un entero positivo. Es decir, la distorsión de $x[n]$ toma la forma de un eco con retardo n_0.

(a) Determine la transformada Z, $H(z)$, y la DFT de N puntos, $H[k]$, de la respuesta al impulso $h[n]$. Suponga que $N = 4n_0$.

(b) Sea $H_i(z)$ la función de transferencia del filtro inverso y sea $h_i[n]$ la correspondiente respuesta al impulso. Determine $h_i[n]$. ¿Es un sistema FIR o IIR? ¿Cuál es la duración de $h_i[n]$?

(c) Suponga que se utiliza un filtro FIR de longitud N para intentar realizar el filtro inverso y sea la DFT de N puntos del filtro FIR

$$G[k] = 1/H[k], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

¿Cuál es la respuesta al impulso $g[n]$ del filtro FIR?

(d) Podría parecer que el filtro FIR cuya DFT es $G[k] = 1/H[k]$ realiza el filtro inverso perfectamente. Después de todo, se podría argumentar que la DFT de N puntos del filtro de distorsión FIR es $H[k]$ y la DFT de N puntos del filtro FIR en cascada es $G[k] = 1/H[k]$. Como $G[k]H[k] = 1$ para todo k, se ha realizado un filtro paso todo sin distorsión. Explique brevemente la falacia de este argumento.

(e) Realice la convolución de $g[n]$ con $h[n]$ y determine así la calidad con la que el filtro FIR, cuya DFT de N puntos es $G[k] = 1/H[k]$, realiza el filtro inverso.

8.68. La transformada discreta de Hartley (DHT, *Discrete Hartley Transform*) de una secuencia $x[n]$ de longitud N es

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] H_N[nk], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{P8.68-1}$$

siendo

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a],$$

con

$$C_N[a] = \cos(2\pi a/N), \qquad S_N[a] = \operatorname{sen}(2\pi a/N).$$

Originalmente propuesta por R.V.L. Hartley en 1942 para el caso de tiempo continuo, la transformada de Hartley tiene propiedades que la hacen útil y atractiva también en el caso de tiempo discreto (Bracewell, 1983, 1984). Concretamente, se puede ver en la Ecuación (P8.68-1) que la DHT de una secuencia real es también una secuencia real. Además, la DHT tiene una propiedad de convolución y existe un algoritmo rápido para su cálculo.

En completa analogía con la DFT, la DHT tiene una periodicidad implícita que se debe tener en cuenta en su utilización. Es decir, si consideramos que $x[n]$ es una secuencia de longitud finita tal que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > N-1$, se puede formar una secuencia periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

tal que $x[n]$ es simplemente un periodo de $\tilde{x}[n]$. La secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ se puede representar mediante un desarrollo en serie de Hartley en tiempo discreto (DHS, *Discrete Hartley Series*), que a su vez se puede interpretar como la DHT centrando la atención en sólo un periodo de la secuencia periódica.

(a) La ecuación de análisis del desarrollo en serie DHS se define como

$$\tilde{X}_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] H_N[nk]. \tag{P8.68-2}$$

Demuestre que los coeficientes del desarrollo en serie DHS forman una secuencia que es también periódica de periodo N. Es decir,

$$\tilde{X}_H[k] = \tilde{X}_H[k+N] \qquad \text{para todo } k.$$

(b) Se puede demostrar que las secuencias $H_N[nk]$ son ortogonales. Es decir,

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_N[nk] H_N[mk] = \begin{cases} N, & ((n))_N = ((m))_N, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Utilizando esta propiedad y la fórmula de análisis del desarrollo en serie DHS de la Ecuación (P8.68-2), demuestre que la fórmula de síntesis del DHS es

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_H[k] H_N[nk]. \tag{P8.68-3}$$

Observe que la DHT es simplemente un periodo de los coeficientes del DHS, y asimismo, la ecuación de síntesis (inversa) de la DHT es idéntica a la ecuación de síntesis del DHS, Ecuación (P8.68-3), excepto porque simplemente se extrae un periodo de $\tilde{x}[n]$. Es decir, la expresión de la ecuación de síntesis de la DHT es

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H[k] H_N[nk], \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{P8.68-4}$$

Utilizando las Ecuaciones (P8.68-1) y (P8.68-4) como definiciones de las relaciones de análisis y síntesis de la DHT respectivamente, se puede proceder a obtener las útiles propiedades de esta representación de una señal en tiempo discreto de longitud finita.

(c) Verifique que $H_N[a] = H_N[a+N]$, y verifique la siguiente propiedad de utilidad de $H_N[a]$:

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= H_N[a] C_N[b] + H_N[-a] S_N[b] \\ &= H_N[b] C_N[a] + H_N[-b] S_N[a]. \end{aligned}$$

(d) Considere una secuencia desplazada circularmente

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n-n_0] = x[((n-n_0))_N], & n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{P8.68-5}$$

En otras palabras, $x_1[n]$ es la secuencia resultante de extraer un periodo de la secuencia periódica desplazada $\tilde{x}[n-n_0]$. Utilizando la identidad verificada en el apartado (c), demuestre que los coeficientes del DHS de la secuencia periódica desplazada son

$$\tilde{x}[n-n_0] \overset{DHS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_H[k] C_N[n_0 k] + \tilde{X}_H[-k] S_N[n_0 k]. \tag{P8.68-6}$$

A partir de este resultado, se puede concluir que la DHT de la secuencia finita desplazada circularmente $x[((n-n_0))_N]$ es

$$x[((n-n_0))_N] \overset{DHT}{\longleftrightarrow} X_H[k] C_N[n_0 k] + X_H[((-k))_N] S_N[n_0 k]. \tag{P8.68-7}$$

(e) Suponga que $x_3[n]$ es la convolución circular de N puntos de dos secuencias de N puntos $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Es decir,

$$\begin{aligned} x_3[n] &= x_1[n] \circledN x_2[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \qquad n = 0,1,\ldots,N-1. \end{aligned} \tag{P8.68-8}$$

Aplicando la DHT a ambos miembros de la Ecuación (P8.68-8), y utilizando la Ecuación (P8.68-7), demuestre que

$$\begin{aligned} X_{H3}[k] &= \tfrac{1}{2}X_{H1}[k](X_{H2}[k] + X_{H2}[((-k))_N]) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}X_{H1}[((-k))_N](X_{H2}[k] - X_{H2}[((-k))_N]) \end{aligned} \tag{P8.68-9}$$

para $k = 0,1,\ldots,N-1$. Ésta es la propiedad de convolución deseada.

Nótese que se puede calcular una convolución lineal utilizando la DHT de la misma forma que utilizando la DFT. Mientras que el cálculo de $X_{H3}[k]$ a partir de $X_{H1}[k]$ y $X_{H2}[k]$ requiere la misma cantidad de cálculos que calcular $X_3[k]$ a partir de $X_1[k]$ y $X_2[k]$, el cálculo de la DHT requiere sólo la mitad de multiplicaciones reales que el cálculo de la DFT.

(f) Suponga que se desea calcular la DHT de una secuencia $x[n]$ de N puntos y que existen los medios para calcular una DFT de N puntos. Describa una técnica para obtener $X_H[k]$ a partir de $X[k]$ para $k = 0,1,\ldots,N-1$.

(g) Suponga que se desea calcular la DFT de una secuencia $x[n]$ de N puntos y que existen los medios para calcular una DHT de N puntos. Describa una técnica para obtener $X[k]$ a partir de $X_H[k]$ para $k = 0,1,\ldots,N-1$.

8.69. Sea $x[n]$ una secuencia de N puntos tal que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > N-1$. Sea $\hat{x}[n]$ la secuencia de $2N$ puntos que se obtiene repitiendo $x[n]$; es decir,

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1, \\ x[n-N], & N \le n \le 2N-1, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Considere la realización del filtro en tiempo discreto que se muestra en la Figura P8.69. Este sistema tiene como respuesta al impulso $h[n]$ cuya longitud es de $2N$ puntos. Es decir, $h[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > 2N-1$.

(a) En la Figura P8.69-1, ¿cómo se expresa $\hat{X}[k]$, la DFT de $2N$ puntos de $\hat{x}[n]$, en función de $X[k]$, la DFT de N puntos de $x[n]$?

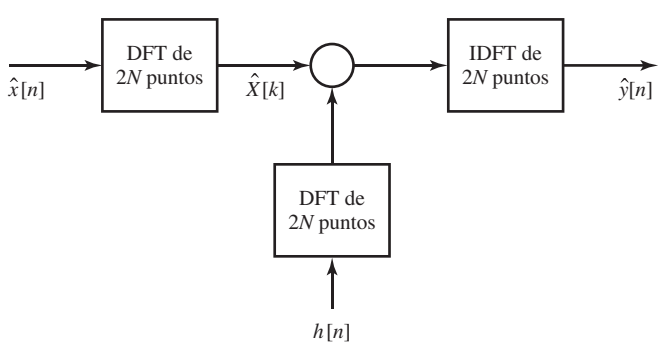


Figura P8.69-1

(b) El sistema que se muestra en la Figura P8.69-1 se puede realizar utilizando sólo transformadas DFT de N puntos, como se indica en la Figura P8.69-2, eligiendo apropiadamente los sistemas A y B. Especifique ambos sistemas de forma que $\hat{y}[n]$ en la Figura P8.69-1 e $y[n]$ en la Figura P8.69-2 sean iguales para $0 \leq n \leq 2N-1$. Observe que $h[n]$ e $y[n]$ en la Figura P8.69-2 son secuencias de $2N$ puntos. $w[n]$ y $g[n]$ son secuencias de N puntos.

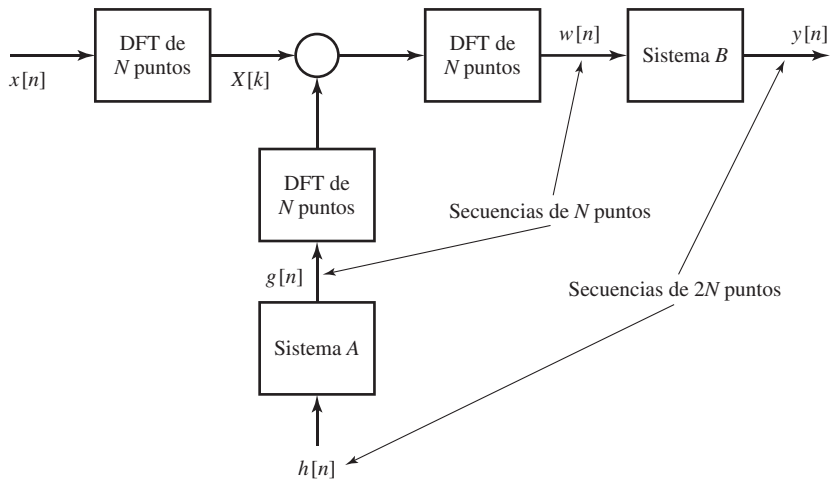


Figura P8.69-2

8.70. En este problema se examinará el uso de la DFT para realizar el filtrado necesario para la interpolación en tiempo discreto o sobremuestreo de una señal. Suponga que se obtiene una señal en tiempo discreto $x[n]$ muestreando una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ con periodo de muestreo T. Además, la señal en tiempo continuo está limitada en banda apropiadamente. Es decir, $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi/T$. En este problema se supone que $x[n]$ tiene longitud N, es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$ o $n > N-1$, siendo N un número par. Estrictamente hablando, no es posible tener una señal que sea de banda limitada y de duración finita, pero a menudo, en sistemas prácticos de tratamiento de señales, se consideran señales de duración finita con muy poca energía fuera de la banda $|\Omega| \leq 2\pi/T$.

Se desea realizar una interpolación 1:4. Es decir, se desea incrementar la frecuencia de muestreo por un factor de 4. Como puede verse en la Figura 4.23, se puede realizar esta conversión de la frecuencia de muestreo utilizando un expansor de frecuencia de muestreo seguido por un filtro paso bajo apropiado. En este capítulo hemos visto que si el filtro paso bajo es de respuesta al impulso de tipo FIR se puede realizar utilizando la DFT. Suponga para este problema que este filtro tiene una respuesta al impulso $h[n]$ de $N+1$ puntos de longitud. La Figura P8.70-1 muestra el sistema, donde $H[k]$ es la DFT de $4N$ puntos de la respuesta al impulso del filtro paso bajo. Nótese que tanto $v[n]$ como $y[n]$ son secuencias de $4N$ puntos.

(a) Especifique la DFT $H[k]$ de forma que el sistema de la Figura P8.70-1 realice el sistema de sobremuestreo deseado. Medite cuidadosamente sobre la fase de los valores de $H[k]$.

(b) Es también posible sobremuestrear $x[n]$ utilizando el sistema de la Figura P8.70-2. Especifique el sistema A del bloque central de dicha figura de forma que la señal de $4N$ puntos $y_2[n]$ de la Figura P8.67-2 sea la misma que $y[n]$ en la Figura P8.70-1. Advierta que el sistema A puede realizar más de una operación.

(c) ¿Existe alguna razón por la que la realización de la Figura P8.70-2 pudiera ser preferible a la de la Figura P8.70-1?

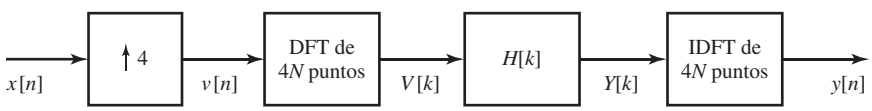


Figura P8.70-1

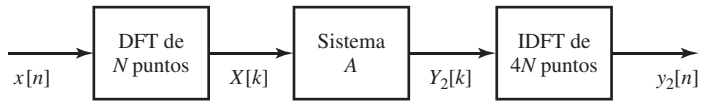


Figura P8.70-2

8.71. Obtenga la Ecuación (8.153) utilizando las Ecuaciones (8.164) y (8.165).

8.72. Considere el siguiente procedimiento

(a) Formar la secuencia $v[n] = x_2[2n]$ donde $x_2[n]$ está dada por la Ecuación (8.166). El resultado es

$$\begin{aligned} v[n] &= x[2n] \qquad n = 0,1,\ldots,N/2-1 \\ v[N-1-n] &= x[2n+1], \quad n = 0,1,\ldots,N/2-1. \end{aligned}$$

(b) Calcular $V[k]$, la DFT de N puntos de $v[n]$.
Demuestre que lo siguiente es cierto:

$$\begin{aligned} X^{c2}[k] &= 2Re\{e^{-j2\pi k/(4N)}V[k]\}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1, \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1} v[n]\cos\left[\frac{\pi k(4n+1)}{2N}\right], \qquad k = 0,1,\ldots,N-1, \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right], \qquad k = 0,1,\ldots,N-1. \end{aligned}$$

Nótese que este algoritmo utiliza transformadas DFT de N puntos en lugar de $2N$ puntos como se requiere en la Ecuación (8.167). Además, como $v[n]$ es una secuencia real, se puede explotar la simetría par e impar al realizar el cálculo de $V[k]$ mediante una DFT compleja de $N/4$ puntos.

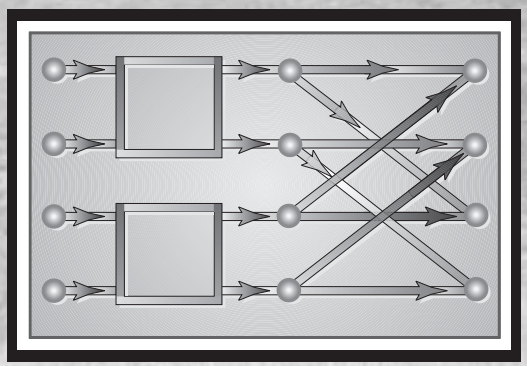
8.73. Obtenga la Ecuación (8.156) utilizando las Ecuaciones (8.174) y (8.175).

8.74. **(a)** Utilice el teorema de Parseval de la DFT para obtener la relación entre $\sum_k |X^{c1}[k]|^2$ y $\sum_n |x[n]|^2$.

(b) Utilice el teorema de Parseval de la DFT para obtener la relación entre $\sum_k |X^{c2}[k]|^2$ y $\sum_n |x[n]|^2$.

9

Cómputo de la transformada discreta de Fourier



9.0. INTRODUCCIÓN

La transformada discreta de Fourier (DFT) tiene un papel muy importante en el diseño, análisis y realización de sistemas y algoritmos de tratamiento de señales en tiempo discreto. Las propiedades básicas de la transformada de Fourier y de la transformada discreta de Fourier, presentadas en los Capítulos 2 y 8 respectivamente, hacen que sea particularmente interesante analizar y diseñar sistemas en el dominio de Fourier. Es igualmente importante el hecho de que existen algoritmos eficientes para el cálculo explícito de la DFT. Como resultado, la DFT se convierte en un componente importante en muchas aplicaciones prácticas de los sistemas en tiempo discreto.

En este capítulo vamos a ver varios métodos para calcular valores de la DFT. El objetivo principal de este capítulo es una clase de algoritmos particularmente eficientes para el cómputo digital de una DFT de N puntos. Estos algoritmos eficientes se denominan colectivamente *transformada rápida de Fourier (FFT, Fast Fourier Transform)*, y los presentaremos en las Secciones 9.2, 9.3 y 9.5. Para conseguir la máxima eficiencia, los algoritmos FFT deben calcular los N valores de la DFT. Cuando sólo se requieren unos cuantos valores de la DFT en una parte del intervalo de frecuencias $0 \leq \omega < 2\pi$, existen otros algoritmos que pueden ser más eficientes y flexibles, aunque sean menos eficientes que los algoritmos de la FFT para calcular todos los valores de la DFT. Como ejemplo de esos algoritmos tenemos el algoritmo de Goertzel, que se presenta en la Sección 9.1.2 y el algoritmo de la transformada *chirp* que se abordará en la Sección 9.6.2.

Hay muchas formas de medir la complejidad y la eficiencia de un determinado algoritmo o realización, y el resultado final depende tanto de la tecnología disponible como de la aplicación que se considere. Utilizaremos el número de multiplicaciones y sumas aritméticas como medida de la complejidad computacional. Esta medida es simple de aplicar, y el número de multiplicaciones y sumas está directamente relacionado con la velocidad de cómputo cuando los algoritmos se realizan en computadores digitales de propósito general o en procesadores de propósito específico. Sin embargo, existen otras medidas que pueden ser más apropiadas en algunas ocasiones. Por ejemplo, en realizaciones

VLSI son importantes el área del chip y los requisitos de potencia. Estas consideraciones pueden no estar relacionadas directamente con el número de operaciones aritméticas.

En términos de multiplicaciones y sumas, la clase de los algoritmos de la FFT puede ser órdenes de magnitud superior a otros algoritmos alternativos. La eficiencia de los algoritmos de la FFT es de hecho tan alta que en muchos casos el procedimiento más eficiente para realizar una convolución es calcular la transformada de las secuencias que se van a convolucionar, multiplicar las transformadas y calcular posteriormente la transformada inversa del producto de dichas transformadas. Los detalles de esta técnica se presentaron en la Sección 8.7. En aparente contradicción con esto existe una serie de algoritmos para el cómputo de la DFT o de un conjunto más general de muestras de la transformada de Fourier (que se mencionan brevemente en la Sección 9.6), cuya eficacia se deriva de un replanteamiento de la transformada de Fourier en forma de convolución y por lo tanto, realizan los cálculos para obtener la transformada de Fourier empleando procedimientos eficientes para evaluar la convolución asociada. Esto sugiere la posibilidad de realizar una convolución mediante multiplicación de DFT, calculando previamente las DFT mediante convoluciones y aprovechando los procedimientos eficientes para realizar dichas convoluciones asociadas. Aunque, como hemos dicho, esto plantea una contradicción aparente, en la Sección 9.6 veremos que en ciertos casos es un planteamiento completamente razonable y no presenta contradicción.

En las secciones que siguen, consideraremos diversos algoritmos para calcular la transformada discreta de Fourier. Comenzaremos en la Sección 9.1 con la presentación de métodos de cálculo directo, es decir, métodos que se basan en el uso directo de la relación de definición de la DFT como una fórmula computacional. Incluiremos en esta exposición el algoritmo de Goertzel (Goertzel 1958), cuyo coste computacional es proporcional a N^2, pero con una constante de proporcionalidad inferior a la de la evaluación directa de la fórmula de definición. Una de las principales ventajas del método de evaluación directa o del algoritmo de Goertzel es que no están restringidos al cómputo de la DFT, sino que se puede utilizar para calcular cualquier conjunto deseado de muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de longitud finita.

En las Secciones 9.2 y 9.3 haremos una exposición detallada de los algoritmos de FFT en los que el coste computacional es proporcional a $N \log_2 N$. Esta clase de algoritmos es considerablemente más eficiente en términos de operaciones aritméticas que el algoritmo de Goertzel, pero están orientados específicamente al cómputo de *todos* los valores de la DFT. No examinaremos exhaustivamente esta clase de algoritmos, sino que ilustraremos los principios generales comunes a todos ellos considerando en detalle sólo algunos esquemas entre los más comúnmente utilizados.

En la Sección 9.4 consideraremos algunos aspectos prácticos que surgen al implementar los algoritmos de la FFT para longitudes potencia de dos, presentados en las Secciones 9.2 y 9.5. La Sección 9.5 contiene una breve revisión de los algoritmos para el caso en que N sea un número compuesto, incluyendo una breve referencia a los algoritmos de la FFT optimizados para una arquitectura de cómputo particular. En la Sección 9.6 examinaremos algoritmos que se basan en la formulación de la DFT como una convolución. En la Sección 9.7 veremos los efectos del redondeo aritmético sobre los algoritmos de la FFT.

9.1. CÓMPUTO DIRECTO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Como definimos en el Capítulo 8, la DFT de una secuencia finita de longitud N es

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{9.1}$$

siendo $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$. La expresión de la transformada discreta de Fourier inversa es

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{9.2}$$

En las Ecuaciones (9.1) y (9.2), tanto $x[n]$ como $X[k]$ pueden ser complejos.[1] Como las expresiones del miembro derecho de esas ecuaciones sólo se diferencian en el signo del exponente de W_N y en el factor de escala $1/N$, cualquier presentación sobre los procedimientos computacionales para la Ecuación (9.1) se puede aplicar con modificaciones directas a la Ecuación (9.2) (véase el Problema (9.1)).

La mayor parte de los procedimientos para mejorar la eficiencia de cómputo de la DFT explotan las propiedades de periodicidad y simetría de W_N^{kn}. Concretamente,

$$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \text{ (simetría conjugada compleja)} \tag{9.3a}$$

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \qquad \text{(periodicidad en } n \text{ y } k\text{)}. \tag{9.3b}$$

(Como $W_N^{kn} = \cos(2\pi kn/N) - j\,\mathrm{sen}(2\pi kn/N)$ estas propiedades son consecuencia directa de la simetría y periodicidad de las funciones seno y coseno subyacentes). Como los números W_N^{kn} desempeñan el papel de coeficientes en las Ecuaciones (9.1) y (9.2), la redundancia que implican dichas condiciones se puede usar ventajosamente para reducir el coste computacional requerido para su evaluación.

9.1.1. Evaluación directa de la definición de la DFT

Con objeto de crear un marco de referencia, consideremos primero la evaluación directa de la expresión de la DFT de la Ecuación (9.1). Dado que $x[n]$ puede ser compleja, si utilizamos la Ecuación (9.1) directamente, se requieren N multiplicaciones complejas y $(N-1)$ sumas complejas para calcular cada valor de la DFT. Por tanto, para obtener todos los N valores se requieren en total N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas. Si expresamos la Ecuación (9.1) en función de operaciones con números reales obtenemos

$$\begin{aligned} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \Big[& (Re\{x[n]\}Re\{W_N^{kn}\} - Im\{x[n]\}Im\{W_N^{kn}\}) \\ & + j(Re\{x[n]\}Im\{W_N^{kn}\} + Im\{x[n]\}Re\{W_N^{kn}\})\Big], \\ & k = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{9.4}$$

lo que demuestra que cada multiplicación compleja $x[n] \cdot W_N^{kn}$ requiere cuatro multiplicaciones reales y dos sumas reales, y cada suma compleja requiere dos sumas reales. Por tanto, para cada valor de k,

[1] Al presentar algoritmos para calcular la DFT de una secuencia de longitud finita $x[n]$, merece la pena recordar del Capítulo 8 que los valores de la DFT definidos en la Ecuación (9.1) pueden verse como muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, o como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN].$$

Será de utilidad tener en mente ambas interpretaciones y ser capaces de centrarse en una o en otra según sea conveniente.

el cálculo directo de $X[k]$ requiere $4N$ multiplicaciones reales y $(4N-2)$ sumas reales.[2] Como $X[k]$ se debe calcular para N valores diferentes de k, el cálculo directo de la transformada discreta de Fourier de una secuencia $x[n]$ requiere $4N^2$ multiplicaciones reales y $N(4N-2)$ sumas reales. Además de las multiplicaciones y las sumas que indica la Ecuación (9.3), el cálculo de la DFT utilizando un computador digital de propósito general o hardware específico requiere también la provisión de almacenamiento y acceso para los N valores complejos de la secuencia de entrada $x[n]$ y los valores de los coeficientes complejos W_N^{kn}. Puesto que el número de cálculos y por tanto el tiempo de cómputo es aproximadamente proporcional a N^2, es evidente que el número de operaciones aritméticas necesarias para calcular la DFT por el método directo se hace muy elevado para valores grandes de N. Por este motivo son de interés procedimientos de cómputo que reduzcan el número de multiplicaciones y sumas.

Como ilustración de la forma en que se pueden explotar las propiedades de W_N^{kn} utilizando la propiedad de simetría de la Ecuación (9.3a) se pueden agrupar los términos correspondientes a n y $(N-n)$ en la suma de la Ecuación (9.3). Por ejemplo, el agrupamiento

$$\begin{aligned} &Re\{x[n]\}Re\{W_N^{kn}\} + Re\{x[N-n]\}Re\{W_N^{k(N-n)}\} \\ &\qquad = (Re\{x[n]\} + Re\{x[N-n]\})Re\{W_N^{kn}\} \end{aligned}$$

elimina una multiplicación real, como también lo hace el agrupamiento

$$\begin{aligned} &-Im\{x[n]\}Im\{W_N^{kn}\} - Im\{x[N-n]\}Im\{W_N^{k(N-n)}\} \\ &\qquad = -(Im\{x[n]\} - Im\{x[N-n]\})Im\{W_N^{kn}\}. \end{aligned}$$

Se pueden utilizar agrupamientos similares para los otros términos de la Ecuación (9.4). De esta forma, el número de multiplicaciones se puede reducir aproximadamente en un factor de 2. Se puede aprovechar también el hecho de que para ciertos valores del producto kn, las funciones seno y coseno implícitas toman los valores de 1 o 0, lo que elimina en esos casos la necesidad de multiplicaciones. Sin embargo, las reducciones de este tipo nos dejan con un número de operaciones que todavía es proporcional a N^2. Afortunadamente, la segunda propiedad [Ecuación (9.3b)], la periodicidad de la secuencia compleja W_N^{kn}, se puede explotar para conseguir una reducción significativa de las operaciones.

9.1.2. El algoritmo de Goertzel

El algoritmo de Goertzel (Goertzel, 1958) es un ejemplo de cómo la periodicidad de la secuencia W_N^{kn} se puede utilizar para reducir cálculos. Para obtener el algoritmo, comenzaremos teniendo en cuenta que

$$W_N^{-kN} = e^{j(2\pi/N)Nk} = e^{j2\pi k} = 1, \tag{9.5}$$

ya que k es entero. Esto es un resultado directo consecuencia de la periodicidad de periodo N de W_N^{-kn} en n o k. Utilizando la Ecuación (9.5) se puede multiplicar el miembro derecho de la Ecuación (9.1) por W_N^{-kN} sin afectar a la ecuación. Por tanto,

$$X[k] = W_N^{-kN}\sum_{r=0}^{N-1} x[r]W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1} x[r]W_N^{-k(N-r)}. \tag{9.6}$$

[2] A lo largo de esta exposición, el valor del número de operaciones es sólo aproximado. La multiplicación por W_N^0, por ejemplo, no requiere realmente una multiplicación. No obstante, cuando N es grande, la estimación de la complejidad computacional que se obtiene incluyendo esas multiplicaciones es lo suficientemente exacta como para permitir la comparación entre diferentes clases de algoritmos.

Para obtener el resultado final, definamos la secuencia

$$y_k[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] W_N^{-k(n-r)} u[n-r]. \tag{9.7}$$

Utilizando las Ecuaciones (9.6) y (9.7) y el hecho de que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$, se deduce que

$$X[k] = y_k[n]\Big|_{n=N}. \tag{9.8}$$

La Ecuación (9.7) se puede interpretar como una convolución discreta de la secuencia de duración finita $x[n], 0 \leq n \leq N-1$, con la secuencia $W_N^{-kn}u[n]$. En consecuencia, $y_k[n]$ se puede ver como la respuesta de un sistema con respuesta al impulso $W_N^{-kn}u[n]$ a una entrada de longitud finita $x[n]$. En particular, $X[k]$ es el valor de la salida cuando $n = N$.

La Figura 9.1 muestra un sistema con respuesta al impulso $W_N^{-kn}u[n]$ que representa la ecuación en diferencias

$$y_k[n] = W_N^{-k} y_k[n-1] + x[n], \tag{9.9}$$

donde se suponen condiciones de reposo inicial. Como la entrada genérica $x[n]$ y los coeficientes W_N^{-k} son ambos complejos, el cálculo de cada nuevo valor de $y_k[n]$ utilizando el sistema de la Figura 9.1 requiere 4 multiplicaciones reales y 4 sumas reales. Todos los valores que intervienen $y_k[1], y_k[2], \ldots, y_k[N-1]$ se deben utilizar para calcular $y_k[N] = X[k]$, por lo que el uso del sistema de la Figura 9.1 como algoritmo computacional requiere $4N$ multiplicaciones reales y $4N$ sumas reales para calcular $X[k]$ en cada valor de k. Por tanto, el procedimiento es ligeramente menos eficiente que el método directo. Sin embargo, evita el cálculo y el almacenamiento de los coeficientes W_N^{kn}, ya que esas cantidades se calculan mediante la recursión que aparece en la Figura 9.1.

Es posible mantener esta simplificación reduciendo el número de multiplicaciones por un factor de 2. Para ver cómo se puede hacer, debemos tener en cuenta que la función de transferencia del sistema de la Figura 9.1 es

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}. \tag{9.10}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de $H_k(z)$ por el factor $(1 - W_N^k z^{-1})$, obtenemos

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{(1 - W_N^{-k} z^{-1})(1 - W_N^k z^{-1})} \\ &= \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

El grafo de flujo de señal de la Figura 9.2 corresponde a la implementación en forma directa II de la función de transferencia de la Ecuación (9.11), para la que la ecuación en diferencias de los polos es

$$v_k[n] = 2\cos(2\pi k/N) v_k[n-1] - v_k[n-2] + x[n]. \tag{9.12a}$$

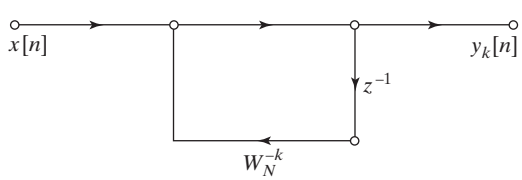


Figura 9.1 Grafo de flujo para el cómputo recursivo de primer orden complejo de $X[k]$.

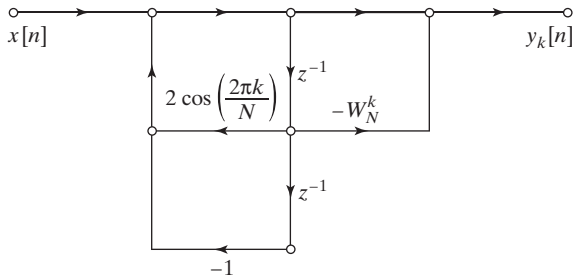


Figura 9.2 Grafo de flujo para el cómputo recursivo de segundo orden de $X[k]$ (algoritmo de Goertzel).

Tras N iteraciones de la Ecuación (9.12a) comenzando con las condiciones de reposo inicial $w_k[-2] = w_k[-1] = 0$, el valor deseado de la DFT se puede obtener implementando el cero como

$$X[k] = y_k[n]\Big|_{n=N} = v_k[N] - W_N^k v_k[N-1]. \tag{9.12b}$$

Si la entrada es compleja, sólo se requieren dos multiplicaciones reales por muestra para realizar los polos del sistema, ya que los coeficientes son reales y el factor -1 no se cuenta como multiplicación. Como en el caso del sistema de primer orden, para una entrada compleja se requieren cuatro sumas por muestra para realizar los polos (si la entrada es compleja). Como sólo necesitamos llevar al sistema a un estado en el que se pueda calcular $y_k[N]$ no hay que realizar en cada iteración de la ecuación en diferencias la multiplicación compleja por $-W_N^k$ necesaria para implementar el cero de la función de transferencia. Sólo hay que realizarla tras la N-ésima iteración. Por tanto, el número total de operaciones es de $2N$ multiplicaciones reales y $4N$ sumas reales para los polos,[3] más 4 multiplicaciones reales y 4 sumas reales para el cero. Por tanto, el número total de operaciones es de $2(N+2)$ multiplicaciones reales y $4(N+1)$ sumas reales, aproximadamente la mitad del número de multiplicaciones reales que requiere el método directo. En este esquema más eficiente, todavía tenemos la ventaja de que $\cos(2\pi k/N)$ y W_N^k son los únicos coeficientes que se deben calcular y almacenar. Los coeficientes W_N^{kn} se calculan de nuevo implícitamente en la iteración de la fórmula de recursión asociada a la Figura 9.2.

Como una ventaja adicional del uso de esta red, consideremos el cálculo de la DFT de $x[n]$ en las dos frecuencias simétricas $2\pi k/N$ y $2\pi(N-k)/N$. Es decir, el cálculo de $X[k]$ y $X[N-k]$. Es inmediato verificar que la red como la de la Figura 9.2, que sería necesaria para calcular $X[N-k]$ tiene exactamente los mismos polos que la de la Figura 9.2, pero el coeficiente del cero es el complejo conjugado del que aparece en la Figura 9.2 (véase el Problema 9.21). Como el cero se realiza sólo en la iteración final, las $2N$ multiplicaciones y las $4N$ sumas necesarias para los polos se pueden usar para al cálculo de los dos valores de la DFT. Por tanto, para el cálculo de los N valores de la transformada discreta de Fourier utilizando el algoritmo de Goertzel, el número de multiplicaciones reales necesarias es aproximadamente N^2 y el número de sumas reales es aproximadamente $2N^2$. Aunque esto es más eficiente que el cálculo directo de la transformada discreta de Fourier, el número de operaciones es todavía proporcional a N^2.

Ni en el método directo ni en el método de Goertzel es necesario evaluar $X[k]$ en todos los N valores de k. De hecho, se puede obtener $X[k]$ para sólo M valores de k, y cada valor de la DFT se calcula mediante un sistema recursivo de la forma de la Figura 9.2 con los coeficientes apropiados. En este caso, el número total de operaciones es proporcional a NM. El método de Goertzel y el procedimiento directo son atractivos cuando M es pequeño. Sin embargo, como se dijo anteriormente, existen algoritmos en los que el coste computacional es proporcional a $N\log_2 N$ cuando N es potencia de 2. Por tanto, cuando

[3] Aquí se supone que $x[n]$ es compleja. Si $x[n]$ es real, la cuenta de operaciones es de N multiplicaciones reales y $2N$ sumas reales para implementar los polos.

M es menor que $\log_2 N$, el algoritmo de Goertzel o el método directo pueden ser de hecho los procedimientos más eficientes. Pero cuando se requieren los N valores de $X[k]$, los algoritmos de diezmado en el tiempo, que se consideran a continuación, son aproximadamente $(N/\log_2 N)$ más eficientes que el método directo o el algoritmo de Goertzel.

Tal como lo hemos obtenido, el algoritmo de Goertzel calcula el valor $X[k]$ de la DFT, que es idéntico al valor $X(e^{j\omega})$ de la transformada de Fourier en tiempo discreto calculado en la frecuencia $\omega = 2\pi k/N$. Con sólo una modificación menor del razonamiento anterior, podemos demostrar que $X(e^{j\omega})$ se puede evaluar en cualquier frecuencia ω_a iterando N veces la ecuación en diferencias

$$v_a[n] = 2\cos(\omega_0)v_a[n-1] - v_a[n-2] + x[n], \tag{9.13a}$$

obteniéndose el valor deseado de la transformada de Fourier en tiempo discreto como

$$X(e^{j\omega_a}) = e^{-j\omega_a N}(v_a[N] - e^{-j\omega_a}v_a[N-1]). \tag{9.13b}$$

Observe que en el caso de $\omega_a = 2\pi k/N$, las Ecuaciones (9.13a) y (9.13b) se reducen a las Ecuaciones (9.12a) y (9.12b). Como la Ecuación (9.13b) sólo se debe calcular una vez, sólo es ligeramente menos eficiente calcular el valor de $X(e^{j\omega})$ en una frecuencia arbitraria que en una frecuencia de la DFT.

Existe todavía otra ventaja del algoritmo de Goertzel en algunas aplicaciones en tiempo real en las que el cálculo puede iniciarse tan pronto como esté disponible la primera muestra de la entrada. En el cálculo debe iterarse la ecuación en diferencias (9.12a) o (9.13a) cada vez que está disponible una nueva muestra de entrada. Tras N iteraciones, el valor deseado de $X(e^{j\omega})$ se puede calcular con la Ecuación (9.12b) o con la Ecuación (9.13b), según sea apropiado.

9.1.3. Explotación de la simetría y la periodicidad

Los algoritmos de cómputo que explotan la periodicidad y la simetría de la secuencia W_N^{kn} son conocidos desde mucho antes de la era de los computadores digitales de alta velocidad. En ese momento, cualquier esquema que redujera los cálculos manuales incluso en un factor de 2 era bienvenido. Heideman, Johnson y Burrus (1984) han retrocedido a los orígenes de la FFT hasta Gauss en 1805. Runge (1905) y después Danielson y Lanczos (1942) describieron algoritmos cuya carga computacional era aproximadamente proporcional a $N\log_2 N$ en lugar de a N^2. Sin embargo, la diferencia no era de mucha importancia para valores pequeños de N, que eran para los que se podían realizar los cálculos manualmente. La posibilidad de un ahorro computacional importante se ignoró de forma general hasta 1965, cuando Cooley y Tukey (1965) publicaron un algoritmo para el cálculo de la transformada discreta de Fourier aplicable cuando N es un número compuesto, es decir, producto de dos o más enteros. La publicación de su artículo fue el punto de partida de una gran actividad para la aplicación de la transformada discreta de Fourier al tratamiento de señales y produjo el descubrimiento de varios algoritmos computacionales altamente eficientes. Estos algoritmos se conocen colectivamente como *transformada rápida de Fourier*, o FFT.[4]

A diferencia de los métodos directos considerados anteriormente, los algoritmos de FFT se basan en el principio fundamental de descomponer el cálculo de una transformada discreta de Fourier de una secuencia de longitud N en transformadas discretas de Fourier sucesivamente más pequeñas que se combinan para formar la transformada de N puntos. Las transformadas de menor longitud se pueden evaluar por métodos directos o descomponerse a su vez en transformadas más pequeñas. La forma en

[4]Un resumen histórico de los resultados relacionados con la FFT se puede consultar en Cooley, Lewis y Welch (1967) y Heideman, Johnson y Burrus (1984).

que se aplica este principio conduce a una variedad de algoritmos diferentes, todos ellos comparables en cuanto a mejora de la velocidad de cómputo. En este capítulo consideraremos dos clases básicas de algoritmos de FFT. La primera, denominada de diezmado en el tiempo, recibe su nombre del hecho de que en el proceso de estructurar los cálculos en transformaciones más pequeñas, la secuencia $x[n]$ (que generalmente se considera una secuencia temporal) se descompone en subsecuencias sucesivamente más pequeñas. En la segunda clase general de algoritmos la secuencia de los coeficientes de la transformada discreta de Fourier $X[k]$ se descompone en subsecuencias menores. De ahí su nombre de diezmado en frecuencia.

En la Sección 9.2 presentaremos los algoritmos de diezmado en el tiempo. Los algoritmos de diezmado en frecuencia se exponen en la Sección 9.3. Se trata de una ordenación arbitraria. Las dos secciones son esencialmente independientes y se pueden estudiar en cualquier orden.

9.2. ALGORITMOS DE FFT MEDIANTE DIEZMADO EN EL TIEMPO

Al calcular la DFT, se pueden obtener incrementos muy grandes en la eficiencia mediante la descomposición de los cálculos en sucesivas DFT más pequeñas. En este proceso, explotaremos tanto la simetría como la periodicidad de la exponencial compleja $W_N^{kn} = e^{-j(2\pi/N)kn}$. Los algoritmos en los que la descomposición se realiza sobre la secuencia $x[n]$, que se divide sucesivamente en secuencias más pequeñas, se denominan *algoritmos de diezmado en el tiempo*.

El principio del diezmado en el tiempo se ilustra mejor considerando el caso especial de que N es una potencia entera de 2, es decir, $N = 2^\nu$. Como N es un número entero par, se puede considerar el cálculo de $X[k]$ separando $x[n]$ en dos secuencias de $(N/2)$ puntos[5] formadas por los puntos de índice par de $g[n] = x[2n]$ y los puntos de índice impar de $h[n] = x[2n+1]$. La Figura 9.3 muestra esta descomposición y también el hecho (quizá obvio, pero crucial) de que la secuencia inicial se puede reconstruir simplemente entrelazando las dos secuencias.

Para entender el significado de la Figura 9.3 como principio organizador del cómputo de la DFT, resulta útil considerar las equivalencias en el dominio de la frecuencia de las operaciones que se muestran en el diagrama de bloques. En primer lugar, nótese que la operación en el dominio del tiempo etiquetada como "Desplazamiento a la izquierda de 1" corresponde en el dominio de la frecuencia a multiplicar $X(e^{j\omega})$ por $e^{j\omega}$. Como se indicó en la Sección 4.6.1, correspondiente a la compresión de secuencias temporales por 2, las transformadas de Fourier en tiempo discreto $G(e^{j\omega})$ y $H(e^{j\omega})$ (y por tanto $G[k]$ y $H[k]$) se obtienen tras el solapamiento en el dominio de la frecuencia que aparece al expandir la escala de frecuencia mediante el cambio $\omega \to \omega/2$ en $X(e^{j\omega})$ y $e^{j\omega}X(e^{j\omega})$. Es decir, las transformadas de Fourier en tiempo discreto de las secuencias comprimidas $g[n] = x[2n]$ y $h[n] = x[2n+1]$ serán respectivamente

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega-2\pi)/2})\right) \tag{9.14a}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega/2})e^{j\omega/2} + X(e^{j(\omega-2\pi)/2})e^{j(\omega-2\pi)/2}\right). \tag{9.14b}$$

La expansión por 2 de las secuencias que se muestra a la derecha del diagrama de bloques de la Figura 9.3 produce unas transformadas de Fourier en tiempo discreto comprimidas en frecuencia

[5] Al presentar los algoritmos de FFT empleamos indistintamente los términos *muestra* y *punto* con el significado de *valor de la secuencia*, es decir, un número. Además, nos referiremos a una secuencia de longitud N como una secuencia de N puntos, y la DFT de una secuencia de longitud N se denominará DFT de N puntos.

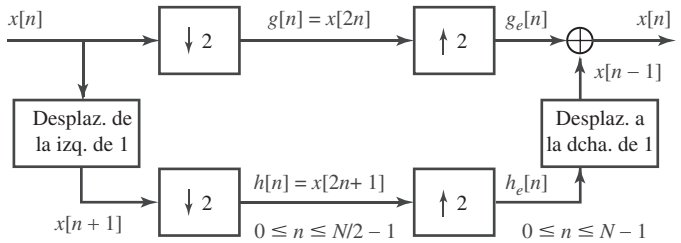


Figura 9.3 Ilustración del principio básico de diezmado en el tiempo.

$G_e(e^{j\omega}) = G(e^{j2\omega})$ y $H_e(e^{j\omega}) = H(e^{j2\omega})$, que, de acuerdo con la Figura 9.3, se combinan para formar $X(e^{j\omega})$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= G_e(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}H_e(e^{j\omega}) \\ &= G(e^{j2\omega}) + e^{-j\omega}H(e^{j2\omega}). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Sustituir las Ecuaciones (9.14a) y (9.14b) en la Ecuación (9.15) permite verificar que la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ de la secuencia de N puntos $x[n]$ se puede representar, como indica la Ecuación (9.15), en función de las transformadas de Fourier en tiempo discreto de las secuencias de $N/2$ puntos $g[n] = x[2n]$ y $h[n] = x[2n+1]$. Por tanto, la DFT $X[k]$ se podrá asimismo representar en función de las DFT de $g[n]$ y $h[n]$.

Concretamente, $X[k]$ corresponde a evaluar $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$ con $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Por consiguiente, utilizando le Ecuación (9.15), obtenemos

$$X[k] = X(e^{j2\pi k/N}) = G(e^{j(2\pi k/N)2}) + e^{-j2\pi k/N}H(e^{(j2\pi k/N)2}). \tag{9.16}$$

De la definición de $g[n]$ y $G(e^{j\omega})$, se sigue que

$$\begin{aligned} G(e^{j(2\pi k/N)2}) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]e^{-j(2\pi k/N)2n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]e^{-j(2\pi k/(N/2)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{kn}, \end{aligned} \tag{9.17a}$$

y, con un proceso similar, se puede demostrar que

$$H(e^{j(2\pi k/N)2}) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{kn}. \tag{9.17b}$$

Por tanto, de las Ecuaciones (9.17a) y (9.17b) y la Ecuación (9.16) se deduce que

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{9.18}$$

donde la DFT de N puntos $X[k]$ es por definición

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{9.19}$$

Asimismo, por definición, las DFT de $(N/2)$ puntos de $g[n]$ y $h[n]$ son

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_{N/2}^{nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1 \tag{9.20a}$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_{N/2}^{nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1. \tag{9.20b}$$

La Ecuación (9.18) indica que la DFT de N puntos $X[k]$ se puede calcular evaluando las DFT de $(N/2)$ puntos $G[k]$ y $H[k]$ en $k = 0, 1, \ldots, N-1$ en vez de $k = 0, 1, \ldots, N/2-1$ como haríamos normalmente para las DFT de $(N/2)$ puntos. Esto se consigue fácilmente cuando $G[k]$ y $H[k]$ se calculan sólo para $k = 0, 1, \ldots, N/2-1$, ya que las transformadas de $(N/2)$ son implícitamente periódicas de periodo $N/2$. Teniendo en cuenta esta observación, la Ecuación (9.18) se puede reescribir como

$$X[k] = G[((k))_{N/2}] + W_N^k H[((k))_{N/2}] \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{9.21}$$

La notación $((k))_{N/2}$ explicita de forma conveniente que, aunque $G[k]$ y $H[k]$ sólo se calculan para $k = 0, 1, \ldots, N/2-1$, se extienden periódicamente (sin cómputo adicional) interpretando k como módulo $N/2$.

Tras calcular las dos DFT, éstas se combinan de acuerdo con la Ecuación (9.21) para obtener la DFT de N puntos $X[k]$. La Figura 9.4 muestra este cálculo para $N = 8$. En esta figura, hemos utilizado los convenios sobre los grafos de flujo de señales que se presentaron en el Capítulo 6 para representar ecuaciones en diferencias. Es decir, las ramas que entran a un nodo se suman para producir la variable del nodo. Cuando no se indica coeficiente, se supone que el arco tiene ganancia unidad. En otros arcos, la ganancia es una potencia entera de W_N.

En la Figura 9.4 se calculan dos DFT de 4 puntos. $G[k]$ indica la DFT de 4 puntos de los puntos pares y $H[k]$ la DFT de 4 puntos de los puntos impares. De acuerdo con la Ecuación (9.21), $X[0]$ se obtiene multiplicando $H[0]$ por W_N^0 y sumando $G[0]$ al producto. El valor de la DFT $X[1]$ se obtiene multiplicando $H[1]$ por W_N^1 y sumando $G[1]$ al resultado. La Ecuación (9.21) indica que, debido a la periodicidad implícita de $G[k]$ y $H[k]$, para calcular $X[4]$, hay que multiplicar $H[((4))_4]$ por W_N^4 y sumar $G[((4))_4]$ al resultado. Sin embargo, como $G[k]$ y $H[k]$ son periódicas en k con periodo 4, $H[4] = H[0]$ y $G[4] = G[0]$. Así, $X[4]$ se obtiene multiplicando $H[0]$ por W_N^4 y sumando al resultado $G[0]$. Como se muestra en la Figura 9.4, los valores de $X[5]$, $X[6]$ y $X[7]$ se obtienen de forma similar.

Reestructurando los cálculos como indica la Ecuación (9.21), se puede comparar el número de multiplicaciones y sumas requeridas con las necesarias para el cálculo directo de la DFT. Anteriormente vimos que en el cálculo directo sin explotación de la simetría se requerían N^2 multiplicaciones y sumas complejas.[6] Por comparación, la Ecuación (9.21) requiere el cálculo de dos DFT de $(N/2)$ puntos que requieren $2(N/2)^2$ multiplicaciones complejas y aproximadamente $2(N/2)^2$ sumas complejas, realizando las dos DFT de $(N/2)$ puntos por el método directo. Después hay que combinar las dos DFT de

[6]Por simplicidad supondremos que N es grande, por lo que $(N-1)$ es aproximadamente igual a N.

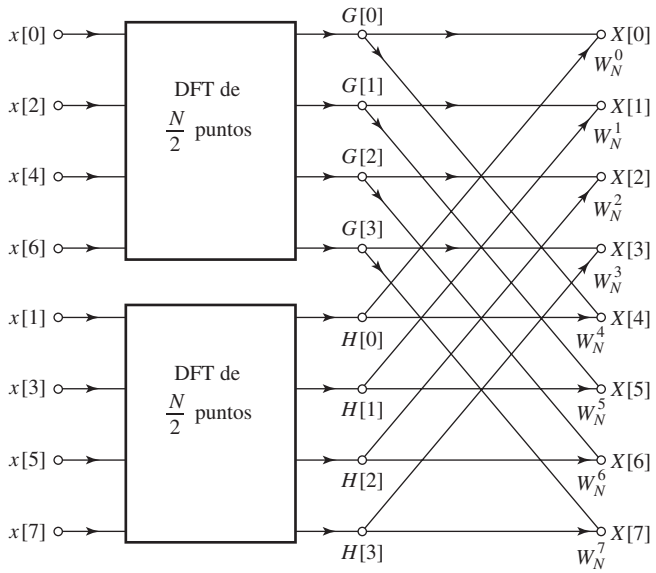


Figura 9.4 Grafo de flujo de la descomposición mediante el diezmado en el tiempo de los cálculos de una DFT de N puntos en dos DFT de $(N/2)$ puntos ($N = 8$).

$(N/2)$ puntos, lo que requiere N multiplicaciones complejas para multiplicar la segunda suma por W_N^k y N sumas complejas para sumar el producto obtenido a la primera suma. En consecuencia, el cálculo de la Ecuación (9.14) para todos los valores de k requiere un máximo de $N + 2(N/2)^2$ o $N + N^2/2$ multiplicaciones y sumas complejas. Es fácil verificar que para $N > 2$, $N + N^2/2$ será menor que N^2.

La Ecuación (9.21) corresponde a dividir el cálculo de N puntos originales en dos cálculos de DFT de $(N/2)$ puntos. Si $N/2$ es par, lo que ocurre cuando N es potencia de 2, se puede considerar calcular cada una de las dos DFT de $(N/2)$ puntos de la Ecuación (9.21) dividiendo a su vez las sumas de esa ecuación en dos DFT de $(N/4)$ puntos, que se combinarían para obtener las DFT de $(N/2)$ puntos. Por tanto, $G[k]$ en la Ecuación (9.21) se puede representar como

$$G[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g[r]W_{N/2}^{rk} = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell]W_{N/2}^{2\ell k} + \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell+1]W_{N/2}^{(2\ell+1)k}, \tag{9.22}$$

o

$$G[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell]W_{N/4}^{\ell k} + W_{N/2}^{k} \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} g[2\ell+1]W_{N/4}^{\ell k}. \tag{9.23}$$

Similarmente, $H[k]$ se puede representar como

$$H[k] = \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} h[2\ell]W_{N/4}^{\ell k} + W_{N/2}^{k} \sum_{\ell=0}^{(N/4)-1} h[2\ell+1]W_{N/4}^{\ell k}. \tag{9.24}$$

En consecuencia, la DFT de $(N/2)$ puntos $G[k]$ se puede obtener combinando las DFT de $(N/4)$ puntos de las secuencias $g[2\ell]$ y $g[2\ell+1]$. Análogamente, la DFT de $(N/2)$ puntos $H[k]$ se puede obtener combinando las DFT de $(N/4)$ puntos de las secuencias $h[2\ell]$ y $h[2\ell+1]$. Por tanto, si las DFT de 4 puntos de la Figura 9.3 se calculan de acuerdo con las Ecuaciones (9.23) y (9.24), los cálculos se realizarían como indica la Figura 9.5. Insertando el cálculo que se indica en la Figura 9.5 en el grafo de flujo de la Figura 9.4 se obtiene el grafo de flujo completo que aparece en la Figura 9.6, donde hemos

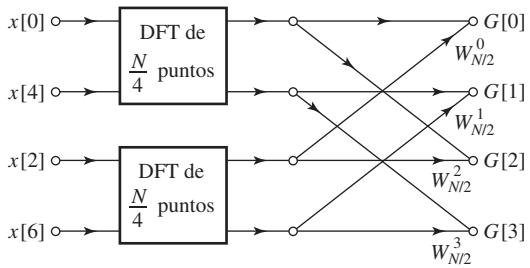


Figura 9.5 Grafo de flujo de la descomposición mediante el diezmado en el tiempo de los cálculos de una DFT de $(N/2)$ puntos en dos DFT de $(N/4)$ puntos, $(N = 8)$.

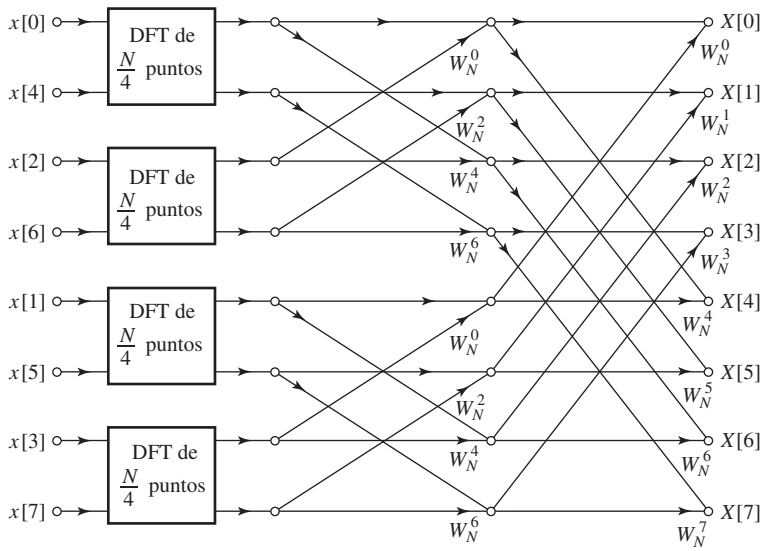


Figura 9.6 Resultado de sustituir la estructura de la Figura 9.5 en la Figura 9.4.

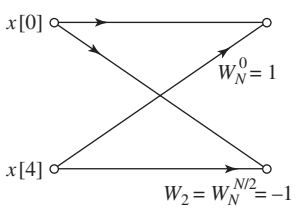


Figura 9.7 Grafo de flujo de una DFT de 2 puntos.

expresado los coeficientes en función de potencias de W_N en vez de en potencias de $W_{N/2}$, utilizando el hecho de que $W_{N/2} = W_N^2$.

Para la DFT de 8 puntos que hemos utilizado como ejemplo, el cálculo se ha reducido al calcular las DFT de 2 puntos. Por ejemplo, la Figura 9.7 muestra la DFT de 2 puntos de la secuencia formada por $x[0]$ y $x[4]$. Si insertamos los cálculos representados en la Figura 9.7 en el grafo de flujo de la Figura 9.6 se obtiene el grafo de flujo completo para el cálculo de la DFT de 8 puntos, como se muestra en la Figura 9.9.

En el caso general, siendo todavía N potencia de 2, procederíamos descomponiendo las transformadas de $(N/4)$ puntos de las Ecuaciones (9.23) y (9.24) en dos transformadas de $(N/8)$ puntos y

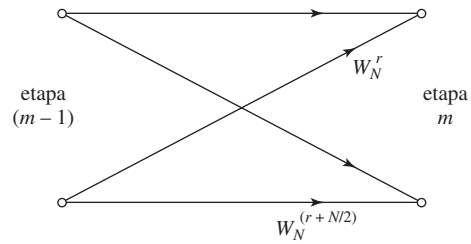


Figura 9.8 Grafo de flujo del cálculo de la mariposa básica de la Figura 9.9.

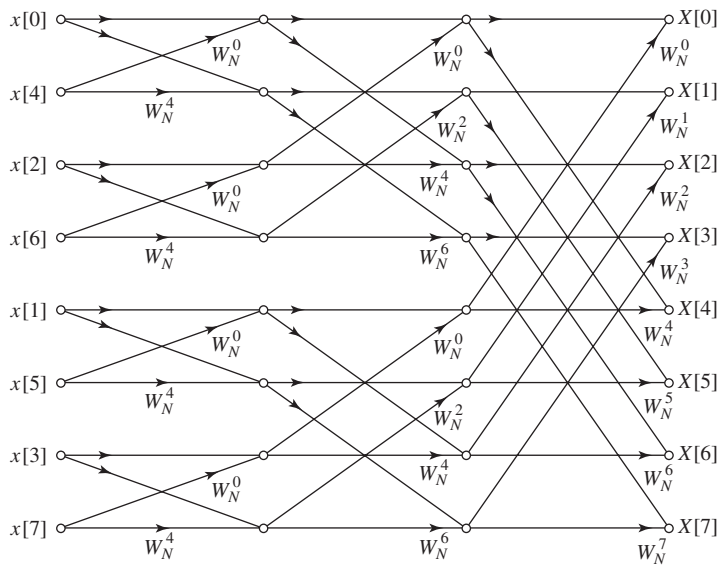


Figura 9.9 Grafo de flujo completo de la descomposición mediante diezmado en el tiempo de una DFT de 8 puntos.

continuaríamos hasta llegar a transformadas de 2 puntos. Para ello se requieren $\nu = \log_2 N$ etapas de cómputo. Ya sabemos que en la descomposición original de una transformada de N puntos en dos transformadas de $(N/2)$ puntos, se requieren $N + 2(N/2)^2$ multiplicaciones y sumas. Cuando las transformadas de $(N/2)$ puntos se descomponen en transformadas de $(N/4)$ el factor $(N/2)^2$ se debe sustituir por $N/2 + 2(N/4)^2$, por lo que el número total de operaciones será $N + N + 4(N/4)^2$ multiplicaciones y sumas complejas. Si $N = 2^\nu$, entonces esto se puede hacer un máximo de $\nu = \log_2 N$ veces, por lo que tras realizar la descomposición tantas veces como sea posible, el número de multiplicaciones y sumas es igual a $N\nu = N \log_2 N$.

El grafo de flujo de la Figura 9.9 muestra explícitamente las operaciones. Contando los arcos con ganancia de la forma W_N^r, podemos ver que en cada etapa se realizan N multiplicaciones complejas y N sumas complejas. Como hay $\log_2 N$ etapas, resulta un total de $N \log_2 N$ multiplicaciones y sumas. Éste es el sustancial ahorro computacional que comentábamos anteriormente. Por ejemplo, si $N = 2^{10} = 1024$, entonces $N^2 = 2^{20} = 1{,}048{,}576$ y $N \log_2 N = 10{,}240$, una reducción de más de dos órdenes de magnitud.

El coste computacional del grafo de flujo de la Figura 9.9 se puede reducir aún más explotando la simetría y la periodicidad de los coeficientes W_N^r. Vemos en primer lugar que al proceder de la primera etapa a la siguiente en la Figura 9.9, el cálculo básico es de la forma de la Figura 9.8. Es decir, realiza

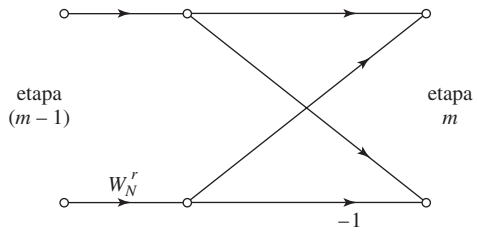


Figura 9.10 Grafo de flujo del cálculo en mariposa simplificado que requiere sólo una multiplicación compleja.

la obtención de una pareja de valores de una etapa a partir de una pareja de valores de la etapa anterior, donde los coeficientes son siempre potencias de W_N y los exponentes están separados $N/2$. Debido a la forma del grafo de flujo, el diagrama de ese cálculo elemental se denomina *mariposa*. Como

$$W_N^{N/2} = e^{-j(2\pi/N)N/2} = e^{-j\pi} = -1, \tag{9.25}$$

el factor $W_N^{r+N/2}$ se puede escribir como

$$W_N^{r+N/2} = W_N^{N/2} W_N^r = -W_N^r. \tag{9.26}$$

Teniendo esto en cuenta, el cálculo de la mariposa de la Figura 9.8 se puede simplificar de la forma que se indica en la Figura 9.10, que requiere sólo una multiplicación compleja en vez de dos. Utilizando el grafo de flujo básico de la Figura 9.10 para sustituir las mariposas con la forma de la Figura 9.8 se puede sustituir la Figura 9.9 por el grafo de flujo de la Figura 9.11. El número de multiplicaciones complejas se reduce respecto a la Figura 9.9 en un factor de 2.

La Figura 9.11 muestra $\log_2 N$ etapas de cómputo, cada una de ellas con $N/2$ cómputos de las DFT de 2 puntos (mariposas). Entre los conjuntos de transformadas de 2 puntos hay coeficientes complejos de la forma W_N^r. Estos coeficientes complejos se denominan factores *twiddle*, ya que sirven como ajustes en el proceso de convertir transformadas de 2 puntos en transformadas mayores.

9.2.1. Generalización y programación de la FFT

El grafo de flujo de la Figura 9.11, que describe el algoritmo para el cómputo de una transformada discreta de Fourier de 8 puntos, se generaliza fácilmente a cualquier $N = 2^\nu$, por lo que sirve tanto

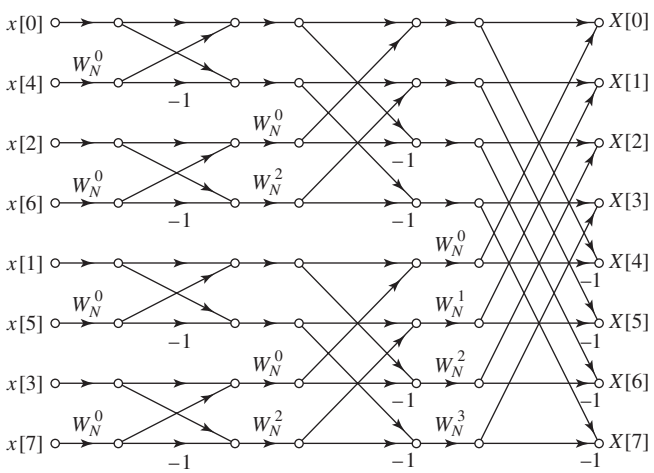


Figura 9.11 Grafo de flujo de una DFT de 8 puntos utilizando la mariposa de la Figura 9.10.

como prueba de que el cómputo requiere del orden de $N \log N$ operaciones como representación gráfica de cómo se puede escribir una implementación como programa. Aunque hay disponibles programas en lenguajes de alto nivel, en algunas ocasiones puede ser necesario crear un programa para una nueva arquitectura u optimizar un programa dado para aprovechar características de bajo nivel de una arquitectura determinada. Un análisis detallado del diagrama muestra muchos detalles que son importantes para la programación o para el diseño de hardware especial para el cómputo de la DFT. Llamamos la atención sobre algunos de los detalles de las Secciones 9.2.2 y 9.2.3 para el caso de los algoritmos por diezmado en el tiempo y de las Secciones 9.3.1 y 9.3.2 para el caso de los algoritmos de diezmado en frecuencia. En la Sección 9.4 presentaremos algunas consideraciones prácticas. Aunque esas secciones no son esenciales para una comprensión a nivel básico de los principios de la FFT, proporcionan una guía de utilidad en la programación y el diseño de sistemas.

9.2.2. Cómputo en el mismo lugar

Las características esenciales del grafo de flujo de la Figura 9.11 son los arcos que conectan los nodos y las ganancias de dichos arcos. No importa cómo se dispongan los nodos del grafo de flujo, ya que siempre se representa el mismo cálculo si se mantienen las conexiones entre los nodos y las ganancias de dichas conexiones. La forma particular del grafo de flujo de la Figura 9.11 surgió de desarrollar el algoritmo separando la secuencia original en puntos pares e impares y continuar creando subsecuencias cada vez más pequeñas de la misma forma. Un interesante resultado lateral de este desarrollo es que el grafo de flujo resultante, además de describir un procedimiento eficiente para calcular la transformada discreta de Fourier, sugiere también un procedimiento útil para almacenar los datos originales y los resultados de los cálculos en vectores intermedios.

Para ver el procedimiento, podemos observar en la Figura 9.11 que en cada etapa del cálculo se toman N números complejos y se transforman en otros N números complejos mediante cálculos básicos de una mariposa como la de la Figura 9.10. El proceso se repite $\nu = \log_2 N$ veces hasta obtener la transformada discreta de Fourier deseada. Para realizar el cálculo que se ilustra en la Figura 9.11, podemos pensar en utilizar dos vectores de registros de almacenamiento complejos, uno de ellos para el vector que se está calculando y el otro para los datos que se están utilizando en el cálculo. Por ejemplo, al calcular el primer vector de la Figura 9.11, uno de los vectores de registros puede almacenar los datos de entrada y otro contendría los resultados de la primera etapa. Aunque la validez de la Figura 9.11 no depende del orden en que se almacenan los datos de entrada, el vector de números complejos se puede ordenar en la misma forma en que aparecen en dicha figura (de arriba abajo). Denominaremos $X_m[\ell]$, con $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$, a la secuencia de números complejos resultantes de la m-ésima etapa de cálculo, con $m = 1, 2, \ldots, \nu$. Además, denominaremos por conveniencia $X_0[\ell]$ al conjunto de muestras de entrada. Podemos suponer que $X_{m-1}[\ell]$ es el vector de entrada y $X_m[\ell]$ el vector de salida de la m-ésima etapa de los cálculos. Por tanto, para $N = 8$, como en la Figura 9.11,

$$\begin{aligned}
X_0[0] &= x[0], \\
X_0[1] &= x[4], \\
X_0[2] &= x[2], \\
X_0[3] &= x[6], \\
X_0[4] &= x[1], \\
X_0[5] &= x[5], \\
X_0[6] &= x[3], \\
X_0[7] &= x[7].
\end{aligned} \tag{9.27}$$

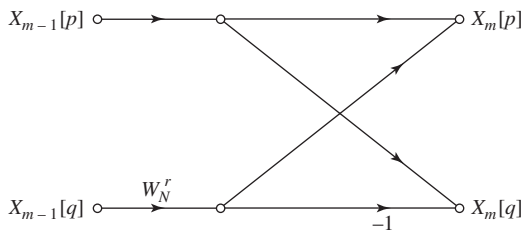


Figura 9.12 Grafo de flujo de las Ecuaciones (9.28).

Utilizando esta notación, se puede etiquetar la entrada y la salida del cálculo en mariposa de la Figura 9.10 como se indica en la Figura 9.12, con las ecuaciones asociadas

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q], \tag{9.28a}$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q]. \tag{9.28b}$$

En las Ecuaciones (9.28), p, q y r varían de etapa en etapa de una forma que se puede deducir fácilmente de la Figura 9.11 y de las Ecuaciones (9.21), (9.23), (9.24). Resulta claro, observando las Figuras 9.9 y 9.11, que sólo se necesitan los números complejos de las posiciones p y q del vector $(m-1)$-ésimo para calcular los elementos de las posiciones p y q del vector m-ésimo. Por tanto, si $X_m[p]$ y $X_m[q]$ se almacenan en los mismos registros que $X_{m-1}[p]$ y $X_{m-1}[q]$, respectivamente, sólo se necesitan N registros complejos de almacenamiento para realizar el cálculo completo. Esta forma de organizar los cálculos suele denominarse cómputo *en el mismo lugar*. El hecho de que el grafo de flujo de la Figura 9.11 (o el de la Figura 9.9) representen un cómputo en el mismo lugar está ligado al hecho de que hemos asociado los nodos del grafo de flujo que están en la misma línea horizontal con la misma posición de almacenamiento, y al hecho de que el cómputo para pasar de un vector a otro es el cálculo de una mariposa en la que los nodos de la entrada y de la salida son adyacentes en sentido horizontal.

Para que se pueda realizar el cómputo en el mismo lugar como se ha presentado anteriormente, la secuencia de entrada se debe almacenar (o al menos se debe poder acceder a ella) en orden no secuencial, como se muestra en el grafo de flujo de la Figura 9.11. El orden en el que se almacenan y se accede a los datos de entrada se denomina orden de *inversión de bits*. Para ver lo que quiere decir esta terminología, nótese que para el grafo de flujo de 8 puntos que hemos estado utilizando se requieren tres dígitos binarios para indexar los datos. Al escribir los índices de las Ecuaciones (9.27) en forma binaria se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
X_0[000] &= x[000],\\
X_0[001] &= x[100],\\
X_0[010] &= x[010],\\
X_0[011] &= x[110],\\
X_0[100] &= x[001],\\
X_0[101] &= x[101],\\
X_0[110] &= x[011],\\
X_0[111] &= x[111].
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Si (n_2, n_1, n_0) es la representación binaria del índice de la secuencia $x[n]$, el valor de la secuencia $x[n_2, n_1, n_0]$ se almacena en la posición del vector $X_0[n_0, n_1, n_2]$; es decir, para determinar la posición de $x[n_2, n_1, n_0]$ en el vector de entrada, se debe invertir el orden de los bits del índice n.

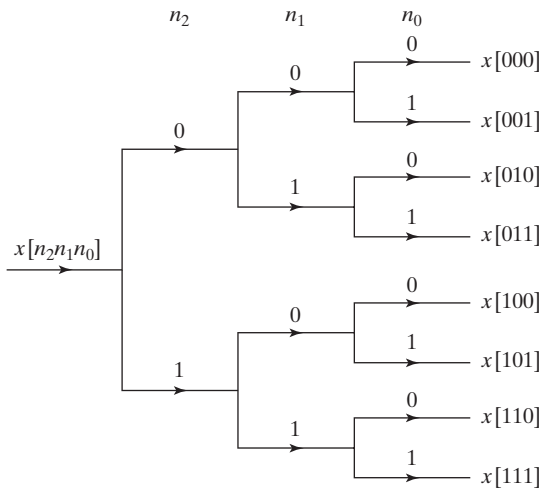


Figura 9.13 Diagrama en árbol que muestra el ordenamiento normal.

Consideremos en primer lugar el proceso que se muestra en la Figura 9.13 para ordenar una secuencia de datos en orden normal examinando sucesivamente los bits que representan el índice de entrada. Si el bit más significativo del índice de los datos es cero, $x[n]$ pertenece a la mitad superior del vector ordenado. En caso contrario pertenece a la mitad inferior. Seguidamente, las subsecuencias de las mitades superior e inferior se pueden ordenar examinando el segundo bit más significativo, y así sucesivamente.

Para ver por qué el orden de inversión de bits es necesario para el cómputo en el mismo lugar, recordemos el proceso que nos llevó a la Figura 9.9 y a la Figura 9.11. Primero se divide la secuencia $x[n]$ en las muestras pares, que se colocan en la mitad superior de la Figura 9.4 y en las muestras impares, que se colocan en la mitad inferior. Esa separación de los datos se puede realizar examinando el bit menos significativo $[n_0]$ del índice n. Si el bit menos significativo es 0, el valor de la secuencia corresponde a una muestra par y por tanto debe aparecer en la parte superior del vector $X_0[\ell]$, y si el bit menos significativo es 1, el valor de la secuencia corresponde a una muestra impar y por consiguiente debe aparecer en la parte inferior del vector. A continuación, las subsecuencias de índice par e impar se ordenan a su vez en sus partes de índice par e impar, lo que se puede hacer examinando el segundo

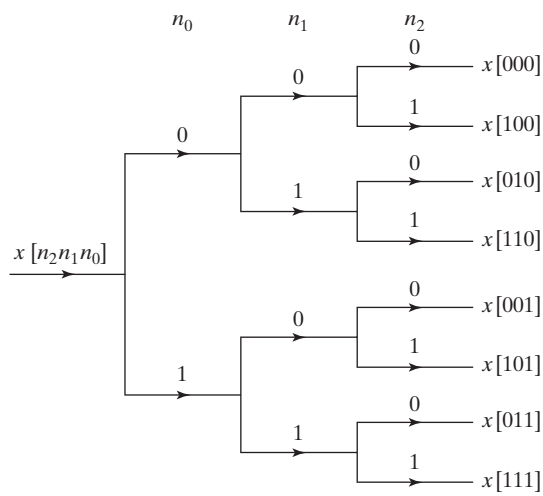


Figura 9.14 Diagrama en árbol que muestra el orden de inversión de bits.

bit menos significativo del índice. Considerando en primer lugar la subsecuencia de índices pares, si el segundo bit menos significativo es cero, el valor es un término de índice par de dicha subsecuencia, y si el segundo bit menos significativo es 1, el valor es un término de índice impar de dicha subsecuencia. Se realiza el mismo proceso con la subsecuencia formada por los valores de índice impar de la secuencia original, y se va repitiendo el proceso hasta que se obtienen N subsecuencias de longitud 1. La Figura 9.14 muestra el diagrama en árbol con la ordenación en subsecuencias de índice par e impar.

Los diagramas en árbol de las Figuras 9.13 y 9.14 son idénticos, excepto que para la ordenación normal se examinan los bits que representan al índice de izquierda a derecha, mientras que en la ordenación que lleva de forma natural a la Figura 9.9 o a la 9.11 se examinan los bits en orden inverso, de derecha a izquierda, lo que lleva al orden de inversión de bits. Por tanto, la necesidad del orden de inversión de bits de la secuencia $x[n]$ es consecuencia de la forma en la que se descomponen los cálculos de la DFT en sucesivas DFT menores, como se indica en las Figuras 9.9 y 9.11.

9.2.3. Formas alternativas

Aunque es razonable almacenar los resultados de cada etapa de cálculo en el orden en que aparecen los nodos en la Figura 9.11, no es necesario hacerlo así. No importa cómo se dispongan los nodos de la Figura 9.11, el resultado siempre será un cálculo válido de la transformada discreta de Fourier de $x[n]$, siempre que las ganancias de los arcos no se modifiquen. Sólo cambia el orden en que se almacenan y se accede a los datos. Si asociamos los nodos con la indexación de un vector de posiciones de almacenamiento complejas resulta claro de nuestra presentación anterior que sólo se obtendrá un grafo de flujo correspondiente a un cómputo en el mismo lugar si la disposición de los nodos es tal que los nodos de entrada y de salida de cada mariposa son adyacentes horizontalmente. Si no es así, se necesitarán dos vectores de almacenamiento complejos. La Figura 9.11 es un ejemplo de disposición de ese tipo. En la Figura 9.15 se muestra otra. En este caso, la secuencia de entrada está en orden normal y la secuencia de valores de la DFT en orden correspondiente a inversión de bits. Es posible obtener la Figura 9.15 a partir de la Figura 9.11 como sigue: todos los nodos horizontalmente adyacentes a $x[4]$ en la Figura 9.11 se intercambian con todos los nodos adyacentes horizontalmente a $x[1]$. De forma similar, todos los nodos horizontalmente adyacentes a $x[6]$ en la Figura 9.11 se intercambian con los adyacentes horizontalmente a $x[3]$. Los nodos horizontalmente adyacentes a $x[0]$, $x[2]$, $x[5]$ y $x[7]$ no se modifican. El grafo de flujo resultante de la Figura 9.15 corresponde a la forma del algoritmo de diezmado en el tiempo dada originalmente por Cooley y Tukey (1965).

La única diferencia entre las Figuras 9.11 y 9.15 es la ordenación de los nodos. Esto implica que las Figuras 9.11 y 9.15 representan dos formas de realizar los cálculos. Las ganancias de los arcos (potencias de W_N) no cambian y, por tanto, los resultados intermedios serán exactamente los mismos, aunque se calcularán en orden diferente en cada etapa. Existe, por supuesto, una amplia variedad de ordenaciones posibles. Sin embargo, la mayoría de ellas no tiene mucho sentido desde un punto de vista computacional. Por ejemplo, supongamos que los nodos se ordenan de forma que la entrada y la salida aparecen en orden normal. La Figura 9.16 muestra un grafo de flujo de este tipo. Sin embargo, en este caso, no se puede realizar el cómputo en el mismo lugar debido a que la estructura en mariposa no se mantiene tras la primera etapa. Por tanto, para realizar los cálculos de la Figura 9.16 se necesitarían dos vectores complejos de longitud N.

Se puede ver claramente que para realizar los cálculos de las Figuras 9.11, 9.15 y 9.16 es necesario acceder a elementos de vectores intermedios en orden no secuencial. Por tanto, para conseguir mayor velocidad de cómputo, los números complejos se deben almacenar en memoria de acceso aleatorio.[7] Por

[7] Cuando los algoritmos de Cooley y Tukey aparecieron por primera vez en 1965, la memoria digital era cara y de tamaño limitado. EL tamaño y la disponibilidad de memoria de acceso aleatorio ya no es un aspecto de importancia excepto en el caso de valores de N enormemente grandes.

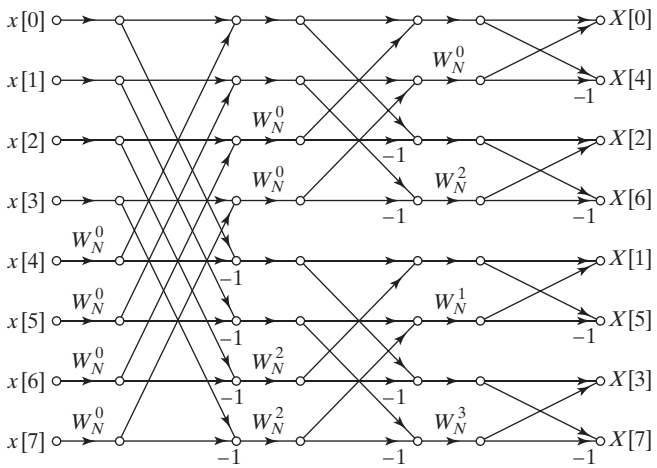


Figura 9.15 Reestructuración de la Figura 9.11 con la entrada en orden normal y la salida en orden de inversión de bits.

ejemplo, en el cálculo del primer vector de la Figura 9.11 a partir del vector de entrada, las entradas de cada mariposa son variables de nodos adyacentes y se consideran almacenadas en posiciones de almacenamiento adyacentes. En el cálculo del segundo vector intermedio a partir del primero, las entradas a una mariposa están separadas por dos posiciones de almacenamiento. En el cálculo del tercer vector a partir del segundo, las entradas a una mariposa están separadas por cuatro posiciones de almacenamiento. Si $N > 8$, la separación entre las mariposas de entrada es 8 para la cuarta etapa, 16 para la quinta etapa, etc. La separación en la última etapa (ν-ésima) es $N/2$.

En la Figura 9.15 la situación es similar, en el sentido de que para calcular el primer vector a partir de los datos de entrada utilizamos datos separados por 4. Para calcular el segundo vector a partir del primero utilizamos datos separados por 2 y, finalmente, para calcular el último vector utilizamos datos adyacentes. Es inmediato imaginar algoritmos simples para modificar los índices de los registros para acceder a los datos de los grafos de flujo de las Figuras 9.11 o 9.15 si los datos se almacenan en memoria de acceso aleatorio. Sin embargo, en el grafo de flujo de la Figura 9.16, los datos se acceden de forma no secuencial, el cómputo no es en el mismo lugar y el esquema de indexación de los datos es considerablemente más complicado que en cualquiera de los dos casos anteriores. Incluso dada la posibilidad de disponer de una gran cantidad de memoria de acceso aleatorio, el trabajo adicional de los cálculos de los índices podría anular fácilmente una gran parte de las ventajas computacionales implícitas en la eliminación de las multiplicaciones y sumas. Por tanto, esta estructura no presenta ventajas aparentes.

Algunas formas presentan ventajas incluso cuando no es posible el cómputo en el mismo lugar. La Figura 9.17 muestra una reestructuración de la Figura 9.11 que es particularmente útil cuando no se dispone de una cantidad adecuada de memoria de acceso aleatorio. Este grafo de flujo representa el algoritmo de diezmado en el tiempo dado originalmente por Singleton (1969). Observe en primer lugar que, en este grafo de flujo, la entrada está en orden correspondiente a inversión de bits y la salida está en orden normal. La característica importante de este grafo de flujo es que la geometría es la misma en cada etapa y sólo las ganancias de los arcos cambian de etapa en etapa. Esto hace posible el acceso secuencial a los datos. Supongamos, por ejemplo, que tenemos cuatro archivos en disco diferentes, y que la primera mitad de la secuencia de entrada se almacena (en orden correspondiente a inversión de bits) en un archivo y la segunda mitad en un segundo archivo. La secuencia se puede acceder secuencialmente en los archivos 1 y 2 y los resultados se pueden escribir secuencialmente en los archivos 3 y 4. La primera mitad del nuevo vector se escribiría en el archivo 3 y la segunda mitad en el archivo 4. En la siguiente

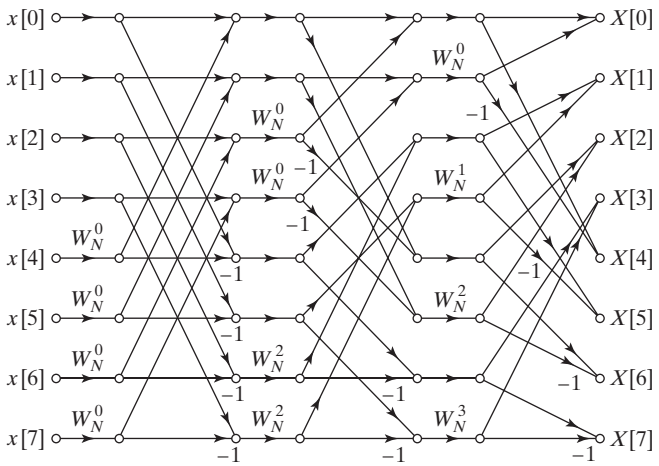


Figura 9.16 Reestructuración de la Figura 9.11 con la entrada y la salida en orden normal.

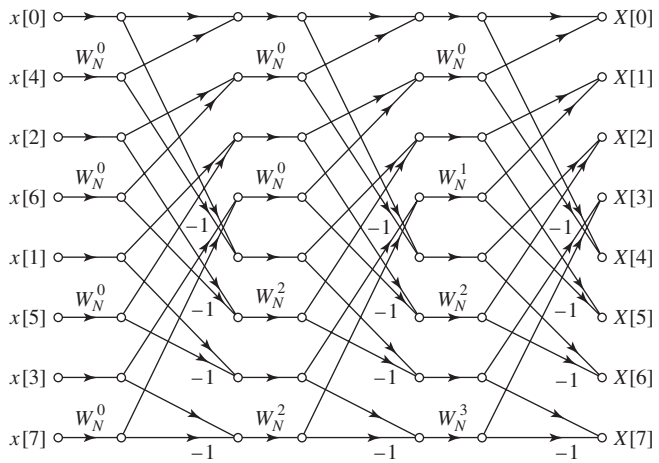


Figura 9.17 Reestructuración de la Figura 9.11 con la misma geometría en cada etapa, lo que permite una simplificación en el acceso a los datos.

etapa de cómputo los archivos 3 y 4 serían la entrada y la salida se escribiría en los archivos 1 y 2. Este proceso se repite para cada una de las ν etapas.

Un algoritmo como este podría ser útil para calcular la DFT de secuencias extremadamente largas. Esto podría significar valores de N del orden de cientos de millones, ya que las memorias de acceso aleatorio de tamaño de gigabytes ya están disponibles. Una característica quizá más interesante de la Figura 9.17 es que la indexación es muy simple y que es la misma de una etapa a la siguiente. Con dos bancos de memoria de acceso aleatorio, este algoritmo tendría cálculos de índices muy simples.

9.3. ALGORITMOS DE FFT MEDIANTE DIEZMADO EN FRECUENCIA

Los algoritmos de FFT mediante diezmado en el tiempo se basan en estructurar los cálculos de la DFT dividiendo la secuencia de entrada $x[n]$ en subsecuencias más y más pequeñas. Alternativamente, se puede considerar también la división de la secuencia de salida $X[k]$ en subsecuencias cada vez más pequeñas. Los algoritmos de FFT que se basan en este procedimiento se denominan algoritmos mediante *diezmado en frecuencia*.

Para desarrollar estos algoritmos de FFT restringiremos de nuevo la discusión al caso en el que N es una potencia de 2 y consideraremos el cómputo por separado de las $N/2$ muestras en frecuencia con numeración par y las $N/2$ con numeración impar. El diagrama de bloques de la Figura 9.18 muestra esta idea con $X_0[k] = X[2k]$ y $X_1[k] = X[2k+1]$. Al desplazar a la izquierda una muestra en la DFT, para que el compresor seleccione las muestras de índice impar, es importante recordar que la DFT $X[k]$ es implícitamente periódica de periodo N. Esto se indica en la Figura 9.18 como "desplazamiento circular a la izquierda de 1" (y, de forma correspondiente, "desplazamiento circular a la derecha de 1"). Observe que este diagrama tiene una estructura similar al de la Figura 9.3, donde se aplican las mismas operaciones a la secuencia temporal $x[n]$ en vez de a la DFT $X[k]$. En este caso, la Figura 9.18 muestra directamente el hecho de que la transformada de N puntos $X[k]$ se puede obtener entrelazando las muestras de índice par e impar tras la expansión por un factor de 2.

La Figura 9.18 es una representación correcta de $X[k]$, pero para utilizarla como base en el cómputo de $X[k]$, demostraremos primero que se pueden calcular $X[2k]$ y $X[2k+1]$ a partir de la secuencia en el dominio del tiempo $x[n]$. En la Sección 8.4 vimos que la DFT está relacionada con la transformada de Fourier en tiempo discreto por muestreo en las frecuencias $2\pi k/N$ con el resultado de que la correspondiente operación en el dominio del tiempo produce un solapamiento temporal con longitud de repetición (periodo) N. Como se expuso en la Sección 8.4, si N es mayor o igual que la longitud de la secuencia $x[n]$, la DFT inversa produce la secuencia original en el intervalo $0 \le n \le N-1$ debido a que las copias de $x[n]$ no se solapan con sus réplicas desplazadas en el tiempo con periodo de repetición N. Sin embargo, en la Figura 9.18, la DFT está comprimida por 2, lo que es equivalente a muestrear la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $2\pi k/(N/2)$. Por consiguiente, la señal periódica implícita en el dominio del tiempo representada por $X_0[k] = X[2k]$ es

$$\tilde{x}_0[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+mN/2] \qquad -\infty < n < \infty. \tag{9.30}$$

Como $x[n]$ tiene longitud N, sólo dos de las copias desplazadas de $x[n]$ se solapan en el intervalo $0 \le n \le N/2-1$, por lo que la correspondiente secuencia de longitud finita $x_0[n]$ es

$$x_0[n] = x[n] + x[n+N/2] \qquad 0 \le n \le N/2-1. \tag{9.31a}$$

Para obtener el resultado comparable en el caso de muestras de la DFT de índice impar, recuérdese que la DFT desplazada circularmente $X[k+1]$ corresponde a $W_N^n x[n]$ (véase la Propiedad 6 de la Tabla 8.2). Por tanto, la secuencia de $N/2$ puntos $x_1[n]$ correspondiente a $X_1[k] = X[2k+1]$ es

$$\begin{aligned} x_1[n] &= x[n]W_N^n + x[n+N/2]W_N^{n+N/2} \\ &= (x[n] - x[n+N/2])W_N^n \qquad 0 \le n \le N/2-1, \end{aligned} \tag{9.31b}$$

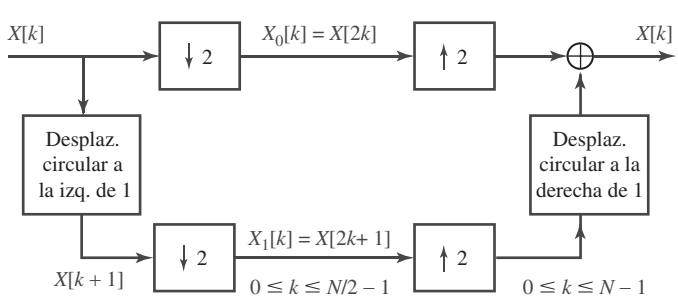


Figura 9.18 Ilustración del principio básico del diezmado en frecuencia.

ya que $W_N^{N/2} = -1$.

A partir de las Ecuaciones (9.31a) y (9.31b), se puede deducir que

$$X_0[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2])W_{N/2}^{kn} \tag{9.32a}$$

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [(x[n] - x[n+N/2])W_N^n]W_{N/2}^{kn} \tag{9.32b}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N/2 - 1.$$

La Ecuación (9.32a) es la DFT de $(N/2)$ puntos de la secuencia $x_0[n]$ que se obtiene sumando la primera mitad y la segunda mitad de la secuencia de entrada. La Ecuación (9.32b) es la DFT de $(N/2)$ puntos de la secuencia $x_1[n]$ que se obtiene restando la segunda mitad de la primera mitad y multiplicando el resultado por W_N^n.

Así, utilizando las Ecuaciones (9.32a) y (9.32b), los puntos de salida de $X[k]$ con numeración par e impar se pueden obtener como $X[2k] = X_0[k]$ y $X[2k+1] = X_1[k]$, respectivamente. La Figura 9.19 ilustra el procedimiento sugerido por las Ecuaciones (9.32a) y (9.32b) para una DFT de 8 puntos.

Procediendo de forma similar al desarrollo realizado para obtener el algoritmo mediante diezmado en el tiempo, vemos que como N es potencia de 2, $N/2$ es divisible por 2. Por tanto, en las DFT de $(N/2)$ puntos se pueden calcular de forma separada las muestras de índice par e impar. Como en el caso del procedimiento que conduce a las Ecuaciones (9.32a) y (9.32b), esto se realiza combinando la primera y la segunda mitad de los puntos de entrada para cada una de las DFT de $(N/2)$ puntos, y calculando después la DFT de $(N/4)$ puntos. La Figura 9.20 muestra el grafo de flujo resultante de realizar este paso en el ejemplo de 8 puntos. En este ejemplo, el problema se ha reducido ahora al cálculo de las DFT de 2 puntos, que se realizan sumando y restando los puntos de entrada como se comentó anteriormente. Por tanto, las DFT de 2 puntos de la Figura 9.20 se pueden sustituir por el cálculo que muestra la Figura 9.21, por lo que el cómputo completo de la DFT de 8 puntos se puede realizar mediante el algoritmo que

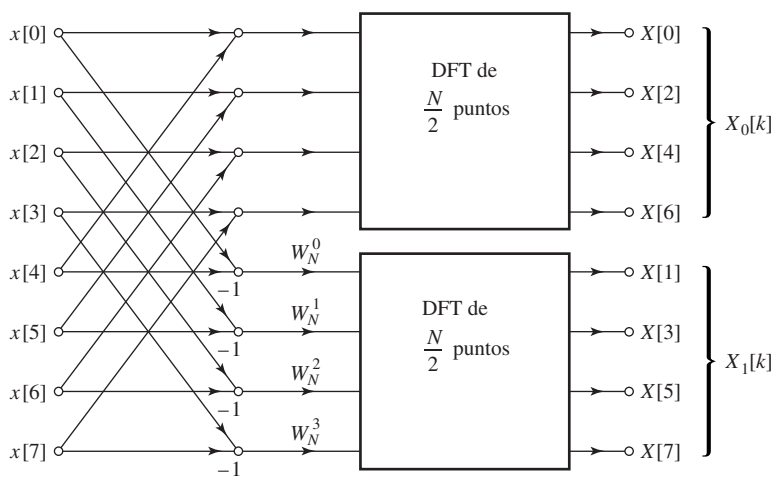


Figura 9.19 Grafo de flujo de la descomposición mediante diezmado en frecuencia del cálculo de una DFT de N puntos en cálculos de dos DFT de $(N/2)$ puntos $(N = 8)$.

se muestra en la Figura 9.22. Vemos de nuevo $\log_2 N$ etapas de transformadas de 2 puntos acopladas, junto con factores *twiddle* que, en este caso, aparecen en las salidas de las transformadas de 2 puntos.

Contando las operaciones aritméticas en la Figura 9.22 y generalizando a $N = 2^\nu$, podemos ver que el cálculo de la Figura 9.22 necesita $(N/2)\log_2 N$ multiplicaciones complejas y $N\log_2 N$ sumas complejas. Por tanto, en los algoritmos mediante diezmado en el tiempo y diezmado en frecuencia, el número total de operaciones es el mismo.

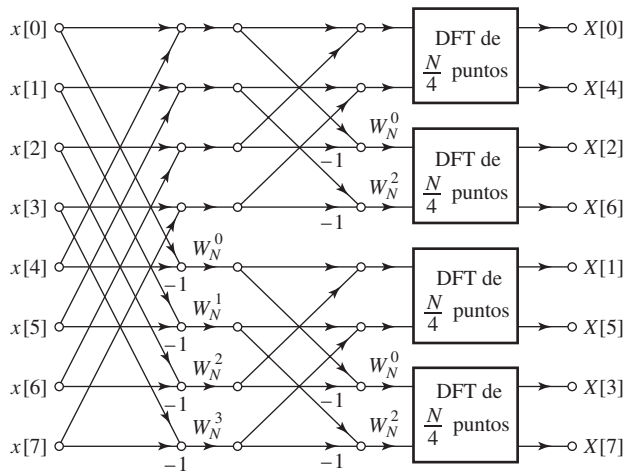


Figura 9.20 Grafo de flujo de la descomposición mediante diezmado en frecuencia de una DFT de 8 puntos en cuatro DFT de 2 puntos.

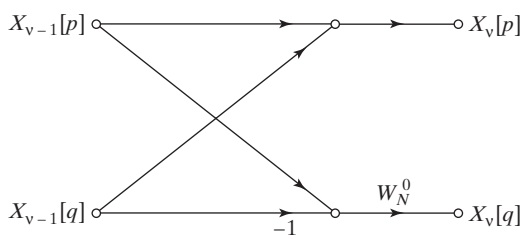


Figura 9.21 Grafo de flujo de una DFT de 2 puntos típica que se emplea en la última etapa de la descomposición mediante diezmado en frecuencia.

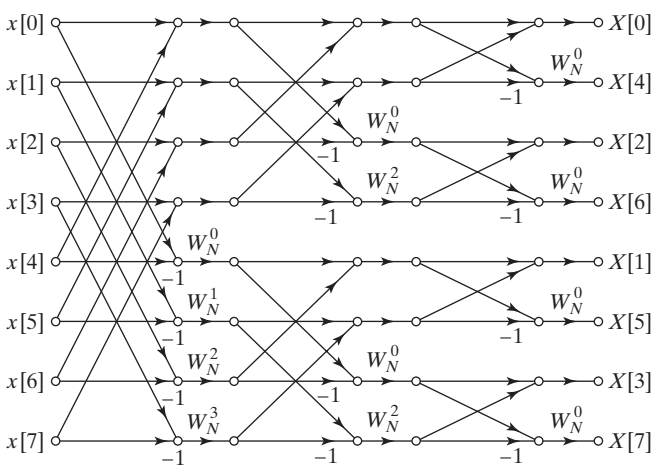


Figura 9.22 Grafo de flujo de la descomposición completa mediante diezmado en frecuencia de los cálculos de una DFT de 8 puntos.

9.3.1. Cómputo en el mismo lugar

El grafo de flujo de la Figura 9.22 muestra un algoritmo de FFT basado en diezmado en frecuencia. Se pueden observar algunas similitudes y también algunas diferencias al comparar este grafo con los grafos de flujo que se obtienen mediante diezmado en el tiempo. Por supuesto, como en el caso de diezmado en el tiempo, el grafo de la Figura 9.22 corresponde al cálculo de la transformada discreta de Fourier, independientemente de cómo se dibuje el grafo, siempre y cuando se conecten los mismos nodos entre sí con las ganancias de bucle adecuadas. En otras palabras, el grafo de flujo de la Figura 9.22 no se basa en ningún supuesto sobre el orden en que se almacenan los valores de la secuencia de entrada. Sin embargo, como en el caso de los algoritmos mediante diezmado en el tiempo, se pueden interpretar los sucesivos nodos verticales del grafo de flujo de la Figura 9.22 como si se almacenaran en registros de almacenamiento sucesivos de una memoria digital. En este caso, el grafo de flujo de la Figura 9.22 comienza con la secuencia de entrada en orden normal y proporciona la DFT de salida en orden correspondiente a inversión de bits. El cálculo básico tiene de nuevo la estructura de una mariposa, aunque de forma diferente que la que surge en los algoritmos mediante diezmado en el tiempo. Sin embargo, debido a la naturaleza del cálculo de la mariposa, el grafo de flujo de la Figura 9.22 se puede interpretar como un cómputo en el mismo lugar de la transformada discreta de Fourier.

9.3.2. Formas alternativas

Se pueden obtener varias formas alternativas para el algoritmo mediante diezmado en frecuencia, mediante trasposición de las formas de diezmado en el tiempo que se presentaron en la Sección 9.3.2. Si denominamos $X_m[\ell]$ a la secuencia de números complejos resultante de la m-ésima etapa de cálculo, con $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$, y $m = 1, 2, \ldots, \nu$, el cálculo en mariposa básico de la Figura 9.23 tiene la forma

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q], \tag{9.33a}$$

$$X_m[q] = (X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q])W_N^r \tag{9.33b}$$

Comparando las Figuras 9.12 y 9.23 o las Ecuaciones (9.28) y (9.33), parece que los cálculos de la mariposa son diferentes para las dos clases de algoritmos de FFT. Sin embargo, los dos grafos de flujo de las mariposas son, utilizando la terminología del Capítulo 6, traspuestos entre sí. Es decir, invirtiendo la dirección del flujo de las señales e intercambiando la entrada y la salida en la Figura 9.12, se obtiene la Figura 9.23 y viceversa. Como los grafos de flujo de la FFT constan de una serie de mariposas interconectadas, no es sorprendente, por tanto, que se note también un parecido entre los grafos de flujo de la FFT de las Figuras 9.11 y 9.22. Concretamente, la Figura 9.22 se puede obtener a partir de la Figura 9.11 invirtiendo la dirección del flujo de las señales e intercambiando la entrada y la salida. Es decir, el grafo de flujo de la Figura 9.22 es el traspuesto del de la Figura 9.11. En el Capítulo 6 planteamos un teorema de trasposición que se puede aplicar sólo en el caso de grafos de flujo con una sola entrada y una sola salida. Vistos como grafos de flujo, sin embargo, los algoritmos de la FFT son sistemas con múltiples entradas y salidas, por lo que se requiere una forma más general del teorema de transposición (véase Claasen y Mecklenbräuker, 1978). No obstante, resulta intuitivamente claro que las características entrada-salida de los grafos de flujo de las Figuras 9.11 y 9.22 son las mismas, basándose simplemente en la anterior observación de que las mariposas son traspuestas entre sí. Esto se puede demostrar más formalmente teniendo en cuenta que las ecuaciones de la mariposa (9.33) se pueden resolver hacia atrás, comenzando con el vector de salida (el Problema 9.31 esboza una demostración de este resultado). De forma más general, es cierto que para cada algoritmo de FFT mediante diezmado en el tiempo existe un algoritmo de FFT mediante diezmado en frecuencia que corresponde a intercambiar la entrada y la salida e invertir la dirección de todas las flechas del grafo de flujo.

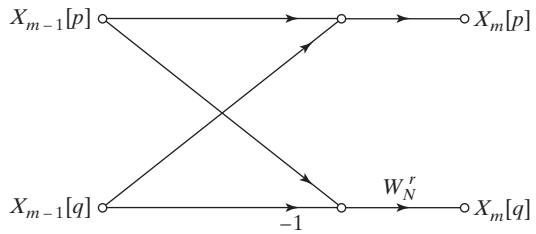


Figura 9.23 Grafo de flujo de un cálculo en mariposa típico requerido en la Figura 9.22.

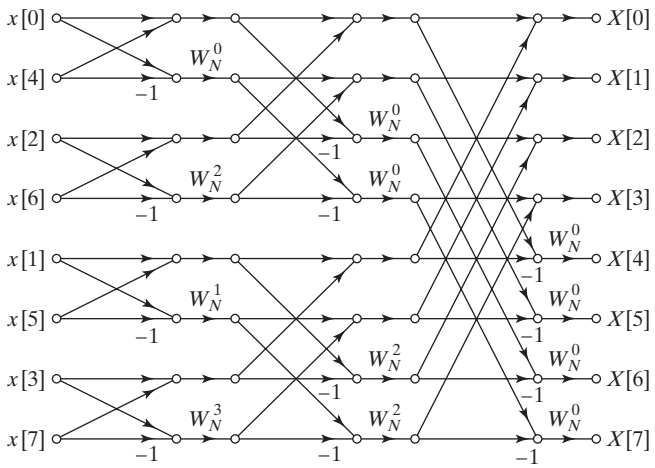


Figura 9.24 Grafo de flujo de un algoritmo de FFT mediante diezmado en frecuencia obtenido a partir de la Figura 9.22. La entrada está en orden correspondiente a inversión de bits y la salida está en orden normal (traspuesto de la Figura 9.15).

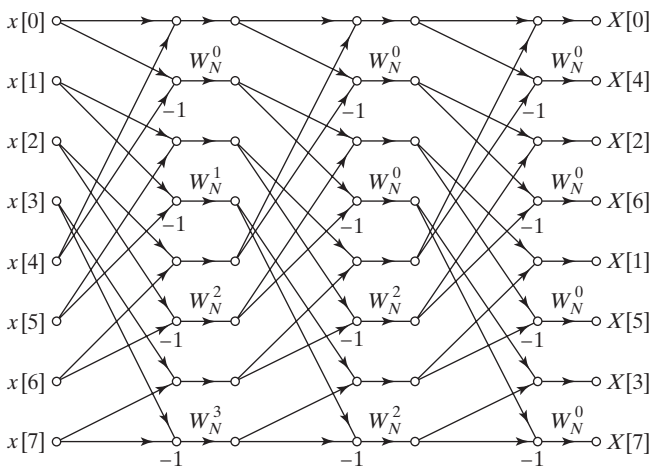


Figura 9.25 Reestructuración de la Figura 9.22 con la misma geometría en cada etapa, simplificándose así el acceso a los datos (traspuesto de la Figura 9.17).

Este resultado implica que todos los grafos de flujo de la Sección 9.2 tienen su contrapartida en la clase de algoritmos mediante diezmado en frecuencia. Esto, por supuesto, corresponde también al hecho de que, como ocurría anteriormente, es posible reestructurar los nodos de un grafo de flujo sin alterar el resultado final.

Aplicando el procedimiento de transposición a la Figura 9.15 se llega a la Figura 9.24. En este grafo de flujo, la salida está en orden normal y la entrada está en orden correspondiente a inversión de bits.

El grafo de flujo traspuesto del que se presenta en la Figura 9.16 conduciría a un grafo de flujo con la entrada y la salida en orden normal. Un algoritmo basado en el grafo de flujo resultante sufriría las mismas limitaciones que el de la Figura 9.16.

La Figura 9.25 muestra el grafo traspuesto del ilustrado en la Figura 9.17. Todas las etapas de la Figura 9.25 tienen la misma geometría, propiedad que simplifica el acceso a los datos, como se comentó anteriormente.

9.4. CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

En las Secciones 9.2 y 9.3 hemos presentado los principios básicos del cálculo eficiente de la DFT cuando N es una potencia entera de 2. En la presentación hemos favorecido el uso de representaciones basadas en grafos de flujo de señales, en vez de escribir detalladamente las ecuaciones que representan dichos grafos. Por necesidad hemos mostrado los grafos para valores concretos de N. Sin embargo, considerando un grafo de flujo como el de la Figura 9.11 para un valor específico de N, es posible ver cómo estructurar un algoritmo de cómputo general que se pueda aplicar para cualquier valor $N = 2^v$. Mientras que la información proporcionada en las Secciones 9.2 y 9.3 es completamente adecuada para la comprensión básica de los principios de la FFT, el material de esta sección está orientado a proporcionar una guía de utilidad en la programación y diseño de sistemas.

Aunque es cierto que los grafos de flujo de las secciones previas capturan la esencia de los algoritmos de FFT que representan, hay algunos detalles que se deben considerar en la realización de un determinado algoritmo. En esta sección comentaremos brevemente algunos de ellos. Concretamente, en la Sección 9.4.1 abordaremos aspectos relacionados con el acceso y almacenamiento de los datos en los vectores intermedios de la FFT. En la Sección 9.4.2 presentaremos aspectos relacionados con el cómputo o el acceso a los valores de los coeficientes de los arcos del grafo de flujo. Nos centraremos en algoritmos en los que N es una potencia de 2, pero una buena parte de lo que diremos se puede aplicar también en el caso general. Para que sirva de ilustración, nos centraremos principalmente en el algoritmo mediante diezmado en el tiempo de la Figura 9.11.

9.4.1. Indexación

En el algoritmo que se muestra en la Figura 9.11, la entrada debe estar en orden correspondiente a inversión de bits para que el cómputo se pueda realizar en el mismo lugar. La DFT resultante está entonces en orden normal. Generalmente, las secuencias no se originan en el orden correspondiente a la inversión de bits, de forma que el primer paso en la realización de la Figura 9.11 es disponer la secuencia de entrada en dicho orden. Como se puede ver en esa figura y en las Ecuaciones (9.27) y (9.29), la ordenación correspondiente a inversión de bits se puede realizar en el mismo lugar, ya que las muestras se intercambian en parejas. Es decir, una muestra en un índice determinado se intercambia con la muestra de la posición que especifica el índice con los bits en orden inverso. Esto se puede realizar en el mismo lugar con dos contadores, uno de ellos en orden normal y el otro en orden de inversión de bits. Los datos en las dos posiciones especificadas por los dos contadores simplemente se intercambian. Una vez la entrada está en el orden correspondiente a la inversión de bits, se puede proceder con la primera etapa de los cálculos. En este caso, las entradas a las mariposas son elementos adyacentes del vector $X_0[\cdot]$. En la segunda etapa, las entradas a las mariposas están separadas por 2. En la m-ésima etapa, las entradas a las mariposas están separadas por 2^{m-1}. Los coeficientes son potencias de $W_N^{(N/2^m)}$ en la etapa m-ésima y se requieren en orden normal si el cálculo de las mariposas empieza en la parte superior del grafo de flujo de la Figura 9.11. Las ideas anteriores definen la forma en la que se accede a los datos de una etapa determinada, lo que por supuesto depende del grafo de flujo que se esté realizando. Por ejemplo, en la etapa m-ésima de la Figura 9.15, la separación de las mariposas es 2^{v-m}, y en este caso los

coeficientes se requieren en orden de inversión de bits. La entrada está en orden normal. Sin embargo, la salida está en orden correspondiente a inversión de bits, por lo que en general es necesario poner la salida en orden normal utilizando un contador en orden normal y otro contador en orden de inversión de bits, como se comentó anteriormente.

En general, si consideramos todos los grafos de flujo de las Secciones 9.2 y 9.3, vemos que cada algoritmo tiene sus propios problemas de indexación característicos. La elección de un algoritmo particular depende de diversos factores. Los algoritmos que utilizan cómputo en el mismo lugar tienen la ventaja de hacer un uso eficiente de la memoria. Dos desventajas, sin embargo, son que el tipo de memoria que se requiere es de acceso aleatorio en lugar de secuencial y que bien la secuencia de entrada o la secuencia de la DFT de salida están en orden de inversión de bits. Además, dependiendo de si se elige un algoritmo basado en diezmado en el tiempo o en diezmado en la frecuencia y de si las entradas o las salidas están en orden de inversión de bits, el acceso a los coeficientes será en orden normal o en orden de inversión de bits. SI se utiliza memoria secuencial de acceso no aleatorio, existen algunos algoritmos de FFT que utilizan memoria de acceso secuencial, pero como ya hemos visto, las entradas o las salidas debe estar en orden de inversión de bits. Aunque los grafos de flujo de esos algoritmos se pueden reestructurar de forma que la entrada, la salida y los coeficientes estén en orden normal, la estructura de indexación para realizarlos se vuelve muy complicada, y se dobla la cantidad de memoria de acceso aleatorio necesaria. En consecuencia, no parece que el uso de esos algoritmos sea ventajoso.

Los algoritmos de FFT que admiten cómputo en el mismo lugar, como los de las Figuras 9.11, 9.15, 9.22 y 9.24 son los que se utilizan más frecuentemente. Si una secuencia se va a transformar sólo una vez, el ordenamiento correspondiente a inversión de bits se puede realizar tanto sobre la entrada como sobre la salida. Sin embargo, en algunas situaciones se transforma una secuencia, se modifica de alguna forma el resultado transformado y se calcula la DFT inversa. Por ejemplo, al realizar filtros digitales FIR mediante convolución por bloques con la transformada discreta de Fourier, se multiplica la DFT de una sección de la secuencia de entrada por la DFT de la respuesta al impulso del filtro y se calcula después la transformada inversa del resultado para obtener un segmento de la salida del filtro. De forma similar, al calcular la función de autocorrelación o la correlación cruzada mediante la transformada discreta de Fourier se transforman las secuencias, se multiplican las DFT y se obtiene la transformada inversa del producto resultante. Cuando se conectan en cascada dos transformadas de esta forma es posible, escogiendo adecuadamente los algoritmos de FFT, evitar la necesidad del orden de inversión de bits. Por ejemplo, al implementar un filtro digital FIR mediante la DFT se puede escoger un algoritmo para la transformada directa que utilice los datos en orden normal y proporcione la DFT en orden de inversión de bits. Se podrían utilizar los grafos de flujo de la Figura 9.15, basado en diezmado en el tiempo o de la Figura 9.22, basado en diezmado en frecuencia. La diferencia es que la estructura basada en diezmado en el tiempo requiere los coeficientes en orden de inversión de bits mientras que la estructura basada en diezmado en frecuencia los requiere en orden normal.

Fíjese en que la Figura 9.11 utiliza los coeficientes en orden normal mientras que la Figura 9.24 los utiliza en orden de inversión de bits. Si se elige el algoritmo basado en diezmado en el tiempo para realizar la transformación directa, se debe escoger el algoritmo basado en diezmado en frecuencia para la transformación inversa, que requiere los coeficientes en orden de inversión de bits. Asimismo, un algoritmo de diezmado en frecuencia para realizar la transformación directa se debe emparejar con un algoritmo de diezmado en el tiempo para la transformación inversa, que utilizaría los coeficientes en orden normal.

9.4.2. Coeficientes

Hemos observado que los coeficientes W_N^r (factores *twiddle*) se pueden requerir en orden normal o en orden de inversión de bits. En cada caso se debe almacenar una tabla de tamaño suficiente para todos los valores requeridos, o bien se deben calcular dichos valores cuando se necesiten. La primera alternativa

tiene la ventaja de la velocidad, pero por supuesto necesita espacio de almacenamiento adicional. Si observamos los grafos de flujo vemos que se necesita W_N^r para $r = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1$. Por tanto, se requieren $N/2$ registros de almacenamiento complejos para guardar la tabla completa de valores de W_N^r.[8] En el caso de algoritmos en los que los coeficientes se acceden en orden de inversión de bits, simplemente la tabla se almacena en ese orden.

El cálculo de los coeficientes cuando se necesitan ahorra espacio de almacenamiento, pero es menos eficiente que la búsqueda en una tabla. Si se van a calcular los coeficientes, generalmente es más eficiente utilizar una fórmula de recursión. En una determinada etapa, los coeficientes necesarios son todos potencias de un número complejo de la forma W_N^q, donde q depende del algoritmo y de la etapa. Por tanto, si se requieren los coeficientes en orden normal, se puede utilizar la fórmula de recursión

$$W_N^{q\ell} = W_N^q \cdot W_N^{q(\ell-1)} \tag{9.34}$$

para obtener el ℓ-ésimo coeficiente a partir del $(\ell - 1)$-ésimo coeficiente. Puede verse claramente que los algoritmos que requieren los coeficientes en orden de inversión de bits no se adaptan bien a esta solución. Debe tenerse en cuenta que la Ecuación (9.35) es esencialmente el oscilador de forma acoplada del Problema 6.21. Cuando se utiliza aritmética de precisión finita, los errores se pueden potenciar en la iteración de esta ecuación en diferencias. Por tanto, generalmente es necesario reinicializar el valor en puntos preestablecidos (por ejemplo, $W_N^{N/4} = -j$) de forma que los errores no crezcan hasta hacerse inaceptables.

9.5. ALGORITMOS DE FFT MÁS GENERALES

Los algoritmos de potencia de dos presentados con detalle en las Secciones 9.2 y 9.3 son directos, altamente eficientes y sencillos de programar. Sin embargo, existen muchas aplicaciones donde resultan de utilidad algoritmos eficientes para otros valores de N.

9.5.1. Algoritmos para valores compuestos de N

Aunque el caso especial en el que N es una potencia de 2 conduce a algoritmos con estructura particularmente simple, no es la única restricción sobre N que puede producir una reducción de los cálculos necesarios para obtener la DFT. Los mismos principios aplicados cuando N es una potencia de 2 para obtener los algoritmos de diezmado en el tiempo y en frecuencia se pueden aplicar al caso en que N sea un entero compuesto, es decir, el producto de dos o más factores enteros. Por ejemplo, si $N = N_1 N_2$, es posible expresar una DFT de N puntos como una combinación de N_1 transformadas DFT de N_2 puntos o como una combinación de N_2 transformadas DFT de N_1 puntos, y obtener así una reducción en el número de operaciones. Para verlo, los índices n y k se representan como sigue:

$$n = N_2 n_1 + n_2 \qquad \begin{cases} n_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1 \\ n_2 = 0, 1, \ldots, N_2 - 1 \end{cases} \tag{9.35a}$$

$$k = k_1 + N_1 k_2 \qquad \begin{cases} k_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1 \\ k_2 = 0, 1, \ldots, N_2 - 1. \end{cases} \tag{9.35b}$$

[8] Este número se puede reducir utilizando simetría a costa de una mayor complejidad para acceder a los valores deseados.

Como $N = N_1 N_2$, estas descomposiciones de índices aseguran que n y k varían sobre todos los valores $0, 1, \ldots, N-1$. Sustituyendo estas representaciones de n y k en la definición de la DFT se llega, tras algunas operaciones a

$$\begin{aligned} X[k] &= X[k_1 + N_1 k_2] \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[\left(\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2 n_1 + n_2] W_{N_1}^{k_1 n_1} \right) W_N^{k_1 n_2} \right] W_{N_2}^{k_2 n_2}, \end{aligned} \tag{9.36}$$

siendo $k_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ y $k_2 = 0, 1, \ldots, N_2 - 1$. El término encerrado entre paréntesis de la Ecuación (9.36) representa N_2 transformadas DFT de N_1 puntos, mientras que la otra suma corresponde a N_1 transformadas DFT de N_2 puntos de las salidas del primer conjunto de transformadas que se realizan tras la modificación por los factores *twiddle* $W_N^{k_1 n_2}$.

Si $N_1 = 2$ y $N_2 = N/2$, la Ecuación (9.36) se reduce a la descomposición de la primera etapa del algoritmo de diezmado en frecuencia para potencia de dos que se muestra en la Figura 9.19 de la Sección 9.3, que consiste en $N/2$ transformadas de 2 puntos seguidas por dos transformadas de $N/2$ puntos. Por otra parte, si $N_1 = N/2$ y $N_2 = 2$, la Ecuación (9.36) se reduce a la descomposición de la primera etapa del algoritmo de diezmado en el tiempo para potencia de dos que se muestra en la Figura 9.4 de la Sección 9.2, que consiste en dos transformadas de $N/2$ puntos seguidas por $N/2$ transformadas de 2 puntos.[9]

Los algoritmos de Cooley-Tukey para N compuesto general se obtienen realizando primero las transformadas de N_1 puntos y aplicando de nuevo la Ecuación (9.36) a otro factor remanente N_2 de N/N_1 hasta que se hayan utilizado todos los factores de N. La aplicación repetida de la Ecuación (9.36) conduce a descomposiciones similares a los algoritmos de potencia de dos. La indexación en estos algoritmos es sólo ligeramente más complicada que en el caso de potencia de 2. Si los factores de N son primos entre sí, se puede reducir aún más el número de multiplicaciones a costa de una indexación más complicada. Los algoritmos de "factor primo" utilizan descomposiciones de índices diferentes a las de las Ecuaciones (9.35a) y (9.35b) para eliminar los factores *twiddle* de la Ecuación (9.36) y ahorrar así una significativa cantidad de cómputo. Los detalles de los algoritmos de tipo Cooley-Tukey más generales y de los algoritmos de factor primo se presentan en Burrus y Parks (1985), Burrus (1988) y Blahut (1985).

Como ilustración de lo que se puede conseguir con estos algoritmos de factor primo, consideremos las medidas que se muestran en la Figura 9.26. Estas medidas son el número de operaciones en coma flotante en función de N para la función `fft( )` de la Rev. 5.2 de MATLAB.[10] Como hemos indicado, el número total de operaciones en coma flotante debe ser proporcional a $N \log_2 N$ cuando N es potencia de dos y proporcional a N^2 para el cómputo directo. Para otros valores de N, la cuenta total de operaciones dependerá del número (y la cardinalidad) de los factores.

Cuando N es un número primo, se requiere evaluación directa, por lo que el número de operaciones en coma flotante será proporcional a N^2. La curva superior (continua) de la Figura 9.29 muestra la función

$$\text{FLOPS}(N) = 6N^2 + 2N(N-1). \tag{9.37}$$

[9]Para que la Figura 9.4 sea una representación exacta de la Ecuación (9.36), las mariposas de dos puntos de la última etapa se deben sustituir por las mariposas de la Figura 9.10.

[10]Esta gráfica se ha creado con una versión modificada de un programa escrito por C. S. Burrus. Como ya no es posible medir el número de operaciones en coma flotante en versiones recientes de MATLAB, es posible que el lector no pueda repetir este experimento.

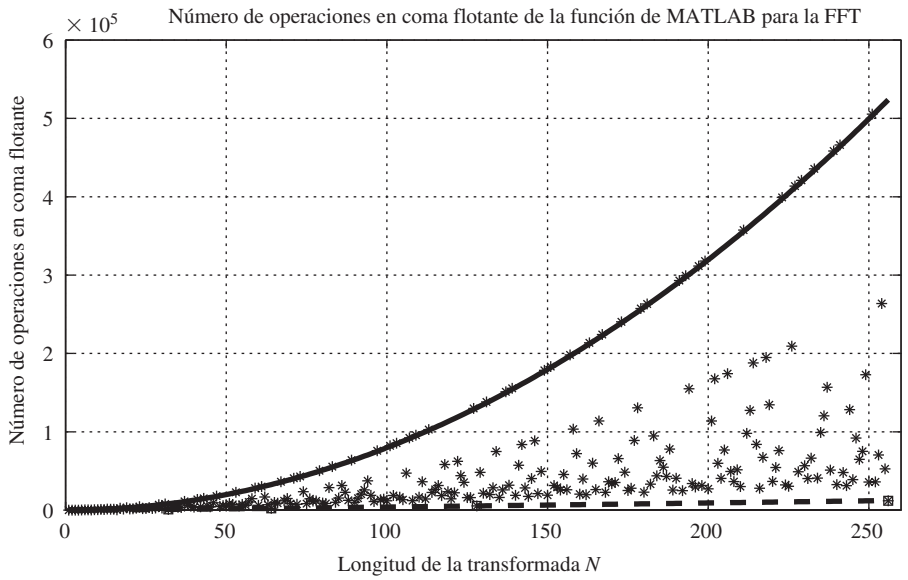


Figura 9.26 Número de operaciones en punto flotante en función de N para la función de MATLAB `fft( )` (revisión 5.2).

Todos los puntos que están en esta curva son para valores de N primos. La curva discontinua inferior muestra la función

$$\text{FLOPS}(N) = 6N\log_2 N. \tag{9.38}$$

Los puntos sobre esta curva son todos para N potencia de dos. Para otros números compuestos, el número de operaciones está entre las dos curvas. Para ver cómo varía la eficiencia de un entero a otro, consideremos los valores de N desde 199 a 202. El número 199 es primo, por lo que el número de operaciones (318004) está en la curva de máximos. El valor $N = 200$ tiene la factorización $N = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, y el número de operaciones (27134) está cerca de la curva de mínimos. Para $N = 201 = 3 \cdot 67$, el número de operaciones en coma flotante es de 113788, y para $N = 202 = 2 \cdot 101$ el número es 167676. Esta amplia diferencia entre $N = 201$ y $N = 202$ es porque una transformada de 101 puntos requiere mucho más cómputo que una transformada de 67 puntos. Observe también que cuando N tiene muchos factores pequeños (como $N = 200$) la eficiencia es mucho mayor.

9.5.2. Algoritmos de FFT optimizados

Un algoritmo de FFT se basa en la descomposición matemática de la DFT en una combinación de transformadas más pequeñas, como hemos visto en detalle en las Secciones 9.2 y 9.3. El algoritmo de FFT se puede expresar en un lenguaje de programación de alto nivel que se puede traducir en instrucciones en código máquina por compiladores ejecutándose en la máquina de destino. En general, esto producirá implementaciones cuya eficiencia variará con la arquitectura de la máquina. Para considerar el aspecto de maximización de la eficiencia en diversas máquinas, Frigo y Johnson (1998 y 2005) desarrollaron una biblioteca de software libre denominada FFTW ("*Fastest Fourier Transform in the West*"). FFTW utiliza un "planificador" para adaptar sus algoritmos de FFT tipo Cooley-Tukey a una plataforma hardware determinada, maximizando así la eficiencia. El sistema opera en dos etapas. La primera es una etapa de planificación en la que los cálculos se organizan para optimizar las prestaciones en una máquina dada, y la segunda es una etapa de cómputo en la que se ejecuta el plan (programa) resultante. Una

vez se determina el plan para una máquina dada, se puede ejecutar en esa máquina tantas veces como se necesite. Los detalles de FFTW se salen del alcance de este texto. Sin embargo, Frigo y Johnson, 2005, han demostrado que en una amplia variedad de máquinas, el algoritmo FFTW es significativamente más rápido que otras implementaciones para valores de N que van desde 16 hasta 8192. Por encima de 8192, las prestaciones de FFTW se reducen drásticamente debido a aspectos relacionados con la memoria caché.

9.6. REALIZACIÓN DE LA DFT MEDIANTE CONVOLUCIÓN

Debido a la enorme eficiencia de la FFT, a menudo se realiza la convolución calculando la DFT inversa del producto de las DFT de las secuencias que se convolucionan, y se usa un algoritmo de FFT para calcular las DFT directa e inversa. En contraste con esto, y en aparente (pero, por supuesto, no real) contradicción, algunas veces es preferible realizar la DFT formulándola previamente como convolución. El algoritmo de Goertzel es un ejemplo de esto, pero existen diversos procedimientos más sofisticados que se basan en esta idea, que se presentan en las secciones siguientes.

9.6.1. Presentación del algoritmo de Winograd para el cálculo de la transformada de Fourier

Existe un procedimiento propuesto y desarrollado por S. Winograd (1978), denominado a menudo algoritmo de transformada de Fourier de Winograd (WFTA, *Winograd Fourier transform algorithm*), que logra su eficiencia expresando la DFT como una multiplicación de polinomios, o equivalentemente, una convolución. El WFTA usa un esquema de indexación correspondiente a una descomposición de la DFT en varias DFT de menor longitud cuyas longitudes son primas entre sí. Las DFT de menor longitud se transforman en convoluciones periódicas. Rader (1968) propuso un esquema para transformar una DFT en una convolución cuando el número de muestras de entrada es primo, pero su aplicación tuvo que esperar hasta el desarrollo de métodos eficientes para calcular convoluciones periódicas. Winograd combinó los procedimientos anteriores existentes junto con algoritmos altamente eficientes para calcular convoluciones cíclicas, desarrollando un nuevo procedimiento para calcular la DFT. Las técnicas para obtener algoritmos eficientes de cálculo de convoluciones cortas se basan en técnicas relativamente avanzadas de teoría de números, como el Teorema del Resto Chino para polinomios, y por tanto, no las consideraremos en detalle. No obstante, en McClellan y Rader (1979), Blahut (1985) y Burrus (1988) se pueden encontrar excelentes presentaciones de los detalles del WFTA.

Con el algoritmo WFTA, el número de multiplicaciones necesario para realizar una DFT de N puntos es proporcional a N en vez de a $N \log N$. Aunque esto produce algoritmos óptimos en términos de minimizar multiplicaciones, el número de sumas aumenta considerablemente respecto a la FFT. Por tanto, el WFTA es más ventajoso cuando la multiplicación es significativamente más lenta que la suma, lo que generalmente ocurre cuando se utiliza aritmética digital de coma fija. Sin embargo, en procesadores donde la multiplicación y la suma se realizan juntas, los algoritmos de tipo Cooley-Tukey o de factor primo son preferibles generalmente. El WFTA tiene dificultades adicionales, como que la indexación es más complicada, no es posible el cómputo en el mismo lugar y hay diferencias estructurales significativas para diferentes valores de N.

Por tanto, aunque el WFTA es extremadamente importante como punto de comparación para ver lo eficiente que puede ser el cálculo de la DFT (en términos de número de multiplicaciones), a menudo son otros los factores que predominan en la determinación de la velocidad y la eficiencia de una implementación hardware o software del cálculo de la DFT.

9.6.2. El algoritmo de transformada chirp

Otro algoritmo basado en expresar la DFT como convolución se denomina algoritmo de transformada *chirp* (CTA, *Chirp Transform Algorithm*). Este algoritmo no es óptimo en el sentido de minimizar una medida de complejidad computacional, pero ha resultado útil en diversas aplicaciones, particularmente al implementarlo en tecnologías bien adaptadas a la realización de la convolución con una respuesta al impulso fija preestablecida. El CTA es también más flexible que la FFT, ya que se puede utilizar para calcular *cualquier* conjunto de muestras igualmente espaciadas de la transformada de Fourier en la circunferencia unidad.

Para obtener el CTA, sea $x[n]$ una secuencia de N puntos y $X(e^{j\omega})$ su transformada de Fourier. Consideremos la evaluación de M muestras de $X(e^{j\omega})$ equiespaciadas en ángulo en la circunferencia unidad, como indica la Figura 9.27, es decir, en las frecuencias

$$\omega_k = \omega_0 + k\Delta\omega, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{9.39}$$

donde la frecuencia inicial ω_0 y el incremento de frecuencia $\Delta\omega$ se pueden elegir arbitrariamente (para el caso específico de la DFT, $\omega_0 = 0, M = N$ y $\Delta\omega = 2\pi/N$). La transformada de Fourier correspondiente a este conjunto más general de muestras en frecuencia es

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_k n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{9.40}$$

o, definiendo W como

$$W = e^{-j\Delta\omega} \tag{9.41}$$

y utilizando la Ecuación (9.39),

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{nk}. \tag{9.42}$$

Para expresar $X(e^{j\omega_k})$ como una convolución podemos utilizar la igualdad

$$nk = \tfrac{1}{2}[n^2 + k^2 - (k-n)^2] \tag{9.43}$$

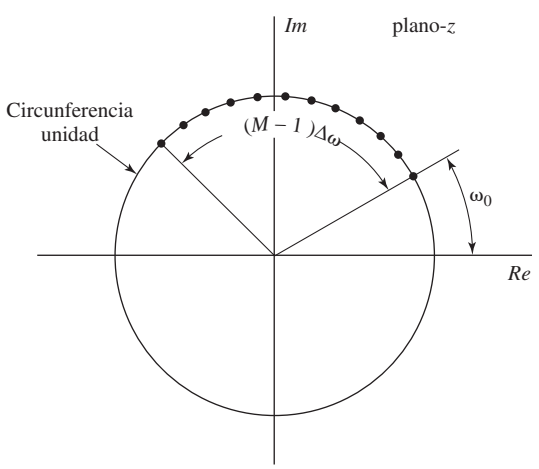


Figura 9.27 Muestras en frecuencia para el algoritmo de transformada *chirp*.

y expresar la Ecuación (9.42) como

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2}W^{k^2/2}W^{-(k-n)^2/2}. \tag{9.44}$$

Haciendo

$$g[n] = x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2}, \tag{9.45}$$

podemos escribir entonces

$$X(e^{j\omega_k}) = W^{k^2/2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} g[n]W^{-(k-n)^2/2}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{9.46}$$

Para preparar la interpretación de la Ecuación (9.46) como la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo, podemos utilizar una notación más familiar sustituyendo k por n y n por k en la Ecuación (9.46):

$$X(e^{j\omega_n}) = W^{n^2/2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} g[k]W^{-(n-k)^2/2}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{9.47}$$

En la forma de la Ecuación (9.47), $X(e^{j\omega_n})$ es la convolución de la secuencia $g[n]$ con la secuencia $W^{-n^2/2}$, seguida por la multiplicación por la secuencia $W^{n^2/2}$. La secuencia de salida, indexada en la variable independiente n, es la secuencia de muestras en frecuencia $X(e^{j\omega_n})$. Con esta interpretación, el cálculo de la Ecuación (9.47) se muestra en la Figura 9.28. La secuencia $W^{-n^2/2}$ se puede ver como una exponencial compleja con incremento en frecuencia lineal $n\Delta w$. En sistemas radar, estas señales se denominan señales *chirp*, de ahí el nombre de *transformada chirp*. Un sistema similar al de la Figura 9.28 se utiliza frecuentemente en tratamiento de señales radar y sonar para realizar compresión de pulsos (Skolnik, 2002).

Para la evaluación de las muestras de la transformada de Fourier especificadas en la Ecuación (9.47) sólo es necesario calcular la salida del sistema de la Figura 9.28 en un intervalo finito. En la Figura 9.29 se muestran ilustraciones de las secuencias $g[n], W^{-n^2/2}$ y $g[n] * W^{-n^2/2}$. Como $g[n]$ es de duración finita, sólo se emplea una porción finita de la secuencia $W^{-n^2/2}$ para obtener $g[n] * W^{-n^2/2}$ en el intervalo $n = 0, 1, \ldots, M-1$. Concretamente, la porción comprendida entre $n = -(N-1)$ y $n = M-1$. Definamos

$$h[n] = \begin{cases} W^{-n^2/2}, & -(N-1) \le n \le M-1, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{9.48}$$

como se ilustra en la Figura 9.30. Se puede ver fácilmente, considerando la representación gráfica del proceso de convolución que

$$g[n] * W^{-n^2/2} = g[n] * h[n], \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{9.49}$$

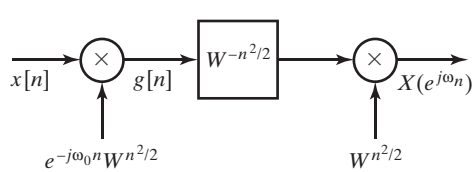


Figura 9.28 Diagrama de bloques del algoritmo de la transformada *chirp*.

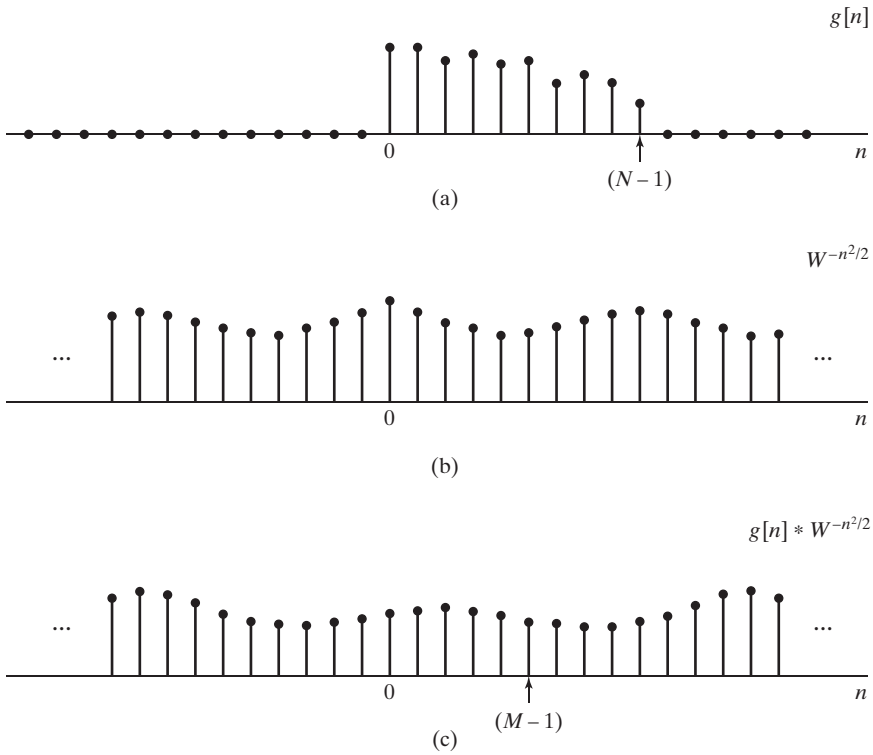


Figura 9.29 Ilustración de las secuencias utilizadas en el algoritmo de la transformada *chirp*. Observe que las secuencias reales utilizadas toman valores complejos. (a) $g[n] = x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2}$. (b) $W^{-n^2/2}$. (c) $g[n] * W^{-n^2/2}$.

Por tanto, la respuesta al impulso de duración infinita $W^{-n^2/2}$ en el sistema de la Figura 9.28 se puede sustituir por la respuesta al impulso de duración finita de la Figura 9.30. El sistema es ahora como indica la Figura 9.31, donde $h[n]$ está especificado por la Ecuación (9.48) y las muestras en frecuencia están dadas por

$$X(e^{j\omega_n}) = y[n], \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{9.50}$$

La evaluación de las muestras en frecuencia utilizando el procedimiento indicado en la Figura 9.31 presenta varias ventajas potenciales. En general, no es necesario que $N = M$ como en los algoritmos de FFT, y no es necesario que N y M sean números compuestos. De hecho, si se desea, pueden ser números primos. Adicionalmente, el parámetro ω_0 es arbitrario. Esta ganancia en flexibilidad con respecto a la FFT se logra, además, manteniendo un cómputo eficiente, ya que la convolución de la Figura 9.31 se puede realizar mediante un algoritmo de FFT con la técnica de la Sección 8.7. Como se comentó en esa sección, el tamaño de la FFT debe ser mayor o igual que $(M+N-1)$ para que la convolución circular sea igual a $g[n] * h[n]$ para $0 \leq n \leq M-1$. Por lo demás, el tamaño de la FFT es arbitrario y se puede escoger por ejemplo como potencia de 2. Es interesante observar que los algoritmos de FFT utilizados para calcular la convolución implícita en el CTA podrían ser del tipo de Winograd. Estos algoritmos utilizan a su vez convolución para realizar el cálculo de la DFT.

En el sistema de la Figura 9.31 $h[n]$ es no causal, y para ciertas realizaciones en tiempo real se debe modificar para obtener un sistema causal. Como $h[n]$ es de duración finita, esta modificación se puede

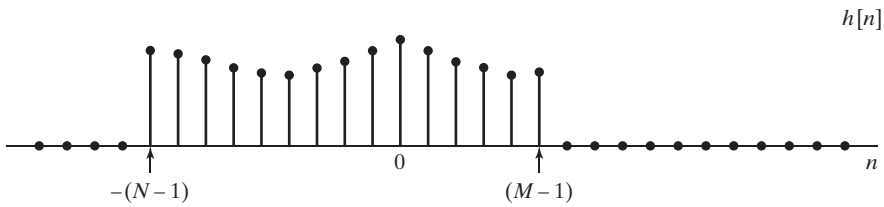


Figura 9.30 Ilustración de la región de soporte del filtro FIR *chirp*. Observe que los valores de $h[n]$ indicados por la Ecuación (9.48) son complejos.

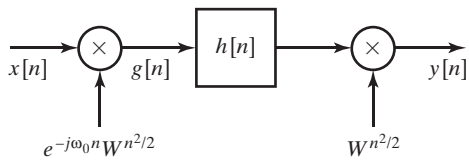


Figura 9.31 Diagrama de bloques de un sistema de transformada *chirp* para respuesta al impulso finita.

realizar fácilmente retrasando $(N-1)$ muestras $h[n]$, con lo que se obtiene una respuesta al impulso causal

$$h_1[n] = \begin{cases} W^{-(n-N+1)^2/2}, & n = 0, 1, \ldots, M+N-2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{9.51}$$

Como tanto el factor de demodulación *chirp* en la salida como la señal de salida se retrasan también $(N-1)$ muestras, los valores de la transformada de Fourier son

$$X(e^{j\omega_n}) = y_1[n+N-1], \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{9.52}$$

Al modificar el sistema de la Figura 9.31 para obtener un sistema causal se obtiene el sistema de la Figura 9.32. Una ventaja de este sistema surge del hecho de que se realiza la convolución de la señal de entrada (modulada con una chirp) con una respuesta al impulso causal fija. Ciertas tecnologías, como los dispositivos de acoplo de carga (CCD, *Charge-Coupled Devices*) o los dispositivos de onda acústica superficial (SAW, *Surface Acoustic Wave*) son particularmente útiles para realizar convoluciones con respuestas al impulso fijas preestablecidas. Estos dispositivos se pueden utilizar para realizar filtros FIR con la respuesta al impulso especificada durante el proceso de fabricación mediante disposición geométrica de electrodos. Un esquema similar ha sido seguido por Hewes, Broderson y Buss (1979) para implementar el algoritmo CTA con dispositivos CCD.

Los resultados del CTA se pueden simplificar más si las muestras en frecuencia que se calculan corresponden a la DFT, es decir, cuando $\omega_0 = 0$ y $W = e^{-j2\pi/N}$, de forma que $\omega_n = 2\pi n/N$. En este caso, es conveniente modificar el sistema de la Figura 9.32. Concretamente, si $\omega_0 = 0$ y $W = e^{-j2\pi/N} = W_N$, se puede considerar aplicar un retardo unidad adicional a la respuesta al impulso de la Figura 9.32. Si N

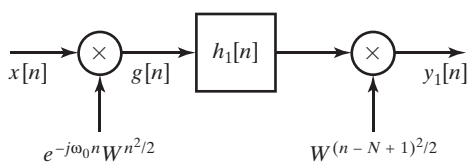


Figura 9.32 Diagrama de bloques de un sistema de transformada *chirp* para respuesta al impulso finita causal.

es par, $W_N^N = e^{j2\pi} = 1$, con lo que

$$W_N^{-(n-N)^2/2} = W_N^{-n^2/2}. \tag{9.53}$$

Por tanto, el sistema ahora es como muestra la Figura 9.33, donde

$$h_2[n] = \begin{cases} W_N^{-n^2/2}, & n = 1, 2, \ldots, M+N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{9.54}$$

En este caso, la señal *chirp* que modula a $x[n]$ y la señal *chirp* que modula al filtro FIR son idénticas, y

$$X(e^{j2\pi n/N}) = y_2[n+N], \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{9.55}$$

Ejemplo 9.1 Parámetros de la transformada *chirp*

Supongamos una secuencia de longitud finita $x[n]$ que es distinta de cero sólo en el intervalo $n = 0, \ldots, 25,$. Deseamos calcular 16 muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega_k = 2\pi/27 + 2\pi k/1024$ para $k = 0, \ldots, 15$. Podemos calcular las muestras en frecuencia deseadas mediante la convolución con una respuesta al impulso causal utilizando el sistema de la Figura 9.32, seleccionando adecuadamente los parámetros. Sean $M = 16$ el número de muestras deseado y $N = 26$ la longitud de la secuencia. La frecuencia de la muestra inicial, ω_0, es $2\pi/27$, y el intervalo entre muestras de frecuencia adyacentes, $\Delta\omega$, es $2\pi/1024$. Con estos parámetros, aplicando la Ecuación (9.41) obtenemos que $W = e^{-j\Delta\omega}$. Por tanto, utilizando la Ecuación (9.51), la respuesta al impulso causal deseada es

$$h_1[n] = \begin{cases} [e^{-j2\pi/1024}]^{-(n-25)^2/2}, & n = 0, \ldots, 40, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Para esta respuesta causal, la salida $y_1[n]$ tendrá las muestras deseadas en frecuencia empezando por $y_1[25]$. Es decir,

$$y_1[n+25] = X(e^{j\omega_n})|_{\omega_n = 2\pi/27 + 2\pi n/1024}, \qquad n = 0, \ldots, 15.$$

Un algoritmo similar al CTA fue propuesto por primera vez por Bluestein (1970), que demostró que se puede obtener una realización recursiva de la Figura 9.32 para el caso de $\Delta\omega = 2\pi/N$, siendo N un cuadrado perfecto (véase el Problema 9.48). Rabiner, Schafer y Rader (1969) generalizaron este algoritmo para obtener muestras de la transformada Z equiespaciadas sobre un contorno espiral del plano z. Esta forma más general del CTA se denomina algoritmo de la transformada Z *chirp*, (CZT, *chirp Z transform*). El algoritmo que hemos denominado CTA es un caso particular del algoritmo CZT.

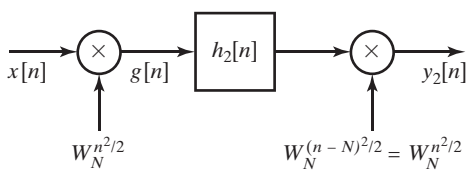


Figura 9.33 Diagrama de bloques de un sistema de transformada *chirp* para obtener muestras de la DFT.

9.7. EFECTOS DE LA LONGITUD FINITA DE REGISTROS

Como los algoritmos de transformada rápida de Fourier se utilizan ampliamente para filtrado digital y análisis espectral, es importante entender los efectos que puede tener en el cálculo la longitud finita de los registros. Como en el caso de filtros digitales, un análisis preciso de estos efectos es difícil. Sin embargo, un análisis simplificado es a menudo suficiente para el objetivo de escoger la longitud del registro necesaria. El análisis que vamos a presentar tiene un estilo similar al realizado en la Sección 6.9. Concretamente, analizaremos el redondeo aritmético mediante un modelo lineal de ruido que se obtiene insertando una fuente de ruido aditivo en cada punto del algoritmo donde se producen errores de redondeo. Además, realizaremos varias hipótesis para simplificar el análisis. Los resultados que obtendremos nos llevarán a estimaciones simplificadas pero útiles del efecto del redondeo aritmético. Aunque el análisis es para el efecto del redondeo, generalmente es fácil modificar los resultados para el efecto del truncamiento.

Hemos visto varias estructuras algorítmicas diferentes para la FFT. Sin embargo, los efectos del ruido de redondeo son muy similares entre las diferentes clases de algoritmos. Por tanto, incluso considerando sólo el algoritmo de diezmado en el tiempo de base 2, los resultados serán representativos de otras estructuras.

La Figura 9.11 muestra el grafo de flujo de un algoritmo mediante diezmado en el tiempo para $N = 8$. Esta figura se reproduce en la Figura 9.34. Algunos aspectos clave de este diagrama son comunes a todos los algoritmos estándar de base 2. La DFT se calcula en $\nu = \log_2 N$ etapas. En cada etapa se forma un nuevo vector de N números a partir del vector anterior mediante combinación lineal de dos elementos cada vez. El ν-ésima vector contiene la DFT deseada. Para el caso de algoritmos mediante diezmado en el tiempo de base 2 el cálculo básico de la DFT de 2 puntos es de la forma

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q], \tag{9.56a}$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q]. \tag{9.56b}$$

En las expresiones anteriores los subíndices m y $(m-1)$ se refieren al vector m-ésimo y al vector $(m-1)$-ésimo respectivamente, y p y q indican la posición de los números en cada vector (nótese que $m = 0$ indica el vector de entrada y $m = \nu$ indica el vector de salida). La Figura 9.35 muestra un grafo de flujo del cálculo de la mariposa.

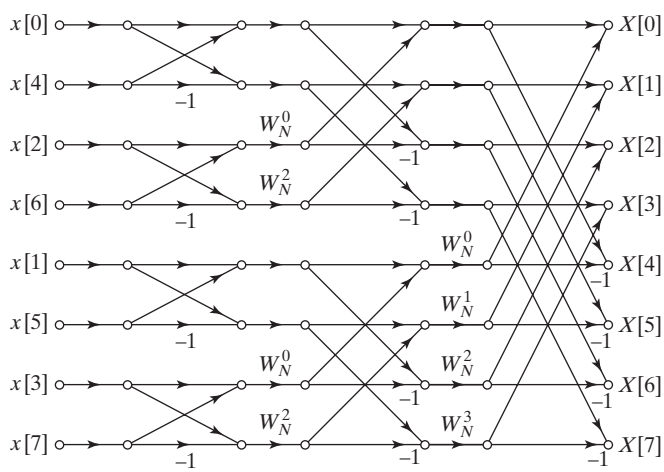


Figura 9.34 Grafo de flujo de un algoritmo FFT mediante diezmado en el tiempo.

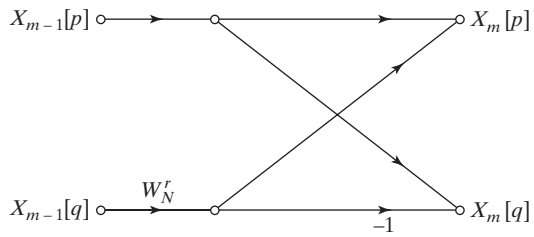


Figura 9.35 Cálculo de la mariposa en el procedimiento de diezmado en el tiempo.

En cada etapa se realizan $N/2$ cálculos de mariposas para producir el siguiente vector. El entero r varía con p, q y m de una manera que depende de la forma específica del algoritmo de FFT que se utilice. Sin embargo, nuestro análisis no está ligado a una forma específica de variación de r. Además, la relación específica entre p, q y m, que determina la indexación del vector m-ésimo, no es importante para el análisis. Los detalles del análisis difieren ligeramente para el caso de diezmado en el tiempo y diezmado en frecuencia debido a las formas diferentes de las mariposas, pero los resultados básicos no cambian significativamente. En nuestro análisis supondremos una mariposa de la forma de las Ecuaciones (9.56a) y (9.56b), correspondiente al caso de diezmado en el tiempo

Modelaremos el ruido de redondeo asociando un generador de ruido aditivo a cada multiplicación en coma fija. Con este modelo, para analizar los efectos del ruido de redondeo, la mariposa de la Figura 9.35 se puede sustituir por la de la Figura 9.36. La notación $\varepsilon[m,q]$ representa el valor complejo del error que se introduce al calcular el vector m-ésimo a partir del vector $(m-1)$-ésimo. Concretamente, indica el error resultante de la cuantificación de la multiplicación del elemento q-ésimo del vector $(m-1)$-ésimo por un coeficiente complejo.

Dado que en general se supone que la entrada a la FFT es una secuencia compleja, cada una de las multiplicaciones es compleja y requiere por tanto cuatro multiplicaciones reales. Se supone que los errores de cada multiplicación real tienen las siguientes propiedades:

1. Son variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo de $-(1/2)\cdot 2^{-B}$ a $(1/2)\cdot 2^{-B}$, donde, como se definió en la Sección 6.7.1, los números se representan como fracciones con signo de $(B+1)$ bits. La varianza de cada fuente de error es por tanto $2^{-2B}/12$.
2. Los errores están incorrelados entre sí.
3. Todos los errores están incorrelados con la entrada y, por tanto, también con la salida.

Como cada una de las cuatro fuentes generan ruido blanco incorrelado de media cero y todas tienen la misma varianza,

$$\mathscr{E}\{|\varepsilon[m,q]|^2\} = 4\cdot\frac{2^{-2B}}{12} = \tfrac{1}{3}\cdot 2^{-2B} = \sigma_B^2. \tag{9.57}$$

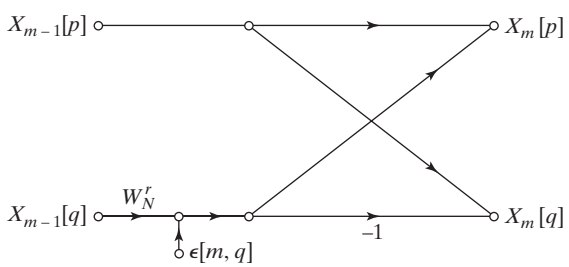


Figura 9.36 Modelo lineal de ruido para el ruido de redondeo de coma fija en el cálculo de la mariposa del algoritmo de diezmado en el tiempo.

Para determinar el valor cuadrático medio del ruido en cualquier nodo de salida, debemos tener en cuenta la contribución de cada una de las fuentes de ruido que se propagan hasta ese nodo. A partir del grafo de la Figura 9.34 se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. La función de transmisión entre dos nodos conectados del grafo de flujo es la multiplicación por una constante compleja de módulo unidad (debido a que las ganancias de cada arco son la unidad o una potencia entera de W_N).
2. Cada nodo de salida se conecta con siete mariposas del grafo de flujo (en general, cada nodo de salida se conectaría con $(N-1)$ mariposas). Por ejemplo, la Figura 9.37(a) muestra el grafo de flujo eliminando todas las mariposas que no se conectan con $X[0]$, y la Figura 9.37(b) eliminando las mariposas que no se conectan con $X[2]$.

Estas observaciones se pueden generalizar al caso de que N sea una potencia arbitraria de 2.

Como consecuencia de la primera observación, el valor cuadrático medio del módulo de la componente del ruido de salida debida a cada fuente de ruido elemental es siempre igual a σ_B^2. El ruido total en cada nodo de salida es igual a la suma del ruido propagado hasta ese nodo. Como se supone que todas las fuentes de ruido están incorreladas, el valor cuadrático medio del módulo del ruido de salida es igual a σ_B^2 veces el número de fuentes de ruido que se propagan a ese nodo. Como mucho, se introduce una fuente de ruido complejo en cada mariposa, por lo que, de la observación 2, como máximo se propagan $(N-1)$ fuentes de ruido a cada nodo de salida. De hecho, no todas las mariposas generan ruido de redondeo ya que algunas (por ejemplo las de la primera y segunda etapas para $N=8$) sólo realizan la multiplicación por la unidad. Sin embargo, si se supone por simplicidad que existen errores de redondeo en cada mariposa, el resultado se puede considerar como una cota superior del ruido de salida. Bajo este supuesto, el valor cuadrático medio del k-ésimo valor de la DFT $F[k]$, está dado por

$$\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} = (N-1)\sigma_B^2, \tag{9.58}$$

que para valores grandes de N se puede aproximar como

$$\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} = N\sigma_B^2. \tag{9.59}$$

De acuerdo con este resultado, el valor cuadrático medio del ruido de salida es proporcional a N, el número de puntos transformados. El efecto de doblar N, o añadir otra etapa a la FFT, es doblar el valor cuadrático medio del ruido de salida. En el Problema 9.52 se considera la modificación de este resultado cuando no se insertan fuentes de ruido en las mariposas que sólo realizan multiplicaciones por la unidad o por j. Nótese que en los algoritmos de FFT el uso de un acumulador de doble longitud no ayuda a reducir el ruido de redondeo, ya que las salidas de los cálculos de las mariposas se deben almacenar en registros de $(B+1)$ bits a la salida de cada etapa.

Al implementar un algoritmo de FFT con aritmética de coma fija hay que protegerse contra el desbordamiento. Utilizando las Ecuaciones (9.56a) y (9.56b) vemos que

$$\text{máx}(|X_{m-1}[p]|, |X_{m-1}[q]|) \leq \text{máx}(|X_m[p]|, |X_m[q]|) \tag{9.60}$$

y también

$$\text{máx}(|X_m[p]|, |X_m[q]|) \leq 2\,\text{máx}(|X_{m-1}[p]|, |X_{m-1}[q]|). \tag{9.61}$$

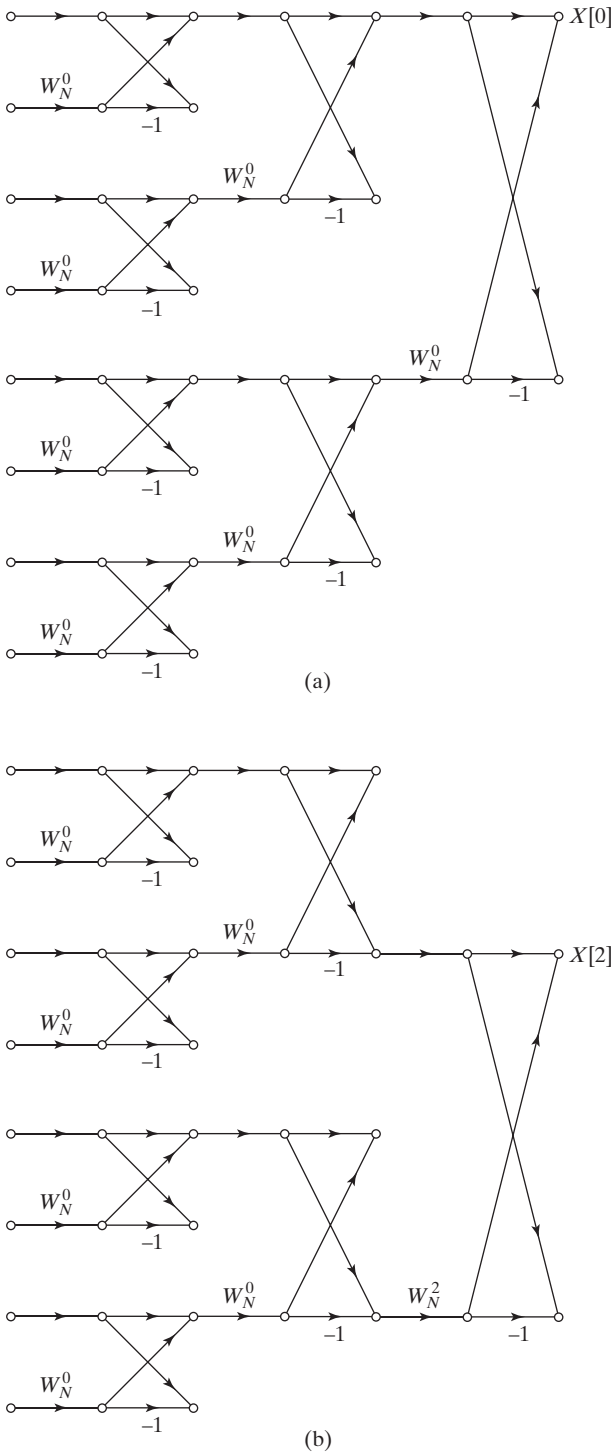


Figura 9.37
(a) Mariposas que afectan a $X[0]$;
(b) Mariposas que afectan a $X[2]$.

(Véase el Problema 9.51). La Ecuación (9.60) implica que el máximo valor del módulo no disminuye de una etapa a otra. Si el módulo de la salida de la FFT es menor que la unidad, el módulo de los puntos de cada vector deberá ser menor que la unidad, por lo que no habrá desbordamiento en ninguno de los vectores.[11]

Para expresar esta restricción como una cota de la secuencia de entrada, hay que tener en cuenta que la condición

$$|x[n]| < \frac{1}{N}, \qquad 0 \leq n \leq N-1, \tag{9.62}$$

es necesaria y suficiente para garantizar que

$$|X[k]| < 1, \qquad 0 \leq k \leq N-1. \tag{9.63}$$

Esto se deduce de la definición de la DFT, ya que

$$|X[k]| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| \quad k = 0, 1, \ldots N-1. \tag{9.64}$$

Por tanto, la Ecuación (9.62) es suficiente para garantizar que no habrá desbordamiento en ninguna de las etapas del algoritmo.

Para obtener una expresión explícita de la relación ruido-señal a la salida del algoritmo de FFT, consideremos una secuencia de entrada cuyos valores sucesivos están incorrelados, es decir, una secuencia de entrada de ruido blanco. Supongamos también que las partes real e imaginaria de la secuencia de entrada están incorreladas y que ambas tienen una amplitud con función de densidad uniforme entre $-1/(\sqrt{2}N)$ y $+1/(\sqrt{2}N)$. (adviértase que esta señal satisface la Ecuación (9.62)). El valor medio del módulo al cuadrado de la secuencia compleja de entrada es

$$\mathscr{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{3N^2} = \sigma_x^2. \tag{9.65}$$

La DFT de la secuencia de entrada es

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{kn}, \tag{9.66}$$

de donde se puede demostrar que, bajo las anteriores hipótesis sobre la entrada

$$\begin{aligned} \mathscr{E}\{|X[k]|^2\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathscr{E}\{|x[n]|^2\} |W^{kn}|^2 \\ &= N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N}. \end{aligned} \tag{9.67}$$

Combinando las Ecuaciones (9.59) y (9.67) obtenemos

$$\frac{\mathscr{E}\{|F[k]|^2\}}{\mathscr{E}\{|X[k]|^2\}} = 3N^2\sigma_B^2 = N^2 2^{-2B}. \tag{9.68}$$

[11] Realmente, la presentación sobre el desbordamiento se debería realizar en función de las partes real e imaginaria de los datos en lugar de en función del módulo. Sin embargo, $|x| < 1$ implica que $|Re\{x\}| < 1$ y $|Im\{x\}| < 1$, y dimensionando el escalado en función de las partes real e imaginaria sólo se podría conseguir un ligero incremento en los niveles de señal admisibles.

De acuerdo con la Ecuación (9.68), la relación ruido-señal se incrementa como N^2, o 1 bit por etapa. Es decir, si se dobla N, lo que equivale a añadir una etapa adicional a la FFT, para mantener la misma relación ruido-señal, se debe añadir un bit a la longitud de registro. De hecho, la hipótesis de que la señal de entrada es ruido blanco no es crítica para el razonamiento. Para otras entradas la relación ruido-señal es todavía proporcional a N^2, cambiando sólo la constante de proporcionalidad.

La Ecuación (9.61) sugiere un procedimiento alternativo de escalado. Como el valor máximo del módulo no se incrementa en más de un factor de 2 de una etapa a otra, se puede evitar el desbordamiento si requerimos que $|x[n]| < 1$ e incorporamos una atenuación de $\frac{1}{2}$ a la entrada de cada etapa. En este caso, la salida será la DFT escalada por $1/N$. Aunque el valor cuadrático medio de la señal de salida será $1/N$ multiplicado por el que sería si no se hubiera aplicado el escalado, la entrada puede ser N veces mayor sin que se produzca desbordamiento. Para una señal de entrada de ruido blanco, esto significa que se puede suponer que las partes real e imaginaria tienen distribución uniforme entre $-1/\sqrt{2}$ y $1/\sqrt{2}$, de modo que $|x[n]| < 1$. Por tanto, con las ν divisiones por 2, el máximo valor medio del módulo al cuadrado de la DFT que se puede obtener (para una entrada de ruido blanco) es el valor dado en la Ecuación (9.67). Sin embargo, el nivel del ruido de salida será mucho menor que el que indica la Ecuación (9.59), ya que el ruido producido en las primeras etapas de la FFT se atenúa por el escalado que se aplica en los vectores posteriores. Concretamente, con un escalado de 1/2 aplicado a la entrada de cada mariposa, podemos convertir la mariposa de la Figura 9.36 en la de la Figura 9.38, donde ahora aparecen dos fuentes de ruido. Como antes, suponemos que las partes real e imaginaria de esas fuentes de ruido están incorreladas, y que también están incorreladas con las otras fuentes de ruido. Suponemos también que las partes real e imaginaria se distribuyen uniformemente entre $\pm(1/2)\cdot 2^{-B}$. Por tanto, como antes,

$$\mathscr{E}\{|\varepsilon[m,q]|^2\} = \sigma_B^2 = \tfrac{1}{3}\cdot 2^{-2B} = \mathscr{E}\{|\varepsilon[m,p]|^2\}. \tag{9.69}$$

Como las fuentes de ruido están incorreladas, el valor medio del módulo al cuadrado del ruido en cada nodo de salida es de nuevo la suma de los valores cuadráticos medios de las contribuciones de cada fuente de ruido del grafo de flujo. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, la atenuación que experimenta cada fuente de ruido a través del grafo de flujo depende del vector donde se origina. Una fuente de ruido que se origina en el vector m-ésimo se propagará a la salida con una multiplicación por una constante compleja de módulo $(1/2)^{\nu-m-1}$. Examinando la Figura 9.34 vemos que, para el caso de $N = 8$, cada nodo de salida se conecta con:

1 mariposa que se origina en el vector $(\nu-1)$-ésimo,

2 mariposas que se originan en el vector $(\nu-2)$-ésimo.

4 mariposas que se originan en el vector $(\nu-3)$-ésimo, etc.

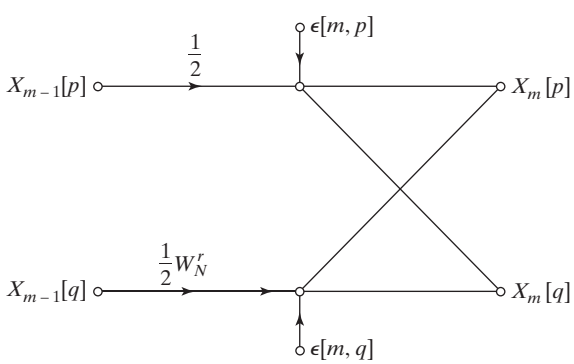


Figura 9.38 Mariposa que muestra los multiplicadores de escalado y el ruido de redondeo en coma fija asociado.

Para el caso general de $N = 2^\nu$, cada nodo de salida se conecta con $2^{\nu-m-1}$ mariposas y, por tanto, con $2^{\nu-m}$ fuentes de ruido que se originan en el vector m-ésimo. Por tanto, el valor medio del módulo al cuadrado del ruido es

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} &= \sigma_B^2 \sum_{m=0}^{\nu-1} 2^{\nu-m} \cdot (0{,}5)^{2\nu-2m-2} \\ &= \sigma_B^2 \sum_{m=0}^{\nu-1} (0{,}5)^{\nu-m-2} \\ &= \sigma_B^2 \cdot 2 \sum_{k=0}^{\nu-1} 0{,}5^k \\ &= 2\sigma_B^2 \frac{1-0{,}5^\nu}{1-0{,}5} = 4\sigma_B^2(1-0{,}5^\nu).\end{aligned} \tag{9.70}$$

Para N grande, suponemos que $0{,}5^\nu$ (es decir, $1/N$) es despreciable comparado con la unidad, y así

$$\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} = 4\sigma_B^2 = \tfrac{4}{3} \cdot 2^{-2B}, \tag{9.71}$$

que es mucho menor que la varianza de ruido resultante cuando todo el escalado se realiza sobre los datos de entrada.

Podemos combinar ahora la Ecuación (9.71) con la Ecuación (9.67) para obtener la relación ruido-señal de salida para el caso de escalado etapa a etapa y entrada blanca. Obtenemos

$$\frac{\mathscr{E}\{|F[k]|^2\}}{\mathscr{E}\{|X[k]|^2\}} = 12N\sigma_B^2 = 4N \cdot 2^{-2B}, \tag{9.72}$$

que es un resultado proporcional a N en vez de a N^2. Una interpretación de la Ecuación (9.72) es que la relación ruido-señal de salida se incrementa con N, lo que corresponde a medio bit por etapa. Este resultado fue obtenido por primera vez por Welch (1969). Es importante tener de nuevo en cuenta que la hipótesis de señal de ruido blanco no es esencial en el análisis. El resultado básico de incremento de medio bit por etapa se mantiene para una amplia variedad de señales, y lo único que depende del tipo de señal concreta es la constante multiplicativa de la Ecuación (9.72).

Hay que tener también en cuenta que el factor dominante que causa el incremento de la relación ruido-señal con N es la disminución del nivel de señal (necesario para evitar el desbordamiento) al pasar de una etapa a otra. De acuerdo con la Ecuación (9.71), muy poco ruido (sólo un bit o dos) está presente en el vector final. La mayoría del ruido ha sido eliminado de la palabra binaria debido a los escalados.

En la exposición anterior hemos supuesto aritmética de coma fija directa, es decir, sólo se permiten atenuaciones preestablecidas y no se permite cambiar el factor de escala como resultado de un test de desbordamiento. Es claro que si se utiliza hardware con esta restricción se deberían aplicar, si es posible, atenuadores de $1/2$ a cada vector en lugar de aplicar una gran atenuación al vector de entrada.

Una tercera solución para evitar el desbordamiento es utilizar *coma flotante por bloques*. En este procedimiento, el vector original se normaliza lo más hacia la izquierda de la palabra de computador, con la restricción de que $|x[n]| < 1$. El cómputo procede como si fuera en coma fija, excepto porque después de cada suma hay un test de desbordamiento. Si se detecta desbordamiento, el vector completo se divide por 2 y el cálculo continúa. Se cuenta el número de divisiones por 2 necesarias para determinar un factor de escala del vector final. La relación ruido-señal de salida depende en gran medida de cuántos desbordamientos se producen y en qué etapa del cálculo aparecen. Las posiciones y el instante

de los desbordamientos se determinan por la señal que se está transformando. Por tanto, para analizar la relación ruido-señal en una realización de la FFT en coma flotante por bloques es necesario conocer la señal de entrada.

El análisis precedente muestra que el escalado para evitar el desbordamiento es el factor dominante para determinar la relación ruido-señal en la realización en coma fija de algoritmos de FFT. Por tanto, la aritmética en coma flotante debería mejorar las prestaciones de estos algoritmos. El efecto del redondeo en coma flotante en la FFT ha sido analizado tanto en su aspecto teórico como práctico por Gentleman y Sande (1966), Weinstein y Oppenheim (1969), y Kaneko y Liu (1970). Estas investigaciones demuestran que, como el escalado ya no es necesario, el aumento de la relación ruido-señal al aumentar N es mucho menos drástico que con aritmética de coma fija.

Por ejemplo, Weinstein (1969) demostró teóricamente que la relación ruido-señal es proporcional a ν para $N = 2^{\nu}$, en vez de proporcional a N como en el caso de coma fija. Por tanto, al cuadruplicar ν (elevando N a la cuarta potencia), sólo se incrementa la relación ruido-señal en 1 bit.

9.8. RESUMEN

En este capítulo hemos considerado técnicas para calcular la transformada discreta de Fourier y hemos visto cómo se puede explotar la periodicidad y la simetría del factor complejo $e^{-j(2\pi/N)kn}$ para incrementar la eficiencia de los cálculos de la DFT.

Hemos considerado el algoritmo de Goertzel y la evaluación directa de la expresión de la DFT debido a la importancia de estas técnicas cuando no se requieren los N valores de la DFT. Sin embargo, nos hemos centrado fundamentalmente en los algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT). Hemos descrito con algún detalle los algoritmos de FFT mediante diezmado en el tiempo y diezmado en frecuencia, y hemos comentado algunas consideraciones sobre su realización, como el indexado y la cuantificación de coeficientes. La mayor parte de la exposición se ha centrado en algoritmos que requieren que N sea una potencia de 2, ya que esos algoritmos son sencillos de entender, simples de programar y por tanto, son los que se usan más frecuentemente.

El uso de la convolución como base para calcular la DFT se ha presentado brevemente. Hemos hecho una breve revisión del algoritmo de transformada de Fourier de Winograd, y hemos presentado con algo más de detalle un algoritmo denominado algoritmo de transformada *chirp*.

La sección final del capítulo se ha dedicado a comentar los efectos de la longitud finita de palabra en los cálculos de la DFT. Hemos empleado modelos lineales de ruido para demostrar que la relación ruido-señal de un cálculo de una DFT varía de forma diferente con la longitud de la secuencia, dependiendo de cómo se realice el escalado. Hemos comentado también brevemente el uso de representaciones en coma flotante.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

9.1. Suponga que se dispone de un programa software para calcular la DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

es decir, la entrada al programa es la secuencia $x[n]$ y la salida es la DFT $X[k]$. Indique cómo se pueden ordenar las secuencias de entrada y de salida para que el programa se pueda utilizar también para calcular la DFT inversa

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1;$$

es decir, la entrada al programa sería $X[k]$ o una secuencia relacionada de forma simple con $X[k]$, y la salida sería $x[n]$ o una secuencia relacionada de forma simple con $x[n]$. Existen varias soluciones posibles.

9.2. El cómputo de la DFT requiere generalmente multiplicaciones complejas. Considere el producto $X + jY = (A + jB)(C + jD) = (AC - BD) + j(BC + AD)$. De esta forma, una multiplicación compleja requiere cuatro multiplicaciones reales y dos sumas reales. Verifique que se puede realizar una multiplicación compleja con tres multiplicaciones reales y cinco sumas utilizando el algoritmo

$$\begin{aligned} X &= (A - B)D + (C - D)A, \\ Y &= (A - B)D + (C + D)B. \end{aligned}$$

9.3. Suponga que invierte en el tiempo y retarda una secuencia real $x[n]$ de 32 puntos, obteniendo $x_1[n] = x[32 - n]$. Si $x_1[n]$ se utiliza como entrada al sistema de la Figura P9.4, obtenga una expresión de $y[32]$ en función de $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia original $x[n]$.

9.4. Considere el sistema que se muestra en la Figura P9.4. Si la entrada al sistema, $x[n]$, es una secuencia de 32 puntos en el intervalo $0 \le n \le 31$, la salida $y[n]$ en $n = 32$ es igual a $X(e^{j\omega})$ evaluada en una frecuencia concreta ω_k. ¿Cuánto vale ω_k para los coeficientes que se muestran en la Figura P9.4?

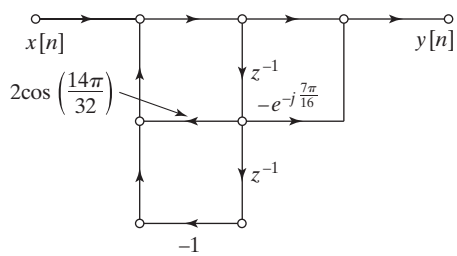


Figura P9.4

9.5. Considere el grafo de flujo de la Figura P9.5. Suponga que la entrada al sistema, $x[n]$ es una secuencia de 8 puntos. Obtenga los valores de a y b de forma que $y[8] = X(e^{j6\pi/8})$.

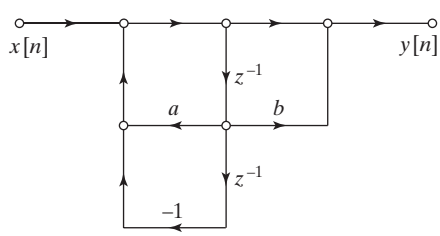


Figura P9.5

9.6. La Figura P9.6 muestra el grafo de flujo de un algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo para $N = 8$. La línea gruesa muestra un camino desde la muestra $x[7]$ hasta la muestra de la DFT $X[2]$.

(a) ¿Cuánto vale la "ganancia" por la vía resaltada en la Figura P9.6?

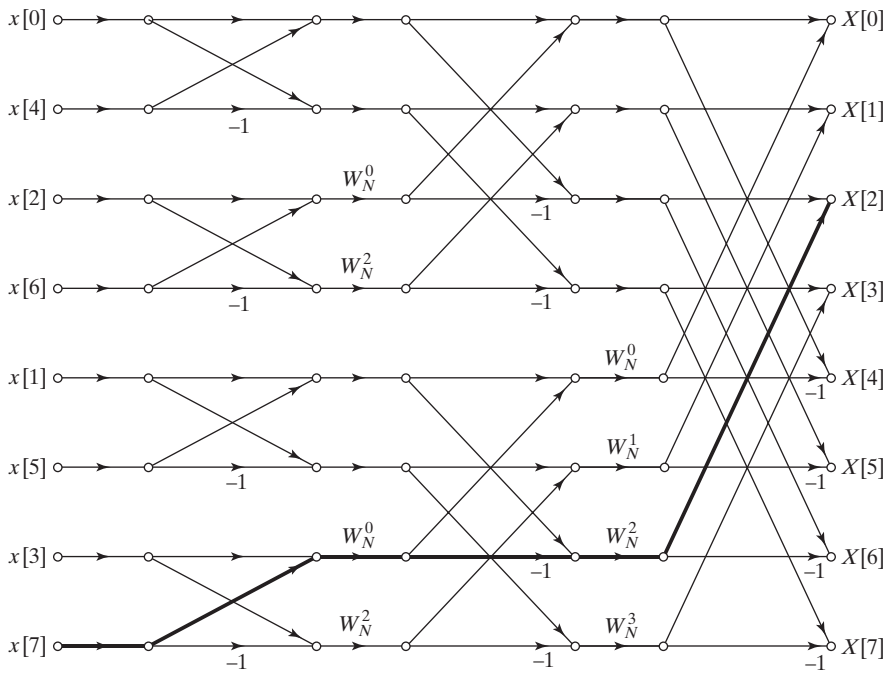


Figura P9.6

(b) ¿Cuántos otros caminos del grafo comienzan en $x[7]$ y terminan en $X[2]$? ¿Es eso cierto en general? Es decir, ¿cuántos caminos existen entre cada muestra de entrada y cada muestra de salida?

(c) Considere ahora la muestra de la DFT $X[2]$. Trazando los caminos en el grafo de flujo de la Figura P9.6, demuestre que cada muestra de entrada contribuye de la forma apropiada en la muestra de salida. Es decir, verifique que

$$X[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)2n}.$$

9.7. La Figura P9.7 muestra el grafo de flujo de un algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo de 8 puntos. Sea $x[n]$ la secuencia cuya DFT es $X[k]$. En el grafo de flujo, $A[\cdot], B[\cdot], C[\cdot]$ y $D[\cdot]$ representan vectores diferentes que se indexan consecutivamente en el mismo orden en los nodos indicados.

(a) Especifique cómo se deberían colocar los elementos de la secuencia $x[n]$ en el vector $A[r]$, $r = 0, 1, \ldots, 7$. Especifique también cómo se deben extraer los elementos de la DFT del vector $D[r], r = 0, 1, \ldots, 7$.

(b) Sin determinar los valores de los vectores intermedios, $B[\cdot]$ y $C[\cdot]$, determine y dibuje el vector secuencia $D[r], r = 0, 1, \ldots, 7$, si la secuencia de entrada es $x[n] = (-W_N)^n, n = 0, 1, \ldots, 7$.

(c) Determine y dibuje la secuencia $C[r], r = 0, 1, \ldots, 7$, si la transformada de Fourier de la salida es $X[k] = 1, k = 0, 1, \ldots, 7$.

9.8. Al implementar un algoritmo de FFT, algunas veces es útil generar las potencias de W_N mediante una ecuación en diferencias recursiva, u oscilador. En este problema se considera un algoritmo de diezmado en el tiempo de base 2 para $N = 2^\nu$. La Figura 9.11 muestra este tipo de algoritmo para $N = 8$. Para generar eficientemente los coeficientes, la frecuencia del oscilador debe cambiar de etapa en etapa.

Suponga que los vectores se numeran desde 0 hasta $\nu = \log_2 N$, de forma que el vector que contiene la secuencia de entrada inicial es el vector cero y la DFT es el vector ν-ésimo. Al calcular las mariposas en una etapa dada, todas las que requieren los mismos coeficientes W_N^r se evalúan antes de obtener los nuevos coeficientes. Al indexar el vector se supone que los datos se almacenan en registros complejos consecutivos

numerados del 0 al $(N-1)$. Todas las preguntas que siguen están relacionadas con el cálculo del vector m-ésimo a partir del vector $(m-1)$-ésimo, siendo $1 \leq m \leq \nu$. Las respuestas se deben dar en función de m.

(a) ¿Cuántas mariposas hay que calcular en la etapa m-ésima? ¿Cuántos coeficientes diferentes se requieren en la etapa m-ésima?

(b) Escriba una ecuación en diferencias cuya respuesta al impulso $h[n]$ contenga los coeficientes W_N^r requeridos por las mariposas de la etapa m-ésima.

(c) La ecuación en diferencias del apartado (b) debería tener la forma de un oscilador. Es decir, $h[n]$ debería ser periódica para $n \geq 0$. ¿Cuál es el periodo de $h[n]$? Basándose en esto, escriba la expresión de la frecuencia del oscilador en función de m.

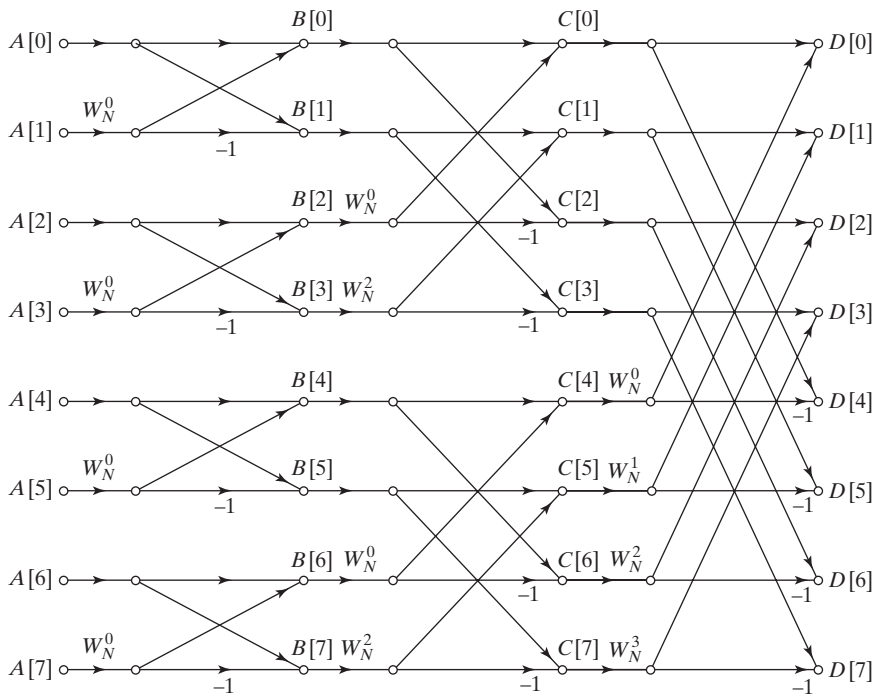


Figura P9.7

9.9. Considere la mariposa de la Figura P9.9. Esta mariposa se ha extraído de un grafo de flujo de señales de un algoritmo de FFT. Escoja la afirmación más exacta de la siguiente lista:

1. La mariposa se ha extraído de un algoritmo de FFT mediante diezmado en el tiempo.
2. La mariposa se ha extraído de un algoritmo de FFT mediante diezmado en frecuencia.
3. No es posible observando la figura decir de qué clase de algoritmo de FFT proviene la mariposa.

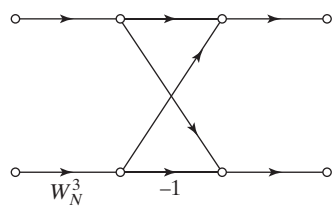


Figura P9.9

9.10. Una señal de longitud finita $x[n]$ es distinta de cero en el intervalo $0 \le n \le 19$. Esta señal es la entrada al sistema que se muestra en la Figura P9.10, donde

$$h[n] = \begin{cases} e^{j(2\pi/21)(n-19)^2/2}, & n = 0, 1, \ldots, 28, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

$$W = e^{-j(2\pi/21)}$$

La salida del sistema, $y[n]$, se puede expresar para el intervalo $n = 19, \ldots, 28$ en función de la transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ para valores apropiados de ω. Escriba una expresión de $y[n]$ en este intervalo en función de $X(e^{j\omega})$.

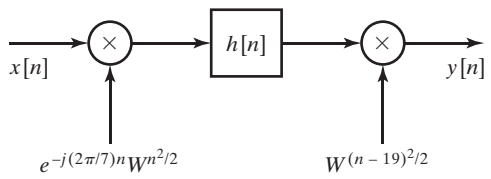


Figura P9.10

9.11. El grafo de flujo en mariposa que se muestra en la Figura 9.10 se puede usar para calcular la DFT de una secuencia de longitud $N = 2^\nu$ "en el mismo lugar", es decir, utilizando un único vector de registros complejos. Suponga que este vector de registros $A[\ell]$ se indexa con $0 \le l \le N-1$. La secuencia de entrada se almacena inicialmente en $A[\ell]$ en orden de inversión de bits. El vector se procesa a continuación con ν etapas de mariposas. Cada mariposa toma como entradas dos elementos del vector, $A[\ell_0]$ y $A[\ell_1]$ y almacena las salidas en las mismas posiciones del vector. Los valores de ℓ_0 y ℓ_1 dependen del número de etapa y de la posición de la mariposa en el grafo de flujo de señales. Las etapas del cálculo se indexan como $m = 1, \ldots, \nu$.

(a) ¿Cómo se expresa $|\ell_1 - \ell_0|$ en función del número de etapa m?

(b) Muchas etapas contienen mariposas con el mismo factor "twiddle" W_N^r. Para esas etapas, ¿cómo están de separados los valores de ℓ_0 para las mariposas con el mismo W_N^r?

9.12. Considere el sistema que se muestra en la Figura P9.12 con

$$h[n] = \begin{cases} e^{j(2\pi/10)(n-11)^2/2}, & n = 0, 1, \ldots, 15, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se desea que la salida del sistema cumpla, $y[n+11] = X(e^{j\omega_n})$ con $\omega_n = (2\pi/19) + n(2\pi/10)$ para $n = 0, \ldots, 4$. Proporcione el valor correcto de la secuencia $r[n]$ en la Figura P9.12 para que la salida $y[n]$ proporcione las muestras deseadas de la transformada discreta de Fourier.

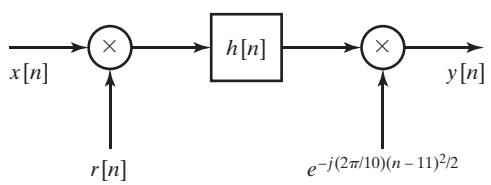


Figura P9.12

9.13. Suponga que se desea ordenar una secuencia $x[n]$ de longitud $N = 16$ en orden correspondiente a inversión de bits para servir de entrada a un algoritmo de FFT. Proporcione el nuevo orden de muestras de la secuencia en orden de inversión de bits.

9.14. En la afirmación que sigue, suponga que la secuencia $x[n]$ tiene longitud $N = 2^\nu$ y que $X[k]$ es la DFT de N puntos de $x[n]$. Indique si la afirmación es verdadera o falsa, y justifique su respuesta.

Afirmación: Es imposible construir un grafo de flujo de señales para calcular $X[k]$ a partir de $x[n]$ de forma que tanto $x[n]$ como $X[k]$ estén en orden secuencial normal (no en orden de inversión de bits).

9.15. La mariposa de la Figura P9.15 se ha tomado de una FFT mediante diezmado en frecuencia con $N = 16$, con la secuencia de entrada dispuesta en orden normal. Tenga en cuenta que una FFT de 16 puntos tiene cuatro etapas, que se indexan como $m = 1, \ldots, 4$. ¿Cuáles de las cuatro etapas tienen mariposas de esta forma? Justifique su respuesta.

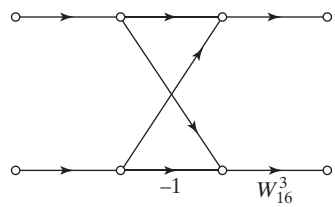


Figura P9.15

9.16. La mariposa de la Figura P9.16 se ha tomado de una FFT mediante diezmado en el tiempo con $N = 16$. Suponga que las cuatro etapas del grafo de flujo de señales se indexan como $m = 1, \ldots, 4$. ¿Cuáles son los posibles valores de r para cada una de las cuatro etapas?

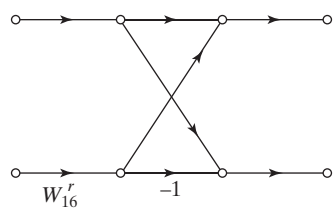


Figura P9.16

9.17. Suponga que se dispone de dos programas para realizar la DFT de una secuencia $x[n]$ con $N = 2^\nu$ muestras distintas de cero. El programa A calcula la DFT realizando directamente la suma de su definición, dada por la Ecuación (8.67), y tarda N^2 segundos en ejecutarse. El programa B realiza el algoritmo de la FFT por diezmado en el tiempo y tarda $10N \log_2 N$ en ejecutarse. ¿Cuál es la mínima longitud de secuencia para la que el programa B se ejecutaría más rápido que el programa A?

9.18. La mariposa de la Figura P9.18 se ha tomado de una FFT mediante diezmado en el tiempo con $N = 16$. Suponga que las cuatro etapas del grafo de flujo de señales se indexan como $m = 1, \ldots, 4$. ¿Cuáles de las cuatro etapas tienen mariposas de esta forma?

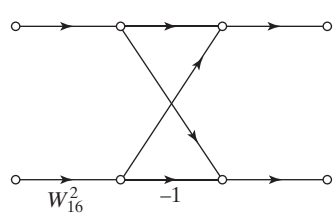


Figura P9.18

9.19. Suponga que sabe que en un algoritmo de FFT con $N = 32$, con un factor "twiddle" de una de las mariposas de su quinta (y última) etapa es W_{32}^2. ¿Se trata de un algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo o por diezmado en frecuencia?

9.20. Suponga una señal $x[n]$ con 1021 muestras distintas de cero. Se desea estimar la transformada de Fourier de dicha señal calculando la DFT. Resulta que el computador tarda 100 segundos en calcular la DFT de 1021 puntos de $x[n]$. Se añaden tres muestras con valor cero al final de la secuencia, con lo que se forma

una nueva secuencia de 1024 puntos $x_1[n]$. El mismo programa tarda ahora sólo 1 segundo en calcular $X_1[k]$. Reflexionando, observa que utilizando $x_1[n]$ es capaz de obtener más muestras de $X(e^{j\omega})$ en mucho menos tiempo añadiendo algunos ceros al final de $x[n]$, lo que produce una secuencia más larga ¿Cómo explica esta aparente paradoja?

Problemas básicos

9.21. En la Sección 9.1.2 utilizamos el hecho de que $W_N^{-kN} = 1$ para obtener un algoritmo de recurrencia con el fin de calcular un valor concreto de la DFT $X[k]$ de una secuencia de longitud finita $x[n], n = 0, 1, \ldots, N-1$.

(a) Sabiendo que $W_N^{kN} = W_N^{Nn} = 1$, demuestre que $X[N-k]$ se puede obtener como salida tras N iteraciones de la ecuación en diferencias que muestra la Figura P9.21-1. Es decir, demuestre que

$$X[N-k] = y_k[N].$$

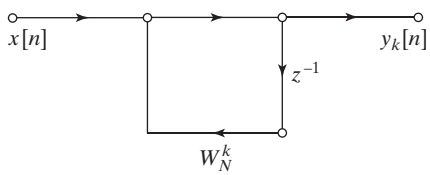


Figura P9.21-1

(b) Demuestre que $X[N-k]$ es también igual a la salida tras N iteraciones de la ecuación en diferencias que se muestra en la Figura P9.21-2. Observe que el sistema de la Figura P9.29-2 tiene los mismos polos que el de la Figura 9.2, pero que el coeficiente necesario para realizar el cero complejo de la Figura P9.21-2 es el complejo conjugado del correspondiente coeficiente de la Figura 9.2. Es decir, $W_N^{-k} = (W_N^k)^*$.

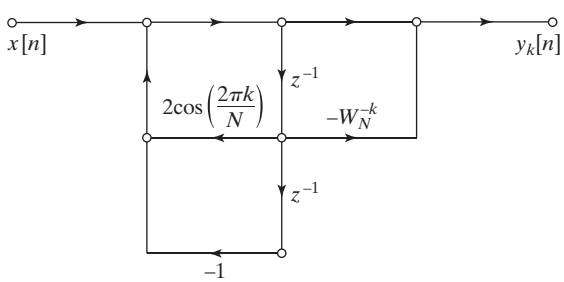


Figura P9.21-2

9.22. Considere el sistema que se muestra en la Figura P9.22. El subsistema desde $x[n]$ hasta $y[n]$ es lineal, invariante con el tiempo y causal, e implementa la ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + ay[n-1].$$

$x[n]$ es una secuencia finita de longitud 90, es decir,

$$x[n] = 0 \quad \text{para } n < 0 \text{ y } n > 89.$$

Determine un valor de la constante compleja a y del instante de muestreo M de forma que

$$y[M] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi/60.}$$

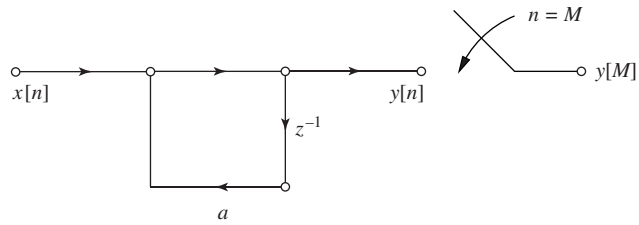


Figura P9.22

9.23. Construya un grafo de flujo de un algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo de base 2, con 16 puntos. Etiquete todos los multiplicadores en función de potencias de W_{16}, y etiquete también las ganancias de los arcos que sean iguales a -1. Etiquete los nodos de entrada y de salida con los valores apropiados de las secuencias de entrada y de la DFT, respectivamente. Determine el número de multiplicaciones reales y el número de sumas reales necesarias para realizar el grafo de flujo.

9.24. Se sugiere que si se dispone de una subrutina para calcular una DFT de longitud N, la DFT inversa de una secuencia de N puntos $X[k]$ se puede calcular utilizando esa subrutina de la siguiente forma:

1. Intercambiar las partes real e imaginaria de cada coeficiente de la DFT $X[k]$.
2. Aplicar la rutina de la FFT a esta secuencia de entrada.
3. Intercambiar las partes real e imaginaria de la secuencia de salida.
4. Multiplicar la secuencia resultante por $\frac{1}{N}$ para obtener la secuencia $x[n]$, correspondiente a la DFT inversa de $X[k]$.

Determine si este procedimiento funciona correctamente. Si no lo hace, proponga una modificación sencilla para que funcione.

9.25. La DFT es una versión muestreada de la transformada de Fourier en tiempo discreto de una secuencia de longitud finita, es decir,

$$\begin{aligned} X[k] &= X(e^{j(2\pi/N)k}) \\ &= X(e^{j\omega_k})\Big|_{\omega_k=(2\pi/N)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{P9.25-1}$$

Además, un algoritmo de FFT es una forma eficiente de calcular los valores $X[k]$.

Considere una secuencia de longitud finita $x[n]$ cuya longitud es de N muestras. Se desea evaluar $X(z)$, la transformada Z de la secuencia de longitud finita, en los siguientes puntos del plano z

$$z_k = re^{j(2\pi/N)k} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

siendo r un número positivo. Se supone disponible un algoritmo de FFT.

(a) Dibuje los puntos z_k del plano z para el caso de $N = 8$ y $r = 0{,}9$.

(b) Escriba una ecuación [similar a la Ecuación (P9.25-1) anterior] de $X(z_k)$ que demuestre que $X(z_k)$ es la DFT de una secuencia modificada $\tilde{x}[n]$. ¿Cómo es $\tilde{x}[n]$?

(c) Describa un algoritmo para calcular $X(z_k)$ utilizando la función de cómputo de la FFT (*el cómputo directo no es una opción.*) Puede describir su algoritmo utilizando cualquier combinación de texto en castellano y ecuaciones, pero al final debe proporcionar un procedimiento paso a paso que empiece con la secuencia $x[n]$ y termine con $X(z_k)$.

9.26. Sea una secuencia finita $x[n]$ de longitud 627 (es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 626$), y se dispone de un programa para calcular la DFT de una secuencia de cualquier longitud $N = 2^{\nu}$.

Se desea calcular muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto para la secuencia dada en las frecuencias

$$\omega_k = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 255.$$

Especifique cómo obtener una nueva secuencia $y[n]$ a partir de $x[n]$ tal que las muestras deseadas en frecuencia se puedan obtener aplicando el programa de FFT disponible a $y[n]$ con ν *tan pequeña como sea posible*.

9.27. Una señal finita de longitud $L = 500$ ($x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > L-1$) se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo con una velocidad de 10000 muestras por segundo. Se desea calcular muestras de la transformada Z de $x[n]$ en N puntos equiespaciados $z_k = (0{,}8)e^{j2\pi k/N}$, para $0 \le k \le N-1$, con una separación efectiva en frecuencia de 50 Hz o menos.

(a) Determine el mínimo valor de N si $N = 2^{\nu}$.

(b) Determine una secuencia $y[n]$ de longitud N, siendo N el determinado en el apartado (a), tal que su $Y[k]$ sea igual a las muestras deseadas de la transformada Z de $x[n]$.

9.28. Suponga que se le pide realizar un sistema que calcule la DFT de una secuencia de 4 puntos

$$x[0], x[1], x[2], x[3].$$

Puede adquirir cualquier número de unidades de cómputo con el coste por unidad que se muestra en la Tabla 9.1.

TABLA 9.1

Módulo	Coste unitario
DFT de 8 puntos	1$
DFT inversa de 8 puntos	1$
sumador	10$
multiplicador	100$

Diseñe un sistema con el mínimo coste posible. Dibuje el diagrama de bloques asociado e indique el coste del sistema.

Problemas avanzados

9.29. Considere una secuencia $x[n]$ de N puntos cuya DFT es $X[k], k = 0, 1, \ldots, N-1$. El algoritmo que se presenta a continuación calcula los valores de índice par de la DFT $X[k], k = 0, 2, \ldots, N-2$, para N par, utilizando una única DFT de $N/2$ puntos:

1. Formar la secuencia $y[n]$ mediante solapamiento temporal, es decir,

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n+N/2], & 0 \le n \le N/2-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

2. Calcular $Y[r], r = 0, 1, \ldots, (N/2)-1$, la DFT de $N/2$ puntos de $y[n]$.

3. Los valores de índice par de $X[k]$ son $X[k] = Y[k/2]$ para $k = 0, 2, \ldots, N-2$.

(a) Demuestre que el algoritmo anterior produce el resultado deseado

(b) Suponga ahora que se forma una secuencia de longitud finita $y[n]$ a partir de la secuencia $x[n]$ de la siguiente forma

$$y[n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM], & 0 \le n \le M-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Determine la relación entre la DFT de M puntos $Y[k]$ y $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier de $x[n]$. Demuestre que el resultado del apartado (a) es un caso especial del resultado del apartado (b).

(c) Desarrolle un algoritmo similar al del apartado (a) para calcular los valores de índice impar de la DFT $X[k], k = 1, 3, \ldots, N-1$, para N par, utilizando sólo una única DFT de $N/2$ puntos.

9.30. El sistema de la Figura P9.30 calcula una DFT de N puntos $X[k]$ (siendo N un número par) de una secuencia de N puntos $x[n]$, descomponiendo $x[n]$ en dos secuencias de $N/2$ puntos $g_1[n]$ y $g_2[n]$, calculando las DFT de $N/2$ puntos $G_1[k]$ y $G_2[k]$, y combinándolas posteriormente para formar $X[k]$.

Si $g_1[n]$ está formada por los valores de índice par de $x[n]$ y $g_2[n]$ por los valores de índice impar de $x[n]$, es decir, $g_1[n] = x[2n]$ y $g_2[n] = x[2n+1]$. Tras la combinación, $X[k]$ debe ser la DFT de $x[n]$.

Al utilizar el sistema de la Figura P9.30 se comete un error al formar las secuencias $g_1[n]$ y $g_2[n]$, de forma que $g_1[n]$ se forma **incorrectamente** con los valores de índice impar de $x[n]$ y $g_2[n]$ con los valores de índice par de $x[n]$, pero $G_1[k]$ y $G_2[k]$ se combinan como indica la Figura P9.30, resultando la secuencia incorrecta $\hat{X}[k]$. Exprese $\hat{X}[k]$ en función de $X[k]$.

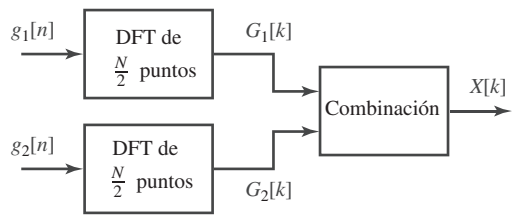


Figura P9.30

9.31. En la Sección 9.3.2 se dijo que el traspuesto de un grafo de flujo de un algoritmo de FFT es también el grafo de flujo de un algoritmo de FFT. El objetivo de este problema es demostrar ese resultado para algoritmos de FFT de base 2.

(a) La Figura P9.31-1 muestra la mariposa básica del algoritmo de FFT de base 2 por diezmado en frecuencia. Este grafo de flujo representa las ecuaciones

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q],$$

$$X_m[q] = (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N^r.$$

Partiendo de esas ecuaciones, demuestre que $X_{m-1}[p]$ y $X_{m-1}[q]$ se pueden calcular a partir de $X_m[p]$ y $X_m[q]$, respectivamente, utilizando la mariposa de la Figura P9.31-2.

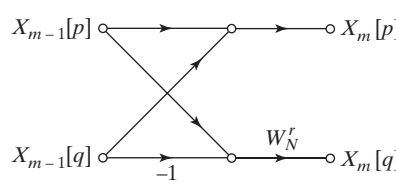


Figura P9.31-1

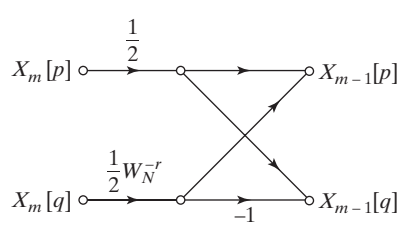


Figura P9.31-2

(b) En el algoritmo de diezmado en frecuencia de la Figura 9.22, $X_v[r], r = 0, 1, \ldots, N-1$ es la DFT $X[k]$ en orden de inversión de bits, y $X_0[r] = x[r], r = 0, 1, \ldots, N-1$; es decir, el vector cero es la secuencia de entrada en orden normal. Si cada mariposa de la Figura 9.22 se sustituye por una mariposa apropiada con la forma de la Figura P9.31, el resultado sería un grafo de flujo para calcular la secuencia $x[n]$ (en orden normal) a partir de la DFT $X[k]$ (en orden de inversión de bits). Dibuje el grafo de flujo resultante para $N = 8$.

(c) El grafo de flujo obtenido en el apartado (b) representa un algoritmo de DFT *inversa*, es decir, un algoritmo para calcular

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Modifique el grafo de flujo obtenido en el apartado (b) para calcular la DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

en lugar de la DFT inversa.

(d) Observe que el resultado del apartado (c) es la forma traspuesta del algoritmo por diezmado en frecuencia de la Figura 9.22 y que es idéntico al algoritmo por diezmado en el tiempo que se muestra en la Figura 9.11. ¿Se puede deducir que a cada algoritmo por diezmado en el tiempo (por ejemplo los de las Figuras 9.15–9.17), le corresponde un algoritmo por diezmado en frecuencia que es la forma traspuesta del algoritmo de diezmado en el tiempo y viceversa? Explique su razonamiento.

9.32. Se desea implementar una FFT de 6 puntos por diezmado en el tiempo utilizando un esquema de base mixta. Una opción es realizar primero tres DFT de 2 puntos y utilizar después los resultados para calcular la DFT de 6 puntos. Para esta opción:

(a) Dibuje un grafo de flujo para mostrar lo que calcula una DFT de 2 puntos. Complete también las partes del grafo de flujo de la Figura P9.32-1 que intervienen en el cálculo de los valores de la DFT X_0, X_1 y X_4.

(b) ¿Cuántas multiplicaciones complejas requiere esta opción? (Multiplicar un número por -1 no cuenta como multiplicación compleja).

Una segunda opción consiste en empezar con dos DFT de 3 puntos y utilizar después los resultados para calcular la DFT de 6 puntos.

(c) Dibuje un grafo de flujo para mostrar lo que calcula una DFT de 3 puntos. Complete también las partes del grafo de flujo de la Figura P9.32-2 y explique brevemente cómo ha obtenido su implementación.

(d) ¿Cuántas multiplicaciones complejas requiere esta opción?

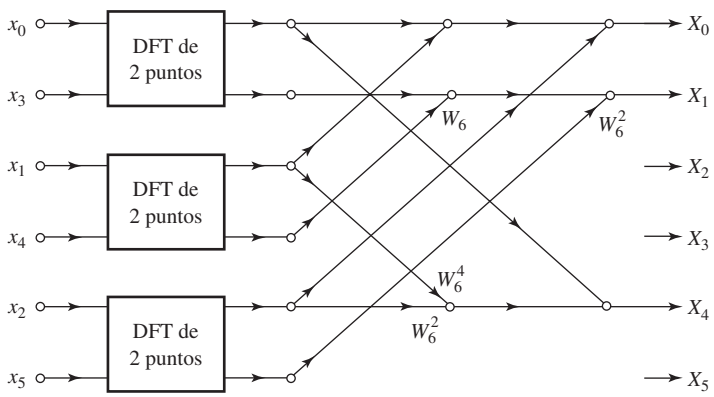


Figura P9.32-1

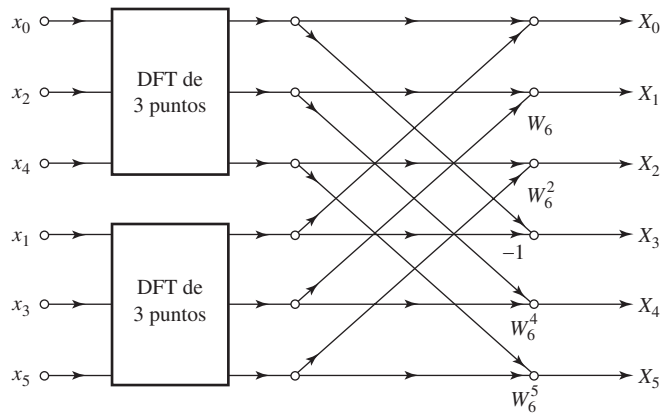


Figura P9.32-2

9.33. En la Sección 9.3 se ha desarrollado el algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia de base 2, es decir, $N = 2^\nu$. Un planteamiento similar conduce a un algoritmo de base 3 en el que $N = 3^\nu$.

(a) Dibuje un grafo de flujo de un algoritmo de diezmado en frecuencia para 9 puntos utilizando una descomposición de 3×3 de la DFT.

(b) Para $N = 3^\nu$, ¿cuántas multiplicaciones complejas por potencias de W_N son necesarias para calcular la DFT de una secuencia compleja de N puntos, utilizando un algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia de base 3?

(c) Para $N = 3^\nu$, ¿es posible emplear cómputo en el mismo lugar en un algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia de base 3?

9.34. Hemos visto que un algoritmo de FFT se puede ver como una interconexión de elementos computacionales denominados mariposas. Por ejemplo, la Figura P9.34-1 muestra la mariposa del algoritmo por diezmado en frecuencia de base 2. La mariposa toma como entrada dos números complejos y produce como salida dos números complejos. Su realización requiere la multiplicación compleja por W_N^r, siendo r un entero que depende de la posición de la mariposa en el grafo de flujo del algoritmo. Como el multiplicador complejo es de la forma $W_N^r = e^{j\theta}$, el algoritmo de rotación CORDIC (véase el Problema 9.46) se puede utilizar para realizar eficientemente la multiplicación compleja. Desafortunadamente, aunque la rotación CORDIC realiza el cambio de ángulo deseado, introduce también una amplificación fija que es independiente del ángulo θ. Por tanto, si el algoritmo de rotación CORDIC se usara para realizar la multiplicación por W_N^r, la mariposa de la Figura P9.34-1 se podría sustituir por la mariposa de la Figura P9.34-2, siendo G el factor de amplificación fijo de la rotación CORDIC (se supone que no hay error al aproximar el ángulo de rotación). Si cada mariposa del grafo de flujo del algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia se sustituye por la mariposa de la Figura P9.34-2, se obtiene un algoritmo de FFT modificado cuyo grafo de flujo sería el de la Figura P9.34-3 para $N = 8$. La salida de este algoritmo modificado no sería la DFT deseada.

(a) Demuestre que la salida del algoritmo de FFT modificado es $Y[k] = W[k]X[k]$, siendo $X[k]$ la DFT correcta de la secuencia de entrada $x[n]$ y $W[k]$ una función de G, N y k.

(b) La secuencia $W[k]$ se puede describir mediante una regla particularmente simple. Determine esta regla e indique su dependencia con G, N y k.

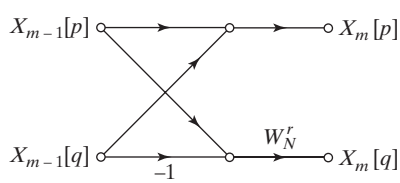


Figura P9.34-1

(c) Suponga que se desea preprocesar la secuencia de entrada $x[n]$ para compensar el efecto del algoritmo de FFT modificado. Determine un procedimiento para obtener una secuencia $\hat{x}[n]$ a partir de $x[n]$, de forma que si $\hat{x}[n]$ es la entrada al algoritmo de FFT modificado, la salida sea $X[k]$, la DFT correcta de la secuencia original $x[n]$.

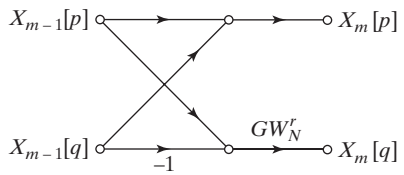


Figura P9.34-2

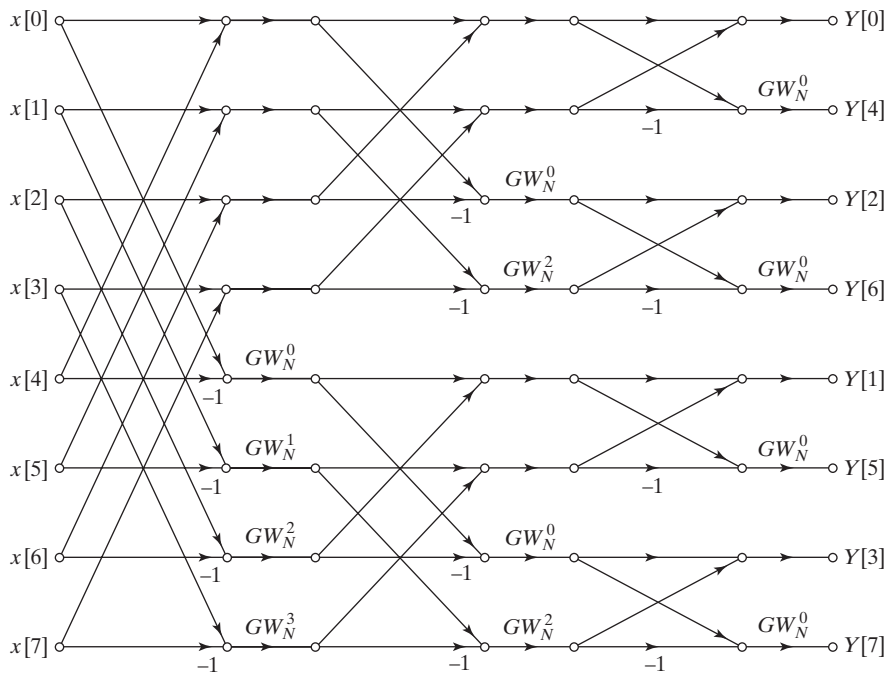


Figura P9.34-3

9.35. Este problema trata del cálculo eficiente de muestras de la transformada Z de una secuencia de longitud finita. Utilizando el algoritmo de transformada *chirp*, desarrolle un procedimiento para calcular valores de $X(z)$ en 25 puntos equiespaciados en un arco de circunferencia de radio 0,5, empezando en el ángulo $-\pi/6$ y terminando en $2\pi/3$. La longitud de la secuencia es de 100 muestras.

9.36. Considere una secuencia $x[n]$ de 1024 puntos que se forma entrelazando dos secuencias de 512 puntos, $x_e[n]$ y $x_o[n]$. Concretamente,

$$x[n] = \begin{cases} x_e[n/2], & \text{si } n = 0, 2, 4, \ldots, 1022; \\ x_o[(n-1)/2], & \text{si } n = 1, 3, 5, \ldots, 1023; \\ 0, & \text{para } n \text{ fuera del intervalo } 0 \leq n \leq 1023. \end{cases}$$

Sea $X[k]$ la DFT de 1024 puntos de $x[n]$, y $X_e[k]$ y $X_o[k]$ las DFT de 512 puntos de $x_e[n]$ y $x_o[n]$, respectivamente. Dada $X[k]$, se desea calcular $X_e[k]$ a partir de $X[k]$ de una forma computacionalmente eficiente, midiéndose

la eficiencia computacional en función del número de multiplicaciones y sumas complejas requeridas. Una solución no muy eficiente se muestra en la Figura P9.36:

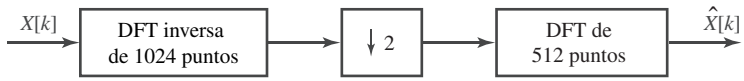


Figura P9.36

Especifique el algoritmo más eficiente que pueda (desde luego, más eficiente que el diagrama de bloques de la Figura P9.36), que permita obtener $X_e[k]$ a partir de $X[k]$.

9.37. Suponga que se dispone de un programa de FFT que calcula la DFT de una secuencia compleja. Si se desea calcular la DFT de una secuencia real, se puede especificar simplemente que la parte imaginaria es cero y utilizar directamente el programa. Sin embargo, se puede utilizar la simetría de la DFT de una secuencia real para reducir el cómputo necesario.

(a) Sea $x[n]$ una secuencia de valores reales de longitud N, y sea $X[k]$ su DFT, cuyas partes real e imaginaria se denominan respectivamente $X_R[k]$ y $X_I[k]$. Es decir,

$$X[k] = X_R[k] + jX_I[k].$$

Demuestre que si $x[n]$ es real, entonces $X_R[k] = X_R[N-k]$ y $X_I[k] = -X_I[N-k]$ para $k = 1, \ldots, N-1$.

(b) Considere ahora dos secuencias reales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ cuyas DFT son respectivamente $X_1[k]$ y $X_2[k]$. Sea $g[n]$ la secuencia compleja $g[n] = x_1[n] + jx_2[n]$, cuya DFT es $G[k] = G_R[k] + jG_I[k]$. Sean además $G_{\mathrm{OR}}[k], G_{\mathrm{ER}}[k], G_{\mathrm{OI}}[k]$ y $G_{\mathrm{EI}}[k]$ respectivamente, la parte impar de la parte real, la parte par de la parte real, la parte impar de la parte imaginaria y la parte par de la parte imaginaria de $G[k]$, como se definen en las Ecuaciones (8.102). Concretamente, para $1 \leq k \leq N-1$,

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{OR}}[k] &= \tfrac{1}{2}\{G_R[k] - G_R[N-k]\},\\
G_{\mathrm{ER}}[k] &= \tfrac{1}{2}\{G_R[k] + G_R[N-k]\},\\
G_{\mathrm{OI}}[k] &= \tfrac{1}{2}\{G_I[k] - G_I[N-k]\},\\
G_{\mathrm{EI}}[k] &= \tfrac{1}{2}\{G_I[k] + G_I[N-k]\},
\end{aligned}$$

y $G_{\mathrm{OR}}[0] = G_{\mathrm{OI}}[0] = 0, G_{\mathrm{ER}}[0] = G_R[0], G_{\mathrm{EI}}[0] = G_I[0]$. Determine las expresiones de $X_1[k]$ y $X_2[k]$ en función de $G_{\mathrm{OR}}[k], G_{\mathrm{ER}}[k], G_{\mathrm{OI}}[k]$ y $G_{\mathrm{EI}}[k]$.

(c) Suponga que $N = 2^\nu$ y que se dispone de un programa de FFT de base 2 para calcular la DFT. Determine el número de multiplicaciones reales y el número de sumas reales que se necesitan para calcular $X_1[k]$ y $X_2[k]$ (i) utilizando el programa dos veces (con la parte imaginaria de la entrada a cero) para calcular las dos DFT complejas de N puntos de $X_1[k]$ y $X_2[k]$ y (ii) utilizando el esquema sugerido en el apartado (b), que sólo requiere el cálculo de una DFT de N puntos.

(d) Suponga que sólo se tiene una secuencia real $x[n]$ de N puntos, y que N es una potencia de 2. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ las dos secuencias reales de $N/2$ puntos $x_1[n] = x[2n]$ y $x_2[n] = x[2n+1]$, siendo $n = 0, 1, \ldots, (N/2)-1$. Determine $X[k]$ en función de las DFT de $(N/2)$ puntos $X_1[k]$ y $X_2[k]$.

(e) Utilizando los resultados de los apartados (b), (c) y (d), describa un procedimiento para calcular la DFT de una secuencia real $x[n]$ de N puntos utilizando sólo el cálculo de una FFT de $N/2$ puntos. Determine el número de multiplicaciones reales y de sumas reales necesarias para este procedimiento, y compare esos números con los que se obtendrían si se calculara $X[k]$ utilizando una FFT de N puntos con la parte imaginaria de la señal de entrada a cero.

9.38. Sean $x[n]$ y $h[n]$ dos secuencias reales de longitud finita tales que

$$\begin{aligned}
x[n] &= 0 \qquad \text{para } n \text{ fuera del intervalo } 0 \leq n \leq L-1,\\
h[n] &= 0 \qquad \text{para } n \text{ fuera del intervalo } 0 \leq n \leq P-1.
\end{aligned}$$

Se desea calcular la secuencia $y[n] = x[n] * h[n]$, donde el símbolo $*$ indica convolución ordinaria.

(a) ¿Qué longitud tiene la secuencia $y[n]$?

(b) Si se evalúa directamente la suma de convolución, ¿cuántas multiplicaciones reales se requieren para calcular todas las muestras distintas de cero de $y[n]$? La siguiente igualdad puede ser de utilidad:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}.$$

(c) Indique un procedimiento que permita utilizar la DFT para calcular todas las muestras distintas de cero de $y[n]$. Determine los tamaños mínimos de la DFT y de la DFT inversa en función de L y de P.

(d) Suponga que $L = P = N/2$, siendo $N = 2^{\nu}$ el tamaño de la DFT. Determine una fórmula para obtener el número de multiplicaciones necesarias para calcular todas las muestras distintas de cero de $y[n]$, utilizando el método del apartado (c) si todas las DFT se calculan mediante un algoritmo de FFT de base 2. Utilice esta fórmula para determinar el mínimo valor de N tal que el método de la FFT necesite menos multiplicaciones reales que la evaluación directa de la suma de convolución.

9.39. En la Sección 8.7.3 hemos demostrado que el filtrado lineal e invariante con el tiempo se puede realizar dividiendo la señal de entrada en segmentos de longitud finita y utilizando la DFT para realizar las convoluciones circulares de esos segmentos. Los dos métodos presentados se denominaron de solapamiento–suma y de solapamiento–almacenamiento. Si las DFT se calculan mediante un algoritmo de FFT, estos métodos pueden requerir menos multiplicaciones por muestra de salida que la evaluación directa de la suma de convolución.

(a) Suponga que la secuencia de entrada $x[n]$ es de longitud infinita y que la respuesta al impulso compleja $h[n]$ tiene una longitud de P muestras, de forma que $h[n] \neq 0$ sólo para $0 \leq n \leq P-1$. Suponga también que la salida se calcula con el método de solapamiento–almacenamiento, que las DFT son de longitud $L = 2^{\nu}$, y que dichas DFT se calculan con un algoritmo de FFT de base 2. Determine una expresión para obtener el número de multiplicaciones complejas necesarias para obtener cada muestra de salida en función de ν y P.

(b) Suponga que la longitud de la respuesta al impulso es $P = 500$. Evaluando la fórmula obtenida en el apartado (a), dibuje el número de multiplicaciones por muestra de salida en función de ν para los valores de $\nu \leq 20$ a los que se pueda aplicar el método de solapamiento-almacenamiento. ¿Para qué valor de ν se hace mínimo el número de multiplicaciones? Compare, en el método de solapamiento-almacenamiento, el número de multiplicaciones complejas por muestra de salida que utiliza la FFT con el número de multiplicaciones complejas por muestra de salida que requiere la evaluación directa de la suma de convolución.

(c) Demuestre que para longitudes grandes de la FFT, el número de multiplicaciones complejas por muestra de salida es aproximadamente ν. Por tanto, mas allá de cierta longitud de FFT, el método de solapamiento-almacenamiento es menos eficiente que el método directo. Si $P = 500$, ¿para qué valor de ν es más eficiente el método directo?

(d) Suponga que la longitud de la FFT es dos veces la longitud de la respuesta al impulso (es decir, $L = 2P$), y suponga también que $L = 2^{\nu}$. Utilizando la fórmula obtenida en el apartado (a), determine el mínimo valor de P tal que el método de solapamiento-almacenamiento que utiliza la FFT requiera menos multiplicaciones complejas que el método de la convolución directa.

9.40. Sea $x[n]$ una secuencia de 1024 puntos, distinta de cero sólo en el intervalo $0 \leq n \leq 1023$. Sea $X[k]$ la DFT de 1024 puntos de $x[n]$. Dada $X[k]$, se desea calcular $x[n]$ en los intervalos $0 \leq n \leq 3$ y $1020 \leq n \leq 1023$ utilizando el sistema de la Figura P9.40. Observe que la entrada al sistema es la secuencia de coeficientes de la DFT. Seleccionando $m_1[n]$, $m_2[n]$ y $h[n]$, demuestre cómo se puede usar el sistema para calcular las muestras deseadas de $x[n]$. Tenga en cuenta que las muestras $y[n]$ para $0 \leq n \leq 7$ deben contener las muestras deseadas de $x[n]$.

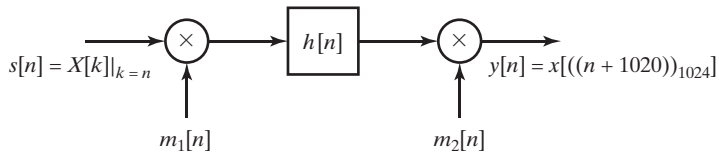


Figura P9.40

9.41. Se ha realizado un sistema para calcular la DFT de 8 puntos $Y[0], Y[1], \ldots, Y[7]$ de una secuencia $y[0], y[1], \ldots, y[7]$. Sin embargo, el sistema no funciona adecuadamente: sólo se calculan correctamente las muestras de índice par de la DFT $Y[0], Y[2], Y[4], Y[6]$. Como ayuda para la resolución del problema, se puede acceder a los siguientes datos:

- Las muestras pares (correctas) de la DFT: $Y[0], Y[2], Y[4], Y[6]$;
- Los primeros 4 valores de la entrada $y[0], y[1], y[2], y[3]$ (los otros valores de la entrada no están disponibles).

(a) Si $y[0] = 1$, $y[1] = y[2] = y[3] = 0$ e $Y[0] = Y[2] = Y[4] = Y[6] = 2$, ¿cuánto valen los valores perdidos $Y[1], Y[3], Y[5], Y[7]$? Explique su respuesta.

(b) Se requiere realizar un sistema eficiente que calcule las muestras impares $Y[1], Y[3], Y[5], Y[7]$ dado cualquier conjunto de puntos de la entrada. Los módulos de cómputo disponibles son una DFT de 4 puntos y una DFT inversa de 4 puntos. Ambos son gratuitos. Se pueden adquirir sumadores, restadores y multiplicadores a un precio de 10 euros cada uno. Diseñe un sistema de mínimo coste que tome como entrada

$$y[0], y[1], y[2], y[3], Y[0], Y[2], Y[4], Y[6]$$

y produzca como salida

$$Y[1], Y[3], Y[5], Y[7].$$

Dibuje el diagrama de bloques asociado y calcule el coste total.

9.42. Considere una clase de algoritmos basados en la DFT para realizar filtros FIR causales cuya respuesta al impulso $h[n]$ sea cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq 63$. La señal de entrada (al filtro FIR) $x[n]$ se divide en un número infinito de bloques de 128 puntos que pueden solaparse, $x_i[n]$, siendo i un entero tal que $-\infty \leq i \leq \infty$, es decir,

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL \leq n \leq iL + 127, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

siendo L un entero positivo.

Especifique un método para calcular

$$y_i[n] = x_i[n] * h[n]$$

para cualquier valor de i. La respuesta debe darse en forma de diagrama de bloques que utilice sólo los tipos de módulos que se muestran en las Figuras P9.42-1 y P9.42-2. Los módulos pueden no utilizarse, o utilizarse más de una vez.

Los cuatro módulos de la Figura P9.42-2, o bien emplean la FFT de base 2 para calcular $X[k]$, la DFT de $x[n]$, o bien utilizan FFT inversa de base 2 para obtener $x[n]$ a partir de $X[k]$.

Su solución debe incluir las longitudes de las FFT y FFT inversa que se usen. Para cada módulo de "desplazamiento de n_0" se debe especificar también el valor de n_0, el número de muestras que se desplaza la secuencia de entrada.

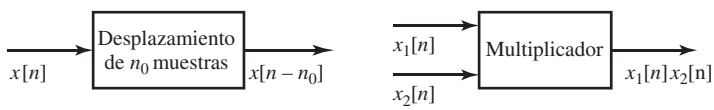


Figura P9.42-1

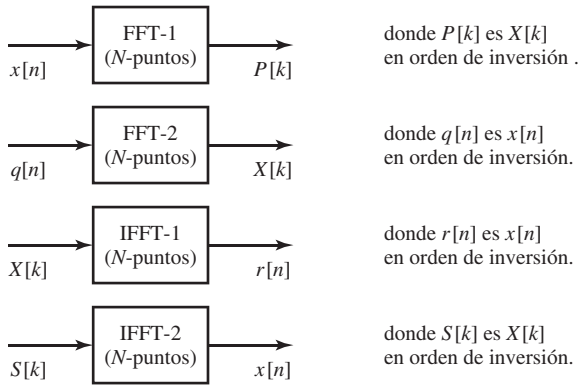


Figura P9.42-2

Problemas de ampliación

9.43. En muchas aplicaciones (como la evaluación de respuestas en frecuencia y la interpolación) resulta de interés calcular la DFT de una secuencia corta que ha sido "rellenada con ceros". En esos casos se puede utilizar un algoritmo de FFT con poda para aumentar la eficiencia de cálculo (Markel, 1971). En este problema se considera la poda del algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia de base 2 cuando la longitud de la secuencia de entrada es $M \leq 2^{\mu}$ y la longitud de la DFT es $N = 2^{\nu}$, siendo $\mu < \nu$.

(a) Dibuje el grafo de flujo completo de un algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia de base 2 para $N = 16$. Etiquete todos los arcos de forma apropiada.

(b) Suponga que la secuencia de entrada es de longitud $M = 2$; es decir, $x[n] \neq 0$ para $N = 0$ y $N = 1$. Dibuje un nuevo grafo de flujo para $N = 16$ que muestre cómo se propagan las muestras de entrada distintas de cero hacia la DFT de salida. Es decir, elimine o pode todos los arcos del grafo de flujo del apartado (a) que representen operaciones sobre entradas que valgan cero.

(c) En el apartado (b), todas las mariposas de las primeras tres etapas del cálculo se deben haber sustituido por semimariposas con la forma que se muestra en la Figura P9.43, y en la última etapa, todas las mariposas deben ser de la forma habitual. Para el caso general en el que la longitud de la secuencia de entrada es $M \leq 2^{\mu}$ y la longitud de la DFT es de $N = 2^{\nu}$, con $\mu < \nu$, determine el número de etapas en las que se pueden utilizar las mariposas podadas. Determine también el número de multiplicaciones complejas necesarias para calcular la DFT de N puntos de una secuencia de M puntos mediante el algoritmo de FFT con poda. Exprese su respuesta en función de ν y de μ.

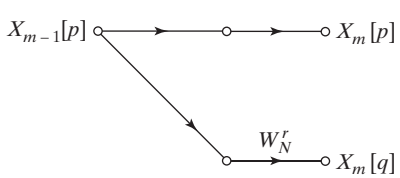


Figura P9.43

9.44. En la Sección 9.2 demostramos que si N es divisible por 2, la DFT de N puntos se puede expresar como

$$X[k] = G[((k))_{N/2}] + W_N^k H[((k))_{N/2}], \qquad 0 \leq k \leq N-1. \tag{P9.44-1}$$

siendo $G[k]$ la DFT de $N/2$ puntos de la secuencia formada por las muestras de índice par,

$$g[n] = x[2n], \qquad 0 \leq n \leq (N/2) - 1,$$

y $H[k]$ la DFT de $N/2$ puntos de la secuencia formada por las muestras de índice impar,

$$h[n] = x[2n+1], \qquad 0 \le n \le (N/2)-1.$$

Observe que, para que la Ecuación (P9.44-1) tenga sentido, $G[k]$ y $H[k]$ se deben repetir periódicamente para $N/2 \le k \le N-1$. Cuando $N = 2^\nu$, la aplicación repetida de la descomposición conduce al algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo para $N = 8$, que se muestra en la Figura 9.11. Como hemos visto, esos algoritmos requieren multiplicaciones complejas por los factores W_N^k. Rader y Brenner (1976) obtuvieron un nuevo algoritmo en el que los multiplicadores son puramente imaginarios, por lo que sólo se requieren dos multiplicaciones reales y ninguna suma real. En este algoritmo, la Ecuación (P9.44-1) se sustituye por las ecuaciones

$$X[0] = G[0] + F[0], \tag{P9.44-2}$$

$$X[N/2] = G[0] - F[0], \tag{P9.44-3}$$

$$X[k] = G[k] - \frac{1}{2} j \frac{F[k]}{\operatorname{sen}(2\pi k/N)}, \qquad k \neq 0, N/2. \tag{P9.44-4}$$

Aquí, $F[k]$ es la DFT de $N/2$ puntos de la secuencia

$$f[n] = x[2n+1] - x[2n-1] + Q,$$

donde

$$Q = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1]$$

es una cantidad que sólo se necesita calcular una vez.

(a) Demuestre que $F[0] = H[0]$ y, por tanto, que las Ecuaciones (P9.44-2) y (P9.44-3) dan el mismo resultado que la Ecuación (P9.44-1) para $k = 0, N/2$.

(b) Demuestre que

$$F[k] = H[k] W_N^k (W_N^{-k} - W_N^k)$$

para $k = 1, 2, \ldots, (N/2)-1$. Utilice este resultado para obtener la Ecuación (P9.44-4). ¿Por qué hay que calcular $X[0]$ y $X[N/2]$ utilizando distintas ecuaciones?

(c) Cuando $N = 2^\nu$, se pueden aplicar repetidamente las Ecuaciones (P9.44-2)–(P9.44-3) para obtener un algoritmo completo de FFT por diezmado en el tiempo. Determine fórmulas que permitan obtener el número de multiplicaciones reales y el número de sumas reales en función de N. Al contar las operaciones debidas a la Ecuación (P9.44-4) aproveche las simetrías y las periodicidades, pero no excluya las multiplicaciones "triviales" por $\pm j/2$.

(d) Rader y Brenner (1976) indicaron que los algoritmos de FFT basados en las Ecuaciones (P9.44-2)–(P9.44-4) tenían "malas propiedades de ruido". Explique por qué podría ser verdad.

9.45. Duhamel y Hollman (1984) propusieron un algoritmo de FFT modificado denominado FFT por división de base o SRFFT (*split-radix FFT*). El grafo de flujo de este algoritmo es similar al grafo de flujo del algoritmo de base 2, pero requiere menos multiplicaciones reales. En este problema se ilustran los principios de la SRFFT para realizar el cálculo de la FFT $X[k]$ de una secuencia $x[n]$ de longitud N.

(a) Demuestre que los términos de índice par de $X[k]$ se pueden expresar mediante la DFT de $N/2$ puntos.

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n+N/2]) W_N^{2kn}$$

para $k = 0, 1, \ldots, (N/2)-1$.

(b) Demuestre que los términos de índice impar de la DFT $X[k]$ se pueden expresar mediante las DFT de $N/4$ puntos

$$X[4k+1] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n]-x[n+N/2]) - j(x[n+N/4]-x[n+3N/4])\} W_N^n W_N^{4kn}$$

para $k = 0, 1, \ldots, (N/4)-1$, y

$$X[4k+3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n]-x[n+N/2]) + j(x[n+N/4]-x[n+3N/4])\} W_N^{3n} W_N^{4kn}$$

para $k = 0, 1, \ldots, (N/4)-1$.

(c) El grafo de flujo de la Figura P9.45 representa la descomposición anterior de la DFT para una transformada de 16 puntos. Dibuje de nuevo este grafo de flujo, etiquetando cada arco con el coeficiente multiplicador apropiado.

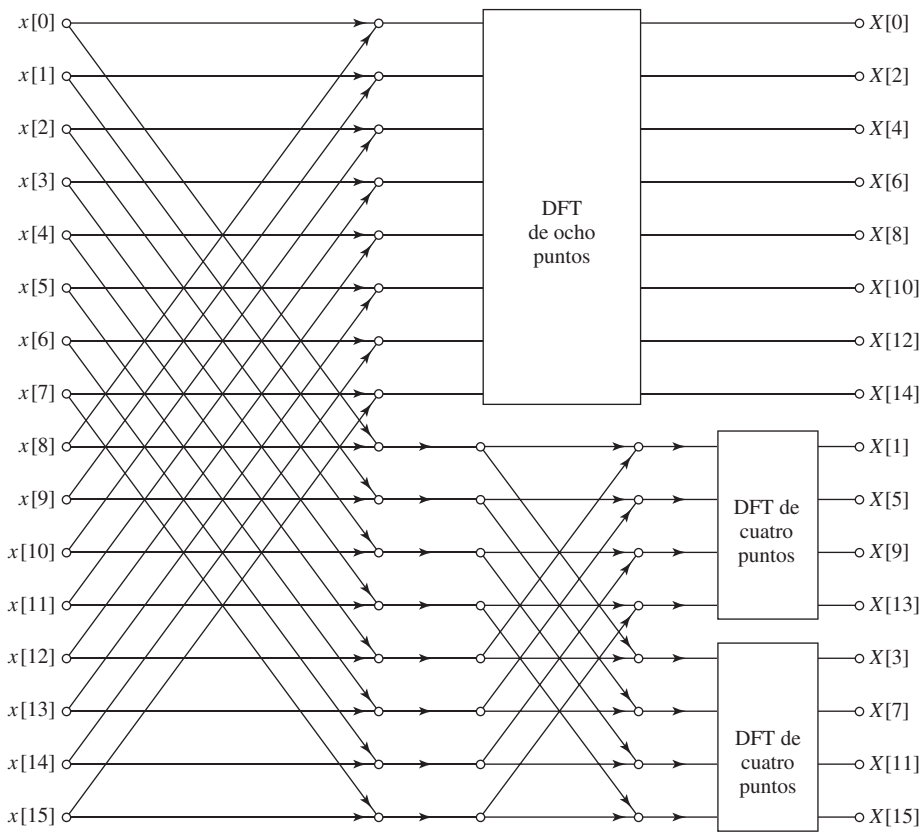


Figura P9.45

(d) Determine el número de multiplicaciones reales necesarias para realizar la transformada de 16 puntos cuando se aplica el principio de la SRFFT para calcular las otras DFT de la Figura P9.45. Compare este número con el número de multiplicaciones reales necesarias para realizar un algoritmo mediante diezmado en frecuencia base 2 de 16 puntos. Suponga en ambos casos que las multiplicaciones por W_N^0 no se realizan.

9.46. Al calcular la DFT es necesario multiplicar un número complejo por otro número complejo de módulo unidad, es decir, $(X + jY)e^{j\theta}$. Es claro que esta multiplicación compleja sólo cambia la fase del número complejo, dejando inalterado su módulo. Por este motivo, las multiplicaciones por el número complejo $e^{j\theta}$ se denominan algunas veces *rotaciones*. En los algoritmos de DFT o de FFT, pueden ser necesarios muchos ángulos θ. Sin embargo, puede resultar inconveniente almacenar una tabla con todos los valores necesarios de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, y el cálculo de esas funciones mediante un desarrollo en serie de potencias requiere muchas multiplicaciones y sumas. Con el algoritmo CORDIC, dado por Volder (1959), el producto $(X + jY)e^{j\theta}$ se puede evaluar de forma eficiente mediante una combinación de sumas, desplazamientos binarios y búsquedas en tablas de pequeño tamaño.

(a) Sea $\theta_i = \arctan(2^{-i})$. Demuestre que cualquier ángulo $0 < \theta < \pi/2$ se puede representar como

$$\theta = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \theta_i + \varepsilon = \hat{\theta} + \varepsilon,$$

siendo $\alpha_i = \pm 1$ y con el error ε limitado por

$$|\varepsilon| \leq \arctan(2^{-M}).$$

(b) Los ángulos θ_i se pueden calcular previamente en una pequeña tabla de longitud M. Indique un algoritmo para obtener la secuencia $\{\alpha_i\}$ para $i = 0, 1, \ldots, M-1$, tal que $\alpha_i = \pm 1$. Utilice su algoritmo para determinar la secuencia $\{\alpha_i\}$ para representar el ángulo $\theta = 100\pi/512$ cuando $M = 11$.

(c) Utilizando el resultado del apartado (a), demuestre que la recursión

$$\begin{aligned}
X_0 &= X, \\
Y_0 &= Y, \\
X_i &= X_{i-1} - \alpha_{i-1} Y_{i-1} 2^{-i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, M, \\
Y_i &= Y_{i-1} + \alpha_{i-1} X_{i-1} 2^{-i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, M,
\end{aligned}$$

producirá el número complejo

$$(X_M + jY_M) = (X + jY) G_M e^{j\hat{\theta}},$$

siendo $\hat{\theta} = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i \theta_i$ y G_M real, positivo y no depende de θ. Es decir, el número complejo original se rota en el plano complejo un ángulo $\hat{\theta}$ y se amplifica con la constante G_M.

(d) Determine la constante de amplificación G_M en función de M.

9.47. En la Sección 9.3, desarrollamos el algoritmo FFT mediante diezmado en frecuencia de base 2, es decir, $N = 2^\nu$. Es posible formular un algoritmo similar para el caso de $N = m^\nu$, siendo m un entero. Este algoritmo se conoce con el nombre de algoritmo de FFT de base m. En este problema se examina la FFT mediante diezmado en frecuencia de base 3 para el caso de $N = 9$, es decir, la secuencia de entrada es $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > 8$.

(a) Formule un método para calcular las muestras de la DFT $X[3k]$ para $k = 0, 1, 2$. Considere definir $X_1[k] = X(e^{j\omega_k})|_{\omega_k = 2\pi k/3}$. ¿Cómo se puede definir la secuencia temporal $x_1[n]$ en función de $x[n]$ de forma que la DFT de 3 puntos de $x_1[n]$ sea $X_1[k] = X[3k]$?

(b) Defina ahora una secuencia $x_2[n]$ en función de $x[n]$ de forma que la DFT de 3 puntos de $x_2[n]$ sea $X_2[k] = X[3k+1]$ para $k = 0, 1, 2$. Similarmente, defina $x_3[n]$ de forma que su DFT de 3 puntos sea $X_3[k] = X[3k+2]$ para $k = 0, 1, 2$. Observe que ahora hemos definido la DFT de 9 puntos como 3 DFT de 3 puntos mediante secuencias de 3 puntos construidas apropiadamente.

(c) Dibuje el grafo de flujo de señales de la DFT con $N = 3$ DFT, es decir, la mariposa de base 3.

(d) Utilizando los resultados de los apartados (a) y (b), dibuje el grafo de flujo de señales del sistema que forma las secuencias $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$, y aplique los bloques que realizan la DFT de 3 puntos a esas

secuencias para producir $X[k]$ con $k = 0, \ldots, 8$. Nótese que, en interés de la claridad, no es necesario dibujar el grafo de flujo de señales de las $N = 3$, sino simplemente utilizar bloques etiquetados como "DFT con $N = 3$". El interior de los bloques es el sistema que se dibujó en el apartado (c).

(e) La factorización apropiada de las potencias de W_9 en el sistema que dibujó en el apartado (d) permite expresar estos sistemas como DFT con $N = 3$ seguidas de factores *twiddle* análogos a los que se utilizan en el algoritmo de base 2. Dibuje de nuevo el sistema del apartado (d) de forma que esté formado únicamente por DFT con $N = 3$ seguidas de esos factores. Ésta es la formulación completa de la FFT mediante diezmado en frecuencia de base 3 para $N = 9$.

(f) ¿Cuántas multiplicaciones complejas son necesarias para calcular una DFT de 9 puntos utilizando una implementación directa de la ecuación de la DFT? Compare con el número de multiplicaciones complejas requeridas por el sistema que ha dibujado en el apartado (e). En general, ¿cuántas multiplicaciones complejas se necesitan para realizar la FFT de base 3 de una secuencia de longitud $N = 3^\nu$?

9.48. Bluestein (1970) demostró que si $N = M^2$, entonces el algoritmo de transformada *chirp* admite una realización recursiva.

(a) Demuestre que la DFT se puede expresar como la convolución

$$X[k] = h^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]h^*[n])h[k-n],$$

donde * indica conjugación compleja y

$$h[n] = e^{j(\pi/N)n^2}, \qquad -\infty < n < \infty.$$

(b) Demuestre que los valores deseados de $X[k]$ (es decir, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$) se pueden obtener también evaluando la convolución del apartado (a) para $k = N, N+1, \ldots, 2N-1$.

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para demostrar que también es igual a la salida del sistema que se muestra en la Figura P9.48 para $k = N, N+1, \ldots, 2N-1$, siendo $\hat{h}[k]$ la secuencia de duración finita

$$\hat{h}[k] = \begin{cases} e^{j(\pi/N)k^2}, & 0 \le k \le 2N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(d) Utilizando el hecho de que $N = M^2$, demuestre que la función de transferencia correspondiente a la respuesta al impulso $\hat{h}[k]$ es

$$\begin{aligned} \hat{H}(z) &= \sum_{k=0}^{2N-1} e^{j(\pi/N)k^2} z^{-k} \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j(\pi/N)r^2} z^{-r} \frac{1 - z^{-2M^2}}{1 + e^{j(2\pi/M)r} z^{-M}}. \end{aligned}$$

Sugerencia: exprese k como $k = r + \ell M$.

(e) La expresión de $\hat{H}(z)$ obtenida en el apartado (d) sugiere una realización recursiva del sistema FIR. Dibuje el grafo de flujo de dicha realización.

(f) Utilice el resultado del apartado (e) para determinar los números totales de multiplicaciones y sumas complejas necesarias para calcular los N valores deseados de $X[k]$. Compare el resultado obtenido con el resultado que se obtendría para el cálculo directo de $X[k]$.

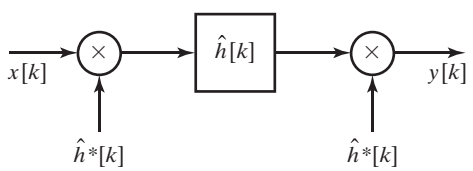


Figura P9.48

9.49. En el algoritmo de Goertzel para el cálculo de la transformada discreta de Fourier, $X[k]$ se calcula como

$$X[k] = y_k[N],$$

siendo $y_k[n]$ la salida de la red que se muestra en la Figura P9.49. Considere la realización del algoritmo de Goertzel utilizando aritmética de coma fija con redondeo. Suponga que la longitud del registro es de B bits más el bit de signo, y suponga también que los productos se redondean antes de las sumas. Asuma también que las fuentes de redondeo son independientes.

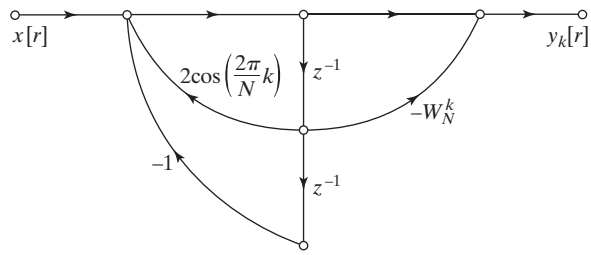


Figura P9.49

(a) Suponiendo que $x[n]$ es real, dibuje el grafo de flujo del modelo lineal de ruido para el cálculo con precisión finita de las partes real e imaginaria de $X[k]$. Suponga que la multiplicación por ± 1 no produce ruido de redondeo.

(b) Calcule la varianza del ruido de redondeo de las partes real e imaginaria de $X[k]$.

9.50. Considere el cálculo directo de la DFT utilizando aritmética de coma fija con redondeo. Suponga que los registros tienen una longitud de B bits más el bit de signo (es decir, un total de $B+1$ bits) y que el ruido de redondeo que introduce cualquier multiplicación real es independiente del producido por cualquier otra multiplicación real. Suponiendo que $x[n]$ es real, determine la varianza del ruido de redondeo de las partes real e imaginaria de cada valor de la DFT $X[k]$.

9.51. Para realizar el algoritmo de FFT por diezmado en frecuencia, el cálculo básico de la mariposa es

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q],$$
$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q].$$

Al utilizar aritmética de coma fija para realizar los cálculos, se supone en general que todos los números se escalan a valores menores que la unidad. Por tanto, para evitar el desbordamiento, es necesario asegurar que todos los números reales resultado de las mariposas no exceden la unidad.

(a) Demuestre que si se requiere que

$$|X_{m-1}[p]| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad |X_{m-1}[q]| < \tfrac{1}{2},$$

entonces en el cálculo de las mariposas no se puede producir desbordamiento. Es decir,

$$|Re\{X_m[p]\}| < 1, \qquad |Im\{X_m[p]\}| < 1,$$

y

$$|Re\{X_m[q]\}| < 1, \qquad |Im\{X_m[q]\}| < 1.$$

(b) En la práctica, es más fácil y conveniente requerir que

$$|Re\{X_{m-1}[p]\}| < \tfrac{1}{2}, \qquad |Im\{X_{m-1}[p]\}| < \tfrac{1}{2},$$

y

$$|Re\{X_{m-1}[q]\}| < \tfrac{1}{2}, \qquad |Im\{X_{m-1}[q]\}| < \tfrac{1}{2}.$$

¿Son esas condiciones suficientes para garantizar que no se produce desbordamiento en el cálculo de la mariposa de diezmado en el tiempo? Explique su respuesta.

9.52. Para obtener fórmulas de la relación ruido-señal en el algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo de base 2 en coma fija se hizo la suposición de que cada nodo de salida estaba conectado a $(N-1)$ mariposas, y que cada una de ellas contribuye con la cantidad $\sigma_B^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B}$ a la varianza del ruido de salida. Sin embargo, cuando $W_N^r = \pm 1$ o $\pm j$, las multiplicaciones se pueden realizar sin error. Por tanto, si se modifican los resultados obtenidos en la Sección 9.7 para tener este hecho en cuenta, se puede obtener una estimación menos pesimista de los efectos del ruido de cuantificación.

(a) Para el algoritmo de diezmado en el tiempo presentado en al Sección 9.7, determine para cada etapa el número de mariposas en las que se realiza una multiplicación por ± 1 y $\pm j$.

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para obtener estimadores mejorados de la varianza del ruido de salida (Ecuación (9.58)) y de la relación ruido-señal (Ecuación (9.68)) para valores impares de k. Comente en qué son diferentes estos estimadores para valores pares de k. No intente obtener una expresión cerrada de estas cantidades para valores pares de k.

(c) Repita los apartados (a) y (b) para el caso en el que la salida de cada etapa se atenúe por un factor de $\frac{1}{2}$. Es decir, obtenga las expresiones modificadas correspondientes a la Ecuación (9.71) para la varianza del ruido de salida y a la Ecuación (9.72) para la relación ruido-señal de salida, suponiendo que las multiplicaciones por ± 1 y $\pm j$ no introducen error.

9.53. En la Sección 9.7 consideramos un análisis del ruido del algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo de la Figura 9.11. Realice un análisis similar para el algoritmo por diezmado en frecuencia de la Figura 9.22, y obtenga ecuaciones para la varianza del ruido de salida y la relación ruido-señal para el caso de escalado en la entrada y también para un escalado de $\frac{1}{2}$ en cada etapa del cálculo.

9.54. En este problema se considera un procedimiento para calcular la DFT de cuatro secuencias de N puntos reales, simétricas o antisimétricas, realizando sólo el cálculo de una DFT de N puntos. Como solo se consideran secuencias de longitud finita, por *simétrica* y *antisimétrica* se debe entender *simétrica periódica* y *antisimétrica periódica*, tal como se definieron en la Sección 8.6.4. Sean $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ y $x_4[n]$ cuatro secuencias reales de longitud N y sean $X_1[k]$, $X_2[k]$, $X_3[k]$ y $X_4[k]$ sus correspondientes DFT. Supondremos primero que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son simétricas y que $x_3[n]$ y $x_4[n]$ son antisimétricas; es decir,

$$x_1[n] = x_1[N-n], \qquad x_2[n] = x_2[N-n],$$
$$x_3[n] = -x_3[N-n], \qquad x_4[n] = -x_4[N-n],$$

para $n = 1, 2, \ldots, N-1$ y $x_3[0] = x_4[0] = 0$.

(a) Sea $y_1[n] = x_1[n] + x_3[n]$ y sea $Y_1[k]$ la DFT de $y_1[n]$. Determine cómo se pueden obtener $X_1[k]$ y $X_2[k]$ a partir de $Y_1[k]$.

(b) $y_1[n]$ tal como se ha definido en el apartado (a), es una secuencia real cuya parte simétrica es $x_1[n]$ y cuya parte antisimétrica es $x_3[n]$. Similarmente, se define la secuencia $y_2[n] = x_2[n] + x_4[n]$, y sea $y_3[n]$ la secuencia compleja

$$y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n].$$

Determine en primer lugar cómo se pueden obtener $Y_1[k]$ e $Y_2[k]$ a partir de $Y_3[k]$, y después, utilizando los resultados del apartado (a), demuestre cómo se pueden obtener $X_1[k]$, $X_2[k]$, $X_3[k]$ y $X_4[k]$ a partir de $Y_3[k]$.

El resultado del apartado (b) demuestra que se puede calcular simultáneamente la DFT de cuatro secuencias reales realizando sólo el cálculo de una DFT de N puntos si dos de las secuencias son simétricas y las otras dos son antisimétricas. Considérese ahora el caso en el que las cuatro secuencias son simétricas, es decir,

$$x_i[n] = x_i[N-n], \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. En los apartados (c)–(f), suponga que $x_3[n]$ y $x_4[n]$ son reales y simétricas, no antisimétricas.

(c) Considere una secuencia simétrica real $x_3[n]$. Demuestre que la secuencia

$$u_3[n] = x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N]$$

es una secuencia antisimétrica, es decir, que $u_3[n] = -u_3[N-n]$ para $n = 1, 2, \ldots, N-1$ y $u_3[0] = 0$.

(d) Sea $U_3[k]$ la DFT de N puntos de $u_3[n]$. Determine una expresión para obtener $U_3[k]$ en función de $X_3[k]$.

(e) Utilizando el procedimiento del apartado (c), se puede formar la secuencia real $y_1[n] = x_1[n] + u_3[n]$, donde $x_1[n]$ es la parte simétrica y $u_3[n]$ es la parte antisimétrica de $y_1[n]$. Determine cómo se pueden obtener $X_1[k]$ y $X_3[k]$ a partir de $Y_1[k]$.

(f) Sea ahora $y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n]$, donde

$$y_1[n] = x_1[n] + u_3[n], \qquad y_2[n] = x_2[n] + u_4[n],$$

con

$$\begin{aligned} u_3[n] &= x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N], \\ u_4[n] &= x_4[((n+1))_N] - x_4[((n-1))_N], \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Determine cómo obtener $X_1[k]$, $X_2[k]$, $X_3[k]$ y $X_4[k]$ a partir de $Y_3[k]$. (Nótese que $X_3[0]$ y $X_4[0]$ no se pueden recuperar a partir de $Y_3[k]$, y que si N es par, $X_3[N/2]$ y $X_4[N/2]$ tampoco se pueden recuperar a partir de $Y_3[k]$.)

9.55. La entrada y la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo satisfacen una ecuación en diferencias de la forma

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

Suponga que se dispone de un programa de FFT para calcular la DFT de cualquier secuencia finita de longitud $L = 2^\nu$. Describa un procedimiento que utilice el programa de FFT disponible para calcular

$$H(e^{j(2\pi/512)k}) \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, 511,$$

siendo $H(z)$ la función de transferencia del sistema.

9.56. Suponga que se desea multiplicar dos números muy grandes (posiblemente con una longitud de miles de bits) en un computador de 16 bits. En este problema se considera una técnica para hacerlo utilizando las FFT.

(a) Sean $p(x)$ y $q(x)$ los polinomios

$$p(x) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x^i.$$

Demuestre que los coeficientes del polinomio $r(x) = p(x)q(x)$ se pueden calcular utilizando convolución circular.

(b) Indique cómo calcular los coeficientes de $r(x)$ utilizando un programa de FFT de base 2. ¿Para qué órdenes de magnitud de $(L+M)$ es más eficiente este procedimiento que el cálculo directo? Suponga que $L + M = 2^\nu$ para algún entero ν.

(c) Suponga ahora que se desea calcular el producto de dos enteros binarios positivos muy grandes, u y v. Demuestre que su producto se puede calcular utilizando multiplicación de polinomios, y describa un procedimiento para calcular el producto utilizando un algoritmo de FFT. Si u es un número de 8000 bits y v es un número de 1000 bits, ¿cuántas multiplicaciones y sumas reales se requieren aproximadamente para calcular el producto $u \cdot v$ utilizando este método?

(d) Explique cualitativamente el efecto de la aritmética de precisión finita al realizar el algoritmo del apartado (c).

9.57. La transformada discreta de Hartley (DHT, *Discrete Hartley Transform*) de una secuencia $x[n]$ de longitud N se define como

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] H_N[nk], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a],$$

con

$$C_N[a] = \cos(2\pi a/N), \qquad S_N[a] = \operatorname{sen}(2\pi a/N).$$

En el Problema 8.68 se exploran en detalle las propiedades de la transformada discreta de Hartley, particularmente su propiedad de convolución circular.

(a) Verifique que $H_N[a] = H_N[a+N]$, y verifique la siguiente propiedad de utilidad de $H_N[a]$:

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= H_N[a]C_N[b] + H_N[-a]S_N[b] \\ &= H_N[b]C_N[a] + H_N[-b]S_N[a]. \end{aligned}$$

(b) Descomponiendo $x[n]$ en sus puntos con índice par e impar, y utilizando la identidad del apartado (a), obtenga un algoritmo de DHT rápida basado en el principio de diezmado en el tiempo.

9.58. En este problema se describe la FFT como una secuencia de operaciones de matrices. Considere el algoritmo de FFT por diezmado en el tiempo de 8 puntos que se muestra en la Figura P9.58. Sean **a** y **f** los vectores de entrada y de salida, respectivamente. Suponga que la entrada está en orden correspondiente a inversión de bits y que la salida está en orden normal (compare con la Figura 9.11). Sean **b**, **c**, **d** y **e** los vectores intermedios que se muestran en el grafo de flujo.

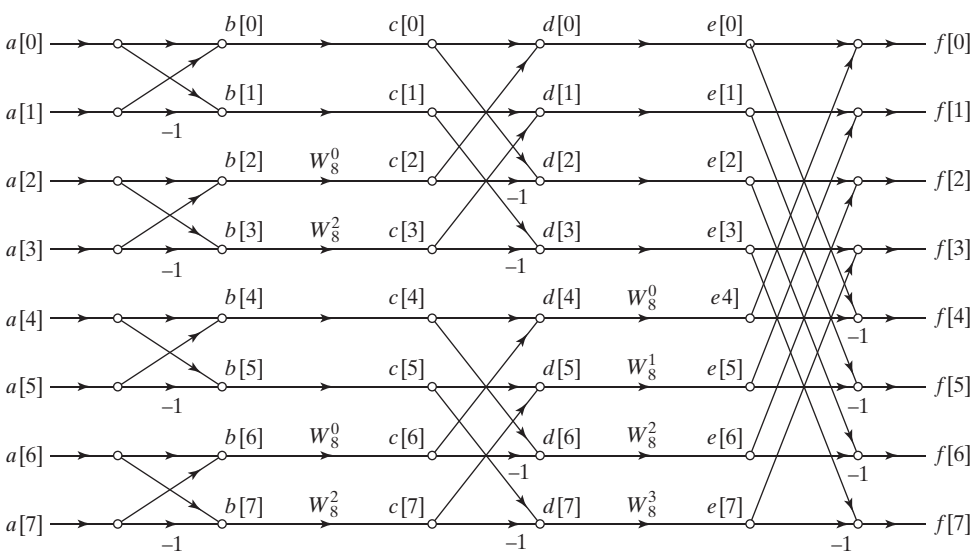


Figura P9.58

(a) Determine las matrices $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{F}_3$ tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{F}_1\mathbf{a}, \\ \mathbf{c} &= \mathbf{T}_1\mathbf{b}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{F}_2\mathbf{c}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{T}_2\mathbf{d}, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{F}_3\mathbf{e}. \end{aligned}$$

(b) La FFT completa, tomando como entrada el vector **a** y como salida el vector **f** se puede expresar en notación matricial como $\mathbf{f} = \mathbf{Qa}$, donde

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_3\mathbf{T}_2\mathbf{F}_2\mathbf{T}_1\mathbf{F}_1.$$

Sea $\mathbf{Q}^H$ la traspuesta conjugada (hermítica) de la matriz **Q**. Dibuje el grafo de flujo de la secuencia de operaciones descritas por $\mathbf{Q}^H$. ¿Qué calcula esta estructura?

(c) Determine $(1/N)\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}$.

9.59. En muchas aplicaciones, surge la necesidad de convolucionar secuencias largas $x[n]$ y $h[n]$ cuyos valores son enteros. Como los coeficientes de las secuencias son enteros, el resultado de la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ tendrá también coeficientes enteros.

Un inconveniente importante de calcular la convolución de secuencias enteras utilizando la FFT es que los chips con aritmética en coma flotante son más caros que los chips con aritmética en coma fija. Además, el ruido de redondeo que se produce durante los cálculos en coma flotante puede contaminar el resultado. En este problema se considera una clase de algoritmos de FFT denominados *transformadas de teoría de números* (NTT, *Number-Theoretic Transforms*), que permiten superar esos inconvenientes.

(a) Sean $x[n]$ y $h[n]$ secuencias de N puntos y sean $X[k]$ y $H[k]$, sus DFT, respectivamente. Obtenga la propiedad de convolución circular de la DFT. Concretamente, demuestre que $Y[k] = X[k]H[k]$, donde $y[n]$ es la convolución circular de N puntos de $x[n]$ y $h[n]$. Demuestre que la propiedad de la convolución circular se mantiene siempre que W_N en la DFT satisfaga

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \tag{P9.59-1}$$

La clave para definir las NTT es encontrar W_N con valores enteros que satisfagan la Ecuación (P9.52-1). Esto fuerza a la ortogonalidad de los vectores de la base, necesaria para que la DFT funcione apropiadamente. Desafortunadamente, no existen valores enteros que cumplan esta propiedad utilizando aritmética entera estándar.

Para evitar este problema, las NTT utilizan aritmética entera definida módulo algún entero P. En este problema concreto, supondremos que $P = 17$. Es decir, la suma y la multiplicación se definen como la suma y la multiplicación estándar, seguidas por una reducción módulo $P = 17$. Por ejemplo, $((23+18))_{17} = 7$, $((10+7))_{17} = 0$, $((23\times 18))_{17} = 6$, y $((10\times 7))_{17} = 2$, (se calcula la suma o producto de la forma normal, y se toma el resto módulo 17).

(b) Sean $P = 17$, $N = 4$ y $W_N = 4$. Verifique que

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk}\right)\right)_P = \begin{cases} N, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

(c) Sean $x[n]$ y $h[n]$ las secuencias

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2], \\ h[n] &= 3\delta[n] + \delta[n-1]. \end{aligned}$$

Calcule la NTT de 4 puntos $X[k]$ de la secuencia $x[n]$ de la siguiente forma:

$$X[k] = \left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}\right)\right)_P.$$

Calcule $H[k]$ de forma similar. Calcule también $Y[k] = H[k]X[k]$. Utilice los valores de P, N y W_N dados en el apartado (a). *¡Asegúrese de utilizar aritmética módulo 17 en cada una de las operaciones del cálculo, no sólo para obtener en resultado final!*

(d) La NTT inversa de $Y[k]$ se define mediante la ecuación

$$y[n] = \left(\left((N)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] W_N^{-nk} \right) \right)_P . \tag{P9.59-2}$$

Para calcular adecuadamente esta cantidad de deben determinar los *enteros* $(1/N)^{-1}$ y W_N^{-1} tales que

$$\left(\left((N)^{-1} N \right) \right)_P = 1,$$

$$\left(\left(W_N W_N^{-1} \right) \right)_P = 1.$$

Utilice los valores de P, N y W_N dados en el apartado (a), y determine los enteros mencionados anteriormente.

(e) Calcule la NTT inversa de la Ecuación (P9.59-2) utilizando los valores de $(N)^{-1}$ y W_N^{-1} determinados en el apartado (d). Compruebe el resultado calculando manualmente la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$.

9.60. Las Secciones 9.3 y 9.4 se centran en la transformada rápida de Fourier de secuencias en las que N es potencia de 2. Sin embargo, es también posible obtener algoritmos eficientes para calcular la DFT cuando la longitud N tiene más de un factor primo, es decir, cuando no se puede expresar como $N = m^\nu$ para algún entero m. En este problema se examina el caso de $N = 6$. Las técnicas descritas se pueden extender fácilmente a otros números compuestos. Burrus y Parks (1985) presentan estos algoritmos con más detalle.

(a) La clave para descomponer la FFT en el caso de $N = 6$ es utilizar el concepto de *correspondencia de índices*, propuesto por Cooley y Tukey (1965) en su artículo original sobre la FFT. Concretamente, en el caso de $N = 6$, los índices n y k se pueden representar como

$$n = 3n_1 + n_2 \quad \text{para } n_1 = 0, 1; n_2 = 0, 1, 2; \tag{P9.60-1}$$

$$k = k_1 + 2k_2 \quad \text{para } k_1 = 0, 1; k_2 = 0, 1, 2; \tag{P9.60-2}$$

Verifique que utilizando los posibles valores de n_1 y n_2 sólo se produce una vez y sólo una cada valor de $n = 0, \ldots, 5$. Demuestre que ocurre lo mismo para k con los posibles valores de k_1 y k_2.

(b) Sustituya las Ecuaciones (P9.60-1) y (P9.60-2) en la definición de la DFT y obtenga una nueva expresión de la DFT en función de n_1, n_2, k_1 y k_2. La ecuación resultante debería tener un doble sumatorio en n_1 y n_2 en lugar de un único sumatorio en n.

(c) Examine cuidadosamente los términos W_6 de su ecuación. Puede escribir algunos de ellos como expresiones equivalentes en W_2 y W_3.

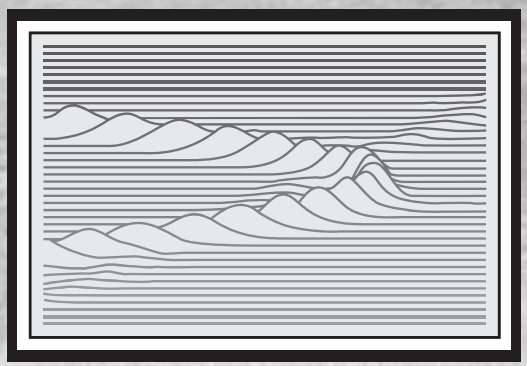
(d) Basándose en el apartado (c), agrupe los términos de su DFT de forma que la suma en n_2 esté fuera y la suma en n_1 esté dentro. Debe escribirse esta expresión de forma que se pueda interpretar como tres DFT con $N = 2$, seguidas por algunos factores potencia de W_6), seguidos por dos DFT con $N = 3$.

(e) Dibuje el grafo de flujo de señales que implemente su expresión del apartado (d). ¿Cuántas multiplicaciones complejas se requieren? ¿Cómo se compara con el número de multiplicaciones complejas necesario en una realización directa del la ecuación de la DFT para $N = 6$?

(f) Obtenga un esquema de indexación alternativo similar al de las Ecuaciones (P9.60-1) y (P9.53-2) que produzca un grafo de flujo de señales con dos DFT con $N = 3$ seguidas por tres DFT con $N = 2$.

10

Análisis de Fourier de señales mediante la DFT



10.0. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 8 desarrollamos la transformada discreta de Fourier (DFT) como una representación de Fourier de señales de longitud finita. Como la DFT se puede calcular de forma eficiente, desempeña un papel fundamental en una gran variedad de aplicaciones de tratamiento de señales, entre las que se encuentran el filtrado y el análisis espectral. En este capítulo haremos una presentación introductoria del análisis de Fourier de señales utilizando la DFT.

En aplicaciones y algoritmos basados en la evaluación explícita de la transformada de Fourier, lo que se desea inicialmente es la transformada de Fourier en tiempo discreto, y lo que se puede calcular realmente es la DFT. Para señales de longitud finita, la DFT proporciona muestras en el dominio de la frecuencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto, y las implicaciones de este muestreo se deben entender claramente y deben ser tenidas en cuenta. Por ejemplo, como se considera en la Sección 8.7, al realizar el filtrado lineal o convolución multiplicando transformadas DFT en lugar de transformadas de Fourier en tiempo discreto, se realiza una convolución circular y hay que tener cuidado para asegurar que el resultado será equivalente al de la convolución lineal. Además, en muchas aplicaciones de filtrado y de análisis espectral, las señales no son inherentemente de longitud finita. Como comentaremos, esta inconsistencia entre el requerimiento de longitud finita de la DFT y la realidad de señales de longitud indefinida se puede incorporar de forma exacta o aproximada mediante los conceptos de *enventanado, procesado de bloques* y *la transformada de Fourier dependiente del tiempo*.

10.1. ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES MEDIANTE LA DFT

Una de las principales aplicaciones de la DFT es el análisis del contenido en frecuencia de señales en tiempo continuo. Por ejemplo, como comentamos en la Sección 10.4.1, en el análisis y tratamiento de voz, el análisis en frecuencia de las señales vocales es particularmente útil para identificar y modelar las resonancias de la cavidad vocal. Otro ejemplo, que se presenta en la Sección 10.4.2, son los sistemas de radar Doppler, en los que la velocidad de los blancos se manifiesta como un desplazamiento en frecuencia de las señales transmitidas y recibidas.

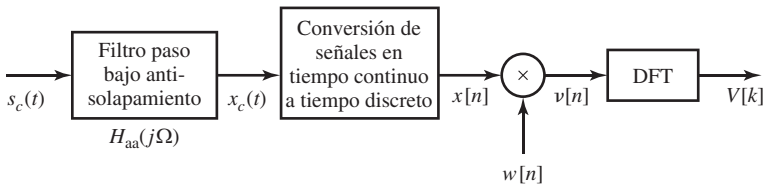


Figura 10.1 Pasos del proceso del análisis de Fourier en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo.

La Figura 10.1 muestra los pasos básicos para aplicar la DFT a las señales en tiempo continuo. El filtro antisolapamiento se incorpora para eliminar o minimizar el efecto del solapamiento cuando la señal en tiempo continuo se convierte en una secuencia. La necesidad de la multiplicación de $x[n]$ por $w[n]$, o enventanado, es consecuencia del requisito de longitud finita de la DFT. En muchos casos de interés práctico, $s_c(t)$ y, por tanto, $x[n]$ son muy largas o incluso indefinidamente largas (como en el caso de voz o música). Por tanto, hay que aplicar a $x[n]$ una ventana de longitud finita $w[n]$ antes de calcular la DFT. La Figura 10.2 ilustra las transformadas de Fourier de las señales de la Figura 10.1. La Figura 10.2(a) muestra un espectro en tiempo continuo que decrece a altas frecuencias pero que no está limitado en banda. Aparece también la presencia de algo de energía correspondiente a una señal de banda estrecha, en los picos estrechos. La respuesta en frecuencia del filtro antisolapamiento se ilustra en la Figura 10.2(b). Como indica la Figura 10.2(c), la transformada de Fourier en tiempo continuo resultante $X_c(j\Omega)$ contiene poca información útil sobre $S_c(j\Omega)$ a frecuencias superiores a la frecuencia de corte del filtro. Como $H_{aa}(j\Omega)$ no puede ser ideal, las componentes de Fourier de la entrada en la banda de paso y en la banda de transición se verán también modificadas por la respuesta en frecuencia del filtro.

La conversión de $x_c(t)$ en la secuencia de muestras $x[n]$ se representa en el dominio de la frecuencia mediante repetición periódica, normalización en frecuencia y escalado de amplitud, es decir,

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right). \tag{10.1}$$

como se ilustra en la Figura 10.2(d). En una implementación práctica, el filtro antisolapamiento no puede tener atenuación infinita en la banda de paso, por lo que puede esperarse algún solapamiento de los términos de la Ecuación (10.1). Sin embargo, esta fuente de error se puede hacer suficientemente pequeña como para que sea despreciable, bien con un filtro en tiempo continuo de alta calidad o con el uso de un sobremuestreo inicial seguido por un filtrado paso bajo más eficiente y un diezmado, como se comentó en la Sección 4.8.1. Si $x[n]$ es una señal digital, de forma que el segundo sistema de la Figura 10.1 incorpora conversión A/D, se produce también un error de cuantificación. Como hemos visto en la Sección 4.8.2, este error se puede modelar como una secuencia de ruido que se suma a $x[n]$. El ruido puede hacerse despreciable utilizando cuantificación fina.

Como ya se ha indicado, generalmente se multiplica la secuencia $x[n]$ por una ventana de duración finita $w[n]$, ya que la entrada a la DFT debe ser de duración finita. Esto produce la secuencia de duración finita $v[n] = w[n]x[n]$. El efecto en el dominio de la frecuencia es una convolución periódica. Es decir,

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right)W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta. \tag{10.2}$$

La Figura 10.2(e) muestra la transformada de Fourier de una secuencia de ventana típica. Nótese que el lóbulo principal está concentrado alrededor de $\omega = 0$, y, en esta ilustración, puede verse que los

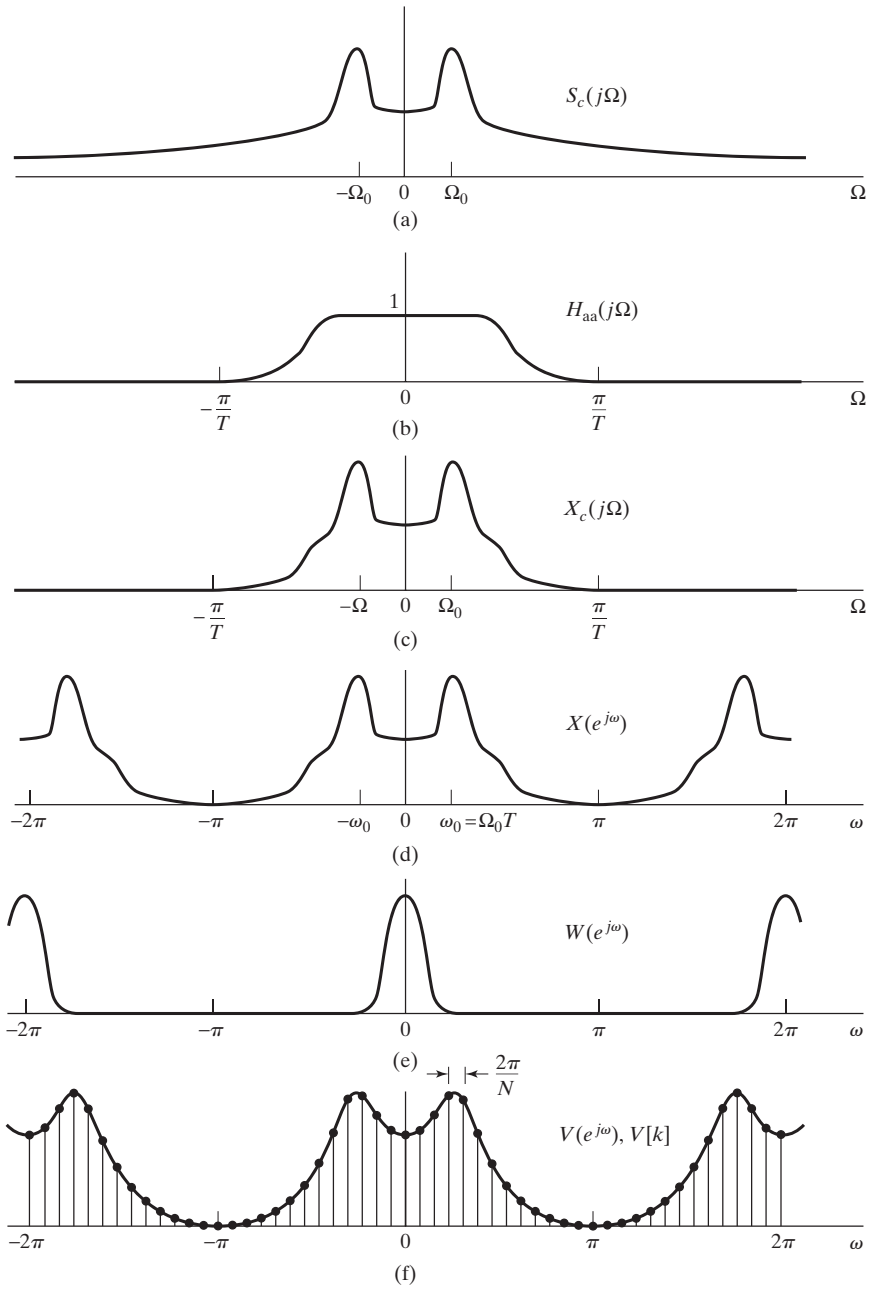


Figura 10.2 Ilustración de las transformadas de Fourier del sistema de la Figura 10.1. (a) Transformada de Fourier de la señal de entrada en tiempo continuo. (b) Respuesta en frecuencia del filtro antisolapamiento. (c) Transformada de Fourier de la salida del filtro antisolapamiento. (d) Transformada de Fourier de la señal muestreada. (e) Transformada de Fourier de la secuencia de ventana. (f) Transformada de Fourier del segmento de señal enventanada y muestras en frecuencia que se obtienen con la DFT.

lóbulos laterales son muy pequeños, lo que sugiere que la ventana se va reduciendo hacia sus extremos. En el Capítulo 7 y en la Sección 10.2 se presentaron las propiedades de las ventanas como las de Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman y Kaiser. En este punto, es suficiente observar que la convolución de $W(e^{j\omega})$ con $X(e^{j\omega})$ tenderá a suavizar los picos abruptos y las discontinuidades de $X(e^{j\omega})$. Esto se muestra en la curva continua de la Figura 10.2(f).

La operación final de la Figura 10.1 es el cómputo de la DFT. La DFT de la secuencia enventanada $v[n] = w[n]x[n]$ es

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{10.3}$$

donde suponemos que la ventana es de longitud L, menor o igual que la longitud de la DFT N. La secuencia $V[k]$, la DFT de la secuencia finita $v[n]$, corresponde a muestras equiespaciadas de la transformada de Fourier de $v[n]$; es decir,

$$V[k] = V(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}. \tag{10.4}$$

La Figura 10.2(f) muestra también $V[k]$ como muestras de $V(e^{j\omega})$. Como el espaciado entre las frecuencias de la DFT es $2\pi/N$, y la relación entre la variable de frecuencia en tiempo discreto y la variable de frecuencia en tiempo continuo es $\omega = \Omega T$, las frecuencias de la DFT corresponden a las frecuencias en tiempo continuo

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT}. \tag{10.5}$$

El uso de esta relación entre las frecuencias en tiempo continuo y las frecuencias de la DFT se ilustra en los Ejemplos 10.1 y 10.2.

Ejemplo 10.1 Análisis de Fourier utilizando la DFT

Consideremos una señal en tiempo continuo de banda limitada $x_c(t)$ tal que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(2500)$. Se desea utilizar el sistema de la Figura 10.1 para estimar el espectro en tiempo continuo $X_c(j\Omega)$. Supongamos que el filtro antisolapamiento $H_{\text{aa}}(j\Omega)$ es ideal y que la frecuencia de muestreo del conversor C/D es de $1/T = 5000$ muestras/s. Si se desea que las muestras de la DFT $V[k]$ sean equivalentes a muestras de $X_c(j\Omega)$ separadas como máximo $2\pi(10)$ rad/s o 10 Hz, ¿cuál es el mínimo valor de tamaño N de la DFT que deberíamos utilizar?

Utilizando la Ecuación (10.5) vemos que las muestras adyacentes de la DFT corresponden a frecuencias en tiempo continuo separadas $2\pi/(NT)$. Por tanto, se requiere que

$$\frac{2\pi}{NT} \leq 20\pi,$$

lo que implica que

$$N \geq 500$$

satisface la condición. Si deseamos utilizar un algoritmo de FFT de base 2 para calcular la DFT de la Figura 10.1, escogeríamos $N = 512$ para tener un espaciado equivalente en frecuencia en tiempo continuo de $\Delta\Omega = 2\pi(5000/512) = 2\pi(9{,}77)$ rad/s.

Ejemplo 10.2 Relación entre los valores de la DFT

Consideremos el problema propuesto en el Ejemplo 10.1, donde $1/T = 5000$, $N = 512$ y $x_c(t)$ es de banda suficientemente limitada como para evitar el solapamiento a la frecuencia de muestreo dada. Si se determina que $V[11] = 2000(1+j)$, ¿qué se puede decir sobre los otros valores de $V[k]$ o sobre $X_c(j\Omega)$?

Utilizando las propiedades de simetría de la DFT dadas en la Tabla 8.2, $V[k] = V^*[((-k))_N]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, y por tanto, $V[N-k] = V^*[k]$, de donde se deduce en este caso que

$$V[512-11] = V[501] = V^*[11] = 2000(1-j).$$

Sabemos también que la muestra de la DFT en $k=11$ corresponde a la frecuencia en tiempo continuo $\Omega_{11} = 2\pi(11)(5000)/512 = 2\pi(107{,}4)$, y de la misma forma, la muestra en $k = 501$ corresponde a la frecuencia $-2\pi(11)(5000)/512 = -2\pi(107{,}4)$. Aunque el enventanado suavizará el espectro, podemos decir que

$$X_c(j\Omega_{11}) = X_c(j2\pi(107{,}4)) \approx T \cdot V[11] = 0{,}4(1+j).$$

Nótese que el factor de T es necesario para compensar el factor de $1/T$ introducido por el muestreo, como aparece en la Ecuación 10.1. Podemos explotar de nuevo la simetría y concluir que

$$X_c(-j\Omega_{11}) = X_c(-j2\pi(107{,}4)) \approx T \cdot V^*[11] = 0{,}4(1-j).$$

Muchos analizadores de espectro en tiempo real comerciales se basan en los principios que ilustran las Figuras 10.1 y 10.2. Sin embargo, puede deducirse de lo expuesto anteriormente que hay numerosos factores que afectan a la interpretación de la transformada de Fourier en tiempo continuo de la entrada en función de la DFT de un segmento enventanado de la señal muestreada. Para acomodarse a estos factores y reducir sus efectos, hay que tener cuidado al filtrar y muestrear la señal de entrada. Además, para interpretar correctamente los resultados, se deben comprender claramente los efectos del enventanado en el dominio del tiempo y del muestreo en el dominio de la frecuencia inherentes a la DFT. En el resto de la exposición, supondremos que los aspectos del filtrado antisolapamiento y de la conversión de tiempo continuo a tiempo discreto se han tenido en cuenta correctamente y son despreciables. En la siguiente sección nos concentramos específicamente en los efectos del enventanado y del muestreo en el dominio de la frecuencia impuestos por la DFT. Utilizaremos señales sinusoidales en los ejemplos, dado que las sinusoides están perfectamente limitadas en banda y se pueden calcular fácilmente. Sin embargo, la mayor parte de las ideas que surgen de los ejemplos se pueden aplicar de forma más general.

10.2. ANÁLISIS DE SEÑALES SINUSOIDALES MEDIANTE LA DFT

La transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal sinusoidal $A\cos(\omega_0 n + \phi)$ (definida para todo n) es una pareja de impulsos en $+\omega_0$ y $-\omega_0$ (que se repite periódicamente con periodo 2π). Al analizar señales sinusoidales utilizando la DFT, el enventanado y el muestreo espectral tienen un efecto importante. Como veremos en la Sección 10.2.1, el enventanado suaviza o extiende los impulsos de la representación de Fourier teórica y, por tanto, la frecuencia exacta queda definida de modo menos preciso. El enventanado también reduce la capacidad de resolver señales sinusoidales cercanas en frecuencia. El muestreo en el espectro inherente a la DFT tiene el efecto potencial de dar una impresión confusa o equivocada del verdadero espectro de la señal sinusoidal. Este efecto se comenta en la Sección 10.2.3.

10.2.1. El efecto del enventanado

Consideremos una señal en tiempo continuo consistente en la suma de dos componentes sinusoidales; es decir,

$$s_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \qquad -\infty < t < \infty. \tag{10.6}$$

Suponiendo muestreo ideal sin solapamiento ni error de cuantificación, obtenemos la siguiente señal en tiempo discreto

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1), \qquad -\infty < n < \infty, \tag{10.7}$$

donde $\omega_0 = \Omega_0 T$ y $\omega_1 = \Omega_1 T$. La secuencia enventanada $v[n]$ de la Figura 10.1 es entonces

$$v[n] = A_0 w[n] \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 w[n] \cos(\omega_1 n + \theta_1). \tag{10.8}$$

Para obtener la transformada de Fourier en tiempo discreto de $v[n]$, se puede desarrollar la Ecuación (10.8) en función de exponenciales complejas, utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia que muestra la Ecuación (2.158) de la Sección 2.9.2. Concretamente, escribiendo $v[n]$ como

$$\begin{aligned} v[n] = {} & \frac{A_0}{2} w[n] e^{j\theta_0} e^{j\omega_0 n} + \frac{A_0}{2} w[n] e^{-j\theta_0} e^{-j\omega_0 n} \\ & + \frac{A_1}{2} w[n] e^{j\theta_1} e^{j\omega_1 n} + \frac{A_1}{2} w[n] e^{-j\theta_1} e^{-j\omega_1 n}, \end{aligned} \tag{10.9}$$

de donde, con la Ecuación (2.158), se deduce que la transformada de Fourier de la secuencia enventanada es

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega}) = {} & \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0} W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2} e^{-j\theta_0} W(e^{j(\omega+\omega_0)}) \\ & + \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} W(e^{j(\omega+\omega_1)}). \end{aligned} \tag{10.10}$$

De acuerdo con la Ecuación (10.10), la transformada de Fourier de la señal enventanada está formada por la transformada de Fourier de la ventana replicada en las frecuencias $\pm\omega_0$ y $\pm\omega_1$, y escalada por las amplitudes complejas de las exponenciales complejas que forman la señal.

Ejemplo 10.3 Efecto del enventanado en el análisis de Fourier de señales sinusoidales

Consideremos en este ejemplo el sistema de la Figura 10.1 y, en particular, $W(e^{j\omega})$ y $V(e^{j\omega})$ para una señal $s_c(t)$ con la forma de la Ecuación (10.6), una frecuencia de muestreo de $1/T = 10$ kHz y una ventana rectangular $w[n]$ de longitud 64. Los parámetros de amplitud y fase de la señal son $A_0 = 1$, $A_1 = 0{,}75$ y $\theta_0 = \theta_1 = 0$. Para ilustrar los aspectos esenciales, mostraremos sólo los módulos de las transformadas de Fourier.

En la Figura 10.3(a) se muestra $|W(e^{j\omega})|$ y en las Figuras 10.3(b), (c), (d) y (e) se muestra $|V(e^{j\omega})|$ para diversos valores de Ω_0 y Ω_1 en la Ecuación (10.6), o equivalentemente, de ω_0 y ω_1 en la Ecuación (10.7). En la Figura 10.3(b), $\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4$ y $\Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$, o equivalentemente, $\omega_0 = 2\pi/6$ y $\omega_1 = 2\pi/3$. En las Figuras 10.3(c)–(e), las frecuencias se van acercando progresivamente. Para los parámetros utilizados en la Figura 10.3(b), la amplitud y la frecuencia de cada una de las componentes aparecen de forma evidente. Concretamente, la Ecuación (10.10) sugiere que, como no hay solapamiento entre las réplicas de $W(e^{j\omega})$ en ω_0 y ω_1, habrá un pico de altura $32A_0$ en ω_0 y de $32A_1$ en ω_1, ya que $W(e^{j\omega})$ tiene un pico de altura 64. En la Figura 10.3(b), los dos picos están aproximadamente

en $\omega_0 = 2\pi/6$ y $\omega_1 = 2\pi/3$, con las amplitudes de pico en la relación correcta. En la Figura 10.3(c), hay mucho solapamiento entre las réplicas de la ventana en ω_0 y ω_1, y aunque hay presentes dos picos diferenciados, la amplitud del espectro en $\omega = \omega_0$ está afectada por la amplitud de la señal sinusoidal en la frecuencia ω_1 y viceversa. Esta interacción se denomina *fuga*: La componente en una frecuencia produce fugas en la vecindad de otra componente debido a la dispersión espectral introducida por la ventana. La Figura 10.3(d) muestra un caso en el que las fugas son incluso mayores. Observe que, al no sumarse en fase los lóbulos laterales, se pueden *reducir* las alturas de los picos. En la Figura 10.3(e) el solapamiento entre las ventanas espectrales en ω_0 y ω_1 es tan importante que los dos picos visibles en los casos (b)–(d) se han fundido en uno sólo. En otras palabras, con esta ventana, las dos frecuencias correspondientes a la Figura 10.3(e) no se pueden discernir en el espectro.

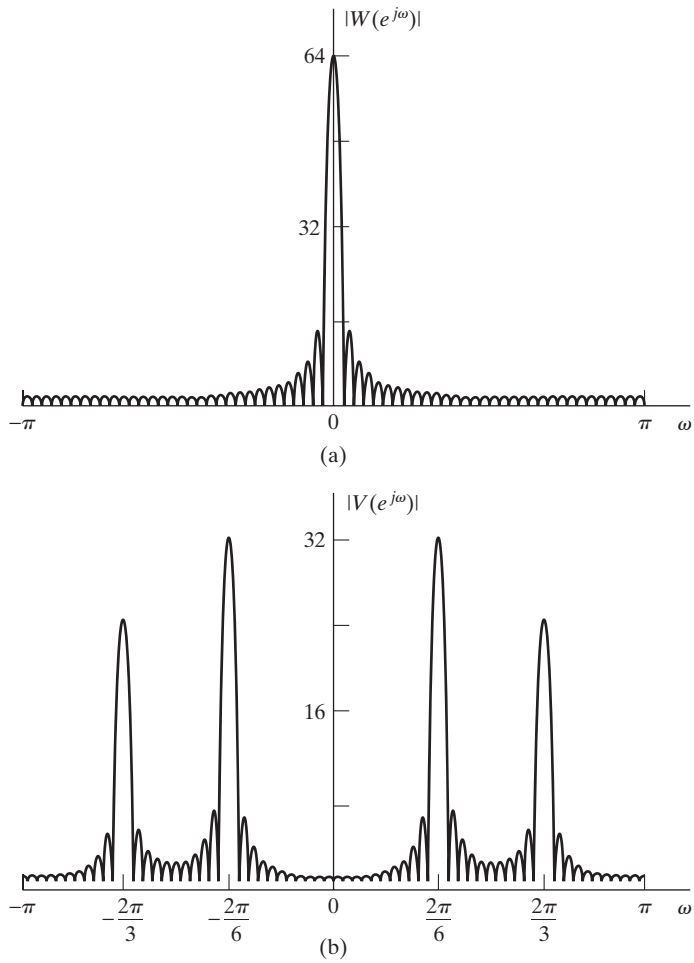


Figura 10.3 Ilustración del análisis de Fourier de cosenos enventanados con una ventana rectangular. (a) Transformada de Fourier de la ventana. (b)–(e) Transformada de Fourier de los cosenos enventanados a medida que $\Omega_1 - \Omega_0$ se va reduciendo. (b) $\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4$, $\Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$.

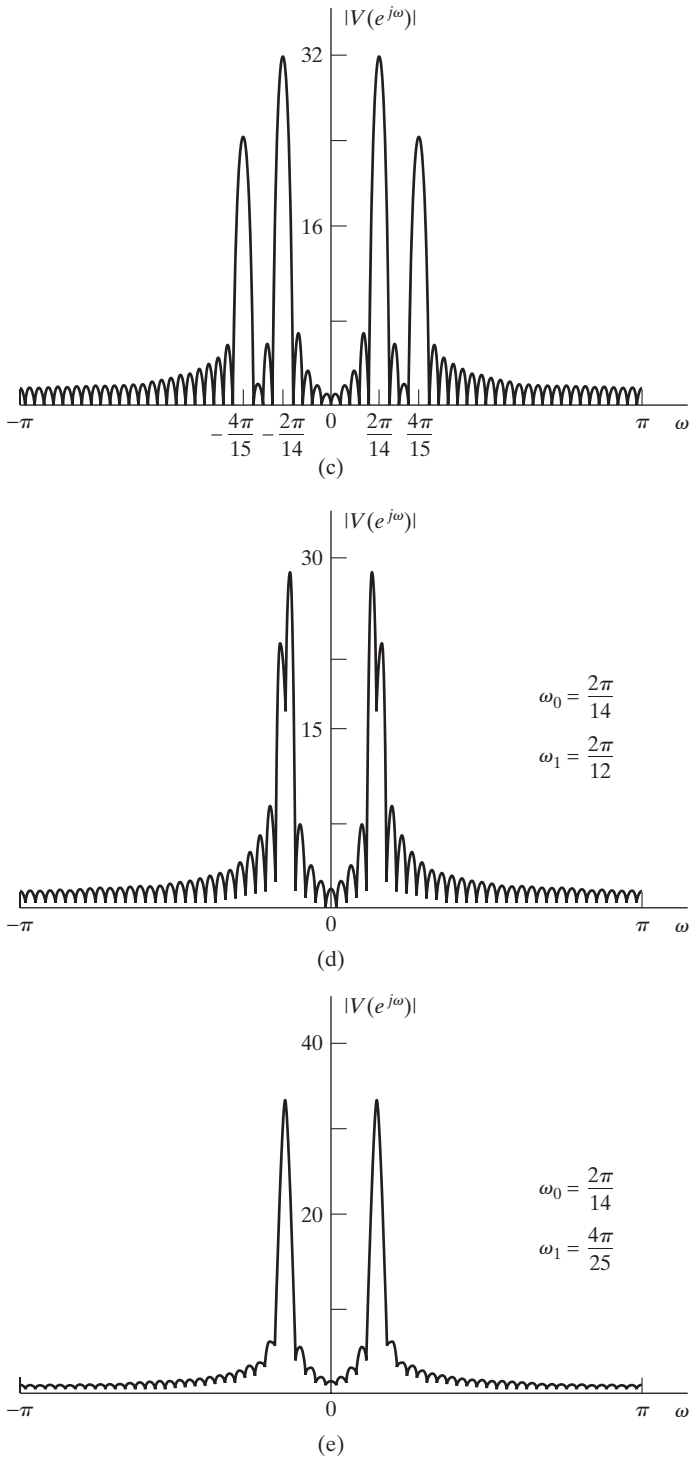


Figura 10.3 (*Continuación*) (c) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (4\pi/15) \times 10^4$. (d) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (2\pi/12) \times 10^4$. (e) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4, \Omega_1 = (4\pi/25) \times 10^4$.

10.2.2. Propiedades de las ventanas

La reducción en resolución y las fugas son los dos efectos principales en el espectro que se producen como resultado de aplicar una ventana a la señal sinusoidal. La resolución está influenciada principalmente por la anchura del lóbulo principal de $W(e^{j\omega})$, y el grado de fugas depende de la amplitud relativa del lóbulo principal frente a los lóbulos laterales de $W(e^{j\omega})$. En el Capítulo 7, en el contexto de diseño de filtros, demostramos que la anchura del lóbulo principal y la amplitud relativa de los lóbulos secundarios dependen fundamentalmente de la longitud de la ventana L y de su forma (tipo de suavizado). La ventana rectangular, cuya transformada de Fourier es

$$W_r(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(L-1)/2}\frac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}, \tag{10.11}$$

tiene el lóbulo principal más estrecho para una longitud dada ($\Delta_{ml} = 4\pi/L$), pero tiene los mayores lóbulos laterales de todas las ventanas comúnmente utilizadas. Otras ventanas que se presentaron en el Capítulo 7 son la de Bartlett, Hann y Hamming. La transformada de Fourier en tiempo discreto de todas esas ventanas tiene un lóbulo principal cuya anchura es $\Delta_{ml} = 8\pi/(L-1)$, que es aproximadamente el doble que el de la ventana rectangular, pero tienen amplitudes de los lóbulos laterales significativamente menores. El problema con todas estas ventanas es que no hay posibilidad de encontrar un compromiso ente la anchura del lóbulo principal y la amplitud de los lóbulos laterales, ya que la longitud de la ventana es el único parámetro variable.

Como se definió en el Capítulo 7, la ventana de Kaiser es

$$w_K[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le L-1, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{10.12}$$

donde $\alpha = (L-1)/2$ y $I_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de primera especie de orden cero (fíjese en que la notación de la Ecuación (10.12) difiere ligeramente de la de la Ecuación (7.72) en que, en la primera, la longitud de la ventana se indica como L, mientras que la longitud de la ventana de diseño del filtro en la Ecuación (7.72) se indica como $M+1$). Ya hemos visto en el contexto del problema de diseño de filtros que esta ventana tiene dos parámetros, β y L, que se pueden utilizar para buscar un compromiso entre la anchura del lóbulo principal y la amplitud relativa de los lóbulos secundarios (no hay que olvidar que la ventana de Kaiser se convierte en la ventana rectangular cuando $\beta = 0$). La anchura del lóbulo principal Δ_{ml} se define como la distancia simétrica entre los cruces por cero centrales. El nivel relativo de lóbulos laterales A_{sl} se define como la relación en dB entre la amplitud del lóbulo principal y la amplitud del máximo lóbulo lateral. La Figura 10.4, que es un duplicado de la Figura 7.24, muestra transformadas de Fourier de ventanas de Kaiser para diferentes longitudes y diferentes valores del parámetro β. Al diseñar una ventana de Kaiser para análisis espectral, hay que especificar un valor deseado de A_{sl} y determinar el valor requerido de β. La Figura 10.4(c) muestra que la amplitud relativa de los lóbulos laterales es esencialmente independiente de la longitud de la ventana y que por tanto depende sólo de β. Esto fue confirmado por Kaiser y Schafer (1980), quienes obtuvieron la siguiente aproximación de mínimos cuadrados de β en función de A_{sl}:

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{\mathrm{sl}} \le 13{,}26, \\ 0{,}76609(A_{\mathrm{sl}} - 13{,}26)^{0{,}4} + 0{,}09834(A_{\mathrm{sl}} - 13{,}26), & 13{,}26 < A_{\mathrm{sl}} \le 60, \\ 0{,}12438(A_{\mathrm{sl}} + 6{,}3), & 60 < A_{\mathrm{sl}} \le 120. \end{cases} \tag{10.13}$$

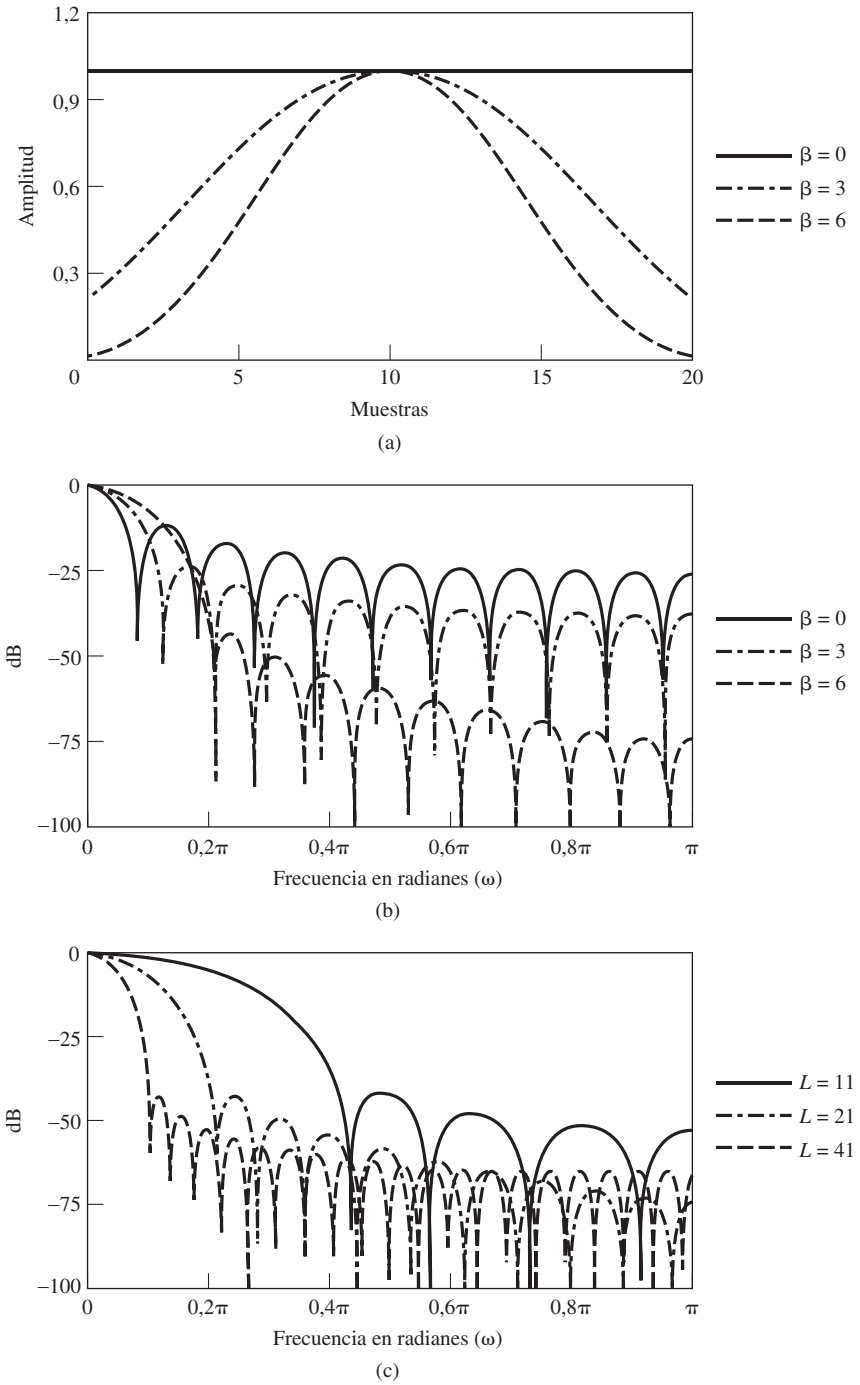


Figura 10.4 (a) Ventanas de Kaiser para $\beta = 0, 3$ y 6 con $L = 21$. (b) Transformadas de Fourier correspondientes a las ventanas de (a). (c) Transformadas de Fourier de las ventanas de Kaiser con $\beta = 6$ y $L = 11, 21$ y 41.

Utilizando los valores de β de la Ecuación (10.13) se obtienen ventanas con valores reales de lóbulos laterales que difieren en menos del 0,36 por ciento de los valores deseados en el intervalo $13{,}26 < A_{\mathrm{sl}} < 120$. (Nótese que el valor de 13,26 es la amplitud relativa de lóbulos laterales correspondiente a la ventana rectangular, a la que se reduce la ventana de Kaiser cuando $\beta = 0$.)

La Figura 10.4(c) muestra también que la anchura del lóbulo principal es inversamente proporcional a la longitud de la ventana. El compromiso entre anchura del lóbulo principal, amplitud relativa de los lóbulos laterales y longitud de la ventana se pone de manifiesto por la relación aproximada

$$L \simeq \frac{24\pi(A_{\mathrm{sl}} + 12)}{155\Delta_{\mathrm{ml}}} + 1, \tag{10.14}$$

que fue también obtenida por Kaiser y Schafer (1980).

Las Ecuaciones (10.12), (10.13) y (10.14) son las ecuaciones necesarias para determinar una ventana de Kaiser con los valores deseados de anchura del lóbulo principal y amplitud relativa de lóbulos secundarios. Para diseñar una ventana con valores especificados de A_{sl} y Δ_{ml} se requiere simplemente calcular β con la Ecuación (10.13), calcular L utilizando la Ecuación (10.14) y calcular la ventana utilizando la Ecuación (10.12). Una gran parte de los ejemplos restantes de este capítulo utilizan la ventana de Kaiser. En Harris (1978) se consideran otras ventanas para análisis espectral.

10.2.3. El efecto del muestreo del espectro

Como se dijo anteriormente, la DFT de la secuencia enventanada $v[n]$ produce muestras de $V(e^{j\omega})$ en las N frecuencias en tiempo discreto equiespaciadas $\omega_k = 2\pi k/N, k = 0, 1, \ldots, N-1$. Estas frecuencias son equivalentes a las frecuencias en tiempo continuo $\Omega_k = (2\pi k)/(NT)$, para $k = 0, 1, \ldots, N/2$ (suponiendo que N es par). Los índices $k = N/2+1, \ldots, N-1$ corresponden a las frecuencias en tiempo continuo negativas $-2\pi(N-k)/(NT)$. El muestreo en el espectro, tal como lo impone la DFT, puede producir a veces falsas interpretaciones de los resultados. Este efecto se ilustra mejor con un ejemplo.

Ejemplo 10.4 Ilustración del efecto del muestreo en el espectro

Consideremos los mismos parámetros que en la Figura 10.3(c) del Ejemplo 10.3; es decir, en la Ecuación (10.8), $A_0 = 1$, $A_1 = 0{,}75$, $\omega_0 = 2\pi/14$, $\omega_1 = 4\pi/15$ y $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $w[n]$ es la ventana rectangular de longitud 64. Entonces

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi}{14}n\right) + 0{,}75\cos\left(\dfrac{4\pi}{15}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{10.15}$$

La Figura 10.5(a) muestra la secuencia enventanada $v[n]$. Las Figuras 10.5(b), (c), (d) y (e) muestran la parte real, la parte imaginaria, el módulo y la fase, respectivamente, de la DFT de longitud $N = 64$. Observe que como $x[n]$ es real, $X[N-k] = X^*[k]$ y $X(e^{j(2\pi-\omega)}) = X^*(e^{j\omega})$. Es decir, la parte real y el módulo son funciones pares y la parte imaginaria y la fase son funciones impares de k y ω.

En las Figuras 10.5(b)–(e), el eje de frecuencias horizontal se etiqueta en función del índice de la DFT, o número k de la muestra en frecuencia. El valor $k = 32$ corresponde a $\omega = \pi$ o, equivalentemente, a $\Omega = \pi/T$. Como en el convenio usual, al mostrar la DFT de una secuencia temporal, los valores de la DFT se muestran en el intervalo de $k = 0$ a $k = N-1$, lo que corresponde a representar las muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto en el intervalo de frecuencias de 0 a 2π. Debido a la periodicidad inherente de la transformada de Fourier en tiempo discreto, la primera mitad del intervalo corresponde a las frecuencias en tiempo continuo positivas, es decir, con Ω entre 0 y π/T, y la segunda

mitad del intervalo a las frecuencias negativas, es decir, con Ω entre 0 y $-\pi/T$. Observe la simetría par periódica de la parte real y del módulo y la simetría impar periódica de la parte imaginaria y de la fase.

Recuerde que la DFT $V[k]$ es una versión muestreada de la transformada de Fourier en tiempo discreto $V(e^{j\omega})$. En las Figuras 10.5(b)–(e) se ha superpuesto sobre cada DFT, con una fina línea gris, la correspondiente transformada de Fourier en tiempo discreto, es decir, $Re\{V(e^{j\omega})\}$, $Im\{V(e^{j\omega})\}$, $|V(e^{j\omega})|$ y $\text{ARG}\{V(e^{j\omega})\}$, respectivamente. La escala de frecuencia de esas funciones es la escala normalizada definida especialmente $\omega N/(2\pi)$. Es decir, N en la escala de la DFT corresponde a $\omega = 2\pi$ en la escala de frecuencia convencional de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Seguiremos también este convenio al superponer la transformada de Fourier en tiempo discreto en las Figuras 10.6, 10.7, 10.8 y 10.9.

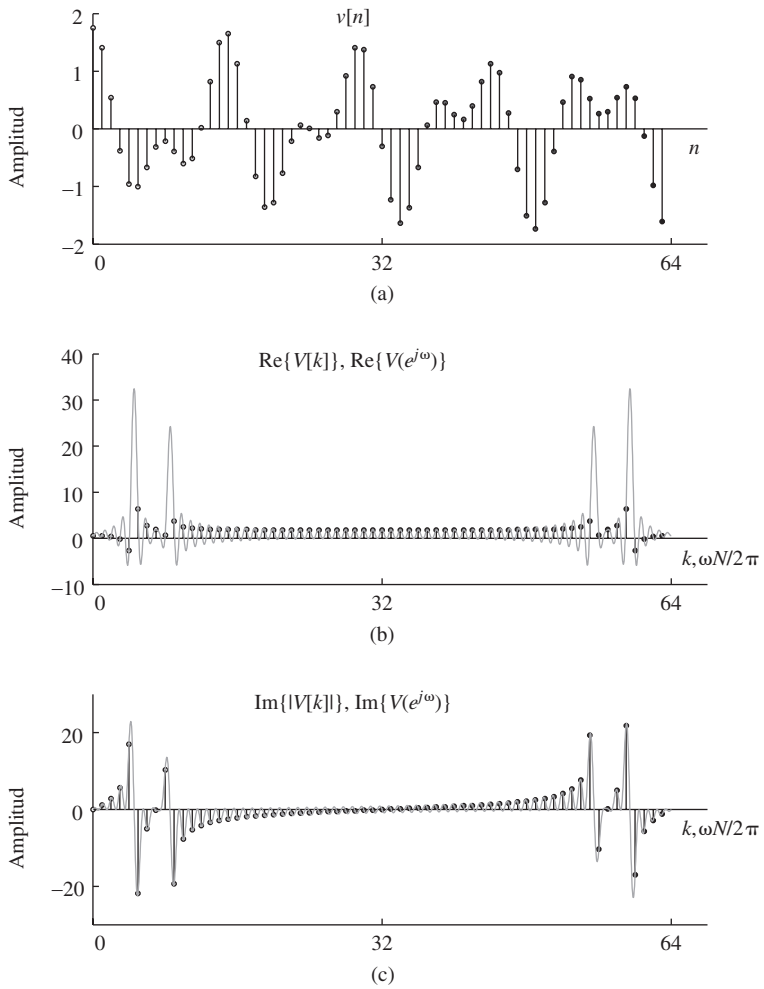


Figura 10.5 Secuencia coseno y DFT correspondiente con una ventana rectangular para $N = 64$. (a) Señal enventanada. (b) Parte real de la DFT. (c) Parte imaginaria de la DFT. Observe que la transformada de Fourier en tiempo discreto se incluye como una fina línea continua superpuesta.

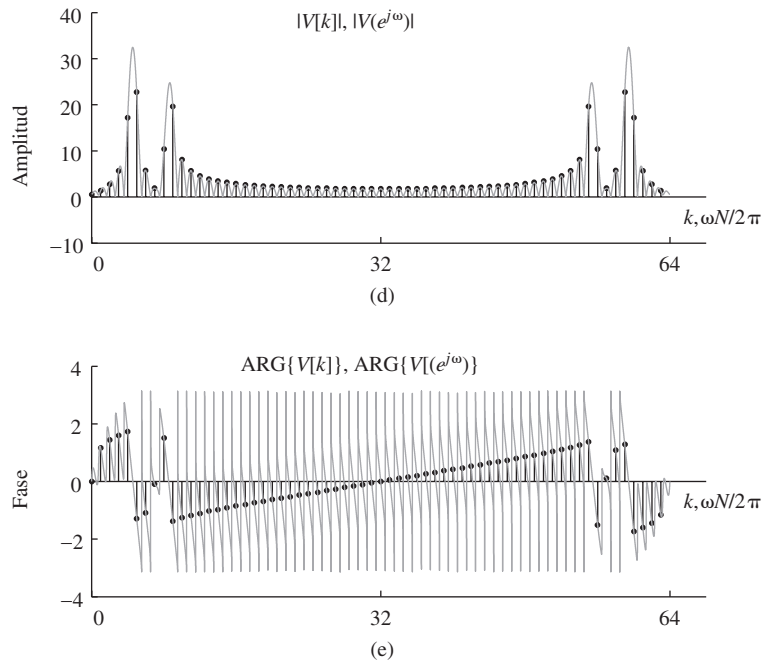


Figura 10.5 (*Continuación*) (d) Módulo de la DFT. (e) Fase de la DFT.

El módulo de la DFT de la Figura 10.5(d) corresponde a muestras de $|V(e^{j\omega})|$ (que ilustra la concentración esperada alrededor de $\omega_1 = 2\pi/7{,}5$ y $\omega_0 = 2\pi/14$, las frecuencias de las dos componentes sinusoidales de la entrada. Concretamente, la frecuencia $\omega_1 = 4\pi/15 = 2\pi(8{,}533\ldots)/64$ está entre las muestras de la DFT correspondientes a $k = 8$ y $k = 9$. Asimismo, la frecuencia $\omega_0 = 2\pi/14 = 2\pi(4{,}5714\ldots)/64$ está entre las muestras de la DFT correspondientes a $k = 4$ y $k = 5$. Observe que las posiciones en frecuencia de los picos de la línea fina gris de la Figura 10.5(d) están entre las muestras del espectro que se obtienen mediante la DFT. En general, las posiciones de los picos de los valores de la DFT no coinciden necesariamente con las posiciones exactas de los picos de la transformada de Fourier en tiempo discreto, ya que los picos verdaderos del espectro pueden estar entre dos muestras del mismo. De la misma forma, como se puede ver en la Figura 10.5(d), las amplitudes relativas de los picos de la DFT no reflejan necesariamente las amplitudes relativas de los verdaderos picos del espectro de $|V(e^{j\omega})|$.

Ejemplo 10.5 Las frecuencias de la señal coinciden exactamente con las frecuencias de la DFT

Consideremos la secuencia

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi}{16}n\right) + 0{,}75\cos\left(\dfrac{2\pi}{8}n\right), & 0 \le n \le 63, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{10.16}$$

que se muestra en la Figura 10.6(a). De nuevo se utiliza una ventana rectangular con $N = L = 64$. Esto es muy semejante al ejemplo anterior, excepto porque, en este caso, las frecuencias de los cosenos coinciden exactamente con dos de las frecuencias de la DFT. Concretamente, la frecuencia

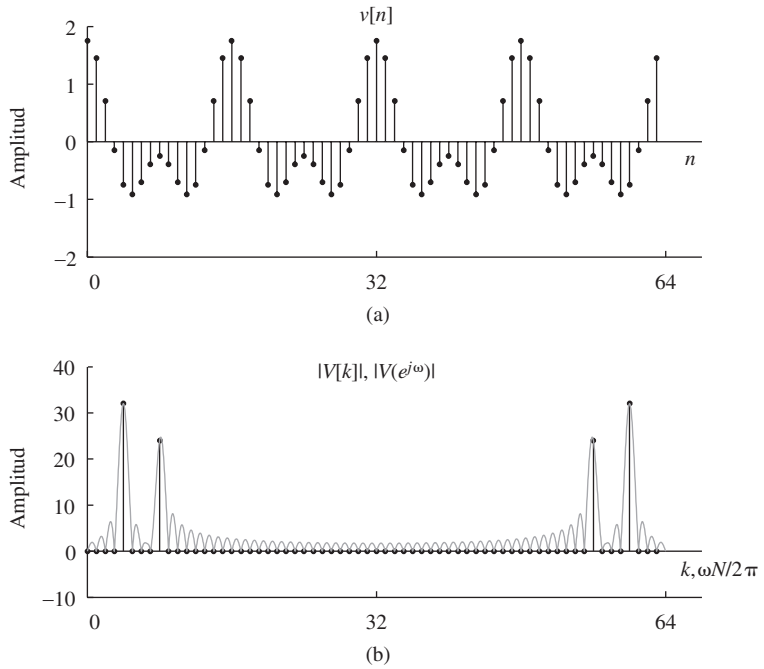


Figura 10.6 Análisis discreto de Fourier de la suma de dos sinusoides para el caso en el que la transformada de Fourier es cero en todas las frecuencias de la DFT, excepto en aquellas correspondientes a las frecuencias de las dos componentes sinusoidales. (a) Señal enventanada. (b) Módulo de la DFT. Observe que $|V(e^{j\omega})|$ se incluye como una línea fina y continua superpuesta.

$\omega_1 = 2\pi/8 = 2\pi 8/64$ corresponde exactamente a la muestra de la DFT en $k = 8$ y la frecuencia $\omega_0 = 2\pi/16 = 2\pi 4/64$ a la muestra de la DFT en $k = 4$.

La Figura 10.6(b) muestra el módulo de la DFT de 64 puntos de $v[n]$ en este ejemplo, que corresponde a muestras de $|V(e^{j\omega})|$ (de nuevo superpuesta con una línea fina) con un espaciado de frecuencias de $2\pi/64$. Aunque los parámetros de la señal en este ejemplo y en el Ejemplo 10.4 son muy similares, la apariencia de la DFT es muy diferente. En concreto, en este ejemplo, la DFT presenta dos líneas espectrales en las frecuencias correspondientes a las componentes sinusoidales de la señal, y no hay contenido en frecuencia en otros valores de la DFT. De hecho, esta limpia apariencia de la DFT de la Figura 10.6(b) es debida a una ilusión resultante del muestreo del espectro. Observando la Figura 10.6(b), podemos ver que la razón de la clara apariencia del espectro de la Figura 10.6(b) es que, para esta selección de parámetros, la transformada de Fourier vale cero en las frecuencias muestreadas por la DFT, excepto en las muestras correspondientes a $k = 4, 8, 64-8$ y $64-4$. Aunque la señal de la Figura 10.6(a) tiene un contenido significativo en casi todas las frecuencias, como puede verse en la línea gris de la Figura 10.6(b), esto no se ve en la DFT debido al muestreo del espectro. Otra forma de entender esto es darse cuenta de que la ventana rectangular de 64 puntos selecciona exactamente un número entero de periodos de las dos componentes sinusoidales de la Ecuación (10.16). La DFT de 64 puntos corresponde entonces a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, repetidos con periodo 64. Esta señal replicada tendrá sólo cuatro coeficientes del desarrollo en serie distintos de cero que corresponden a las dos componentes sinusoidales de la Ecuación (10.16). Esto es un ejemplo de cómo el supuesto inherente de periodicidad produce una respuesta correcta a un problema diferente. Nuestro interés se centra en el caso de longitud finita y los resultados pueden llevar a confusión desde ese punto de vista.

Para ilustrar aún más este punto, podemos ampliar $v[n]$ en la Ecuación (10.16), rellenando con ceros hasta obtener una secuencia de 128 puntos. La correspondiente DFT de 128 puntos se muestra en la Figura 10.7. Con este muestreo más fino del espectro, resulta clara la presencia de contenido espectral a otras frecuencias. En este caso, la señal enventanada *no* es naturalmente periódica de periodo 128.

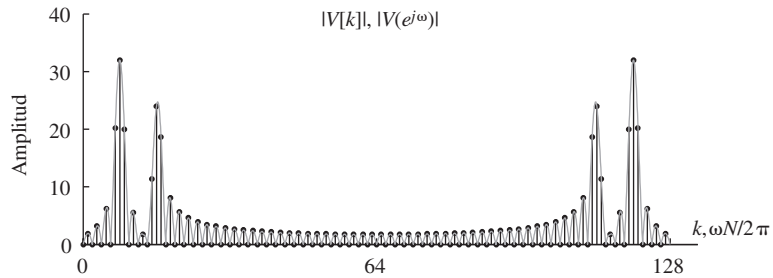


Figura 10.7 DFT de la señal de la Figura 10.6(a), pero duplicando el número de muestras en frecuencia utilizadas en la Figura 10.6(b).

En las Figuras 10.5, 10.6 y 10.7 las ventanas son rectangulares. En el siguiente conjunto de ejemplos ilustramos el efecto de cambiar el tipo de ventana.

Ejemplo 10.6 Análisis mediante la DFT de señales sinusoidales utilizando la ventana de Kaiser

En este ejemplo volvemos a utilizar los parámetros de amplitud, frecuencia y fase del Ejemplo 10.4, pero ahora aplicando una ventana de Kaiser, de forma que

$$v[n] = w_K[n]\cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0{,}75 w_K[n]\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), \tag{10.17}$$

siendo $w_K[n]$ la ventana de Kaiser dada por la Ecuación (10.12). Tomaremos como parámetro de la ventana $\beta = 5{,}48$, que, de acuerdo con la Ecuación (10.13), produce una ventana para la que la amplitud de los lóbulos laterales es $A_{\mathrm{sl}} = 40$ dB. La Figura 10.8(a) muestra la secuencia enventanada $v[n]$ para una longitud de ventana de $L = 64$ y la Figura 10.8(b) muestra el módulo de la correspondiente DFT. Utilizando la Ecuación (10.17), vemos que la diferencia entre las dos frecuencias es de $\omega_1 - \omega_0 = 2\pi/7{,}5 - 2\pi/14 = 0{,}389$. De la Ecuación (10.14), se deduce que la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana de Kaiser con $L = 64$ y $\beta = 5{,}48$ es $\Delta_{\mathrm{ml}} = 0{,}401$. Por tanto, los lóbulos principales de las dos réplicas de $W_K(e^{j\omega})$ centradas en ω_0 y ω_1 se solaparán ligeramente en el intervalo entre esas dos frecuencias. Esto resulta evidente observando la Figura 10.8(b), donde podemos ver que las dos componentes en frecuencia se resuelven claramente.

La Figura 10.8(c) muestra la misma señal multiplicada por una ventana de Kaiser con $L = 32$ y $\beta = 5{,}48$. Como la ventana tiene la mitad de longitud, el ancho del lóbulo principal de la transformada de Fourier se duplica, lo que se puede confirmar en la Figura 10.8(d). Concretamente, las Ecuaciones (10.13) y (10.14) confirman que para $L = 32$ y $\beta = 5{,}48$, la anchura del lóbulo principal tiene una anchura de $\Delta_{\mathrm{ml}} = 0{,}815$. Ahora los lóbulos principales de las dos copias de la transformada de Fourier de la ventana se solapan en la región comprendida entre las dos frecuencias de los cosenos, por lo que no se distinguen dos picos diferentes.

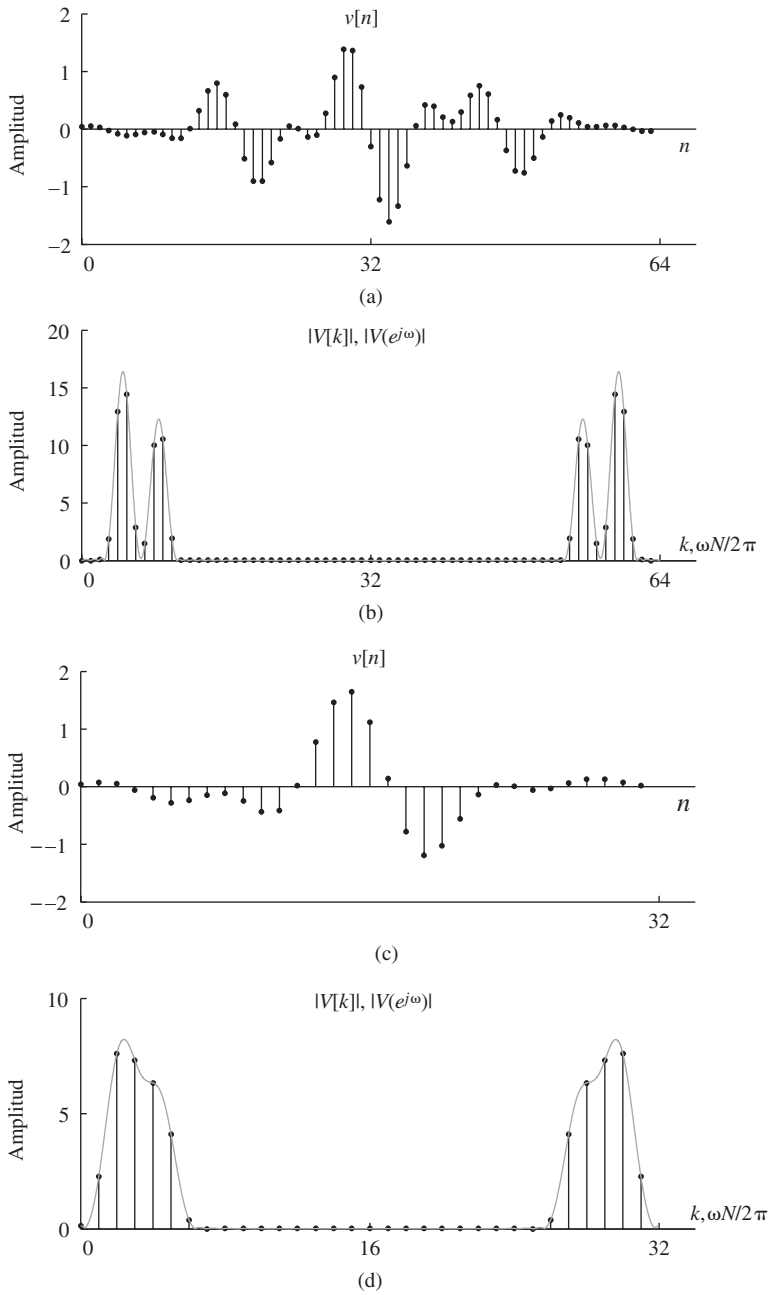


Figura 10.8 Análisis de Fourier discreto con ventana de Kaiser. (a) Secuencia enventanada para $L = 64$. (b) Módulo de la DFT para $L = 64$. (c) Secuencia enventanada para $L = 32$. (d) Módulo de la DFT para $L = 32$.

En todos los ejemplos anteriores excepto en la Figura 10.7, la longitud de la DFT, N, era igual a la longitud de la ventana, L. En la Figura 10.7, la secuencia enventanada se ha rellenado con ceros antes de calcular la DFT, para obtener la transformada de Fourier en un conjunto de frecuencias dividido

más finamente. Sin embargo, debe advertirse que el relleno con ceros no mejora la resolución, ya que depende de la longitud y de la forma de la ventana. Esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.7 Análisis mediante la DFT con una ventana de Kaiser de 32 puntos y relleno con ceros

En este ejemplo, repetimos el Ejemplo 10.6 utilizando la ventana de Kaiser con $L = 32$ y $\beta = 5{,}48$, variando la longitud de la DFT. La Figura 10.9(a) muestra el módulo de la DFT para $N = L = 32$ como en la Figura 10.8(d). Las Figuras 10.9(b), (c) y (d) muestran el módulo de la DFT de nuevo con $L = 32$, pero con longitudes de la DFT de $N = 64$ y $N = 128$, respectivamente. Como en el Ejemplo 10.5, este relleno con ceros de la secuencia de 32 puntos produce un muestreo más fino en el espectro de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Como muestra la curva fina continua, la envolvente subyacente del módulo de la DFT en la Figura 10.9 es la misma. Por tanto, al incrementar la longitud de la DFT añadiendo ceros no se cambia la capacidad de discernir las dos componentes sinusoidales en

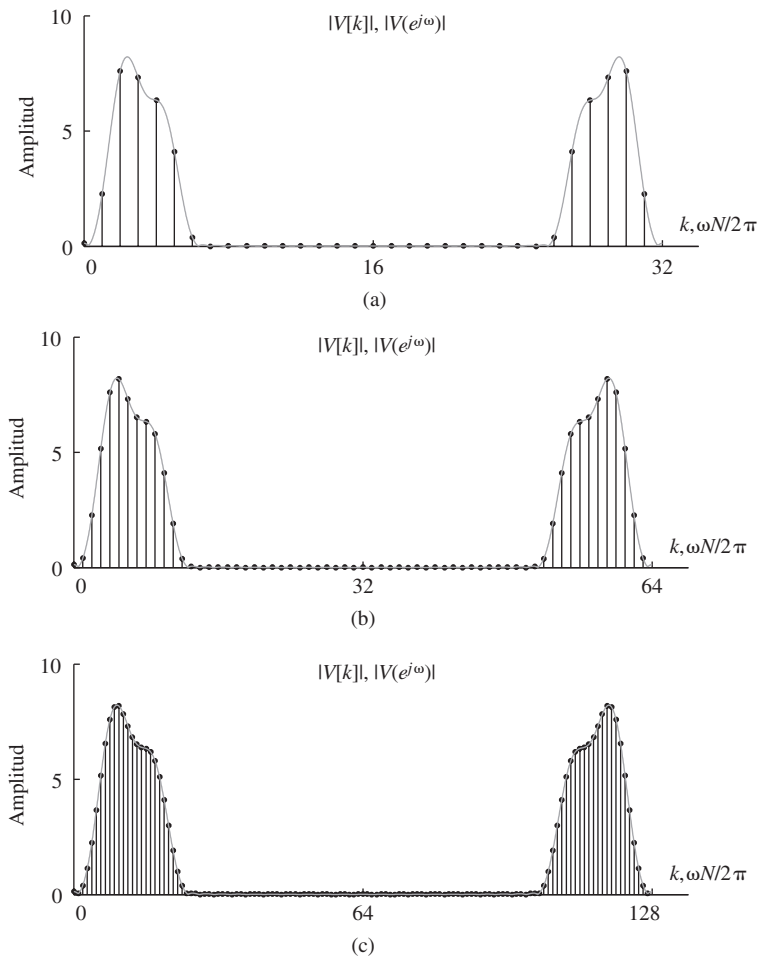


Figura 10.9 Ilustración del efecto de la longitud de la DFT para una ventana de Kaiser de longitud $L = 32$. (a) Módulo de la DFT para $N = 32$. (b) Módulo de la DFT para $N = 64$. (c) Módulo de la DFT para $N = 128$.

frecuencia, sino que sólo se cambia el espaciado de las muestras en frecuencia. Si N se incrementara más allá del valor de 128, los puntos que indican los valores de las muestras de la DFT tenderían a unirse y se harían indistinguibles. En consecuencia, los valores de la DFT a menudo se representan uniendo con segmentos rectos los puntos consecutivos, sin resaltar cada punto individual. Por ejemplo, en las Figuras 10.5 a 10.8 hemos incluido una fina línea continua para representar el módulo de la transformada de Fourier en tiempo discreto $|V(e^{j\omega})|$ de la secuencia de longitud finita $v[n]$. De hecho, esta curva es una gráfica de la DFT de la secuencia tras rellenar con ceros a una longitud de 2048. En estos ejemplo, este muestreo de la DFT es lo suficientemente denso como para que sea indistinguible de la función de la variable continua ω.

Una DFT de longitud L es suficiente para una representación completa de una secuencia de longitud L, ya que dicha secuencia se puede recuperar de forma exacta a partir de la DFT. Sin embargo, como hemos visto en los ejemplos anteriores, un examen simple de la DFT de L puntos puede conducir a interpretaciones erróneas. Por este motivo, es común aplicar relleno con ceros de forma que el espectro esté suficientemente sobremuestreado y las características importantes se hagan aparentes. Con un relleno con ceros importante en el dominio del tiempo o, equivalentemente, un sobremuestreo importante en el dominio de la frecuencia, una interpolación simple (por ejemplo, interpolación lineal), entre los valores de la DFT puede producir una representación razonablemente precisa del espectro de Fourier, que se puede utilizar, por ejemplo, para estimar las posiciones y las amplitudes de los picos del espectro. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.8 Sobremuestreo e interpolación lineal para estimación de frecuencias

La Figura 10.10 muestra cómo se puede utilizar una DFT de 2048 puntos para obtener una evaluación finamente espaciada de la transformada de Fourier de una señal enventanada, y cómo al aumentar la longitud de la ventana se mejora la capacidad de resolver componentes sinusoidales cercanas. La señal del Ejemplo 10.6 que tiene frecuencias en $2\pi/14$ y $4\pi/15$ se enventana con ventanas de Kaiser de longitudes $L = 32$, 42, 54, y 64 con $\beta = 5{,}48$. Observe en primer lugar que, en todos los casos, la DFT de 2048 puntos produce un resultado suave cuando los puntos se conectan mediante líneas rectas. En la Figura 10.10(a), con $L = 32$, las dos componentes sinusoidales no se distinguen, y por supuesto, al aumentar la longitud de la DFT sólo se conseguirá una curva más suave. A medida que aumenta la longitud de la ventana de $L = 32$ a $L = 42$, vemos una mejora en nuestra capacidad de distinguir las dos frecuencias y las amplitudes aproximadas de cada componente sinusoidal. Las líneas discontinuas en las figuras

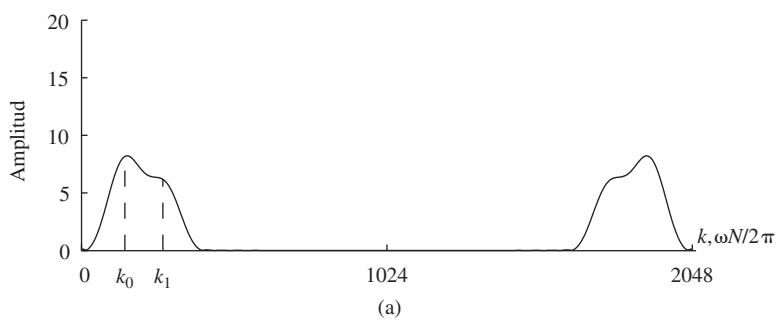


Figura 10.10 Ilustración del cálculo de la DFT para $N \gg L$ con interpolación lineal para crear una curva suave. (Los valores $k_0 = 146 \approx 2048/14$ y $k_1 = 273 \approx 4096/15$ son las frecuencias de la DFT más cercanas a $\omega_0 = 2/14$ y $\omega_1 = 4/15$, cuando la longitud de la DFT es $N = 2048$.) (a) $N = 1024$, $L = 32$.

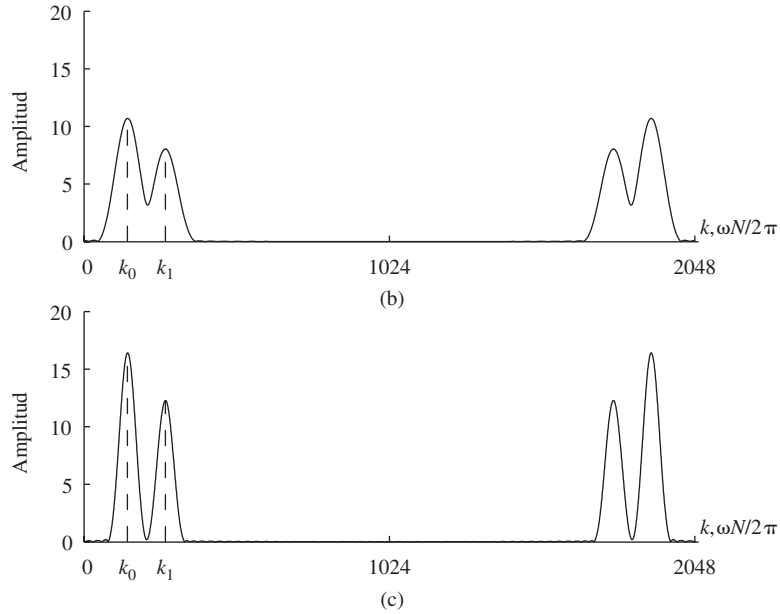


Figura 10.10 *Continuación* (b) $N = 1024$, $L = 42$. (c) $N = 1024$, $L = 64$.

corresponden a los índices de la DFT $k_0 = 146 \approx 2048/14$ y $k_1 = 273 \approx 4096/15$, que corresponden a las frecuencias más cercanas de las componentes coseno. Nótese que la DFT de 2048 puntos de la Figura 10.10(c) sería mucho más efectiva para localizar de forma precisa el pico de la transformada de Fourier enventanada que la DFT muestreada menos finamente de la Figura 10.8(b), que también se ha calculado con una ventana de Kaiser de 64 puntos. Fíjese también en que las amplitudes de los dos picos de la Figura 10.10 son muy cercanas a la relación correcta de $0,75$ a 1.

10.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEPENDIENTE DEL TIEMPO

En la Sección 10.2 hemos presentado el uso de la DFT para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de una señal compuesta por componentes sinusoidales. En esa exposición se ha supuesto que las frecuencias de los cosenos no cambian con el tiempo, de forma que, independientemente, de la longitud de la ventana, las propiedades de la señal (amplitudes, frecuencias y fases) serán las mismas desde el comienzo hasta el final de la ventana. Las ventanas largas producen mayor resolución en frecuencia, pero en aplicaciones prácticas de modelos de señales sinusoidales, las propiedades de la señal (es decir, amplitudes, frecuencia) a menudo cambian con el tiempo. Por ejemplo, son necesarios modelos de señal no estacionarios de este tipo para describir señales radar, sonar, de voz y de comunicación de datos. Una sola DFT no es suficiente para describir esas señales y como resultado, llegamos al concepto de *transformada de Fourier dependiente del tiempo*, denominada también transformada de Fourier de tiempo corto.[1]

La transformada de Fourier dependiente del tiempo de una señal $x[n]$ se define como

$$X[n,\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}, \tag{10.18}$$

[1]Hay muchas referencias donde se puede encontrar una ampliación de esta presentación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo, entre las que citamos Allen y Rabiner (1977), Rabiner y Schafer (1978) Crochiere y Rabiner (1983) y Quatieri (2002).

siendo $w[n]$ una secuencia de ventana. En la representación de Fourier dependiente del tiempo, la secuencia unidimensional $x[n]$, función de una única variable discreta, se convierte en una función bidimensional de la variable temporal n, que es discreta, y de la variable de frecuencia λ, que es continua.[2] Nótese que la transformada de Fourier dependiente del tiempo es periódica en λ con periodo 2π y, por tanto, sólo es necesario considerar valores de λ en el intervalo $0 \leq \lambda < 2\pi$ o en cualquier otro intervalo de longitud 2π.

La Ecuación (10.18) se puede interpretar como la transformada de Fourier de la señal desplazada $x[n+m]$, vista a través de la ventana $w[m]$. La ventana tiene un origen estacionario y, a medida que n cambia, la señal se desliza por la ventana de forma que en cada valor de n se ve una parte diferente de la señal. Como ilustración consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.9 Transformada de Fourier dependiente del tiempo de una señal chirp lineal

Una señal *chirp* lineal en tiempo continuo se define como

$$x_c(t) = \cos(\theta(t)) = \cos(A_0 t^2), \tag{10.19}$$

donde A_0 tiene unidades de radianes/s^2, (el nombre de estas señales se debe a que, en el rango de frecuencias auditivas, los pulsos cortos suenan como cantos de pájaros.)[3] La señal $x_c(t)$ en la Ecuación (10.19) es un miembro de una clase más general de señales con modulación en frecuencia (FM, *Frequency Modulation*), en las que su *frecuencia instantánea* se define como la derivada con respecto al tiempo del argumento del coseno $\theta(t)$. Por tanto, en este caso, la frecuencia instantánea es

$$\Omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_0 t^2\right) = 2A_0 t, \tag{10.20}$$

que varía proporcionalmente con el tiempo. Por consiguiente, se denomina señal *chirp lineal*. Si muestreamos $x_c(t)$, se obtiene la señal *chirp* lineal en tiempo discreto.[4]

$$x[n] = x_c(nT) = \cos(A_0 T^2 n^2) = \cos(\alpha_0 n^2), \tag{10.21}$$

donde $\alpha_0 = A_0 T^2$ tiene unidades de radianes. La frecuencia instantánea de la señal *chirp* muestreada es una versión muestreada y normalizada en frecuencia de la frecuencia instantánea de la señal en tiempo continuo, es decir,

$$\omega_i[n] = \Omega_i(nT) \cdot T = 2A_0 T^2 n = 2\alpha_0 n, \tag{10.22}$$

que muestra el mismo incremento proporcional con el índice de muestra n, controlando α_0 la tasa de incremento. La Figura 10.11 muestra dos segmentos de 1021 muestras de la señal chirp muestreada correspodiente a la Ecuación (10.21), con $\alpha_0 = 15\pi \times 10^{-6}$, (las muestras están unidas, a efectos de representación, por líneas rectas). Obsérvese que en un intervalo corto, la señal parece sinusoidal, pero el intervalo entre picos consecutivos se va haciendo cada vez más pequeño a medida que el tiempo progresa, indicando un incremento de la frecuencia con el tiempo.

---

[2]Denominaremos λ a la variable de frecuencia de la transformada de Fourier dependiente del tiempo para diferenciarla de la variable de frecuencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto convencional, que se denomina ω. Utilizamos la notación de corchete-paréntesis $X[n,\lambda)$ como recordatorio de que n es una variable discreta y λ una variable continua.

[3]La palabra inglesa *chirp* significa canto de pájaro (N. del T.).

[4]En el Capítulo 9 hemos visto señales *chirp* exponenciales complejas lineales en tiempo discreto, en el contexto del algoritmo de la transformada *chirp*.

La relación de la señal desplazada con la ventana se ilustra en la Figura 10.11. En la Ecuación (10.18), $w[m]$ tiene generalmente longitud finita alrededor de $m = 0$, de forma que $X[n,\lambda)$ muestra las características en frecuencia de la señal en los alrededores del instante n. Por ejemplo, la Figura 10.11(a) muestra $x[320+m]$ en función de m para $0 \leq m \leq 1200$, junto con una ventana de Hamming $w[m]$ de longitud 401 muestras. La transformada dependiente del tiempo en el instante $n = 320$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de $w[m]x[320+m]$. De forma similar, la Figura 10.11(b) muestra la ventana y un segmento posterior de la señal *chirp* que comienza en la muestra $n = 720$.

La Figura 10.12 ilustra la importancia de la ventana en el análisis de Fourier en tiempo discreto de señales que varían con el tiempo. La Figura 10.12(a) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de 20.000 muestras (utilizando una ventana rectangular) de la señal *chirp* en tiempo discreto. En este intervalo, la frecuencia instantánea normalizada de la señal *chirp* es

$$f_i[n] = \omega_i[n]/(2\pi) = 2\alpha_0 n/(2\pi),$$

y va desde 0 a $0{,}00003\pi(20.000)/(2\pi) = 0{,}3$. La variación de la frecuencia instantánea fuerza a que la representación mediante la transformada de Fourier en tiempo discreto, basada en frecuencias fijas que actúan sobre todo n, incluya todas las frecuencias en ese intervalo y más allá, como resulta evidente en la Figura 10.12(a). Por tanto, la transformada de Fourier en tiempo discreto de un segmento largo de la señal sólo muestra que la señal tiene un ancho de banda grande en el sentido de la transformada de Fourier en tiempo discreto convencional. Por otra parte, las Figuras 10.12(b) y (c) muestran transformadas de Fourier en tiempo discreto utilizando una ventana de Hamming de 401 puntos para segmentos de la señal *chirp* en $n = 5000$ y 15.000, respectivamente. Por tanto, las Figuras 10.12(b) y (c) son gráficas [como funciones de $\lambda/(2\pi)$] de los valores de la transformada de Fourier dependiente del tiempo $|X[5000,\lambda)|$ y $|X[15.000,\lambda)|$, respectivamente. Como la longitud de la ventana es tal que la señal no cambia mucho su frecuencia en el intervalo de la ventana, la transformada de Fourier dependiente del tiempo sigue

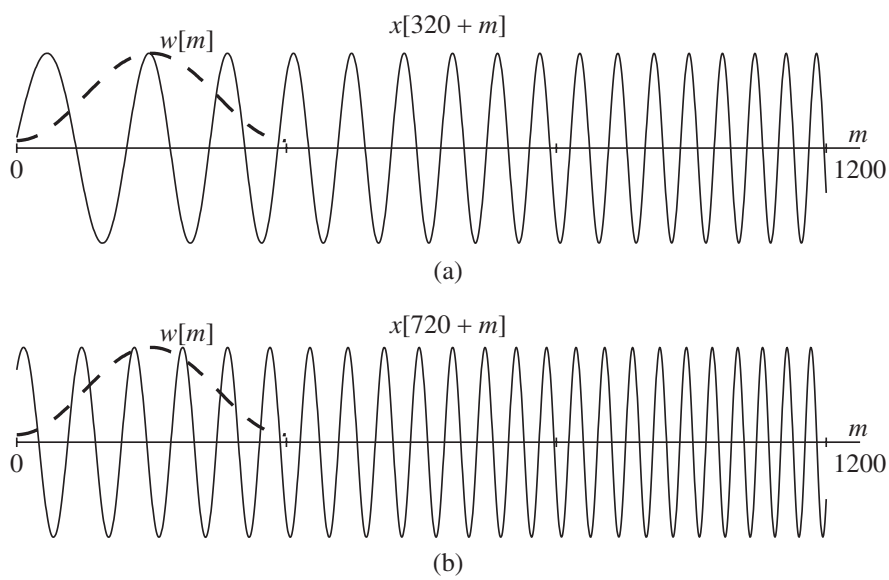


Figura 10.11 Dos segmentos de la señal *chirp* lineal $x[n] = \cos(\alpha_0 n^2)$ para $\alpha_0 = 15\pi \times 10^{-6}$ con una ventana Hamming de 400 puntos superpuesta. (a) $X[n,\lambda)$ en $n = 320$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal de la parte superior multiplicada por la ventana. (b) $X[720,\lambda)$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal de la parte inferior multiplicada por la ventana.

muy bien la variación en frecuencia. Nótese que en las muestras 5000 y 15.000 debe aparecer un pico en la transformada dependiente del tiempo situado en $\lambda/(2\pi) = 0{,}00003\pi(5000)/(2\pi) = 0{,}075$ y $\lambda/(2\pi) = 0{,}00003\pi(15.000)/(2\pi) = 0{,}225$, respectivamente. Esto queda confirmado examinando las Figuras 10.12(b) y (c).

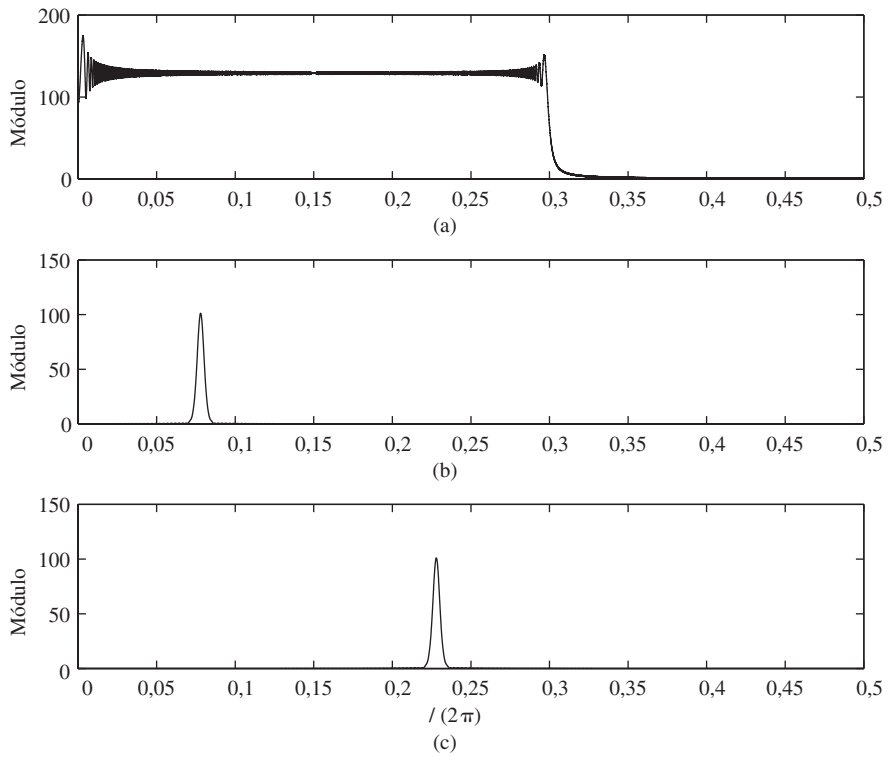


Figura 10.12 Transformadas de Fourier en tiempo discreto de una señal *chirp* lineal. (a) Transformada de Fourier en tiempo discreto de 20000 muestras de la señal $x[n] = \cos(\alpha_0 n^2)$. (b) Transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[5000+m]w[m]$ siendo $w[m]$ una ventana de Hamming de longitud $L = 401$; es decir, $X[5000,\lambda)$. (c) Transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[15.000+m]w[m]$ siendo $w[m]$ una ventana de Hamming de longitud $L = 401$; es decir, $X[15.000,\lambda)$.

Ejemplo 10.10 Representación gráfica de $X[n,\lambda)$: el espectrograma

En la Figura 10.13 se muestra una representación en función del índice n y la frecuencia $\lambda/(2\pi)$ del módulo de la transformada de Fourier dependiente del tiempo, $|Y[n,\lambda)|$ para la señal

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \cos(\alpha_0 n^2) & 0 \le n \le 20.000 \\ \cos(0{,}2\pi n) & 20.000 < n \le 25.000 \\ \cos(0{,}2\pi n) + \cos(0{,}23\pi n) & 25.000 < n. \end{cases} \tag{10.23}$$

Nótese que la señal $y[n]$ es igual a la señal $x[n]$ de la Ecuación (10.21) en el Ejemplo 10.9 en el intervalo $0 \le n \le 20.000$, y después, para $n > 20.000$ cambia abruptamente a componentes de tipo co-

seno con frecuencias fijas. La señal se ha diseñado para poner de manifiesto varios aspectos importantes del análisis de Fourier dependiente del tiempo. En primer lugar, consideremos la Figura 10.13(a), que muestra la transformada de Fourier dependiente del tiempo de $y[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq 30.000$ con una ventana de Hamming de longitud $L = 401$. La representación, que muestra $20\log_{10}|Y[n,\lambda)|$ en función de $\lambda/2\pi$ en la dimensión vertical, y el índice temporal n en la dimensión horizontal, se denomina *espectrograma*. El valor $20\log_{10}|Y[n,\lambda)|$ en un intervalo restringido de 50 dB se representa por el nivel de oscuro de gris de la marca en $[n,\lambda)$. Las gráficas de las Figuras 10.12(b) y (c) son segmentos verticales (que representan el módulo en la Figura 10.12) en el espectrograma en $n = 5000$ y $n = 15.000$, respectivamente, en la posición de las líneas de trazos en la Figura 10.13(a). Nótese la progresión lineal durante el intervalo del *chirp*. Observe también que durante los intervalos de frecuencia constante, la línea oscura permanece horizontal. La anchura de la línea oscura en la Figura 10.13(a) depende de la anchura del lóbulo principal Δ_{ml} de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la ventana. La Tabla 7.2 indica que para la ventana de Hamming, esta anchura vale aproximadamente $\Delta_{\text{ml}} = 8\pi/M$, siendo $M+1$ la longitud de la ventana. Para una ventana de 401 puntos, $\Delta_{\text{ml}}/(2\pi) = 0{,}01$. Por tanto, los dos cosenos cercanos en frecuencia se resuelven claramente en el intervalo $25.000 < n \leq 30.000$, ya que su diferencia normalizada de frecuencias es $(0{,}23\pi - 0{,}2\pi)/(2\pi) = 0{,}015$, significativamente mayor que la anchura del lóbulo principal, que es $0{,}01$. Observe que la anchura vertical de la recta oscura inclinada durante el intervalo del *chirp* es mayor que la de las rectas horizontales que representan los intervalos de frecuencia constante. Esta anchura adicional es causada por la variación en frecuencia durante la ventana y es una versión a pequeña escala del efecto que muestra la Figura 10.12(a), donde la variación durante la ventana de 20.000 muestras es mucho mayor.

La imagen de la Figura 10.13(a) ilustra otro importante aspecto del análisis de Fourier dependiente del tiempo. La ventana de 401 muestras proporciona una buena resolución en frecuencia en casi todos los instantes temporales. Sin embargo, nótese que en $n = 20.000$ y 25.000, las propiedades de la

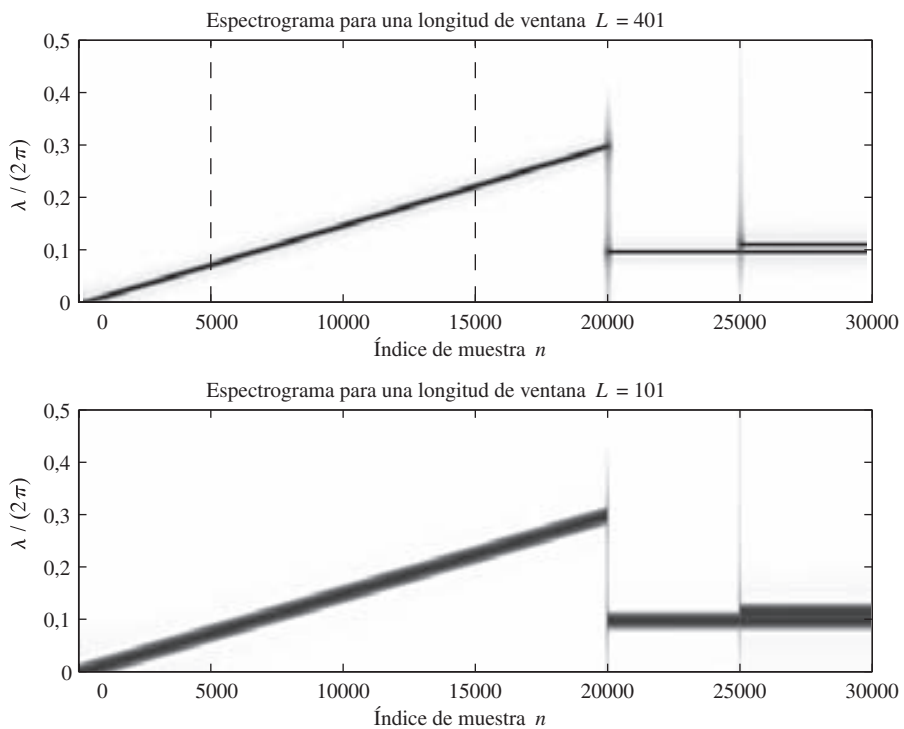


Figura 10.13 Módulo de la transformada de Fourier dependiente del tiempo de $y[n]$ en la Ecuación (10.23). (a) Utilizando una ventana de Hamming de longitud $L = 401$. (b) Utilizando una ventana de Hamming de longitud $L = 101$.

señal cambian abruptamente, de forma que en un intervalo de 401 muestras alrededor de esos instantes, la ventana contiene muestras a ambos lados del instante del cambio. Esto produce un área difusa donde las propiedades de la señal son representadas de forma mucho menos clara por el espectrograma. Podemos mejorar la capacidad de resolver eventos en la dimensión temporal acortando la longitud de la ventana. Esto se ilustra en la Figura 10.13(b), donde la longitud de la ventana es $L = 101$. Los puntos de cambio quedan mucho mejor resueltos con esta ventana. Sin embargo, la anchura normalizada del lóbulo principal con una ventana de Hamming de 101 puntos es $\Delta_{\mathrm{ml}}/(2\pi) = 0{,}04$, y la separación en frecuencia de los dos cosenos en $n = 25.000$ es sólo de $0{,}015$ en frecuencia normalizada. Por tanto, la Figura 10.13(b) muestra claramente que las dos frecuencias no quedan resueltas con la ventana de 101 muestras, aunque la localización de los cambios bruscos de la señal se resuelven en el tiempo de forma mucho más precisa.

Los Ejemplos 10.9 y 10.10 ilustran cómo los principios del análisis de Fourier en tiempo discreto que hemos visto en las Secciones 10.1 y 10.2 pueden aplicarse a señales cuyas propiedades varían con el tiempo. El análisis de Fourier dependiente del tiempo es ampliamente utilizado tanto como herramienta de análisis para visualizar las propiedades de la señales como para la representación de las mismas. En este último uso, es importante desarrollar un conocimiento profundo de la representación bidimensional en la Ecuación (10.18).

10.3.1. Invertibilidad de $X[n,\lambda)$

Como $X[n,\lambda)$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n+m]w[m]$, la transformada de Fourier dependiente del tiempo es invertible si la ventana tiene al menos una muestra distinta de cero. Concretamente, teniendo en cuenta la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier (2.130)

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X[n,\lambda)e^{j\lambda m}d\lambda, \qquad -\infty < m < \infty, \tag{10.24}$$

o, equivalentemente,

$$x[n+m] = \frac{1}{2\pi w[m]}\int_0^{2\pi} X[n,\lambda)d\lambda \tag{10.25}$$

si $w[m] \neq 0$.[5] Por tanto, escogiendo m como cualquier valor para el que $w[m] \neq 0$, se puede recuperar $x[n]$ a partir de $X[n,\lambda)$ para todos los valores de n, utilizando la Ecuación (10.25).

Aunque la exposición anterior demuestra que la transformada de Fourier dependiente del tiempo es una transformación invertible, las Ecuaciones (10.24) y (10.25) no expresan una inversa computable, ya que su evaluación requiere conocer $X[n,\lambda)$ para todo λ y requiere también la evaluación de una integral. Sin embargo, la transformada inversa se convierte en una DFT cuando $X[n,\lambda)$ se muestrea en las dimensiones del tiempo y de la frecuencia. Comentaremos este aspecto con más detalle en la Sección 10.3.4.

10.3.2. Interpretación de $X[n,\lambda)$ como banco de filtros

Reordenando la suma de la Ecuación (10.18) se llega a otra útil interpretación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo. Si realizamos el cambio $m' = n+m$ en la Ecuación (10.18), $X[n,\lambda)$ se puede expresar como

$$X[n,\lambda) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x[m']w[-(n-m')]e^{j\lambda(n-m')}. \tag{10.26}$$

[5]Como $X[n,\lambda)$ es periódica de periodo 2π, la integración de las Ecuaciones (10.24) y (10.25) se puede realizar sobre cualquier intervalo de longitud 2π.

La Ecuación (10.26) se puede interpretar como la convolución

$$X[n,\lambda) = x[n] * h_\lambda[n], \tag{10.27a}$$

siendo

$$h_\lambda[n] = w[-n]e^{j\lambda n}. \tag{10.27b}$$

Observando la Ecuación (10.27a), vemos que la transformada de Fourier dependiente del tiempo, considerada como una función de n con λ fijo, se puede interpretar como la salida de un filtro lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h_\lambda[n]$ o, lo que es lo mismo, con respuesta en frecuencia

$$H_\lambda(e^{j\omega}) = W(e^{j(\lambda-\omega)}). \tag{10.28}$$

En general, una ventana que es distinta de cero para tiempo positivo se denomina *ventana no causal*, ya que el cálculo de $X[n,\lambda)$ utilizando la Ecuación (10.18) requiere muestras que siguen a la muestra n de la secuencia. Equivalentemente, en la interpretación de filtrado lineal, la respuesta al impulso $h_\lambda[n] = w[-n]e^{j\lambda n}$ es no causal si $w[n] = 0$ para $n < 0$. Es decir, una ventana que sea distinta de cero para $n \geq 0$ produce una respuesta al impulso $h_\lambda[n]$ no causal en la Ecuación (10.27b), mientras que si la ventana es distinta de cero para $n \leq 0$, el filtro lineal es causal.

En la definición de la Ecuación (10.18), el origen de tiempos de la ventana se mantiene fijo y la señal se desplaza por el intervalo de soporte de la ventana. Esto redefine de forma efectiva el origen de tiempos del análisis de Fourier en la muestra n de la señal. Otra posibilidad es desplazar la ventana a medida que cambia n, manteniendo fijo el origen del análisis de Fourier en el origen de tiempos de la señal. Esto conduce a una definición de la transformada de Fourier dependiente del tiempo de la forma

$$X[n,\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[m-n]e^{-j\lambda m}. \tag{10.29}$$

La relación entre las definiciones de las Ecuaciones (10.18) y (10.29) se puede encontrar fácilmente,

$$X[n,\lambda) = e^{-j\lambda n}X[n,\lambda). \tag{10.30}$$

La definición de la Ecuación (10.18) es particularmente conveniente cuando se considera el uso de la DFT para obtener muestras en λ de la transformada de Fourier dependiente del tiempo, ya que si $w[m]$ es de longitud finita en el intervalo $0 \leq m \leq (L-1)$, también lo es $x[n+m]w[m]$. Por otra parte, la definición de la Ecuación (10.29) tiene algunas ventajas para la interpretación del análisis de Fourier en términos de bancos de filtros. Como nuestro interés principal se centra en aplicaciones de la DFT, basaremos la mayor parte de nuestra exposición en la Ecuación (10.18).

10.3.3. El efecto de la ventana

El principal propósito de la ventana en la transformada de Fourier dependiente del tiempo es limitar la extensión de la secuencia que se va a transformar, de forma que las características espectrales sean razonablemente estacionarias en el intervalo de duración de la ventana. Cuanto más rápidamente cambien las características de la señal, más corta deberá ser la ventana. Vimos en la Sección 10.2 que, a medida que la longitud de la ventana decrece, la resolución en frecuencia también decrece. Por supuesto, se produce el mismo efecto en $X[n,\lambda)$. Por otra parte, a medida que decrece la longitud de la ventana, aumenta la potencialidad de resolver cambios en el tiempo. En consecuencia, aparece un compromiso en la selección de la longitud de la ventana, entre resolución en el tiempo y en la frecuencia. Este compromiso se ilustra en la Figura 10.10.

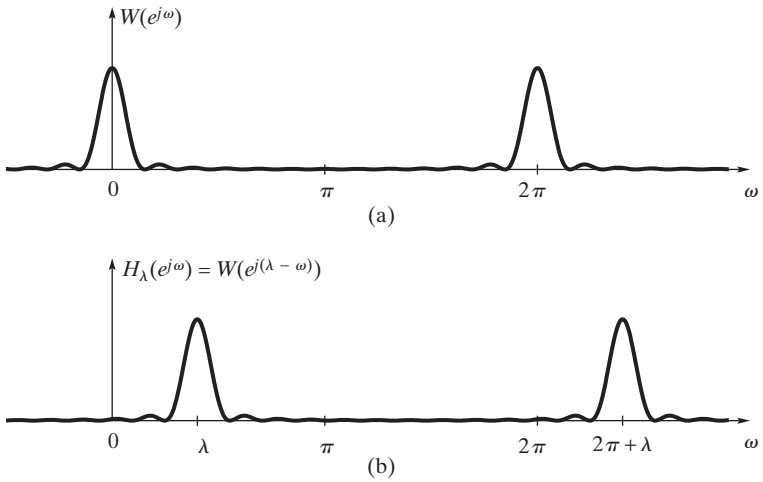


Figura 10.14 (a) Ilustración de la transformada de Fourier de una ventana de Bartlett para el análisis de Fourier dependiente del tiempo. (b) Filtro paso banda equivalente para el análisis de Fourier dependiente del tiempo.

El efecto de la ventana sobre las propiedades de la transformada de Fourier dependiente del tiempo se puede ver suponiendo que la señal $x[n]$ tiene como transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$, en sentido convencional. Supongamos primero que la ventana es la unidad para todo m; es decir, supongamos que no existe ventana. Entonces, aplicando la Ecuación (10.18),

$$X[n,\lambda) = X(e^{j\lambda})e^{j\lambda n}. \tag{10.31}$$

Por supuesto, una ventana típica en análisis espectral desciende a cero para seleccionar sólo una parte de la señal bajo análisis. Por otra parte, como se comentó en la Sección 10.2, la longitud y la forma de la ventana se escogen de forma que su transformada de Fourier sea estrecha en λ, comparada con las variaciones en frecuencia de la transformada de Fourier de la señal. Por tanto, la necesidad de una buena resolución temporal y una buena resolución en frecuencia requiere a menudo un compromiso entre estos dos factores. La Figura 10.14(a) muestra la transformada de Fourier de una ventana típica.

Si consideramos la transformada de Fourier dependiente del tiempo para n fijo, aplicando las propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto se deduce que

$$X[n,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j\theta n}X(e^{j\theta})W(e^{j(\lambda-\theta)})d\theta; \tag{10.32}$$

es decir, la transformada de Fourier de la señal desplazada se convoluciona con la transformada de Fourier de la ventana. Esto es similar a la Ecuación (10.2), excepto porque en la Ecuación (10.2) hemos supuesto que la señal no era sucesivamente desplazada con respecto a la ventana. Aquí calculamos una transformada de Fourier para cada valor de n. En la Sección 10.2 vimos que la capacidad de resolver dos componentes de señal de banda estrecha depende de la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana, mientras que el nivel de fugas de una componente en la vecindad de otra depende de la amplitud relativa de los lóbulos laterales. El caso de no aplicación de ventana corresponde a $w[n] = 1$ para todo n. En este caso, $W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$ para $-\pi \leq \omega \leq \pi$, lo que produce una resolución precisa en frecuencia, pero sin resolución en el tiempo.

En la interpretación de filtrado lineal de las Ecuaciones (10.27a), (10.27b) y (10.28), $W(e^{j\omega})$ tiene típicamente una característica paso banda como se muestra en la Figura 10.14(a) y, por consiguiente, $H_\lambda(e^{j\omega})$ es un filtro paso banda cuya banda de paso está centrada en $\omega = \lambda$, como se muestra en la Figura 10.14(b). Puede verse claramente que el ancho de banda de este filtro es aproximadamente igual a la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana. El grado de rechazo de componentes en frecuencia adyacentes depende de la amplitud relativa de los lóbulos laterales.

La exposición precedente sugiere que si estamos utilizando la transformada de Fourier dependiente del tiempo para obtener una estimación dependiente del tiempo del espectro de frecuencias de una señal, es deseable suavizar la ventana para reducir los lóbulos laterales y utilizar una ventana tan larga como sea posible para aumentar la resolución en frecuencia. Esto ya se ha ilustrado en los Ejemplos 10.9 y 10.10, y consideraremos otros ejemplos en la Sección 10.4. Sin embargo, antes presentaremos el uso de la DFT para la evaluación explícita de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

10.3.4. Muestreo en el tiempo y en la frecuencia

El cálculo explícito de $X[n,\lambda)$ sólo se puede realizar sobre un conjunto finito de valores de λ, lo que corresponde a muestrear la transformada de Fourier dependiente del tiempo en el dominio de su variable de frecuencia λ. De la misma forma que las señales de longitud finita se pueden representar exactamente mediante muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto, las señales de longitud indeterminada se pueden representar mediante muestras de la transformada de Fourier dependiente del tiempo si la ventana de la Ecuación (10.18) tiene longitud finita. Por ejemplo, supongamos que la ventana tiene longitud L y sus muestras comienzan en $m = 0$; es decir,

$$w[m] = 0 \qquad \text{fuera del intervalo } 0 \le m \le L-1. \tag{10.33}$$

Si muestreamos $X[n,\lambda)$ en N frecuencias equiespaciadas, $\lambda_k = 2\pi k/N$, con $N \ge L$, es posible recuperar la secuencia original a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada. Concretamente, si definimos $X[n,k]$ como

$$X[n,k] = X[n,2\pi k/N) = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{10.34}$$

entonces $X[n,k]$ con n fijo resulta ser la DFT de la secuencia enventanada $x[n+m]w[m]$. Utilizando la DFT inversa obtenemos

$$x[n+m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[n,k]e^{j(2\pi/N)km}, \qquad 0 \le m \le L-1. \tag{10.35}$$

Como suponemos que la ventana $w[m] \neq 0$ para $0 \le m \le L-1$, los valores de la secuencia se pueden recuperar en el intervalo que va de n a $(n+L-1)$, utilizando la ecuación

$$x[n+m] = \frac{1}{Nw[m]}\sum_{k=0}^{N-1} X[n,k]e^{j(2\pi/N)km}, \qquad 0 \le m \le L-1. \tag{10.36}$$

El punto importante es que la ventana es de longitud finita y que se toman al menos tantas muestras en la dimensión de λ como muestras distintas de cero tenga la ventana; es decir, $N \ge L$. Aunque la Ecuación (10.33) corresponde a una ventana no causal, podríamos haber utilizado una ventana causal con $w[m] \neq 0$ para $-(L-1) \le m \le 0$ o una ventana simétrica de forma que $w[m] = w[-m]$ para $|m| \le (L-1)/2$,

siendo L un entero impar. El uso de una ventana no causal en la Ecuación (10.34) simplemente es más conveniente para nuestro análisis, ya que conduce de forma natural a la interpretación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada como la DFT de la secuencia enventanada que comienza en la muestra n.

Como la Ecuación (10.34) corresponde a muestrear la Ecuación (10.18) en λ, corresponde también a muestrear las Ecuaciones (10.26), (10.27a) y (10.27b) en λ. Concretamente, la Ecuación (10.30) se puede expresar como

$$X[n,k] = x[n] * h_k[n], \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{10.37a}$$

donde

$$h_k[n] = w[-n]e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{10.37b}$$

Las Ecuaciones (10.37a) y (10.37b) se pueden ver como un banco de N filtros, como se muestra en la Figura 10.15. La respuesta en frecuencia del filtro k-ésimo es

$$H_k(e^{j\omega}) = W(e^{j[(2\pi k/N)-\omega]}). \tag{10.38}$$

Esta exposición sugiere que $x[n]$ para $-\infty < n < \infty$ se puede reconstruir si $X[n,\lambda)$ o $X[n,k]$ están muestreadas también en la dimensión temporal. Concretamente, utilizando la Ecuación (10.36), se puede reconstruir la señal en el intervalo $n_0 \le n \le n_0 + L - 1$ a partir de $X[n_0,k]$, y se puede reconstruir la señal en el intervalo $n_0 + L \le n \le n_0 + 2L - 1$ a partir de $X[n_0+L,k]$, etc. Por tanto, la señal $x[n]$ se puede reconstruir exactamente a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada tanto en la frecuencia como en el tiempo. En general, para una región de soporte de la ventana como la especificada en la Ecuación (10.33), definimos esta transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada como

$$X[rR,k] = X[rR, 2\pi k/N) = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \tag{10.39}$$

donde r y k son enteros tales que $-\infty < r < \infty$ y $0 \le k \le N-1$. Para simplificar aún más esta notación, definimos

$$X_r[k] = X[rR,k] = X[rR,\lambda_k), \qquad -\infty < r < \infty, \quad 0 \le k \le N-1, \tag{10.40}$$

donde $\lambda_k = 2\pi k/N$. Esta notación indica expresamente que la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada es simplemente una secuencia de las DFT de N puntos de los segmentos de la señal enventanada

$$x_r[m] = x[rR+m]w[m], \qquad -\infty < r < \infty, \quad 0 \le m \le L-1, \tag{10.41}$$

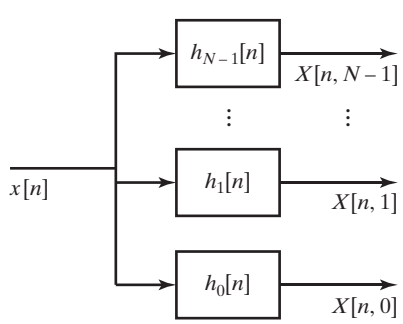


Figura 10.15 Representación en forma de banco de filtros de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

donde la posición de la ventana se mueve en saltos de R muestras en el tiempo. La Figura 10.16 muestra las líneas en el plano $[n, \lambda)$ correspondientes a la región de soporte de $X[n, \lambda)$ y la rejilla de puntos de muestreo en el plano $[n, \lambda)$ para el caso de $N = 10$ y $R = 3$. Como ya hemos visto, es posible reconstruir de forma única la señal original a partir de esa representación discreta bidimensional para una elección apropiada de L.

La Ecuación (10.39) requiere los siguientes parámetros enteros: la longitud de la ventana L, el número de muestras en frecuencia o longitud N de la DFT y el intervalo de muestreo en la dimensión temporal, R. Aunque no todas las selecciones de esos parámetros permitirán una reconstrucción exacta de la señal, se pueden utilizar numerosas combinaciones de N, R, $w[n]$ y L. La selección de $L \leq N$ garantiza que es posible reconstruir los segmentos enventanados $x_r[m]$ a partir de las transformadas de bloque $X_r[k]$. Si $R < L$, los segmentos se solapan, pero si $R > L$, algunas de las muestras de la señal no se utilizan y, por tanto, no se pueden reconstruir a partir de $X_r[k]$. Por tanto, como posibilidad, si los tres parámetros de muestreo cumplen la relación $R \leq L \leq N$, entonces es posible (en principio) recuperar R muestras de $x[n]$ bloque por bloque, para todo n, a partir de $X_r[k]$. Nótese que cada bloque de R muestras de la señal se representa mediante N números complejos en la representación de Fourier dependiente del tiempo muestreada. Si la señal es real, sólo se requieren N números complejos debido a la simetría de la DFT.

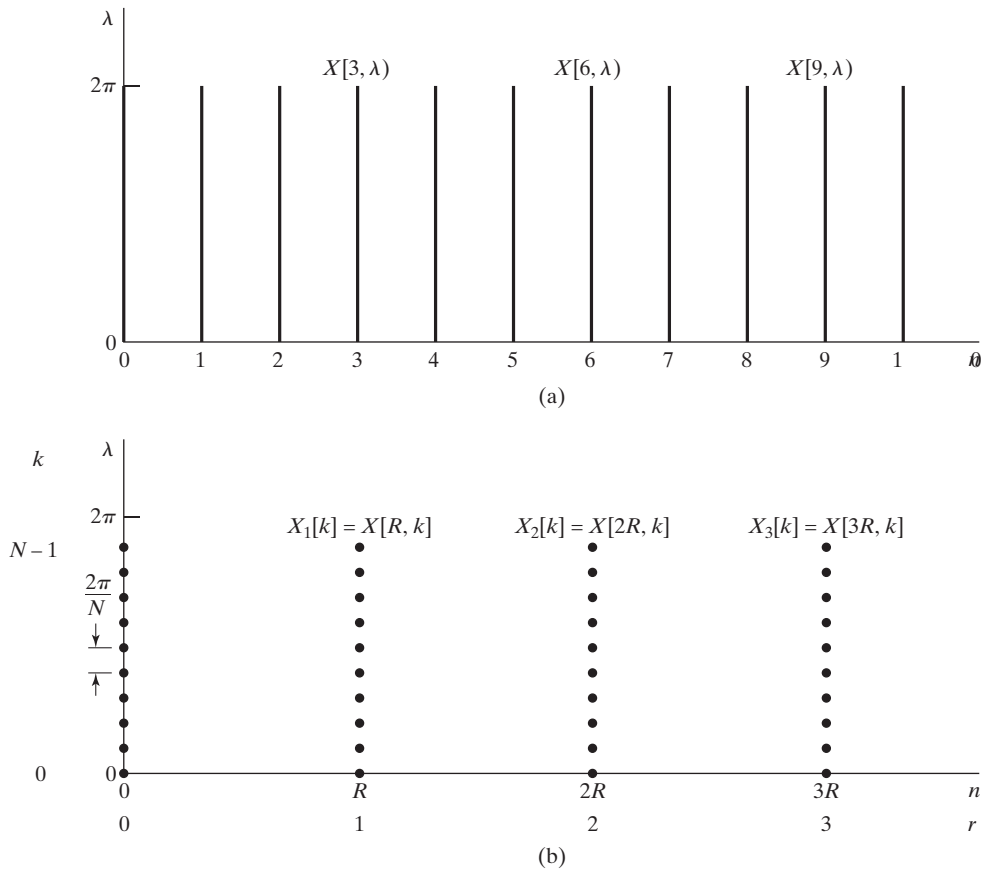


Figura 10.16 (a) Región de soporte de $X[n, \lambda)$. (b) Rejilla de puntos de muestreo en el plano $[n, \lambda)$ para la transformada de Fourier dependiente del tiempo con $N = 10$ y $R = 3$.

Como un ejemplo concreto, la señal se puede reconstruir exactamente a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada en el caso especial de $R = L = N$. En este caso, las N muestras de la señal real se representan mediante N números complejos, y este valor es lo mínimo que se puede esperar conseguir para una señal arbitraria. Para $R = L = N$ se puede recuperar $x_r[m] = x[rR+m]w[m]$ para $0 \leq m \leq N-1$ calculando la DFT inversa de $X_r[k]$. Por tanto, $x[n]$ se puede expresar para $rR \leq n \leq [(r+1)R-1]$ en función de los segmentos enventanados $x_r[m]$ de la siguiente forma

$$x[n] = \frac{x_r[n-rR]}{w[n-rR]} \qquad rR \leq n \leq [(r+1)R-1], \tag{10.42}$$

Es decir, recuperamos los segmentos enventanados de N puntos, eliminamos el efecto de la ventana y seguidamente yuxtaponemos los segmentos para reconstruir la secuencia original.

10.3.5. El método solapamiento–suma de reconstrucción

Aunque la exposición anterior permite verificar la posibilidad de reconstruir teóricamente la señal a partir de su transformada de Fourier dependiente el tiempo muestreada en tiempo y en frecuencia, la demostración no constituye un algoritmo de reconstrucción viable cuando se hacen modificaciones a la transformada de Fourier dependiente del tiempo como es habitual, por ejemplo, en aplicaciones como codificación de audio o reducción de ruido. En estas aplicaciones, la división por una ventana de suavizado, tal como requiere la Ecuación (10.42), puede aumentar enormemente los errores en los bordes. Por tanto, los bloques de señal podrían no ajustarse entre sí de forma suave. En estas aplicaciones, es útil hacer R menor que L y N de forma que los bloques de muestras se solapen. Entonces, si la ventana se selecciona apropiadamente, no será necesario deshacer el enventanado como en la Ecuación (10.42).

Supongamos que $R \leq L \leq N$. Entonces, podemos expresar

$$x_r[m] = x[rR+m]w[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_r[k]e^{j(2\pi k/N)m} \quad 0 \leq m \leq L-1. \tag{10.43}$$

Los segmentos obtenidos están alterados por la ventana, y su origen de tiempos se encuentra al comienzo de la ventana. Un método diferente para reconstruir la señal, que es más robusto frente a los cambios en $X_r[k]$, consiste en desplazar los segmentos enventanados a sus posiciones temporales originales rR y después simplemente sumarlos, es decir,

$$\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_r[n-rR]. \tag{10.44}$$

Si podemos demostrar que $\hat{x}[n] = x[n]$ para todo n, entonces las Ecuaciones (10.43) y (10.44) forman en conjunto un método para realizar la *síntesis de Fourier dependiente del tiempo* con capacidad de reconstrucción perfecta. Sustituyendo la Ecuación (10.43) en la Ecuación (10.44) se llega a la siguiente representación de $\hat{x}[n]$:

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[rR+n-rR]w[n-rR] \\ &= x[n]\sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n-rR] \end{aligned} \tag{10.45}$$

Si definimos

$$\tilde{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR], \tag{10.46a}$$

entonces la señal reconstruida en la Ecuación (10.45) se puede expresar como

$$\hat{x}[n] = x[n]\tilde{w}[n]. \tag{10.46b}$$

A partir de la Ecuación (10.46b) se deduce que la condición para una reconstrucción perfecta es

$$\tilde{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR] = C \quad -\infty < n < \infty, \tag{10.47}$$

es decir, las copias desplazadas R de la ventana deben sumar una ganancia de reconstrucción constante C para
todo n.

Nótese que la secuencia $\tilde{w}[n]$ es una secuencia periódica (de periodo R) compuesta por secuencias de ventana con solapamiento temporal. Como un ejemplo simple, consideremos una ventana rectangular $w_{\text{rect}}[n]$ de L muestras de longitud. Si $R = L$, los segmentos enventanados simplemente coinciden juntos bloque por bloque sin solapamiento. En este caso, la condición de la Ecuación (10.47) se cumple con $C = 1$, debido a que las ventanas solapadas se ajustan entre sí sin solapamientos ni interrupciones (un dibujo simple puede servir para confirmar esta idea). Si L es par en la ventana rectangular y $R = L/2$, un simple análisis o dibujo verificará de nuevo que la condición de la Ecuación (10.47) se cumple con $C = 2$. De hecho, si $L = 2^{\nu}$, la señal $x[n]$ se puede reconstruir perfectamente a partir de $X_r[k]$ mediante el método de solapamiento–suma de la Ecuación (10.44) cuando $L \leq N$ y $R = L, L/2, \ldots, 1$. Las correspondientes ganancias de reconstrucción serían $C = 1, 2, \ldots, L$. Aunque esto demuestra que el método de solapamiento–suma puede reconstruir perfectamente la señal original para algunas ventanas rectangulares y determinados espaciados R entre ventanas, la ventana rectangular es raramente utilizada en análisis/síntesis de Fourier dependiente del tiempo, debido a sus pobres propiedades de fugas. Se utilizan más frecuentemente otras ventanas de suavizado como las de Bartlett, Hann, Hamming y Kaiser. Afortunadamente, estas ventanas con sus propiedades superiores de aislamiento espectral, pueden producir también una reconstrucción perfecta o casi perfecta partiendo de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

Dos ventanas con las que se puede conseguir una reconstrucción perfecta son las de Bartlett y Hann, que se presentaron en el Capítulo 7 en el contexto de diseño de filtros FIR. Se definen aquí de nuevo en las Ecuaciones (10.48) y (10.49), respectivamente:

Bartlett (triangular)

$$w_{\text{Bart}}[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{10.48}$$

Hann

$$w_{\text{Hann}}[n] = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{10.49}$$

Tal como están definidas estas ventanas, su longitud es de $L = M + 1$ con las muestras de sus extremos iguales a cero.[6] Con M par y $R = M/2$, se puede demostrar fácilmente que, para la ventana de Bartlett,

[6]Con estas definiciones, el número real de muestras distintas de cero es $M - 1$ tanto para la ventana de Bartlett como para la de Hann, pero la inclusión de las dos muestras con valor de cero lleva a simplificaciones matemáticas convenientes.

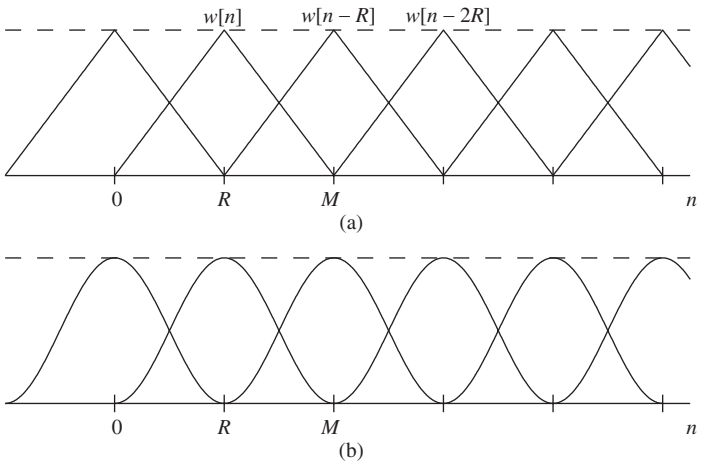


Figura 10.17 (a) Ventanas de Bartlett desplazadas $M+1$ puntos con $R = M/2$. (b) Ventanas de Hann desplazadas $M+1$ puntos con $R = M/2$. La línea de trazos es la secuencia periódica $\tilde{w}[n]$.

la condición de la Ecuación (10.47) se cumple con $C = 1$. La Figura 10.17(a) muestra solapamiento de ventanas de Bartlett de longitud $M+1$ (sus muestras primera y última a cero) cuando $R = M/2$. Puede verse claramente que estas ventanas desplazadas suman en total el valor de la ganancia de reconstrucción $C = 1$. La Figura 10.17(b) muestra la ventana de Hann con los mismos valores de $L = M+1$ y $R = M/2$. Aunque en esta gráfica resulta menos obvio, es también cierto que estas versiones desplazadas de las ventanas suman, para todo n, el valor total de la ganancia $C = 1$. La misma afirmación es cierta para la ventana de Hamming y para muchas otras ventanas.

La Figura 7.30 presenta una comparación de las transformadas de Fourier en tiempo discreto de las ventanas rectangular, de Bartlett y de Hann. Fíjese en que la anchura del lóbulo principal de las ventanas de Bartlett y de Hann es el doble del de la ventana rectangular de la misma longitud L, pero los lóbulos secundarios son significativamente menores en amplitud para las ventanas de Bartlett y de Hann. Por tanto, estas ventanas junto con las otras de la Figura 7.30 son preferibles a la ventana rectangular para el análisis/síntesis de Fourier dependiente del tiempo.

Aunque la Figura 10.17 es intuitivamente plausible, es menos obvio que con las ventanas de Bartlett y de Hann con $M = 2^\nu$ se puede conseguir una reconstrucción perfecta para valores de $R = M/2, M/4, \ldots, 1$ con ganancias de reconstrucción correspondientes $M/(2R)$. Para ver que esto es así, es útil recordar que la secuencia de envolvente $\tilde{w}[n]$ es inherentemente periódica de periodo R, por lo que se puede representar mediante una DFT inversa de la siguiente forma

$$\tilde{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n - rR] = \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{R-1} W(e^{j(2\pi k/R)})e^{j(2\pi k/R)n}, \tag{10.50}$$

siendo $W(e^{j(2\pi k/R)})$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de $w[n]$ muestreada en las frecuencias $(2\pi k/R)$, $k = 0, 1, \ldots, R-1$. A partir de la Ecuación (10.50) se puede ver claramente que la condición para una reconstrucción perfecta es

$$W(e^{j(2\pi k/R)}) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, R-1, \tag{10.51a}$$

y si se cumple la Ecuación (10.51a), entonces, de la Ecuación (10.50), se deduce que la ganancia de reconstrucción es

$$C = \frac{W(e^{j0})}{R}. \tag{10.51b}$$

El Problema 7.43 del Capítulo 7 explora la noción de que las ventanas comúnmente utilizadas de Bartlett, Hann, Hamming y Blackman, se pueden representar en función de ventanas rectangulares, para las que es relativamente sencillo obtener una expresión cerrada de su transformada de Fourier en tiempo discreto. En particular, el Problema 7.43 da el resultado de que para M par, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la ventana de Bartlett definida en la Ecuación (10.48) es

$$W_{\text{Bart}}(e^{j\omega}) = \left(\frac{2}{M}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega M/4)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right)^2 e^{-j\omega M/2}. \tag{10.52}$$

La Ecuación (10.52) permite deducir que la transformada de Fourier de la ventana de Bartlett presenta ceros equiespaciados en las frecuencias $4\pi k/M$, para $k = 1, 2, \ldots, M-1$. Por tanto, si seleccionamos R de forma que $2\pi k/R = 4\pi k/M$ o $R = M/2$, se cumple la condición de la Ecuación (10.51a). Sustituyendo $\omega = 0$ en la Ecuación (10.52) se obtiene $W_{\text{Bart}}(e^0) = M/2$, por lo que se sigue que se consigue una reconstrucción perfecta con $C = M/(2R) = 1$ si $R = M/2$. Al escoger $R = M/2$ se alinean las frecuencias $2\pi k/R$ con los ceros de $W_{\text{Bart}}(e^{j\omega})$. Si M es divisible por 4, podemos utilizar $R = M/4$ y las frecuencias $2\pi k/R$ todavía estarán alineadas con los ceros de $W_{\text{Bart}}(e^{j\omega})$, y la ganancia de reconstrucción será $C = M/(2R) = 2$. Si M es potencia de dos, R puede ser menor, con el consiguiente incremento de C.

La transformada de Fourier en tiempo discreto $W_{\text{Hann}}(e^{j\omega})$ también tiene ceros equiespaciados en múltiplos enteros de $4\pi/M$, por lo que la ventana de Hann definida en la Ecuación (10.49) permite también una reconstrucción exacta. Los ceros equiespaciados de $W_{\text{Bart}}(e^{j\omega})$ y $W_{\text{Hann}}(e^{j\omega})$ resultan evidentes en las gráficas de la Figura 7.30 (b) y (c), respectivamente. La Figura 7.30(d) muestra la ventana de Hamming, que es una versión de la ventana de Hann optimizada para minimizar los lóbulos laterales. Como resultado del ajuste de los coeficientes desde sus valores iniciales de 0,5 y 0,5 hasta 0,54 y 0,46; los ceros de $W_{\text{Hamm}}(e^{j\omega})$ resultan ligeramente desplazados, de modo que ya no es posible escoger R de modo que las frecuencias $2\pi k/R$ coincidan con los ceros de $W_{\text{Hamm}}(e^{j\omega})$. Sin embargo, como se muestra en la Tabla 7.2, el nivel máximo de los lóbulos laterales para frecuencias por encima de $4\pi/M$ es de -41 dB. Por consiguiente, se cumple aproximadamente la condición de la Ecuación (10.51a) en cada una de las frecuencias $2\pi k/R$. La Ecuación (10.50) muestra que, si la Ecuación (10.51a) no se cumple exactamente, $\tilde{w}[n]$ tenderá a oscilar alrededor del valor de C con periodo R, produciendo una ligera modulación de amplitud en la señal reconstruida.

10.3.6. Tratamiento de señales basado en la transformada de Fourier dependiente del tiempo

La Figura 10.18 muestra un marco general para realizar tratamiento de señales basado en la transformada de Fourier dependiente del tiempo. Este sistema se basa en el hecho de que una señal $x[n]$ se puede reconstruir de forma exacta a partir de su transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada en el tiempo y en la frecuencia, $X_r[k]$, si se seleccionan adecuadamente la ventana y los parámetros de

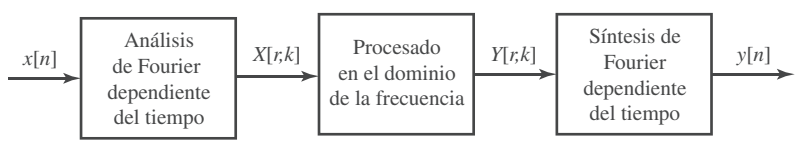


Figura 10.18 Tratamiento de señales basado en el análisis/síntesis de Fourier dependiente del tiempo.

muestreo, como se ha expuesto anteriormente. Si el procesado de la Figura 10.18 se realiza de forma que $Y_r[k]$ mantenga su integridad como transformada de Fourier dependiente del tiempo, entonces se podrá reconstruir una señal procesada $y[n]$, utilizando una técnica de síntesis de Fourier dependiente del tiempo, como el método de solapamiento–suma o una técnica basada en un banco de filtros paso banda. Por ejemplo, si $x[n]$ es una señal de audio, $X_r[k]$ se puede cuantificar para comprimir la señal. La representación basada en la transformada de Fourier dependiente del tiempo proporciona un marco natural y conveniente, en el que los fenómenos auditivos de enmascaramiento se pueden explotar para "ocultar" el ruido de cuantificación (véanse, por ejemplo, Bosi y Goldberg, 2003 y Spanias, Painter y Atti, 2007). Se utiliza después síntesis de Fourier dependiente del tiempo para reconstruir una señal $y[n]$ para su audición. Ésta es, por ejemplo, la base de la codificación de audio MP3. Otra aplicación es la supresión de ruido de audio, donde se estima el espectro de ruido acústico y después, o bien se resta del espectro de Fourier dependiente del tiempo de la señal de entrada, o bien se usa como base para aplicar un filtrado de Wiener a $X_r[k]$, (véase Quatieri, 2002). Estas aplicaciones y muchas otras se ven facilitadas grandemente por los algoritmos de FFT disponibles para el cómputo eficiente de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

Una exposición de las aplicaciones de este tipo nos llevaría demasiado tiempo. Sin embargo, estas clases de técnicas de procesado de bloques para señales en tiempo discreto se presentaron también en el Capítulo 8, al explicar el uso de la DFT para implementar la convolución de una respuesta al impulso finita con una señal de entrada de longitud indefinida. Este método de implementación de sistemas lineales e invariantes con el tiempo tiene una útil interpretación en términos de definiciones y conceptos de análisis y síntesis de Fourier dependiente del tiempo, tal como se ha explicado hasta el momento.

Concretamente, supongamos que $x[n] = 0$ para $n < 0$, y supongamos que calculamos la transformada de Fourier dependiente del tiempo para $R = L$ con una ventana rectangular. En otras palabras, la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada $X_r[k]$ consiste en una serie de transformadas DFT de N puntos de segmentos de la secuencia de entrada

$$x_r[m] = x[rL+m], \qquad 0 \le m \le L-1. \tag{10.53}$$

Como se incluyen todas las muestras de la señal $x[n]$ y los bloques no se solapan, se deduce que

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n-rL]. \tag{10.54}$$

Supongamos ahora que se define una nueva transformada de Fourier dependiente del tiempo

$$Y_r[k] = H[k]X_r[k], \qquad 0 \le k \le N-1, \tag{10.55}$$

donde $H[k]$ es la DFT de N puntos de una secuencia de muestras unidad de longitud finita $h[n]$, tal que $h[n] = 0$ para $n < 0$ y para $n > P-1$. Si calculamos la DFT inversa de $Y_r[k]$, obtenemos

$$y_r[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y_r[k]e^{j(2\pi/N)km} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_r[\ell]h[((m-\ell))_N]. \tag{10.56}$$

Es decir, $y_r[m]$ es la convolución circular de N puntos de $h[m]$ y $x_r[m]$. Como la longitud de $h[m]$ es de P muestras y la de $x_r[m]$ de L muestras, de la exposición de la Sección 8.7 se deduce que si $N \ge L+P-1$, entonces $y_r[m]$ será idéntica a la convolución lineal de $h[m]$ con $x_r[m]$ en el intervalo $0 \le m \le L+P-2$, y será cero en el resto. Por consiguiente, se deduce que si construimos la señal de salida

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n-rL], \tag{10.57}$$

entonces $y[n]$ es la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. El procedimiento que acabamos de describir corresponde exactamente al método de *solapamiento–suma* para realizar la convolución por bloques. El método de solapamiento–almacenamiento presentado en la Sección 8.7 se puede aplicar también dentro del marco de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

10.3.7. Interpretación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo como banco de filtros

Otra forma de ver que la transformada de Fourier dependiente del tiempo se puede muestrear en la dimensión temporal es recordar que para λ fijo (o para k fijo si las frecuencias de análisis son $\lambda_k = 2\pi k/N$) la transformada de Fourier dependiente del tiempo es una secuencia temporal unidimensional, correspondiente a la salida de un filtro paso banda con la respuesta en frecuencia dada por la Ecuación (10.28). La Figura 10.19 muestra el conjunto de filtros paso banda correspondientes a una ventana rectangular con $L = N = 16$. Esta figura ilustra la interpretación de banco de filtros, incluso en el caso de que L y N sean mucho más largos. Cuando N aumenta, las bandas de los filtros se hacen más estrechas y sus lóbulos laterales se solapan con los canales adyacentes de la misma forma. Nótese que las bandas de paso de los filtros correspondientes a la ventana rectangular se solapan de forma significativa, y su

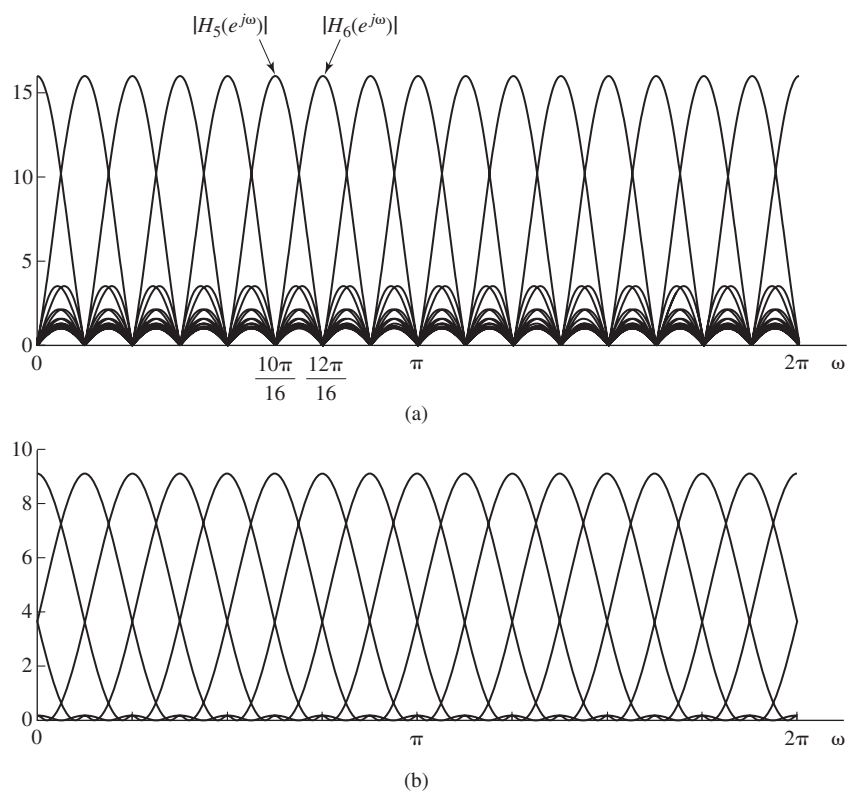


Figura 10.19 Respuesta en frecuencia del banco de filtros. (a) Ventana rectangular. (b) Ventana de Kaiser.

selectividad en frecuencia no es buena bajo ningún estándar. De hecho, los lóbulos laterales de cualquiera de los filtros paso banda se solapan completamente con varias bandas de paso a cada lado. Esto sugiere que, en general, podríamos encontrar un problema de solapamiento en la dimensión temporal, ya que la transformada de Fourier de cualquier otra ventana de suavizado de bordes de longitud finita no será tampoco una respuesta de filtro ideal. Sin embargo, en nuestra exposición de la Sección 10.3.5, demostramos que incluso con la ventana rectangular puede conseguirse una reconstrucción perfecta con ventanas solapadas, a pesar de la pobre selectividad en frecuencia. Aunque se produce solapamiento en las salidas de los filtros paso banda individuales, se puede argumentar que la distorsión de solapamiento se cancela cuando se recombinan todos los canales en la síntesis por solapamiento–suma. Esta noción de cancelación del solapamiento es uno de los conceptos importantes que resultan de una investigación detallada de la interpretación como banco de filtros.

Si se utiliza una ventana de suavizado en los bordes, los lóbulos laterales se puede reducir grandemente. La Figura 10.19(b) muestra el caso de una ventana de Kaiser de la misma longitud que la ventana rectangular utilizada en la Figura 10.19(a), es decir, $L = N = 16$. Los lóbulos laterales son mucho menores, pero el lóbulo principal es mucho más ancho, de forma que los filtros se solapan incluso más. De nuevo, el argumento anterior basado en las ideas del procesado por bloques demuestra de forma concluyente que podemos reconstruir de forma casi exacta la señal original a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada en tiempo y en frecuencia si R es lo suficientemente pequeño. Así, para una ventana de Kaiser como la de la Figura 10.19(b), la frecuencia de muestreo de las secuencias que representan cada una de las bandas de paso de los canales de análisis podría ser $2\pi/R = \Delta_{\mathrm{ml}}$, siendo Δ_{ml} la anchura del lóbulo principal de la transformada de Fourier de la ventana.[7] En el ejemplo de la Figura 10.19(b), la anchura del lóbulo principal es, aproximadamente, $\Delta_{\mathrm{ml}} = 0{,}4\pi$, lo que implica que el periodo de muestreo temporal podría ser $R = 5$, reconstruyéndose la señal de forma casi perfecta a partir de $X[rR, \lambda_k)$ mediante el método de solapamiento–suma. De forma más general, en el caso de la ventana de Hamming de longitud $L = M + 1$ muestras, por ejemplo, $\Delta_{\mathrm{ml}} = 8\pi/M$ por lo que nominalmente, el intervalo de muestreo temporal debería ser $R = M/4$. Con esta frecuencia de muestreo temporal, nuestra presentación anterior demuestra que la señal $x[n]$ se puede reconstruir de forma casi perfecta a partir de $X[rR, \lambda_k)$, utilizando una ventana de Hamming y el método de síntesis de solapamiento–suma con $R = L/4$ y $L \leq N$.

Cuando se utiliza el método de análisis/síntesis de solapamiento–suma, los parámetros generalmente satisfacen la relación $R \leq L \leq N$. Esto implica que (teniendo en cuenta las simetrías) el número total efectivo de muestras (números) por segundo de la representación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo $X[rR, \lambda_k)$ es mayor en un factor N/R que la frecuencia de muestreo de la propia $x[n]$. Esto puede no resultar relevante en algunas aplicaciones, pero presenta un problema importante en aplicaciones de compresión de datos, tales como codificación de audio. Afortunadamente, el punto de vista de banco de filtros es la base para demostrar que es posible escoger estos parámetros de forma que se cumpla $R = N < L$ y todavía se consiga una reconstrucción casi perfecta de la señal a partir de su transformada de Fourier dependiente del tiempo. Un ejemplo de sistema de análisis/síntesis con esta idea se presentó en la Sección 4.7.6, con $R = N = 2$, y con respuestas al impulso de los filtros paso bajo y paso alto de longitud L, que puede ser tan larga como se desee para conseguir filtros de corte abrupto. El banco de filtros de dos canales se puede generalizar a un número de canales superior con $R = N$, y, como en el ejemplo de la Sección 4.7.6, se pueden emplear técnicas polifásicas para aumentar la eficiencia computacional. La ventaja de requerir que $R = N$ es que el número total de muestras por

[7] Como, por nuestra definición, las señales de los canales de la transformada de Fourier dependiente del tiempo, $X[n, \lambda_k)$, son señales paso banda centradas en la frecuencia λ_k, se pueden desplazar hacia abajo en frecuencia en un valor λ_k, de forma que el resultado es una señal paso bajo en la banda $\pm\Delta_{\mathrm{ml}}$. Las señales paso bajo resultantes tienen como frecuencia máxima $\Delta_{\mathrm{ml}}/2$, de forma que la mínima frecuencia de muestreo sería $2\pi/R = \Delta_{\mathrm{ml}}$. Si $R = N$, el desplazamiento hacia abajo en frecuencia ocurre automáticamente como resultado de la operación de submuestreo.

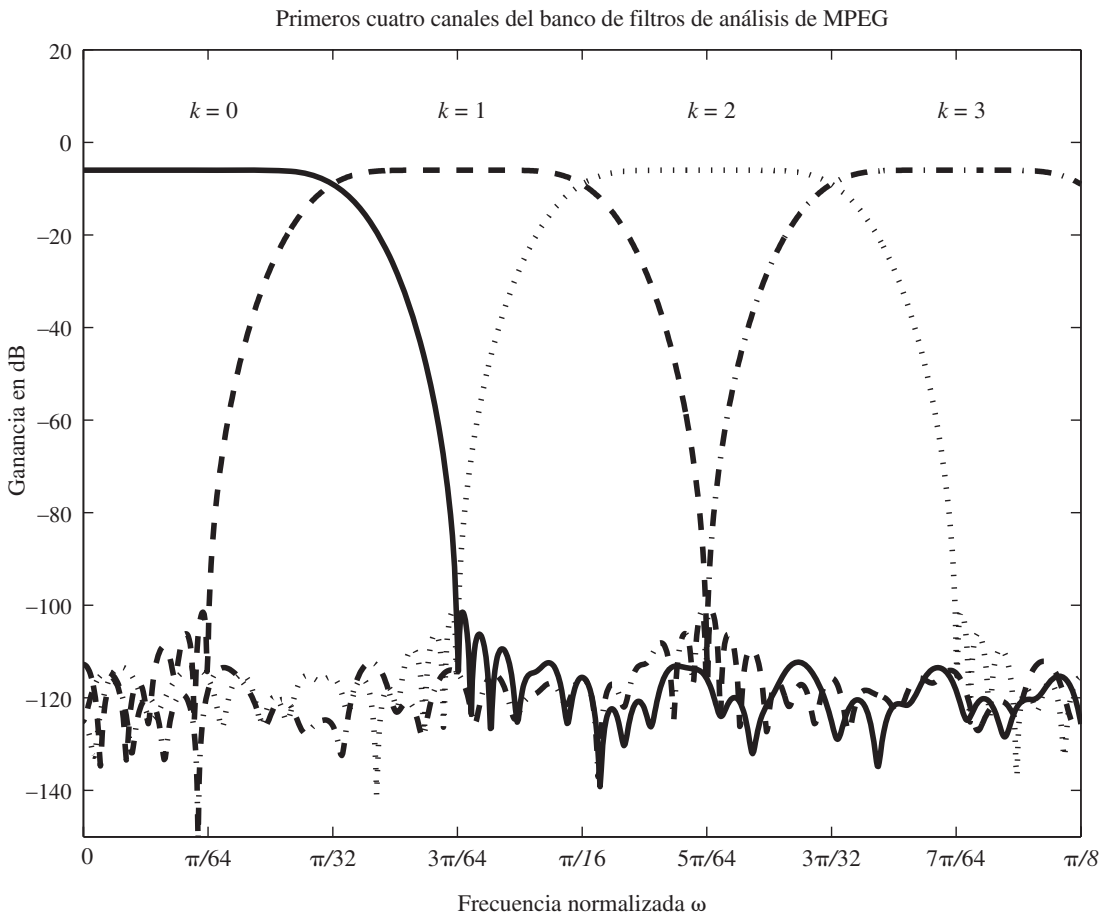


Figura 10.20 Varios canales paso banda del banco de filtros de análisis de MPEG-II.

segundo permanece igual que el de la entrada $x[n]$. Como ejemplo, la Figura 10.20 muestra los primeros canales paso banda del banco de filtro de análisis básico especificado por el estándar de codificación de audio MPEG-II. Este banco de filtros realiza análisis de Fourier dependiente del tiempo con desplazamiento de las frecuencias centrales $\lambda_k = (2k+1)\pi/64$ utilizando 32 filtros paso banda reales. Como los filtros paso banda reales tienen una pareja de bandas de paso centradas en las frecuencias $\pm\lambda_k$, esto es equivalente a 64 filtros paso banda complejos. En este caso, la longitud de las respuestas al impulso (equivalente a la longitud de la ventana) es $L = 513$ con sus muestras primera y última puestas a cero. El factor de submuestreo es $R = 32$. Obsérvese que los filtros se solapan de forma significativa en los límites de sus bandas, y el submuestreo por $R = 32$ causa una distorsión de solapamiento significativa. Sin embargo, un análisis más detallado del sistema de análisis/síntesis completo muestra que la distorsión de solapamiento debida a las respuestas en frecuencia no ideales se cancela en el proceso de reconstrucción.

Una presentación en profundidad de los bancos de filtros de análisis y síntesis está fuera del alcance de este capítulo. El Problema 10.46 considera resumidamente el tema, y en Rabiner y Schafer (1978), Crochiere y Rabiner (1983) y Vaidyanathan (1993) se pueden encontrar presentaciones detalladas.

10.4. EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES NO ESTACIONARIAS

En la Sección 10.3.6 consideramos un ejemplo simple que ilustraba cómo se puede utilizar la transformada de Fourier dependiente del tiempo para realizar un filtrado lineal. En esas aplicaciones, no estamos tan interesados en tener resolución espectral como en saber si es posible reconstruir una señal modificada a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo modificada. Por otra parte, el concepto de transformada de Fourier dependiente del tiempo es quizá más ampliamente utilizado como un marco de una variedad de técnicas para obtener estimadores espectrales de señales en tiempo discreto no estacionarias, y en esas aplicaciones la resolución espectral, la variación temporal y otros aspectos son los más importantes.

Una señal no estacionaria es una señal cuyas propiedades varían con el tiempo y, por ejemplo, podría ser una suma de componentes sinusoidales cuyas amplitudes, frecuencias o fases variaran con el tiempo. Como veremos para el caso de señales de voz en la Sección 10.4.1 y para señales radar Doppler en la Sección 10.4.2, la transformada de Fourier dependiente del tiempo proporciona a menudo una descripción útil de cómo cambian las propiedades de la señal con el tiempo.

Cuando aplicamos la transformada de Fourier dependiente del tiempo a una señal muestreada, los comentarios de la Sección 10.1 se aplican a cada DFT que se calcula. En otras palabras, para cada segmento $x_r[n]$ de la señal, la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada $X_r[k]$ se relacionaría con la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo original mediante los procesos descritos en la Sección 10.1. Además, si la transformada de Fourier dependiente del tiempo se aplicara a señales sinusoidales con parámetros constantes (es decir, no variantes con el tiempo), la presentación de la Sección 10.2 se aplicaría también a cada una de las DFT que se calculan. Cuando las frecuencias de la señal no cambian con el tiempo, podría pensarse que la transformada de Fourier dependiente del tiempo variaría sólo en la dimensión de frecuencia en la forma que se describe en la Sección 10.2, pero esto sólo es cierto en casos muy especiales. Por ejemplo, la transformada de Fourier dependiente del tiempo será constante en la dimensión temporal si la señal es periódica de periodo N_p y $L = \ell_0 N_p$ y $R = r_0 N_p$, siendo ℓ_0 y r_0 enteros. Es decir, la ventana incluye exactamente ℓ_0 periodos, y se mueve exactamente r_0 periodos entre cálculos de la DFT. En general, incluso cuando la señal sea exactamente periódica, las relaciones de variación de fase que aparecen a medida que los diferentes segmentos de la forma de onda se desplazan por la ventana de análisis causan que la transformada de Fourier dependiente del tiempo varíe en la dimensión temporal. Sin embargo, para señales estacionarias, si utilizamos una ventana que descienda a cero en sus extremos, el módulo $|X_r[k]|$ variará sólo ligeramente de un segmento a otro, y la mayor parte de la variación de la transformada de Fourier compleja dependiente del tiempo aparecerá en la fase.

10.4.1. Análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales de voz

La voz se produce por la excitación de un tubo acústico, el *tracto vocal*, que finaliza en uno de sus extremos en los labios y en otro extremo en la glotis. Existen tres clases básicas de sonidos vocales:

- *Sonidos sonoros* que se producen mediante la excitación del tracto vocal con pulsos cuasi periódicos del flujo de aire, causados por la apertura y el cierre de la glotis.
- *Sonidos fricativos* que se producen formando un estrechamiento en cualquier parte del tracto vocal, y forzando el paso del aire por el estrechamiento, de forma que se crea una turbulencia, produciéndose una excitación parecida al ruido.
- *Sonidos oclusivos* producidos por un cierre completo del tracto vocal, lo que crea un aumento de presión tras el cierre, seguido por una liberación brusca de la presión.

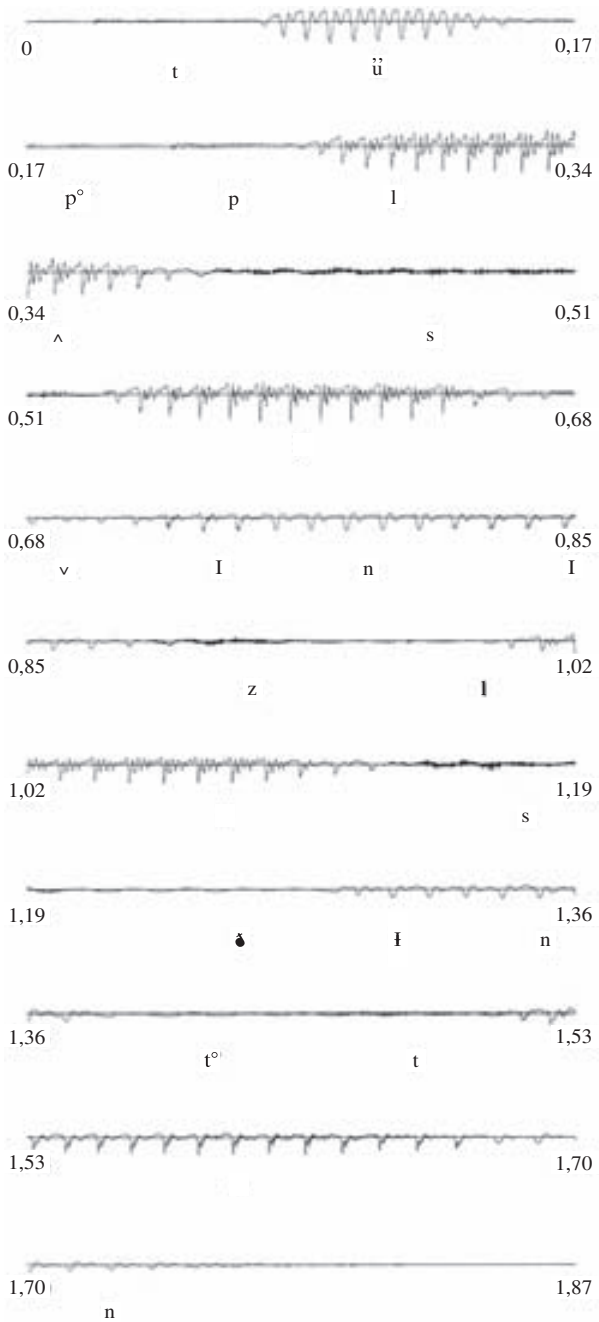


Figura 10.21 Forma de onda de la frase inglesa "Two plus seven is less than ten" (dos más siete es menor que diez). Cada línea dura 0,17 s. Debajo de la señal se indica la transcripción en fonemas alineada temporalmente. La frecuencia de muestreo es de 16000 muestras/s, de forma que cada línea representa 2720 muestras.

En textos como Flanagan (1972), Rabiner y Schafer (1978), O'Shaughnessy (1999), Parsons (1986) y Quatieri (2002) se pueden encontrar presentaciones detalladas de modelos para la señal de voz y aplicaciones de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

Con una forma del tracto vocal constante, la voz se puede modelar como la respuesta de un sistema lineal e invariante con el tiempo (el tracto vocal) a un tren de impulsos cuasi periódico para el caso de sonidos sonoros o a ruido de banda ancha para el caso de sonidos sordos. El tracto vocal es un sistema de transmisión acústica que se caracteriza por sus frecuencias naturales, denominadas *formantes*, que

corresponden a las resonancias de su respuesta en frecuencia. En la voz normal, el tracto vocal cambia su forma de manera relativamente lenta con el tiempo, a medida que la lengua y los labios realizan los gestos que producen el habla, y por tanto, la voz se puede modelar como un filtro que varía lentamente con el tiempo que impone sus propiedades de respuesta en frecuencia al espectro de la excitación. La Figura 10.21 muestra una forma de onda típica de una señal de voz.

A partir de esta breve descripción del proceso de producción de la señal vocal y de la Figura 10.21, vemos que la voz es claramente una señal no estacionaria. Sin embargo, como se muestra en la figura, se puede suponer que las características de la señal permanecen esencialmente constantes en intervalos de tiempo del orden de 30 o 40 ms. El contenido en frecuencia de la señal de voz puede abarcar hasta 15 kHz o más, pero la voz es altamente inteligible incluso con bandas de frecuencia limitadas a unos 3 kHz. Los sistemas telefónicos comerciales, por ejemplo, limitan típicamente a unos 3 kHz. La frecuencia de muestreo estándar para sistemas digitales de comunicación telefónica es de 8000 muestras/s.

La Figura 10.21 muestra que la señal consiste en una secuencia de segmentos *sonoros* cuasi periódicos intercalados con segmentos *sordos* con aspecto de ruido. Esta figura sugiere que si la longitud de la ventana L no es demasiado grande, las propiedades de la señal no cambiarán apreciablemente desde el comienzo del segmento hasta el final. Por tanto, la DFT de un segmento de voz enventanado debería poner de manifiesto las propiedades en el dominio de la frecuencia de la señal en el instante correspondiente a la posición de la ventana. Por ejemplo, si la longitud de la ventana es suficiente para poder resolver los armónicos, la DFT de un segmento de voz enventanado debería mostrar una serie de picos en múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de la señal en ese intervalo. Esto requiere normalmente que la ventana abarque varios periodos de la forma de onda. Si la ventana es demasiado corta, los armónicos no se resolverán, pero la forma general del espectro será todavía evidente. Esto es un caso típico del compromiso entre resolución temporal y resolución en frecuencia que aparece en al análisis de señales no estacionarias. Ya hemos visto esto antes en el Ejemplo 10.9. Si la ventana es demasiado grande, las propiedades de la señal pueden cambiar demasiado en la duración de la ventana. Si la ventana es demasiado corta, la resolución de las componentes de banda estrecha será sacrificada. El siguiente ejemplo ilustra este compromiso.

Ejemplo 10.11 Representación mediante el espectrograma de la transformada de Fourier dependiente del tiempo de una señal de voz

La Figura 10.22(a) muestra la representación mediante el espectrograma de la transformada de Fourier dependiente del tiempo de la frase de la Figura 10.21. La forma de la señal se muestra en la misma escala temporal, bajo el espectrograma. Más concretamente, la Figura 10.22(a) es el *espectrograma de banda ancha*. Éste se produce utilizando una ventana que es relativamente corta en el dominio del tiempo, y se caracteriza por tener una resolución pobre en el dominio de la frecuencia y una buena resolución en la dimensión temporal. El eje de frecuencia se etiqueta en función de la frecuencia en tiempo continuo. Como la frecuencia de muestreo de la señal es de 16.000 muestras/s, se deduce que la frecuencia $\lambda = \pi$ corresponde a 8 kHz. La ventana concreta utilizada en la Figura 10.22(a) ha sido una ventana de Hamming de duración 6,7 ms, que corresponde a $L = 108$. El valor de R es de 16, que equivale a incrementos temporales de 1 ms.[8] Las bandas anchas y oscuras que se desplazan horizontalmente por el espectrograma corresponden a las frecuencias de resonancia del tracto vocal que, como podemos ver, varían con el tiempo. La apariencia verticalmente estriada del espectrograma se debe a la naturaleza cuasi periódica de las partes sonoras de la señal, lo que es evidente si se comparan las variaciones de la representación de la forma de onda y del espectrograma. Como la longitud de la ventana de análisis es del orden de la longitud de un periodo de la señal, a medida que la ventana se desliza en el tiempo va

[8] Al dibujar espectogramas, es habitual utilizar valores pequeños de R con el fin de obtener representaciones que varíen suavemente.

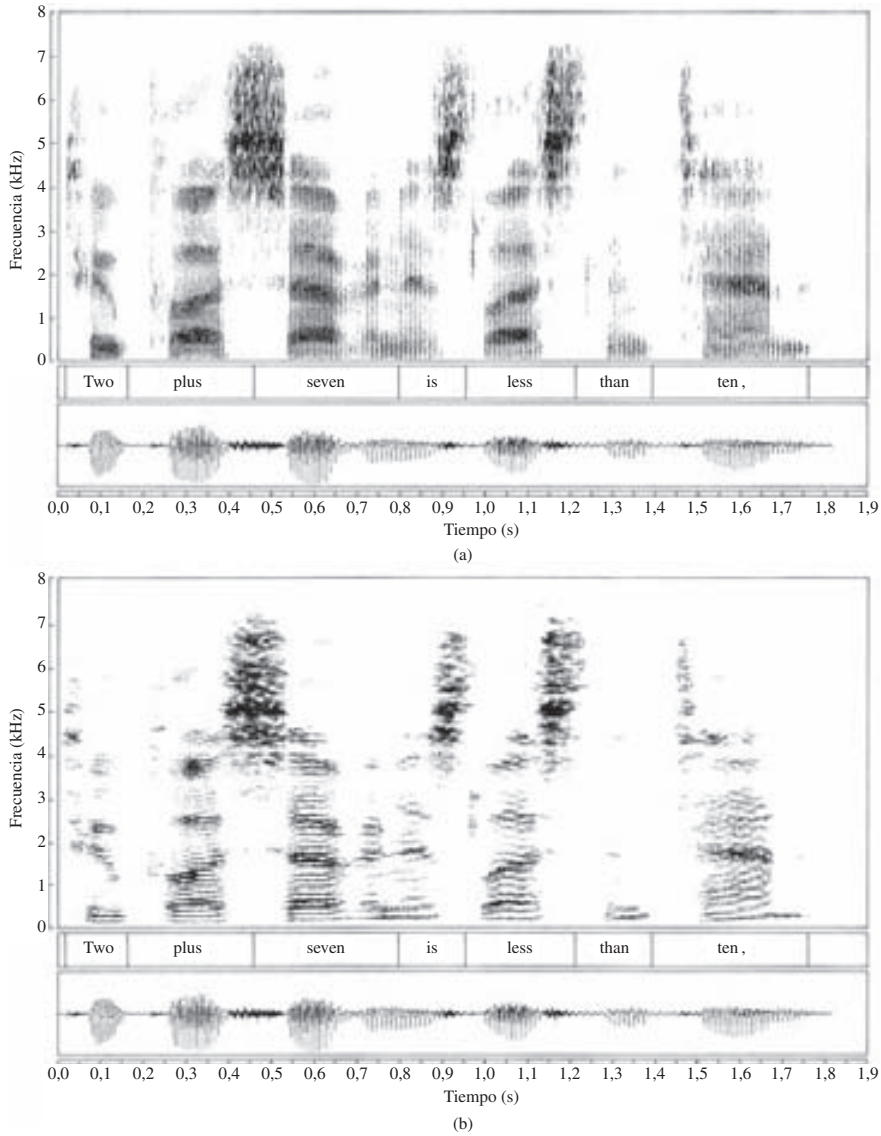


Figura 10.22 (a) Espectrograma de banda ancha de la señal de la Figura 10.21. (b) Espectrograma de banda estrecha.

cubriendo alternativamente segmentos de alta energía de la señal y segmentos de baja energía, lo que produce las estrías verticales de la gráfica en los segmentos sonoros.

En el análisis de Fourier dependiente del tiempo de *banda estrecha*, se utiliza una ventana más larga, para proporcionar una mayor resolución en frecuencia, con la correspondiente disminución de resolución temporal. La gráfica de la Figura 10.22(b) muestra el análisis de banda estrecha de la misma señal de voz. En este caso, se ha utilizado una ventana de Hamming de 45 ms de duración, que corresponde a $L = 720$. El valor de R es de nuevo 16.

Este ejemplo sólo presenta superficialmente las muchas razones por las que la transformada de Fourier dependiente del tiempo es tan importante en análisis y tratamiento de voz. De hecho, el concepto se utiliza directa e indirectamente como base para el análisis acústico-fonético y en muchas aplicaciones fundamentales de tratamiento de voz, como codificación digital, eliminación de ruido y de reverberación, reconocimiento de voz, verificación e identificación de locutores. Para nuestros objetivos, esta presentación sirve simplemente como introducción ilustrativa.

10.4.2. Análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales radar

Otra área de aplicación en la que la transformada de Fourier dependiente del tiempo desempeña un papel importante es el análisis de las señales radar. Los elementos de un sistema radar típico son:

- Las antenas de transmisión y recepción (a menudo son la misma).
- Un transmisor que genera una señal apropiada en frecuencias de microondas. En nuestra presentación supondremos que la señal está formada por pulsos sinusoidales. Aunque esto es cierto en muchos casos, se pueden utilizar otras señales, en función de los objetivos específicos y del diseño del radar.
- Un receptor que amplifica y detecta los ecos de los pulsos transmitidos que son reflejados por los objetos iluminados por la antena.

En un sistema radar como el anterior, la señal sinusoidal transmitida se propaga a la velocidad de la luz, se refleja en el objeto, y vuelve a la velocidad de la luz a la antena. Por tanto, se produce un retardo debido al tiempo de tránsito de la antena al objeto y del objeto a la antena de nuevo. Si suponemos que la señal transmitida es un pulso sinusoidal de la forma $\cos(\Omega_0 t)$ y la distancia de la antena al objeto es $\rho(t)$, la señal recibida es un pulso de la forma

$$s(t) = \cos[\Omega_0(t - 2\rho(t)/c)], \tag{10.58}$$

donde c es la velocidad de la luz. Si el objeto no se mueve con respecto a la antena, $\rho(t) = \rho_0$, siendo ρ_0 el *rango*. Como el retardo temporal entre el pulso transmitido y recibido es $2\rho_0/c$, la medida del retardo temporal se puede utilizar para estimar el rango. Sin embargo, si $\rho(t)$ no es constante, la señal recibida es una sinusoide modulada en fase y la diferencia de fases contiene información del rango y del movimiento relativo del objeto con respecto a la antena. Concretamente, si representamos el rango que varía con el tiempo mediante un desarrollo en serie de Taylor como

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho_0 t + \frac{1}{2!}\ddot{\rho}_0 t^2 + \cdots, \tag{10.59}$$

donde ρ_0 es el rango nominal, ρ_0 es la velocidad y $\ddot{\rho}_0$ es la aceleración, etc. Suponiendo que el objeto se mueve con velocidad constante (es decir, $\ddot{\rho}_0 = 0$), y sustituyendo la Ecuación (10.59) en la Ecuación (10.58), obtenemos

$$s(t) = \cos[(\Omega_0 - 2\Omega_0\rho_0/c)t - 2\Omega_0\rho_0/c]. \tag{10.60}$$

En este caso, la frecuencia de la señal recibida se diferencia de la frecuencia de la señal transmitida en la *frecuencia Doppler*, definida como

$$\Omega_d = -2\Omega_0\rho_0/c. \tag{10.61}$$

Por tanto, el retardo temporal se puede utilizar todavía para estimar el rango, y además, si podemos estimar la frecuencia Doppler podemos estimar la velocidad del objeto con respecto a la antena.

En la práctica, la señal recibida generalmente es muy débil, y por tanto se debe añadir un término de ruido a la Ecuación (10.60). En el análisis simple que realizaremos en esta sección se pueden despreciar

los efectos del ruido. Además, en la mayor parte de los sistemas radar, la señal de la Ecuación (10.60) se trasladaría en frecuencia hasta una frecuencia nominal más baja durante el proceso de detección. Sin embargo, el desplazamiento Doppler cumplirá todavía la Ecuación (10.61), incluso cuando $s(t)$ se demodula a una frecuencia central más baja.

Para aplicar el análisis de Fourier dependiente del tiempo a estas señales, se limita primero la señal a una banda de frecuencias que incluya los desplazamientos Doppler esperados y, a continuación, se muestrea la señal resultante con un periodo de muestreo apropiado T, con lo que se obtiene una señal en tiempo discreto de la forma

$$x[n] = \cos[(\omega_0 - 2\omega_0\rho_0/c)n - 2\omega_0\rho_0/c], \tag{10.62}$$

donde $\omega_0 = \Omega_0 T$. En muchos casos, el movimiento de los objetos será más complejo que lo que hemos supuesto, lo que requerirá la incorporación de términos de orden superior en la Ecuación (10.59), que dará lugar por tanto a una modulación más complicada de la fase de la señal recibida. Otra forma de representar la variación más complicada de la frecuencia de los ecos es utilizar la transformada de Fourier dependiente del tiempo con una ventana que sea lo suficientemente corta como para que la suposición de una frecuencia de desplazamiento Doppler constante sea válida en el intervalo de la ventana, pero que no sea tan corta como para sacrificar la resolución adecuada cuando dos o más objetos que se mueven crean señales de retorno con desplazamientos Doppler que se superponen en el receptor.

Ejemplo 10.12 Análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales radar con Doppler

La Figura 10.23 muestra un ejemplo de análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales radar con Doppler (véase Schaefer, Schafer y Mersereau, 1979). Los datos radar se han preprocesado para eliminar los desplazamientos Doppler de baja velocidad, dejando las variaciones que se muestran en la figura. Se ha realizado la transformada de Fourier dependiente del tiempo utilizando una ventana de Kaiser con $N = L = 64$ y $\beta = 4$. En la figura, $|X_r[k]|$ se representa con el tiempo en la dimensión vertical (se incrementa hacia arriba) y la frecuencia en la dimensión horizontal.[9] En este caso, las sucesivas DFT se van poniendo una junto a otra. Se utiliza un algoritmo de eliminación de líneas ocultas para crear una perspectiva bidimensional de la transformada de Fourier dependiente del tiempo. A la izquierda de la línea central aparece un pico pronunciado que se va moviendo siguiendo una trayectoria suave en el plano tiempo-frecuencia. Esto corresponde a un objeto en movimiento cuya velocidad varía de una forma regular. Los otros picos anchos de la transformada de Fourier dependiente del tiempo son debidos al ruido y a retornos espurios denominados *clutter* en terminología de radar. Un ejemplo de movimiento que podría crear una variación de la frecuencia Doppler es un cohete que se mueve a velocidad constante, pero que rota sobre su eje longitudinal. Un pico que se mueve en la transformada de Fourier dependiente del tiempo podría corresponder a reflexiones de la aleta del cohete que se mueve acercándose y alejándose alternativamente de la antena debido al giro del cohete. La Figura 10.23(b) muestra una estimación de la frecuencia Doppler en función del tiempo. Esta estimación se obtiene simplemente localizando el pico más alto de cada DFT.

[9] El dibujo muestra las frecuencias negativas a la izquierda de la línea que pasa por el centro del dibujo y las frecuencias positivas a la derecha. Esto se puede hacer calculando la DFT de $(-1)^n x_r[n]$ y dándose cuenta de que este cálculo desplaza el origen de índices de la DFT a $k = N/2$. Alternativamente, se puede calcular la DFT de $x_r[n]$ y reindexarse posteriormente.

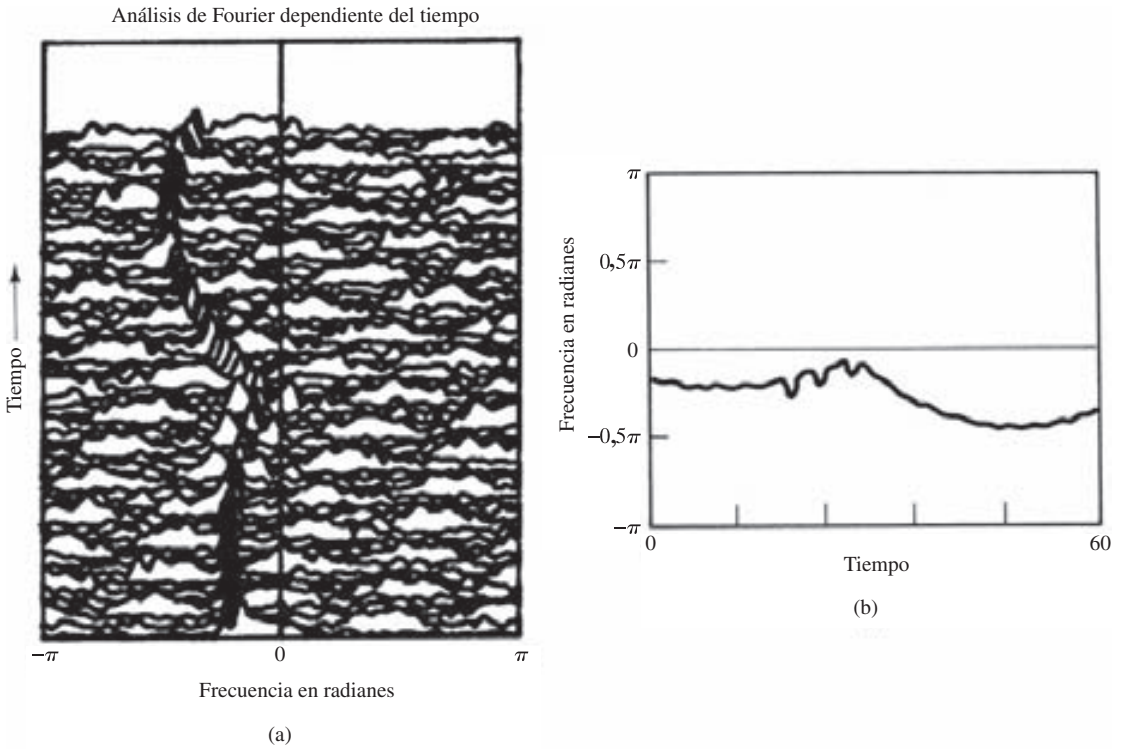


Figura 10.23 Ilustración del análisis de Fourier dependiente del tiempo de una señal radar con Doppler. (a) Secuencia de transformadas de Fourier de la señal radar con Doppler. (b) Frecuencia Doppler estimada a partir del pico máximo de la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

10.5. ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES ALEATORIAS ESTACIONARIAS: EL PERIODOGRAMA

En las secciones anteriores hemos presentado y comentado el análisis de Fourier de señales sinusoidales con parámetros estacionarios (no variantes con el tiempo) y de señales no estacionarias, como la voz y el radar. En los casos en los que la señal se puede modelar como una suma de sinusoides o un sistema lineal excitado por un tren de impulsos periódico, las transformadas de Fourier de los segmentos de longitud finita de la señal tienen una representación natural y conveniente utilizando transformadas de Fourier, enventanado y teoría de sistemas lineales. Sin embargo, muchas señales con aspecto de ruido, como los segmentos sordos de voz de la Sección 10.4.1 se modelan mejor utilizando señales aleatorias.

Como comentamos en la Sección 2.10 y se demuestra en el Apéndice A, los procesos aleatorios se utilizan a menudo cuando el proceso que genera las señales es demasiado complejo para utilizar un modelo determinista razonable. Generalmente, cuando la entrada a un sistema lineal e invariante con el tiempo se modela como un proceso aleatorio estacionario, muchas de las características esenciales de la entrada y de la salida se representan adecuadamente como promedios, como el valor medio (nivel de continua), la varianza (potencia media), la función de autocorrelación o la densidad espectral de potencia. En consecuencia, resulta de particular interés estimar esos promedios para una señal dada. Como se comenta en el Apéndice A, un estimador típico del valor medio de un proceso aleatorio estacionario a partir de un segmento de datos de longitud finita es la *media muestral*, definida como

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} x[n]. \tag{10.63}$$

De forma similar, un estimador típico de la varianza es la *varianza muestral* definida como

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} (x[n] - \hat{m}_x)^2. \tag{10.64}$$

La media muestral y la varianza muestral, que son a su vez variables aleatorias, son estimadores *insesgados* y *asintóticamente insesgados*, respectivamente, es decir, el valor medio de $\hat{m}_x$ es la media verdadera m_x y el valor medio de $\hat{\sigma}_x^2$ se aproxima a la verdadera varianza σ_x^2 cuando L tiende a ∞. Además, ambos estimadores son *consistentes*, es decir, mejoran cuando L aumenta, ya que sus varianzas tienden a cero cuando L tiende a ∞.

En el resto de este capítulo estudiaremos los estimadores del espectro de potencia[10] de una señal que utilizan la DFT. Como veremos, hay dos planteamientos básicos para estimar el espectro de potencia. Uno de ellos, que desarrollaremos en esta sección, se denomina *análisis mediante el periodograma* y se basa en realizar directamente la transformada de Fourier de los segmentos de longitud finita de la señal. El segundo planteamiento, que veremos en la Sección 10.6, se basa en estimar primero la secuencia de autocovarianza y calcular después la transformada de Fourier de dicha estimación. En cada caso, estaremos interesados generalmente en obtener estimadores insesgados y consistentes. Desafortunadamente, el análisis de estos estimadores es muy difícil y en general, sólo se pueden realizar análisis aproximados. Incluso estos análisis aproximados están fuera de los objetivos de este libro, y sólo nos referiremos a ellos de una forma cualitativa. En Blackman y Tukey (1958), Hannan (1960), Jenkins y Watts (1968), Koopmans (1995), Kay y Marple (1981), Marple (1987), Kay (1988) y Stoica y Moses (2005) se pueden encontrar desarrollos detallados.

10.5.1. El periodograma

Consideremos el problema de estimar la densidad espectral de potencia $P_{ss}(\Omega)$ de una señal en tiempo continuo $s_c(t)$. La Figura 10.1 y la presentación asociada de la Sección 10.1 sugieren un planteamiento intuitivo de la estimación del espectro de potencia. Basándonos en ese planteamiento, supongamos ahora que la señal de entrada $s_c(t)$ es una señal aleatoria estacionaria. El filtro paso bajo antisolapamiento crea una nueva señal aleatoria estacionaria cuyo espectro de potencia es de banda limitada, de forma que la señal se puede muestrear sin solapamiento. Sea $x[n]$ una señal aleatoria estacionaria en tiempo discreto cuya densidad espectral de potencia $P_{xx}(\omega)$ es proporcional a $P_{ss}(\Omega)$ en la banda de paso del filtro antisolapamiento, es decir,

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T}P_{ss}\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi, \tag{10.65}$$

donde hemos supuesto que la frecuencia de corte del filtro antisolapamiento es π/T y T es el periodo de muestreo (véase el Problema 10.39 para consideraciones adicionales sobre el muestreo de señales aleatorias). En consecuencia, una estimación buena de $P_{xx}(\omega)$ proporcionará una estimación útil de $P_{ss}(\Omega)$. La ventana $w[n]$ de la Figura 10.1 selecciona un segmento de longitud finita (de L muestras) de $x[n]$, que indicaremos como $v[n]$, cuya transformada de Fourier es

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n}. \tag{10.66}$$

[10]El término *espectro de potencia* se utiliza frecuentemente en lugar del término más preciso de *densidad espectral de potencia*.

Consideremos como estimador del espectro de potencia

$$I(\omega) = \frac{1}{LU}|V(e^{j\omega})|^2, \tag{10.67}$$

donde la constante U anticipa la necesidad de una normalización para eliminar el sesgo del estimador espectral. Cuando $w[n]$ es la ventana rectangular, esta estimación del espectro de potencia se denomina *periodograma*. Si la ventana no es rectangular, $I(\omega)$ se denomina *periodograma modificado*. Claramente, el periodograma tiene algunas de las propiedades básicas del espectro de potencia. Es no negativo, y para señales reales, es una función real y par de la frecuencia. Además, se puede demostrar (véase el Problema 10.33) que

$$I(\omega) = \frac{1}{LU}\sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m]e^{-j\omega m}, \tag{10.68}$$

donde

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]. \tag{10.69}$$

Nótese que la secuencia $c_{vv}[m]$ es la autocorrelación aperiódica de la secuencia de longitud finita $v[n] = w[n]x[n]$. Por tanto, el periodograma es de hecho la transformada de Fourier de la correlación aperiódica de la secuencia de datos enventanada.

El cálculo explícito del periodograma se puede realizar sólo en frecuencias discretas. Utilizando las Ecuaciones (10.66) y (10.67) podemos ver que si la transformada de Fourier en tiempo discreto de $w[n]x[n]$ se sustituye por su DFT, obtendremos muestras en las frecuencias de la DFT $\omega_k = 2\pi k/N$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Concretamente, la expresión de las muestras del periodograma es

$$I[k] = I(\omega_k) = \frac{1}{LU}|V[k]|^2, \tag{10.70}$$

siendo $V[k]$ la DFT de N puntos de $w[n]x[n]$. Si se desea escoger un valor de N mayor que la longitud de la ventana L, se debe añadir el número de ceros apropiado a la secuencia $w[n]x[n]$.

Si una señal aleatoria tiene media distinta de cero, su espectro de potencia tendrá un impulso en frecuencia cero. Si la media es relativamente grande, esta componente dominará el estimador del espectro, causando que las componentes de baja amplitud y baja frecuencia se vean oscurecidas por las fugas. Por lo tanto, en la práctica se estima la media utilizando la Ecuación (10.63) y la estimación resultante se resta de la señal aleatoria antes de calcular el estimador del espectro de potencia. Aunque la media muestral es sólo un estimador aproximado de la componente a frecuencia cero, al sustraerlo de la señal se obtienen a menudo mejores estimaciones en las frecuencias vecinas.

10.5.2. Propiedades del periodograma

La naturaleza de la estimación del espectro de potencia mediante el periodograma se puede determinar teniendo en cuenta que, para cada valor de ω, $I(\omega)$ es una variable aleatoria. Calculando la media y la varianza de $I(\omega)$, se puede determinar si el estimador es insesgado o si es consistente.

Partiendo de la Ecuación (10.68), la esperanza de $I(\omega)$ es

$$\mathscr{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{LU}\sum_{m=-(L-1)}^{L-1} \mathscr{E}\{c_{vv}[m]\}e^{-j\omega m}. \tag{10.71}$$

La esperanza de $c_{vv}[m]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\{c_{vv}[m]\} &= \sum_{n=0}^{L-1} \mathscr{E}\{x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]\} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]\mathscr{E}\{x[n]x[n+m]\}.\end{aligned} \tag{10.72}$$

Como estamos suponiendo que $x[n]$ es estacionario,

$$\mathscr{E}\{x[n]x[n+m]\} = \phi_{xx}[m], \tag{10.73}$$

y la Ecuación (10.72) se puede expresar como

$$\mathscr{E}\{c_{vv}[m]\} = c_{ww}[m]\phi_{xx}[m], \tag{10.74}$$

siendo $c_{ww}[m]$ la autocorrelación aperiódica de la ventana, es decir,

$$c_{ww}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]. \tag{10.75}$$

Es decir, la media de la autocorrelación aperiódica de la señal enventanada es igual a la autocorrelación aperiódica de la ventana multiplicada por la verdadera función de autocorrelación. Es decir, en un *sentido de promedio*, la función de autocorrelación de la ventana de datos aparece como una ventana sobre la verdadera función de autocorrelación.

A partir de la Ecuación (10.71), de la Ecuación (10.74) y de la propiedad de modulación-enventanado de las transformadas de Fourier (Sección 2.9.7), se deduce que

$$\mathscr{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta)C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta, \tag{10.76}$$

siendo $C_{ww}(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de la autocorrelación aperiódica de la ventana, es decir,

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2. \tag{10.77}$$

De acuerdo con la Ecuación (10.76), tanto el periodograma como el periodograma modificado son estimadores sesgados del espectro de potencia, ya que $\mathscr{E}\{I(\omega)\}$ no es igual a $P_{xx}(\omega)$. De hecho, podemos ver que el sesgo es el resultado de la convolución del verdadero espectro de potencia con la transformada de Fourier de la autocorrelación aperiódica de la ventana de datos. Si aumentamos la longitud de la ventana, $W(e^{j\omega})$ estará más concentrado alrededor de $\omega = 0$ y, por tanto $C_{ww}(e^{j\omega})$ debe parecerse cada vez más a un tren de impulsos periódico. Si el factor de escala $1/(LU)$ se elige correctamente $\mathscr{E}\{I(\omega)\}$ se irá pareciendo a $P_{xx}(\omega)$ a medida que $C_{ww}(e^{j\omega})$ se aproxima a un tren de impulsos periódico. La escala se puede ajustar escogiendo la constante de normalización U de forma que

$$\frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU}\sum_{n=0}^{L-1}(w[n])^2 = 1, \tag{10.78}$$

o

$$U = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}(w[n])^2. \tag{10.79}$$

Para el caso de ventana rectangular, debemos escoger $U = 1$, mientras que otras ventanas de datos requerirían un valor de $0 < U < 1$ si $w[n]$ se normaliza a un valor máximo de 1. Alternativamente, la normalización se puede absorber en la amplitud de $w[n]$. Por tanto, si se normaliza apropiadamente, el periodograma y el periodograma modificado son asintóticamente insesgados, es decir, el sesgo tiende a cero a medida que aumenta la longitud de la ventana.

Para examinar si el periodograma es un estimador consistente, o se va haciendo consistente al aumentar la longitud de la ventana, es necesario considerar el comportamiento de la varianza del periodograma. Es muy difícil obtener una expresión de la varianza del periodograma incluso en los casos más simples. Sin embargo, se ha demostrado (véase Jenkins y Watts, 1968) que para un amplio rango de condiciones, a medida que aumenta la longitud de la ventana,

$$\mathrm{var}[I(\omega)] \simeq P_{xx}^2(\omega). \tag{10.80}$$

Es decir, la varianza del estimador periodograma es aproximadamente del mismo tamaño que el cuadrado del espectro de potencia que estamos estimando. Por consiguiente, como la varianza no decrece asintóticamente a cero al aumentar la longitud de la ventana, el periodograma no es un estimador consistente.

Las propiedades del estimador periodograma del espectro de potencia que se han comentado se ilustran en la Figura 10.24, que muestra estimaciones de ruido blanco mediante el periodograma, utilizando ventanas rectangulares de longitudes $L = 16, 64, 256$ y 1024. La secuencia $x[n]$ se ha obtenido mediante un generador de números seudoaleatorios, cuya salida se ha escalado de forma que $|x[n]| \leq \sqrt{3}$. Un buen generador de números aleatorios produce amplitudes con distribución uniforme y la correlación entre muestras es pequeña. Por tanto, el espectro de potencia de la salida del generador de números aleatorios se podría modelar en este caso como $P_{xx}(\omega) = \sigma_x^2 = 1$ para todo ω. Para cada una de las cuatro ventanas rectangulares, se calcula el periodograma con constante de normalización $U = 1$ y en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$ para $N = 1024$ utilizando la DFT. Es decir,

$$I[k] = I(\omega_k) = \frac{1}{L}|V[k]|^2 = \frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\right|^2. \tag{10.81}$$

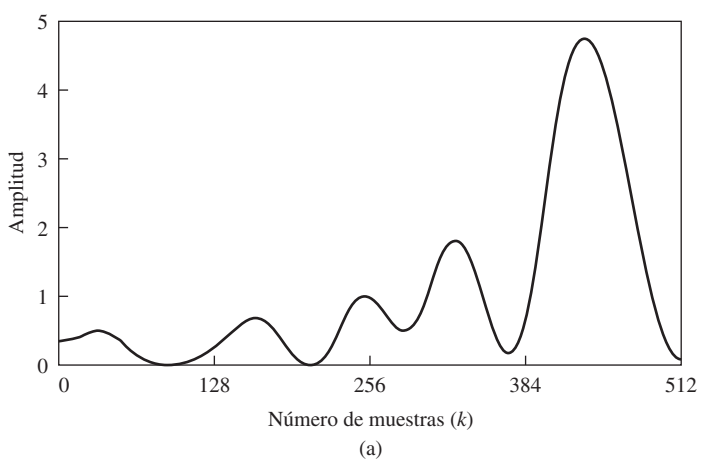


Figura 10.24 Periodogramas de una secuencia de ruido blanco pseudoaleatoria, (longitud de la ventana $L = 16$ y longitud de la DFT $N = 1024$.

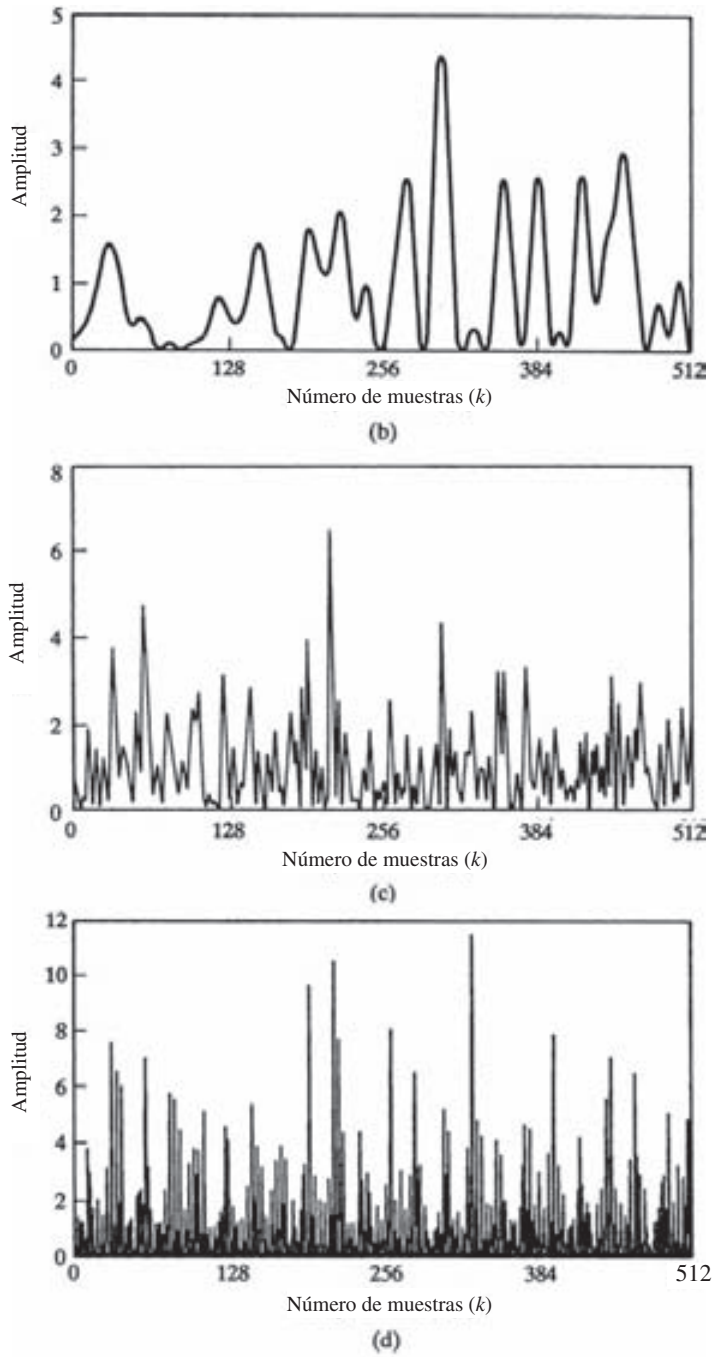


Figura 10.24 (*Continuación*) (b) $L = 64$ y $N = 1024$. (c) $L = 256$ y $N = 1024$. (d) $L = 1024$ y $N = 1024$.

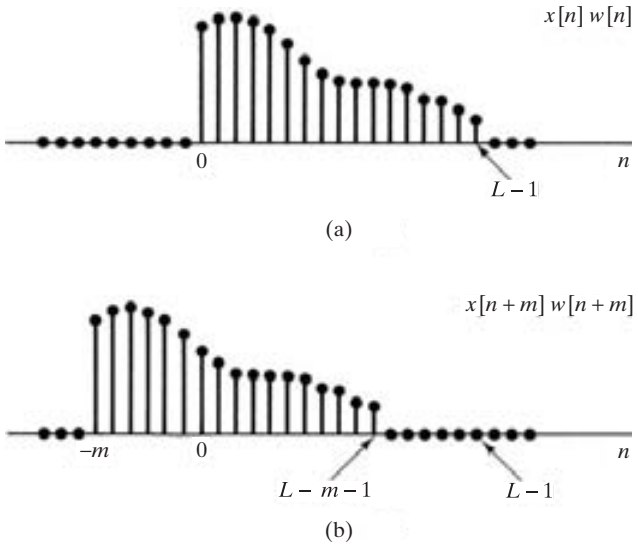


Figura 10.25 Ilustración de secuencias que intervienen en la Ecuación (10.69). (a) Una secuencia de longitud finita. (b) Secuencia desplazada para $m > 0$.

En la Figura 10.24, los valores de la DFT se conectan con líneas rectas a efectos de representación. No hay que olvidar que $I(\omega)$ es una función real y par de ω, de forma que sólo es necesario dibujar $I[k]$ para $0 \leq k \leq N/2$ que corresponde a $0 \leq \omega \leq \pi$. Nótese que el estimador del espectro fluctúa más rápidamente a medida que la longitud de la ventana L crece. Este comportamiento se puede explicar recordando que, aunque hemos visto el método del periodograma como un cálculo directo de la estimación del espectro, también hemos visto que el periodograma se puede obtener mediante la transformada de Fourier de la estimación de la autocorrelación de la Ecuación (10.69). La Figura 10.25 ilustra una secuencia enventanada, $x[n]w[n]$, y una versión desplazada $x[n+m]w[n+m]$, como se requiere en la Ecuación (10.69). Con esta figura podemos ver que $(L-m)$ valores de señal intervienen en el cálculo de un valor concreto de la autocorrelación $c_{vv}[m]$. Por tanto, cuando m es cercano a L, sólo unos pocos valores de $x[n]$ intervienen en el cálculo, con lo que es razonable esperar que la estimación de la secuencia de autocorrelación sea considerablemente más inexacta para esos valores de m y que, por tanto, muestre una variación considerable entre valores adyacentes de m. Por el contrario, cuando m es pequeña, intervienen muchas más muestras y la variabilidad de $c_{vv}[m]$ con respecto a m no será tan grande. La variabilidad en valores altos de m se manifiesta en la transformada de Fourier como fluctuaciones a todas las frecuencias, y por lo tanto, para valores de L altos, el estimador periodograma tiende a variar rápidamente con la frecuencia. De hecho, se puede demostrar (véase Jenkins y Watts, 1968) que si $N = L$, los valores del periodograma en las frecuencias de la DFT $2\pi k/N$ están incorrelados. Como, a medida que N crece, las frecuencias de la DFT se van acercando, este comportamiento es inconsistente con nuestro objetivo de obtener un buen estimador del espectro de potencia. Sería preferible obtener un estimador del espectro suave sin las variaciones resultantes del proceso de estimación. Esto se puede realizar promediando múltiples periodogramas independientes para reducir las fluctuaciones.

10.5.3. Promediado de periodogramas

El promediado de periodogramas para la estimación del espectro fue estudiado ampliamente en primer lugar por Bartlett (1953). Posteriormente, tras el desarrollo de los algoritmos rápidos para el cómputo de la DFT, Welch (1970) combinó esos algoritmos de cálculo con el uso de una ventana de datos $w[n]$, con el fin de desarrollar un método de promediado de periodogramas modificados. Para realizar el promediado

de periodogramas, una secuencia de datos $x[n]$, $0 \leq n \leq Q-1$, se divide en segmentos de L muestras de longitud, y se aplica a cada segmento una ventana de longitud L. Es decir, formamos los segmentos

$$x_r[n] = x[rR+n]w[n], \qquad 0 \leq n \leq L-1. \tag{10.82}$$

Si $R < L$, los segmentos se solapan y si $R = L$ los segmentos son contiguos. Nótese que Q indica la longitud de los datos disponibles. El número total de segmentos depende de los valores de R, L, Q y de las relaciones entre ellos. Concretamente, habrá K segmentos de longitud completa, siendo K el máximo entero para el que $(K-1)R+(L-1) \leq Q-1$. El periodograma del segmento r-ésimo es

$$I_r(\omega) = \frac{1}{LU}|X_r(e^{j\omega})|^2, \tag{10.83}$$

donde $X_r(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x_r[n]$. Cada $I_r(\omega)$ tiene las mismas propiedades del periodograma que se han descrito anteriormente. El promediado de periodogramas consiste en promediar las K estimaciones del periodograma $I_r(\omega)$; es decir, formar el periodograma promediado definido como

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega). \tag{10.84}$$

Para examinar el sesgo y la varianza de $\bar{I}(\omega)$, hagamos $L = R$, de modo que los segmentos no se solapen, y supongamos que $\phi_{xx}[m]$ es pequeño para $m > L$; es decir, las muestras de señal separadas por más de L valores están aproximadamente incorreladas. Entonces es razonable suponer que los periodogramas $I_r(\omega)$ serán variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Bajo esta hipótesis, el valor esperado de $\bar{I}(\omega)$ es

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1} \mathscr{E}\{I_r(\omega)\}, \tag{10.85}$$

o, como suponemos que los periodogramas son independientes e idénticamente distribuidos,

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathscr{E}\{I_r(\omega)\} \qquad \text{para cualquier } r. \tag{10.86}$$

De la Ecuación (10.76), se deduce que

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \mathscr{E}\{I_r(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta)C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta, \tag{10.87}$$

siendo L la longitud de la ventana. Cuando $w[n]$ es la ventana rectangular, el método de promediado de periodogramas se denomina *procedimiento de Bartlett* y, en este caso, se puede demostrar que

$$c_{ww}[m] = \begin{cases} L-|m|, & |m| \leq (L-1), \\ 0 & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{10.88}$$

y, por tanto,

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\omega L/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right)^2. \tag{10.89}$$

Es decir, la esperanza del estimador espectral basado en el promediado de periodogramas es la convolución del verdadero espectro de potencia con la transformada de Fourier de la secuencia triangular $c_{ww}[n]$

que resulta de la autocorrelación de la ventana rectangular. Por tanto, el periodograma promediado es también un estimador sesgado del espectro de potencia.

Para examinar la varianza, utilizamos el hecho de que, en general, la varianza de promediar K variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas es $1/K$ veces la varianza de cada una de las variables aleatorias (véase Bertsekas y Tsitsiklis, 2008). Por tanto, la varianza del periodograma promediado es

$$\mathrm{var}[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K}\mathrm{var}[I_r(\omega)], \tag{10.90}$$

o, aplicando la Ecuación (10.80), se deduce que

$$\mathrm{var}[\bar{I}(\omega)] \simeq \frac{1}{K}P_{xx}^2(\omega). \tag{10.91}$$

En consecuencia, la varianza de $\bar{I}(\omega)$ es inversamente proporcional al número de periodogramas promediados y, a medida que K crece, la varianza tiende a cero.

Observando la Ecuación (10.89), podemos ver que a medida que L, la longitud del segmento $x_r[n]$, crece el lóbulo principal de $C_{ww}(e^{j\omega})$ disminuye su anchura y, por tanto, de la Ecuación (10.87), $\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\}$ se aproxima más a $P_{xx}(\omega)$. Sin embargo, para una longitud total de datos Q fija, el número total de segmentos (suponiendo que $L = R$) es Q/L. Por tanto, a medida que L crece, K decrece y, teniendo en cuenta la Ecuación (10.91), la varianza de $\bar{I}(\omega)$ crece. Obtenemos así un resultado típico en problemas de estimación estadística: para una longitud de datos fija hay un compromiso entre sesgo y varianza. Sin embargo, a medida que aumenta la longitud Q de los datos, L y K pueden aumentar, y por tanto, a medida que Q tiende a ∞, el sesgo y la varianza de $\bar{I}(\omega)$ pueden tender a cero. Por tanto, el promediado de periodogramas puede proporcionar un estimador asintóticamente insesgado y consistente de $P_{xx}(\omega)$.

La explicación anterior ha supuesto que se utilizan ventanas rectangulares sin solapamiento al calcular los periodogramas dependientes del tiempo. Welch (1970) demostró que si se utiliza una ventana con diferente forma, la varianza del periodograma todavía se comporta como indica la Ecuación (10.91). Welch consideró también el caso de solapamiento de las ventanas y demostró que si el solapamiento es la mitad de la longitud de la ventana, la varianza se puede reducir adicionalmente en un factor de casi 2, debido a que se dobla el número de secciones. Un solapamiento mayor no contribuye a reducir la varianza, ya que los segmentos se van haciendo cada vez menos independientes a medida que el solapamiento aumenta.

10.5.4. Cálculo de periodogramas promedio mediante la DFT

Como ocurría con el periodograma, los periodogramas promedio sólo se pueden evaluar explícitamente en un conjunto discreto de frecuencias. Debido a la posibilidad de utilizar los algoritmos de transformada rápida de Fourier para calcular la DFT, una selección del conjunto de frecuencias particularmente conveniente y ampliamente utilizada es $\omega_k = 2\pi k/N$ para un valor apropiado de N. Utilizando la Ecuación (10.84) vemos que si la DFT de $x_r[n]$ se sustituye por su transformada de Fourier de $x_r[n]$ en la Ecuación (10.83), obtenemos muestras de $\bar{I}(\omega)$ en las frecuencias de la DFT $\omega_k = 2\pi k/N$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Concretamente, si $X_r[k]$ es la DFT de $x_r[n]$,

$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU}|X_r[k]|^2, \tag{10.92a}$$

$$\bar{I}[k] = \bar{I}(\omega_k) = \frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1} I_r[k]. \tag{10.92b}$$

Merece la pena tener presente la relación entre el promediado de periodogramas y la transformada de Fourier dependiente del tiempo que se presentó en detalle en la Sección 10.3. La Ecuación (10.92a) demuestra que, excepto por la introducción de la constante normalizada $1/(LU)$, cada periodograma por separado es simplemente el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier dependiente del tiempo en el instante rR y en la frecuencia $2\pi k/N$. Por tanto, en cada índice de frecuencia k, la estimación del espectro de potencia promedio en la frecuencia correspondiente a k es el promedio temporal de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada en el tiempo. Esto se puede visualizar considerando los espectrogramas de la Figura 10.22. El valor $\bar{I}[k]$ es simplemente el promedio a lo largo de una línea horizontal a frecuencia $2\pi k/N$ (o $2\pi k/(NT)$ en frecuencia analógica).[11] Promediar el espectrograma de banda ancha implica que la estimación resultante del espectro de potencia será suave cuando se considera función de la frecuencia, mientras que la condición de banda estrecha corresponde a ventanas temporales más largas y, en consecuencia, a menor suavidad en frecuencia.

Indicaremos los valores $I_r(2\pi k/N)$ como la secuencia $I_r[k]$ y los valores $\bar{I}(2\pi k/N)$ como la secuencia $\bar{I}[k]$. De acuerdo con las Ecuaciones (10.92a) y (10.92b), la estimación del periodograma promedio se calcula en N frecuencias equiespaciadas, promediando los módulos de las DFT de los segmentos de datos enventanados aplicando el factor de normalización LU. Este método de estimación del espectro de potencia proporciona un marco muy adecuado para buscar un compromiso entre resolución y varianza del estimador del espectro. Es particularmente simple y fácil de realizar empleando los algoritmos de transformada rápida de Fourier presentados en el Capítulo 9. Una ventaja importante de este método sobre los otros presentados en la Sección 10.6 es que la estimación del espectro es siempre no negativa.

10.5.5. Un ejemplo de análisis de periodogramas

El análisis del espectro de potencia es una herramienta valiosa para el modelado de señales, y se puede utilizar también para detección de señales, particularmente cuando hay que encontrar periodicidades ocultas en señales muestreadas. Como un ejemplo de este tipo de aplicación del método de promediado de periodogramas, consideremos la secuencia

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + e[n], \tag{10.93}$$

donde θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 2π, independiente de $e[n]$, donde $e[n]$ es una secuencia de ruido blanco de media cero cuyo espectro de potencia es constante $P_{ee}(\omega) = \sigma_e^2$ para todo ω. En modelos de señal de esta forma, el coseno es generalmente la componente deseada y $e[n]$ es una componente de ruido no deseada. A menudo, en problemas prácticos de detección de señales, nuestro interés se encontrará en el caso en el que la potencia del coseno es pequeña comparada con la potencia de ruido. Se puede demostrar (véase el Problema 10.40) que en el periodo base de frecuencia $|\omega| \leq \pi$, el espectro de potencia de esta señal es

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \sigma_e^2 \qquad \text{for } |\omega| \leq \pi. \tag{10.94}$$

Utilizando las Ecuaciones (10.87) y (10.94), se deduce que la esperanza del periodograma promediado es

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\} = \frac{A^2}{4LU}[C_{ww}(e^{j(\omega-\omega_0)}) + C_{ww}(e^{j(\omega+\omega_0)})] + \sigma_e^2. \tag{10.95}$$

[11] Fíjese en que el espectrograma se calcula normalmente de forma que los segmentos enventanados se solapan considerablemente a medida que r varía, mientras que en el promediado de periodogramas, R es normalmente igual a la longitud de la ventana o a la mitad de la longitud de la ventana.

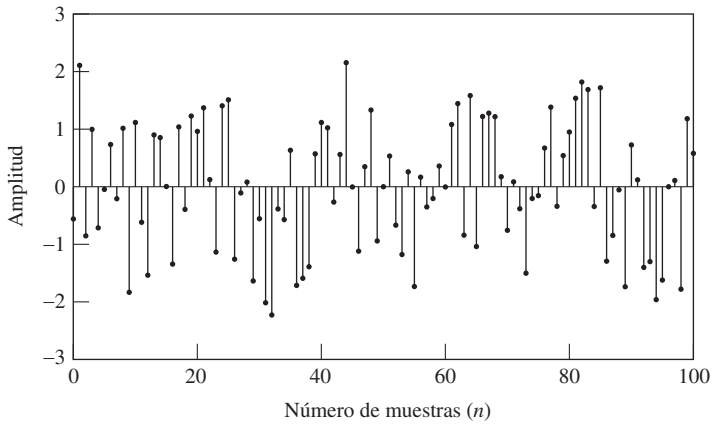


Figura 10.26 Secuencia coseno con ruido blanco, como la de la Ecuación (10.93).

Las Figuras 10.26 y 10.27 muestran el uso del método de promediado para una señal con la forma de la Ecuación (10.93), con $A = 0{,}5$, $\omega_0 = 2\pi/21$ y fase aleatoria $0 \leq \theta < 2\pi$. El ruido tiene una distribución uniforme en amplitud de forma que $-\sqrt{3} < e[n] \leq \sqrt{3}$. Por tanto, se puede demostrar fácilmente que $\sigma_e^2 = 1$. La media de la componente de ruido es cero. La Figura 10.26 muestra 101 muestras de la secuencia $x[n]$. Como la componente de ruido $e[n]$ tiene como amplitud máxima de $\sqrt{3}$, la componente del coseno en la secuencia $x[n]$ (de periodo 21) no se aprecia a simple vista.

La Figura 10.27 muestra las estimaciones del espectro de potencia mediante periodogramas promediados utilizando ventanas rectangulares de amplitud 1, de forma que $U = 1$. Las longitudes L valen 1024, 256, 64 y 16, y la longitud total del registro es $Q = 1024$ en todos los casos. Excepto en la Figura 10.27(a), las ventanas se solapan para la mitad de su longitud. La Figura 10.27(a) es el periodograma del registro completo y las Figuras 10.27(b), (c) y (d) muestran el periodograma promedio para $K = 7, 31$ y 127 segmentos, respectivamente. En todos los casos, el periodograma promedio se evalúa utilizando una DFT de 1024 puntos en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/1024$, (para longitudes de ventana $L < 1024$, se deben añadir ceros a la secuencia antes de calcular la DFT). Por tanto, la frecuencia $\omega_0 = 2\pi/21$ está entre las frecuencias de la DFT $\omega_{48} = 2\pi 48/1024$ y $\omega_{49} = 2\pi 49/1024$.

Al utilizar estos estimadores del espectro de potencia para detectar la presencia y/o la frecuencia de la componente del coseno, hay que buscar los picos más altos del estimador del espectro y comparar su tamaño con el de los valores del espectro que le rodean. Utilizando las Ecuaciones (10.89) y (10.95) podemos ver que el periodograma promedio en la frecuencia ω_0 es

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega_0)\} = \frac{A^2 L}{4} + \sigma_e^2. \tag{10.96}$$

Para que el pico debido a la componente del coseno resalte sobre la variabilidad del periodograma promediado, en este caso especial, debemos seleccionar L para que $A^2L/4 \gg \sigma_e^2$. Esto se ilustra en la Figura 10.27(a), donde L tiene la máxima longitud que puede tener para la longitud del registro Q. Vemos que $L = 1024$ produce un lóbulo principal muy estrecho en la transformada de Fourier de la autocorrelación de la ventana rectangular, de forma que sería posible distinguir señales sinusoidales muy cercanas en frecuencia. Nótese que con los parámetros de este ejemplo ($A = 0{,}5$, $\sigma_e^2 = 1$) y con $L = 1024$, la amplitud del pico del periodograma en la frecuencia $2\pi/21$ está cerca, pero no es igual, al valor esperado de 65. Pueden verse también picos adicionales del periodograma con amplitudes mayores

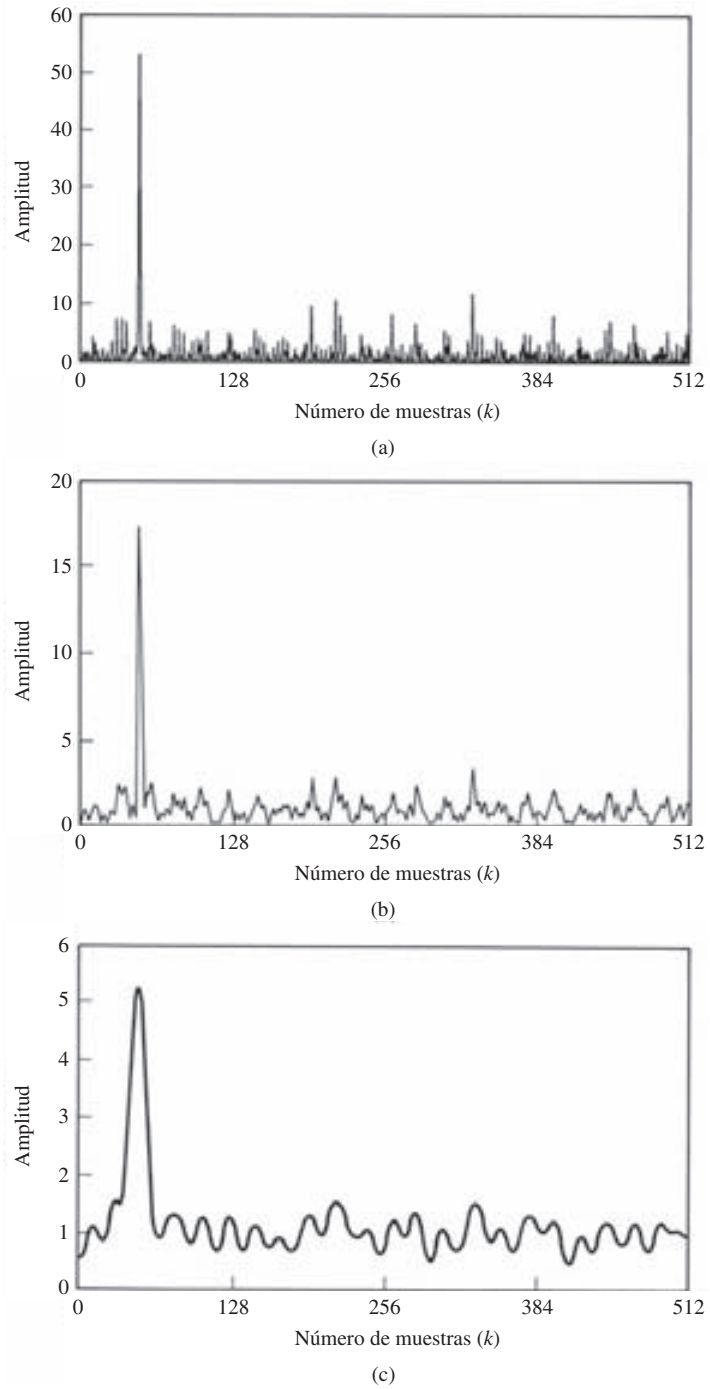
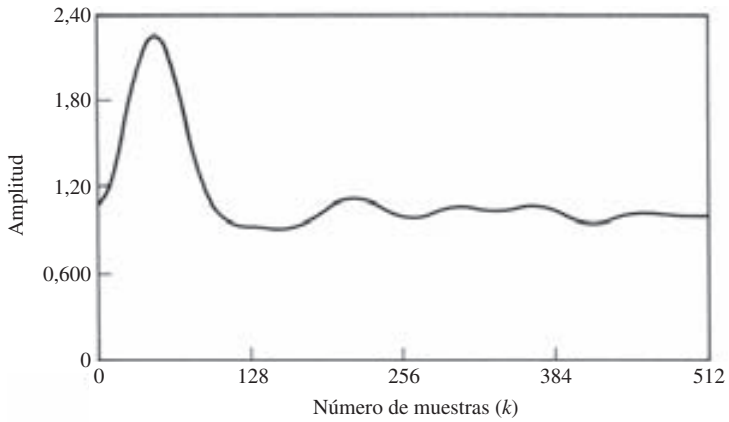


Figura 10.27 Ejemplo de periodograma promediado para una señal de longitud $Q = 1024$. (a) Periodograma con una longitud de ventana $L = Q = 1024$ (sólo un segmento). (b) $K = 7$ y $L = 256$ (solapamiento de $L/2$). (c) $K = 31$ y $L = 64$.



(d)

Figura 10.27 (*Continuación*) (d) $K = 127$ y $L = 16$.

que 10. Es claro que si la amplitud del coseno A se reduce en un factor de 2, es posible que el pico correspondiente se hubiera confundido con la variabilidad inherente del periodograma.

Hemos visto que la única forma segura de reducir la varianza del estimador del espectro es incrementar la longitud del registro de la señal. Esto no siempre es posible, e incluso si fuera posible, registros más largos requieren un mayor procesado. Se puede reducir la variabilidad del estimador manteniendo constante la longitud del registro si se usan ventanas más cortas y se promedian más secciones. Las partes (b), (c) y (d) de la Figura 10.27 ilustran el coste de hacer esto. Nótese que a medida que se utilizan más secciones, la varianza del estimador espectral decrece, pero de acuerdo con la Ecuación (10.96), también lo hace la amplitud del pico debido al coseno. Por lo tanto, nos enfrentamos de nuevo a un compromiso. Es claro que las ventanas más cortas reducen la variabilidad, especialmente si comparamos las regiones de alta frecuencia lejos del pico en las partes (a), (b) y (c) de la Figura 10.27. No olvidemos que el espectro de potencia ideal del generador de ruido seudoaleatorio del modelo es constante $(\sigma_e^2 = 1)$ en todas las frecuencias. En la Figura 10.27(a) hay picos del orden de 10 cuando el verdadero espectro vale 1. En la Figura 10.27(b) la variación sobre 1 es aproximadamente menor que 3, y en la Figura 10.27(c) la variación alrededor de 1 es menor que 0,5. Sin embargo, el uso de ventanas más cortas reduce también la amplitud del pico de cualquier componente de banda estrecha, y degrada también la capacidad de distinguir sinusoides cercanas. La reducción de la amplitud del pico se puede ver claramente en la Figura 10.27. Vemos de nuevo que si en la Figura 10.27(b) se redujera A en un factor de 2, la altura del pico sería aproximadamente de 4, que no es muy diferente de muchos de los otros picos en la región de alta frecuencia. En la Figura 10.27(c), una reducción de A por un factor de 2 dejaría el pico en un valor aproximado de 1,25, que sería indistinguible de otros rizados de la estimación. En la Figura 10.27(d), la ventana es muy corta, y por tanto se reducen mucho las fluctuaciones del estimador del espectro, pero el pico en el espectro debido al coseno es muy ancho y apenas está por encima del nivel del ruido para $A = 0{,}5$. Si la ventana fuera más pequeña, la fuga espectral de la componente de frecuencia negativa causaría que no se pudiera distinguir el pico en la región de baja frecuencia.

Este ejemplo confirma que el periodograma promediado proporciona un método directo para buscar un compromiso entre la resolución espectral y la resolución de la varianza del estimador del espectro. Aunque el tema de este ejemplo es la detección de una sinusoide en ruido, el periodograma promediado se puede usar también en modelado de señales. Las estimaciones del espectro que se presentan en le Figura 10.27 sugieren claramente un modelo de señal de la forma de la Ecuación (10.93) y la mayoría

de los parámetros de dicho modelo se podrían determinar a partir de la estimación del espectro que proporciona el periodograma promediado.

10.6. ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES ALEATORIAS MEDIANTE ESTIMACIÓN DE LA SECUENCIA DE AUTOCORRELACIÓN

En la sección anterior, consideramos el periodograma como una estimación directa del espectro de potencia de una señal aleatoria. El periodograma, o el periodograma promediado, es una estimación directa en el sentido de que se obtiene directamente mediante la transformada de Fourier de las muestras de la señal aleatoria. Existe otro planteamiento que se basa en el hecho de que la densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Se estima primero la función de autocorrelación $\hat{\phi}_{xx}[m]$ para un conjunto finito de intervalos $-M \leq m \leq M$, y se aplica a continuación una ventana $w_c[m]$ antes de calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de esa estimación. Este planteamiento de la estimación del espectro de potencia se denomina a menudo *método de Blackman-Tukey* (véase Blackman y Tukey, 1958). En esta sección exploraremos algunas facetas importantes de este planteamiento y mostraremos cómo se puede utilizar la DFT para realizarlo.

Supongamos, como antes, que tenemos un registro finito de una señal aleatoria $x[n]$. La secuencia se indica así

$$v[n] = \begin{cases} x[n] & \text{para } 0 \leq n \leq Q-1, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{10.97}$$

Consideremos una estimación de la secuencia de autocorrelación como

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m], \tag{10.98a}$$

donde, como $c_{vv}[-m] = c_{vv}[m]$,

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{Q-1} v[n]v[n+m] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|], & |m| \leq Q-1, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{10.98b}$$

que corresponde a la autocorrelación periódica de un segmento de $x[n]$ de longitud Q enventanado con una ventana rectangular.

Para determinar las propiedades de esta estimación de la secuencia de autocorrelación, consideremos la media y la varianza de la variable aleatoria $\hat{\phi}_{xx}[m]$. Utilizando las Ecuaciones (10.98a) y (10.98b), se deduce que

$$\mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} \mathscr{E}\{x[n]x[n+|m|]\} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} \phi_{xx}[m], \tag{10.99}$$

y como $\phi_{xx}[m]$ no depende de n para un proceso aleatorio estacionario,

$$\mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\} = \begin{cases} \left(\dfrac{Q-|m|}{Q}\right) \phi_{xx}[m], & |m| \leq Q-1, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{10.100}$$

Observando la Ecuación (10.100), vemos que $\hat{\phi}_{xx}[m]$ es un estimador sesgado de $\phi_{xx}[m]$, ya que $\mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\}$ no es igual a $\phi_{xx}[m]$, pero el sesgo es pequeño si $|m| \ll Q$. Vemos también que

$$\phi_{xx}[m] = \left(\frac{1}{Q-|m|}\right) c_{vv}[m]; \tag{10.101}$$

es un estimador insesgado de la secuencia de autocorrelación para $|m| \leq Q-1$. Es decir, el estimador es insesgado si dividimos por el número de términos distintos de cero en la suma de los productos que intervienen en el cálculo de cada valor de $c_{vv}[m]$, en lugar de por el número total de muestras en el registro de datos.

La varianza del estimador de la función de autocorrelación es difícil de calcular, incluso realizando hipótesis simplificadoras. Sin embargo, en Jenkins y Watts (1968) se pueden encontrar fórmulas aproximadas para la varianza de $\hat{\phi}_{xx}[m]$ y $\phi_{xx}[m]$. Para nuestros propósitos, basta con observar en la Ecuación (10.98b) que, a medida que $|m|$ se acerca a Q, cada vez menos muestras de $x[n]$ intervienen en el cálculo del estimador de la autocorrelación, y por tanto, es razonable esperar que la varianza de dicho estimador crezca al hacerlo $|m|$. En el caso del periodograma, este incremento de la varianza afecta al estimador del espectro en todas las frecuencias, debido a que todos los valores de la autocorrelación intervienen implícitamente en el cálculo del periodograma. Sin embargo, calculando explícitamente el estimador de la autocorrelación, somos libres de seleccionar qué valores de la autocorrelación se incluyen en la estimación del espectro de potencia. Por tanto, definimos el siguiente estimador del espectro de potencia

$$S(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{\phi}_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m}, \tag{10.102}$$

donde $w_c[m]$ es una ventana simétrica de longitud $(2M-1)$ aplicada a la función de autocorrelación estimada. Requerimos que el producto de la secuencia de autocorrelación y la ventana sea una secuencia par cuando $x[n]$ sea real, de forma que el estimador del espectro de potencia sea una función real y par de ω. Por tanto, la ventana que se aplica a la correlación debe ser una secuencia par. Si limitamos la longitud de la ventana de correlación de forma que $M \ll Q$, incluiremos sólo estimaciones de la autocorrelación para las que la varianza es pequeña.

El mecanismo por el que el enventanado de la secuencia de autocorrelación reduce la varianza de la estimación del espectro de potencia se entiende mejor en el dominio de la frecuencia. Utilizando las Ecuaciones (10.68), (10.69) y (10.98b), se deduce que si $w[n] = 1$ para $0 \leq n \leq (Q-1)$, (es decir, una ventana rectangular), el periodograma es la transformada de Fourier del estimador de la autocorrelación $\hat{\phi}_{xx}[m]$; es decir,

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} c_{vv}[m] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{Q}|V(e^{j\omega})|^2 = I(\omega). \tag{10.103}$$

Por tanto, utilizando la Ecuación (10.102), el estimador del espectro que se obtiene enventanando $\hat{\phi}_{xx}[m]$ es la convolución

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \tag{10.104}$$

Observando la Ecuación (10.104), puede verse que el efecto de aplicar la ventana $w_c[m]$ a la estimación de la autocorrelación es convolucionar el periodograma con la transformada de Fourier de la ventana que se aplica a la autocorrelación. Esto suaviza las rápidas fluctuaciones del estimador del espectro basado en el periodograma. Cuanto más corta es la ventana que se aplica a la autocorrelación, más suave es el estimador del espectro y viceversa.

El espectro de potencia $P_{xx}(\omega)$ es una función no negativa de la frecuencia, y tanto el periodograma como el periodograma promediado tienen esta propiedad por definición. Por el contrario, resulta evidente, observando la Ecuación (10.104), que no se garantiza la no negatividad de $S(\omega)$, a menos que se imponga la condición adicional de que

$$W_c(e^{j\omega}) \geq 0 \qquad \text{para } -\pi < \omega \leq \pi. \tag{10.105}$$

Esta condición es satisfecha por la transformada de Fourier de la ventana triangular (Bartlett), pero no lo es por las ventanas rectangular, de Hanning, de Hamming o de Kaiser. Por tanto, aunque las últimas ventanas anteriores tienen lóbulos laterales más bajos que la triangular, las fugas espectrales pueden causar valores negativos del estimador espectral en las regiones de bajo nivel del espectro.

El valor esperado del periodograma suavizado es

$$\begin{aligned} \mathscr{E}\{S(\omega)\} &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\} w_c[m] e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] \left(\frac{Q-|m|}{Q}\right) w_c[m] e^{-j\omega m}. \end{aligned} \tag{10.106}$$

Si $Q \gg M$, el término $(Q-|m|)/Q$ en la Ecuación (10.106) se puede despreciar,[12] con lo que obtenemos

$$\mathscr{E}\{S(\omega)\} = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) W_c(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \tag{10.107}$$

Por tanto, la estimación enventanada de la autocorrelación produce un estimador sesgado del espectro de potencia. Como en el caso del periodograma promediado, es posible encontrar un compromiso entre resolución espectral y varianza reducida del estimador del espectro. Si la longitud del registro de datos es fija, se puede tener menor varianza si se es posible tolerar una peor resolución en las componentes espectrales de banda estrecha cercanas, o podemos tener mejor resolución si se pueden tolerar varianzas mayores. Si podemos observar la señal durante un tiempo mayor (es decir, aumentar la longitud Q del registro de datos), entonces se pueden mejorar tanto la resolución como la varianza. El estimador espectral $S(\omega)$ es asintóticamente insesgado si la ventana de la correlación se normaliza de forma que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_c(e^{j\omega}) d\omega = 1 = w_c[0]. \tag{10.108}$$

Con esta normalización, a medida que se incrementa Q y la longitud de la ventana de la correlación, la transformada de Fourier de la ventana de la correlación se aproxima a un tren de impulsos periódico y la convolución de la Ecuación (10.107) se convierte en $P_{xx}(\omega)$.

Se ha demostrado que la varianza de $S(\omega)$ (véase Jenkins y Watts, 1968) es de la forma

$$\text{var}[S(\omega)] \simeq \left(\frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m]\right) P_{xx}^2(\omega). \tag{10.109}$$

Comparando la Ecuación (10.109) con el correspondiente resultado de la Ecuación (10.80) del periodograma, llegamos a la conclusión de que, para reducir la varianza del estimador del espectro, deberíamos

[12] De forma más precisa, se puede definir una ventana de correlación efectiva como $w_e[m] = w_c[m](Q-|m|)/Q$.

escoger M y la forma de la ventana, posiblemente sujetos a la condición de la Ecuación (10.105), de forma que el factor

$$\left(\frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m]\right) \tag{10.110}$$

sea tan pequeño como sea posible. El Problema 10.37 trata del cálculo del factor de reducción de varianza para varias ventanas comúnmente utilizadas.

La estimación del espectro de potencia basada en la transformada de Fourier de un estimador de la función de autocorrelación es una clara alternativa al método de promediar periodogramas. En general, no es necesariamente mejor, simplemente tiene diferentes características y su realización es diferente. En algunas situaciones puede ser deseable calcular estimadores de la secuencia de autocorrelación y del espectro de potencia, en cuyo caso sería natural utilizar el método descrito en esta sección. El Problema 10.43 explora la determinación de la estimación de la autocorrelación a partir del periodograma promediado.

10.6.1. Cómputo de la autocorrelación y de la estimación del espectro de potencia mediante la DFT

En el método de estimación del espectro de potencia que estamos considerando se requiere la estimación de la autocorrelación

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|] \tag{10.111}$$

para $|m| \leq M-1$. Como $\hat{\phi}_{xx}[-m] = \hat{\phi}_{xx}[m]$, sólo es necesario calcular la Ecuación (10.111) para valores no negativos de m, es decir, para $0 \leq m \leq M-1$. Se puede utilizar la DFT y sus algoritmos de cálculo rápidos asociados para realizar ventajosamente el cálculo de $\hat{\phi}_{xx}[m]$, si se observa que $\hat{\phi}_{xx}[m]$ es la convolución discreta de la secuencia de longitud finita $x[n]$ con $x[-n]$. Si calculamos $X[k]$, la DFT de N puntos de $x[n]$, y la multiplicamos por $X^*[k]$ obtenemos $|X[k]|^2$, que corresponde a la convolución circular de la secuencia de longitud finita $x[n]$ con $x[((-n))_N]$, es decir, una *autocorrelacion circular*. Como sugiere nuestra presentación de la Sección 8.7, y desarrollamos en el Problema 10.34, debería ser posible aumentar la secuencia $x[n]$ con muestras de valor cero y forzar así a que la autocorrelación circular sea igual a la autocorrelación aperiódica deseada en el intervalo $0 \leq m \leq M-1$.

Para ver cómo seleccionar N en la DFT, consideremos la Figura 10.28. La Figura 10.28(a) muestra las dos secuencias $x[n]$ y $x[n+m]$ en función de n para un valor particular positivo de m. La Figura 10.28(b) muestra las secuencias $x[n]$ y $x[((n+m))_N]$ que intervienen en la convolución circular correspondiente a $|X[k]|^2$. Claramente, la autocorrelación circular será igual a $Q\hat{\phi}_{xx}[m]$ para $0 \leq m \leq M-1$ si $x[((n+m))_N]$ no "se da la vuelta" y se solapa con $x[n]$ cuando $0 \leq m \leq M-1$. Observando la Figura 10.28(b), se deduce que esto ocurrirá si $N-(M-1) \geq Q$ o $N \geq Q+M-1$.

En resumen, para calcular $\hat{\phi}_{xx}[m]$ en $0 \leq m \leq M-1$ se sigue el siguiente procedimiento:

1. Formar una secuencia de N puntos aumentando $x[n]$ con $(M-1)$ muestras de valor cero.
2. Calcular la DFT de N puntos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

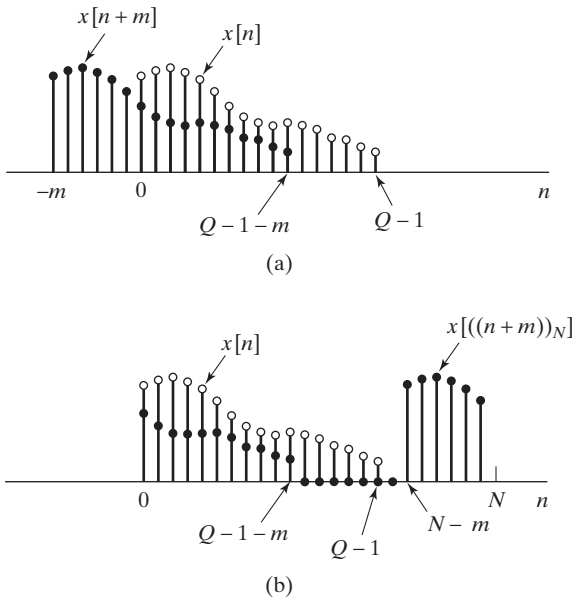


Figura 10.28 Cálculo de la autocorrelación circular. (a) $x[n]$ y $x[n+m]$ para una secuencia de longitud finita Q. (b) $x[n]$ y $x[((n+m))_N]$ como en la correlación circular.

3. Calcular
$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k] \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

4. Calcular la DFT inversa de $|X[k]|^2$, con lo que se obtiene
$$\tilde{c}_{vv}[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km} \qquad \text{para } m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

5. Dividir la secuencia resultante por Q para obtener la estimación de la autocorrelación
$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\tilde{c}_{vv}[m] \qquad \text{para } m = 0, 1, \ldots, M-1.$$

   Éste es el conjunto de valores de la autocorrelación deseado, que se puede extender simétricamente para valores negativos de m.

Si M es pequeño, puede ser más eficiente evaluar simplemente la Ecuación (10.111). En este caso, el coste computacional es proporcional a $Q \cdot M$. Pero si las DFT de este procedimiento se calculan utilizando uno de los algoritmos de FFT presentados en el Capítulo 9 con $N \geq Q + M - 1$, el coste computacional será aproximadamente proporcional a $N \log_2 N$, siendo N una potencia de 2. Por tanto, para valores de M suficientemente grandes, el uso de la FFT es más eficiente que la evaluación directa de la Ecuación (10.111). El valor exacto del umbral en M depende de la realización particular de los cálculos de la DFT. Sin embargo, como demuestra Stockman (1966), es probable que este umbral esté por debajo de $M = 100$.

Para reducir la varianza de la estimación de la secuencia de autocorrelación o el espectro de potencia calculado a partir de ella, hay que utilizar valores grandes de la longitud del registro Q. Esto en general no representa un problema con el uso de computadores con memorias grandes y procesadores rápidos. Sin embargo, M es generalmente mucho menor que Q. En esos casos, es posible dividir la secuencia

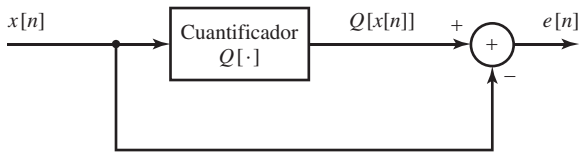


Figura 10.29 Procedimiento para obtener la secuencia de ruido de cuantificación.

$x[n]$ de una forma similar a los procedimientos que se presentaron en la Sección 8.7.3 para realizar la convolución de una respuesta al impulso finita con una secuencia de entrada de longitud indefinida. Rader (1970) presentó un procedimiento particularmente flexible y eficiente que utiliza muchas de las propiedades de la DFT de secuencias reales para reducir la cantidad de cálculos requeridos. El desarrollo de esta técnica es la base del Problema 10.44.

Una vez que se ha calculado la estimación de la autocorrelación, las muestras de la estimación del espectro de potencia $S(\omega)$ se pueden calcular en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, formando la secuencia de longitud finita

$$s[m] = \begin{cases} \hat{\phi}_{xx}[m]w_c[m], & 0 \le m \le M-1, \\ 0, & M \le m \le N-M, \\ \hat{\phi}_{xx}[N-m]w_c[N-m], & N-M+1 \le m \le N-1, \end{cases} \tag{10.112}$$

donde $w_c[m]$ es la ventana simétrica de correlación. Entonces, la DFT de $s[m]$ es

$$S[k] = S(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{10.113}$$

donde $S(\omega)$ es la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación enventanada, tal como se define en la Ecuación (10.102). Nótese que N se puede escoger tan grande como sea conveniente y práctico, lo que produce muestras de $S(\omega)$ en frecuencias estrechamente espaciadas. Sin embargo, como ha demostrado de forma consistente nuestra explicación en este capítulo, la resolución en frecuencia siempre está determinada por la longitud y la forma de la ventana $w_c[m]$.

10.6.2. Estimación del espectro de potencia del ruido de cuantificación

En el Capítulo 4 supusimos que el error introducido por la cuantificación tiene las propiedades de un proceso aleatorio de ruido blanco. Podemos utilizar las técnicas presentadas en esta sección para calcular las estimaciones del espectro de potencia de la Figura 4.60 que se utilizaron para sugerir la validez de esta aproximación. En esta sección, proporcionamos ejemplos adicionales del uso de los estimadores de la secuencia de autocorrelacion y del espectro de potencia para estudiar las propiedades del ruido de cuantificación. La explicación reforzará nuestra confianza en el modelo de ruido blanco, y ofrecerá también una buena oportunidad para resaltar algunos aspectos de la estimación del espectro de potencia.

Consideremos el experimento que se muestra en la Figura 10.29. Una señal de voz filtrada paso bajo $x_c(t)$ se muestrea a una frecuencia de 16 kHz, lo que produce la secuencia de muestras $x[n]$ que se presentó en la Figura 10.21.[13] Las muestras se cuantifican con un cuantificador lineal de 10 bits ($B = 9$) y se calcula la correspondiente secuencia de error $e[n] = Q[x[n]] - x[n]$. La Figura 10.30 muestra 2000

[13] Aunque las muestras se cuantifican con 12 bits mediante un conversor A/D, para los propósitos de este ejemplo, se han escalado a un valor máximo de 1, y se ha añadido a las muestras una pequeña cantidad de ruido aleatorio. Suponemos que las muestras están sin cuantificar, es decir, consideraremos que las muestras cuantificadas con 12 bits están sin cuantificar con respecto a la posterior cuantificación que se aplica en esta explicación.

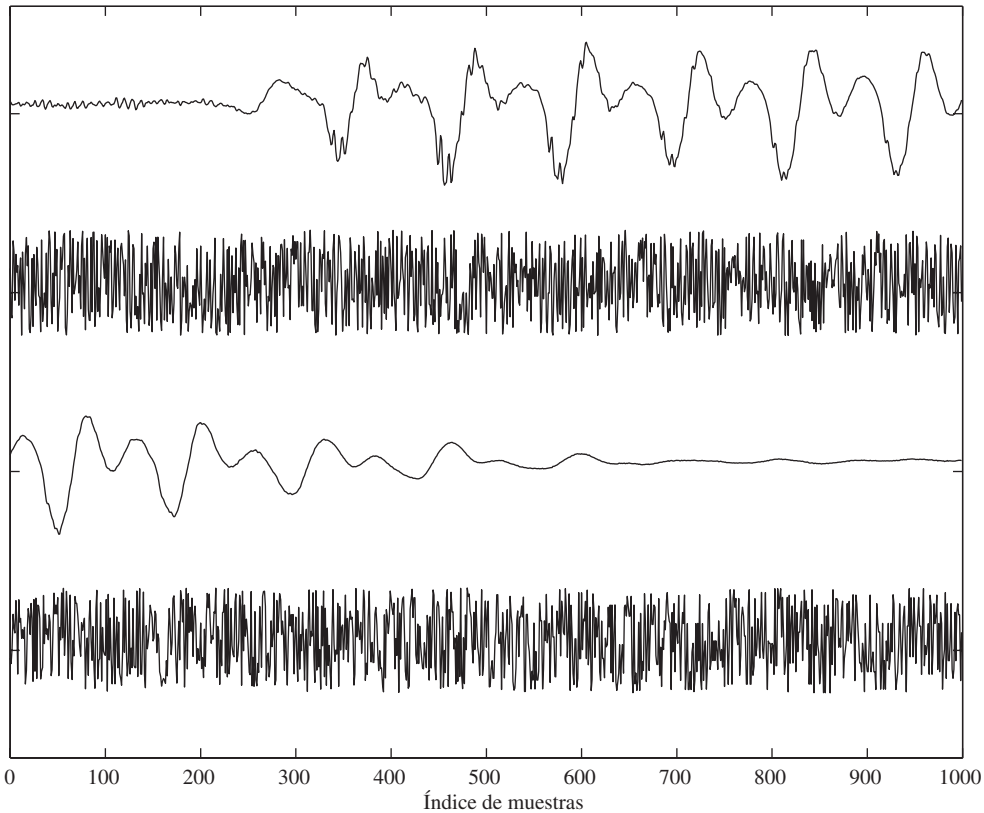


Figura 10.30 Señal de voz (líneas primera y tercera) y el correspondiente error de cuantificación (líneas segunda y cuarta) para cuantificación con 10 bits (amplificado 2^9 veces). Cada línea corresponde a 1000 muestras consecutivas conectadas por líneas rectas por conveniencia en la representación.

muestras consecutivas de una señal de voz, en la primera y tercera filas de la gráfica. Las filas segunda y cuarta muestran la correspondiente secuencia de error de cuantificación. La inspección visual y la comparación de estas dos gráficas tiende a reforzar nuestra confianza en el modelo asumido previamente, es decir, el ruido parece comportarse muy aleatoriamente en el intervalo $-2^{-(B+1)} < e[n] \leq 2^{-(B+1)}$. Sin embargo, estas observaciones cualitativas pueden ser engañosas. El carácter plano del espectro del ruido de cuantificación sólo se puede verificar estimando la secuencia de autocorrelación y el espectro de potencia de dicho ruido de cuantificación $e[n]$.

La Figura 10.31 muestra estimaciones de la autocorrelación y del espectro de potencia del ruido de cuantificación para una longitud de registro de $Q = 3000$ muestras. Los valores de la secuencia de autocorrelación se calculan en el intervalo $|m| \leq 100$ utilizando las Ecuaciones (10.98a) y (10.98b). La Figura 10.31(a) muestra la estimación resultante. En ese intervalo, $-1{,}45 \times 10^{-8} \leq \hat{\phi}[m] \leq 1{,}39 \times 10^{-8}$, excepto para el valor $\hat{\phi}[0] = 3{,}17 \times 10^{-7}$. La estimación de la autocorrelación sugiere que la correlación entre muestras de la secuencia de ruido es muy baja. La estimación de la autocorrelación resultante se multiplica por ventanas de Bartlett con $M = 100$ y $M = 50$. Las ventanas se muestran en la Figura 10.31 superpuestas a $\hat{\phi}[m]$ (se ha aplicado un factor de escala para que se puedan dibujar en el mismo eje) y las

estimaciones espectrales correspondientes, calculadas como se indica en la Sección 10.6.1, se muestran en la Figura 10.31(b).

Como puede verse en la Figura 10.31(b), la estimación de Blackman–Tukey para $M = 100$ (la fina línea continua) muestra fluctuaciones algo erráticas alrededor de la línea de trazos $10\log_{10}(2^{-18}/12) = -64{,}98$ dB (el valor del espectro de ruido blanco con $\sigma_e^2 = 2^{-2B}/12$ para $B = 9$). La línea gruesa muestra la estimación del espectro de potencia para $M = 50$. Podemos ver en la Figura 10.31(b) que la estimación del espectro de potencia está dentro de un intervalo de ± 2 dB alrededor de la aproximación de ruido blanco para $B + 1 = 10$ a altas frecuencias. Como se comentó en la Sección 10.6, cuanto más corta es la ventana, resulta una menor varianza y una estimación espectral más suave, debido a la menor resolución en frecuencia de la ventana más corta. En cualquier caso, la estimación del espectro parece avalar la validez del modelo de ruido blanco para el ruido de cuantificación.

Aunque hemos calculado estimaciones cuantitativas de la autocorrelación y del espectro de potencia, nuestra interpretación de estas medidas ha sido sólo cualitativa. Es razonable preguntarse ahora cómo debería ser de pequeña la autocorrelación para que $e[n]$ fuera realmente un proceso de ruido blanco. Para dar una respuesta cuantitativa a esa pregunta, se podrían calcular intervalos de confianza para

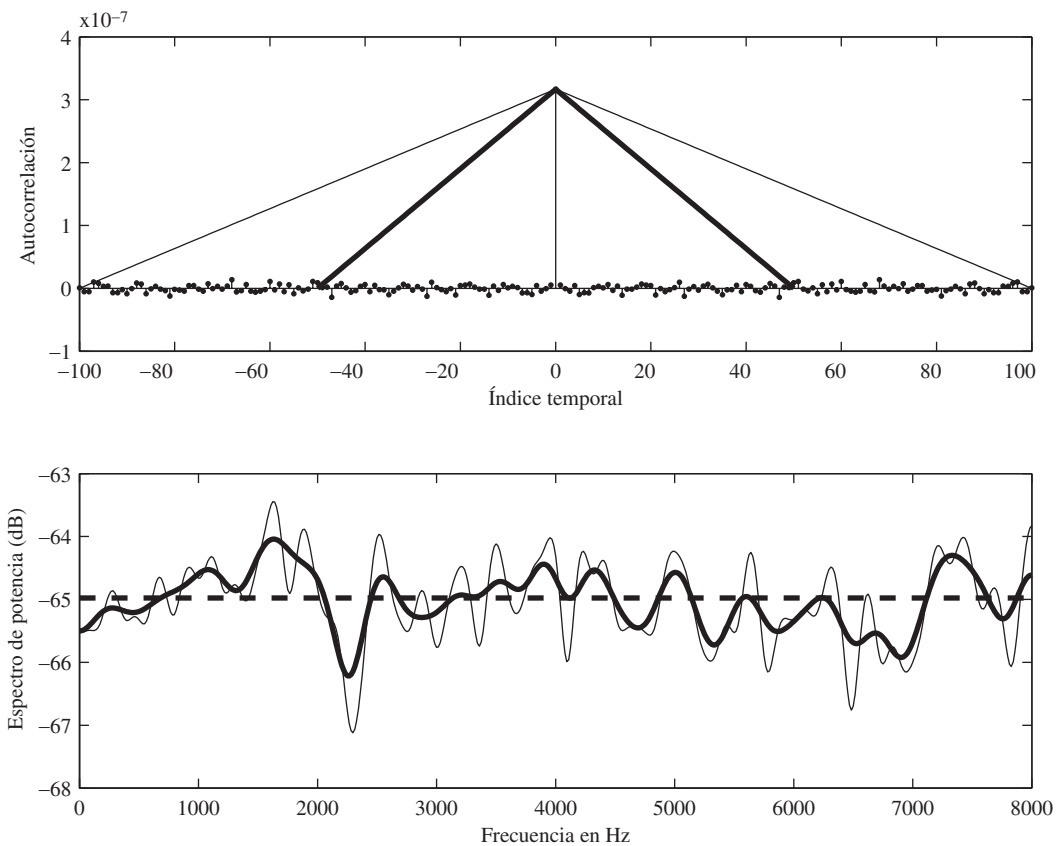


Figura 10.31 (a) Estimación de la autocorrelación para ruido de cuantificación de 10 bits, $|m| \leq 100$ y longitud del registro $Q = 3000$. (b) Espectro de potencia estimado por el método de Blackman–Tukey utilizando ventanas de Bartlett con $M = 100$ y $M = 50$. (La línea de trazos muestra el nivel de $10\log_{10}(2^{-18}/12)$.)

nuestros estimadores y se podría aplicar teoría de la decisión estadística (véase Jenkins y Watts, 1968, donde aparecen algunos tests para ruido blanco). Sin embargo, en muchos casos este tratamiento estadístico adicional no es necesario. En un aspecto práctico, muchas veces nos contentaremos observando simplemente que la autocorrelación normalizada es muy pequeña en todas partes, excepto en $m = 0$.

Una de las ideas más importantes de este capítulo es que la estimación de la autocorrelación y del espectro de potencia de un proceso aleatorio estacionario debe mejorar si se aumenta la longitud del registro. Esto se ilustra en la Figura 10.32, que corresponde a la Figura 10.31 con un valor de Q de 30000 muestras. No olvidemos que la varianza del estimador de la autocorrelación es proporcional a $1/Q$. Por tanto, al aumentar Q desde 3000 a 30.000 se debe reducir aproximadamente en un factor de diez la varianza del estimador. Una comparación de las Figuras 10.31(a) y 10.32(a) parece verificar este resultado. Para $Q = 3000$, la estimación está entre los límites $-1{,}45 \times 10^{-8} \leq \hat{\phi}[m] \leq 1{,}39 \times 10^{-8}$, y para $Q = 30.000$, los límites son $-4{,}5 \times 10^{-9} \leq \hat{\phi}[m] \leq 4{,}15 \times 10^{-9}$. Comparando el intervalo de variación para $Q = 3000$ con el intervalo para $Q = 30.000$ podemos ver que la reducción es consistente con el

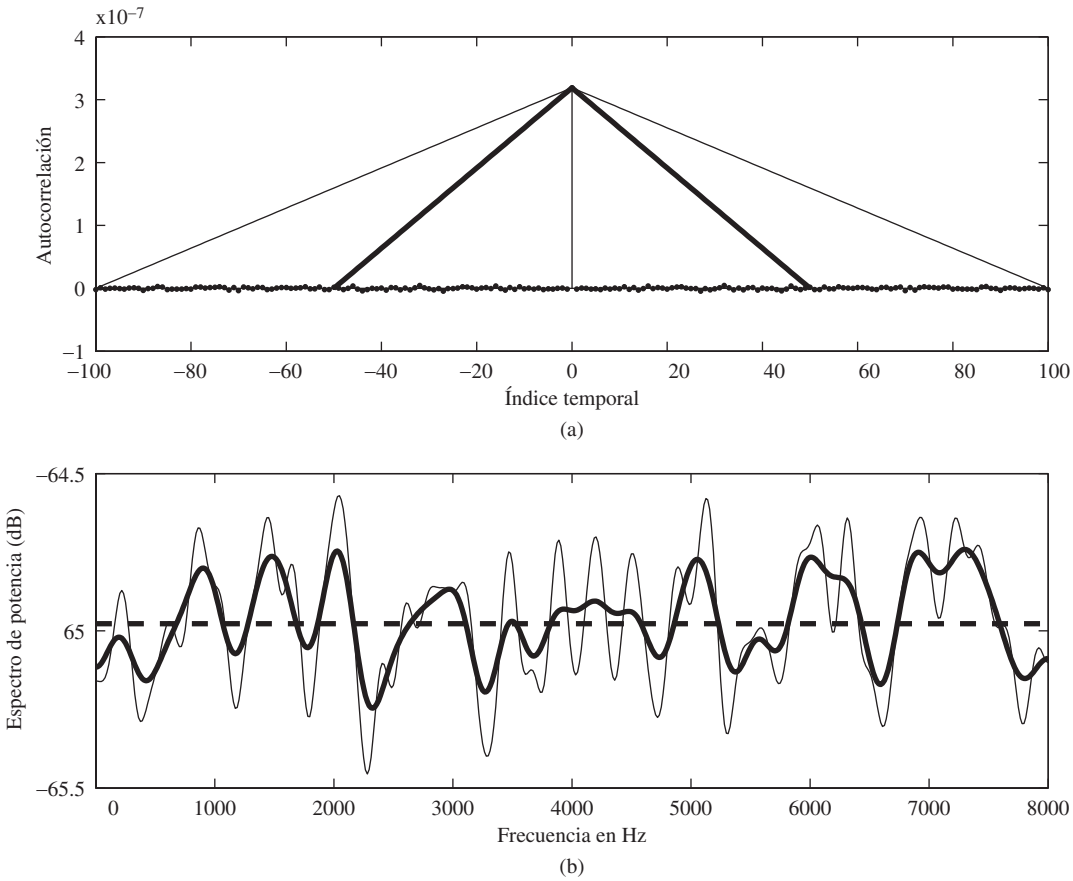


Figura 10.32 (a) Estimación de la autocorrelación para ruido de cuantificación de 10 bits, y longitud del registro $Q = 30.000$. (b) Espectro de potencia estimado por el método de Blackman–Tukey utilizando ventanas de Bartlett con $M = 100$ y $M = 50$.

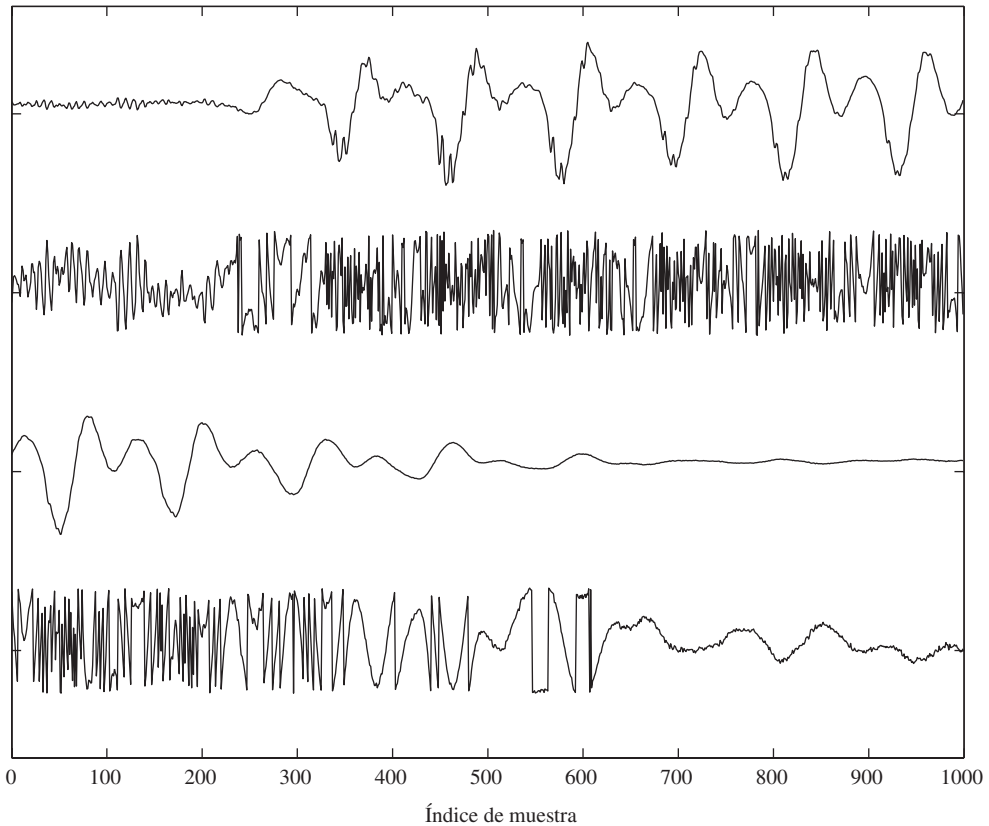


Figura 10.33 Señal de voz (líneas primera y tercera) y el correspondiente error de cuantificación (líneas segunda y cuarta) para cuantificación con 4 bits (amplificado 2^3 veces). Cada línea corresponde a 1000 muestras consecutivas conectadas por líneas rectas por conveniencia en la representación.

factor de diez de reducción de varianza que se puede esperar.[14] Puede deducirse de la Ecuación (10.110) que una reducción similar se puede esperar en la varianza del estimador del espectro. Esto resulta de nuevo evidente comparando la Figura 10.31(b) con la Figura 10.28(b) (hay que tener en cuenta que las escalas de los dos conjuntos de gráficas son diferentes). La variación respecto al nivel del espectro aproximado de ruido blanco ahora, en el caso de una mayor longitud del registro, sólo es de $\pm 0{,}5$ dB. Nótese que las estimaciones del espectro de la Figura 10.32(b) muestran el mismo compromiso entre varianza y resolución.

En el Capítulo 4 vimos que el modelo de ruido blanco era razonable siempre que el tamaño del paso de cuantificación fuera pequeño. Cuando el número de bits es bajo, la condición no se cumple. Para ver el efecto que esto tiene en el espectro del ruido de cuantificación, el experimento anterior se ha repetido utilizando sólo 16 niveles de cuantificación, o 4 bits. La Figura 10.33 muestra el error de cuantificación utilizando 4 bits del segmento de señal de voz. Nótese que algunos trozos de la forma de onda del error

[14] No debe olvidarse que una reducción de varianza por un factor de 10 corresponde a una reducción de amplitud en un factor de $\sqrt{10} \approx 3{,}16$

tienden a parecerse mucho a la señal de voz original. Es de esperar que esto se refleje en la estimación del espectro de potencia.

La Figura 10.34 muestra las estimaciones de la autocorrelación y del espectro de potencia de la secuencia de error procedente de la cuantificación con 4 bits de un registro de 30000 muestras de longitud. En este caso, la autocorrelación que se muestra en las Figuras 10.34(a) se parece mucho menos a la autocorrelación ideal del ruido blanco. Esto no es sorprendente a la vista de la correlación obvia entre la señal y el ruido que se muestran en la Figura 10.33. La Figura 10.34(b) muestra la estimación del espectro de potencia para ventanas de Bartlett con $M = 100$ y $M = 50$, respectivamente. Claramente, el espectro no es plano, aunque refleja la forma general de la potencia media de ruido. De hecho, como veremos, el espectro del ruido de cuantificación tiende a tener la forma general de un espectro de una señal de voz. Por tanto, el modelo de ruido blanco para el ruido de cuantificación es una aproximación muy cruda en este caso y aún sería más cruda si la cuantificación fuese más gruesa.

El ejemplo de esta sección ilustra cómo se utilizan a menudo las estimaciones de la autocorrelación y del espectro de potencia para aumentar nuestra confianza en los modelos teóricos. Concretamente, hemos verificado la validez de algunos de nuestros supuestos básicos del Capítulo 4, y hemos dado

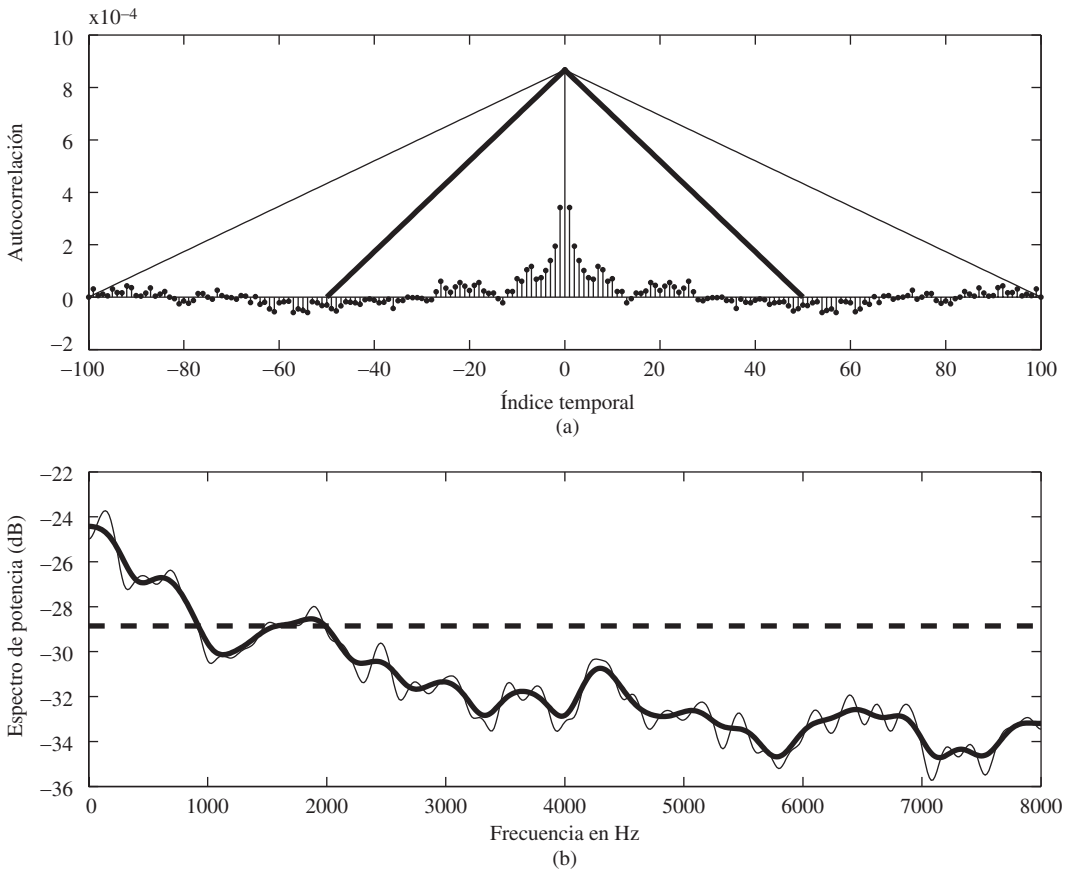


Figura 10.34 (a) Estimación de la autocorrelación para ruido de cuantificación de 4 bits y longitud del registro $Q = 30.000$. (b) Espectro de potencia estimado por el método de Blackman–Tukey utilizando ventanas de Bartlett con $M = 100$ y $M = 50$. (La línea de trazos muestra el nivel de $10\log_{10}(2^{-6}/12)$.)

algunas indicaciones de cómo esos supuestos fallan cuando la cuantificación es muy gruesa. Esto es sólo un ejemplo simple, aunque útil, de cómo se aplican en la práctica las técnicas presentadas en este capítulo.

10.6.3. Estimación del espectro de potencia de una señal de voz

Hemos visto que la transformada de Fourier dependiente del tiempo es particularmente útil para representar señales de voz, ya que puede seguir la naturaleza variante con el tiempo de esas señales. Sin embargo, en algunos casos, es útil tomar un punto de vista diferente. En particular, aunque la forma de onda de la señal de voz de la Figura 10.21 muestra una significativa variabilidad con el tiempo, y así lo refleja su transformada de Fourier dependiente del tiempo de la Figura 10.22; no obstante, es posible *suponer* que es una señal aleatoria estacionaria y aplicar nuestras técnicas de análisis espectral a largo plazo. Estos métodos promedian en un intervalo temporal que es mucho mayor que el del cambio de eventos de la señal de voz. Se produce así una forma general del espectro que puede ser útil para diseñar codificadores de voz o para determinar los requisitos de ancho de banda para la transmisión de señales de voz.

La Figura 10.35 muestra un ejemplo de estimación del espectro de potencia de una señal de voz utilizando el método de Blackman–Tukey. La secuencia de autocorrelación de la señal de vos de la Figura 10.21 estimada con $Q = 30.000$ muestras se muestra en la Figura 10.35(a), junto con las ventanas de Bartlett y de Hamming de longitud $2M + 1 = 101$. La Figura 10.35(b) muestra las correspondientes estimaciones del espectro de potencia. Las dos estimaciones son grosso modo similares, pero sus detalles son muy diferentes. Esto es debido a la naturaleza de las transformadas de Fourier en tiempo discreto de las ventanas. Ambas tienen la misma anchura del lóbulo principal $\Delta\omega_m = 8\pi/M$, pero sus lóbulos laterales son muy diferentes. Los lóbulos laterales de la ventana de Bartlett son estrictamente no negativos, mientras que los de la ventana de Hamming simétrica (que son menores que los de la ventana de Bartlett) son negativos para algunas frecuencias. Al convolucionarse con el periodograma correspondiente a la estimación de la autoocorrelación, produce los resultados drásticamente diferentes que se observan.

La ventana de Barlett garantiza una estimación positiva del espectro para todas las frecuencias. Sin embargo, esto no es cierto para la ventana de Hamming. Esto produce un efecto particularmente pronunciado en regiones de rápida variabilidad del periodograma, donde los lóbulos laterales debidos a frecuencias adyacentes se pueden cancelar o interferir entre sí, produciendo estimaciones negativas del espectro. Los puntos de la Figura 10.35(b) muestran las frecuencias donde la estimación del espectro ha sido negativa. Al representar en dB, es necesario tomar el valor absoluto de las estimaciones negativas. Por tanto, aunque las ventanas de Bartlett y de Haming tienen la misma anchura del lóbulo principal, los lóbulos laterales positivos de la ventana de Bartlett tienden a rellenar los intervalos entre frecuencias relativamente fuertes, mientras que los menores lóbulos laterales de la ventana de Hamming producen menos fugas entre frecuencias, pero con el peligro de que se produzcan estimaciones negativas del espectro al interactuar los lóbulos laterales positivos y negativos.

La ventana de Hamming (u otras ventanas como la de Kaiser) se pueden utilizar en estimación espectral sin peligro de que se produzcan estimaciones negativas si se emplean en el método de promediado de periodogramas presentado en la Sección 10.5.3. Este método garantiza estimaciones positivas, debido a que se promedian periodogramas positivos. La Figura 10.36 muestra una comparación entre las estimaciones de Blackman–Tukey de la Figura 10.35(b) y una estimación obtenida mediante el método de Welch de promediado de periodogramas modificados. La línea gruesa de trazos es la estimación de Welch. Nótese que sigue la forma general de los otros dos estimadores, pero difiere significativamente en la región de alta frecuencia, donde el espectro de la señal de voz es pequeño, y donde la respuesta en frecuencia del filtro antisolapamiento analógico hace que el espectro sea muy bajo. Debido a su

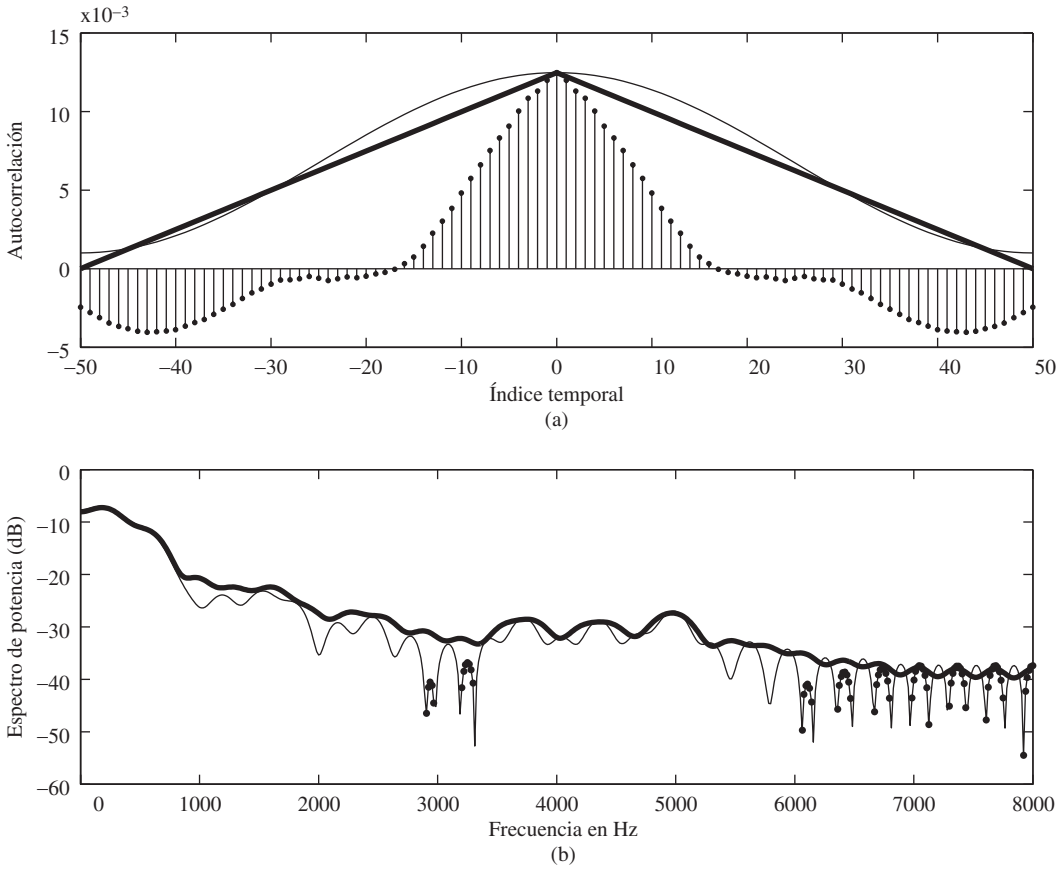


Figura 10.35 (a) Estimación de la autocorrelación de la señal de voz de la Figura 10.21 con longitud del registro $Q = 30.000$. (b) Espectro de potencia estimado por el método de Blackman–Tukey utilizando ventanas de Bartlett (trazo grueso) y ventana de Hamming (trazo fino) con $M = 50$.

superior capacidad de producir una resolución consistente para espectros con amplio margen dinámico y a su facilidad de implementación utilizando la DFT, el método de promediado de periodogramas es ampliamente utilizado en muchas aplicaciones prácticas de estimación espectral.

Todos los estimadores espectrales de la Figura 10.36 muestran que la señal de voz se caracteriza por un pico por debajo de 500 Hz y una caída al aumentar la frecuencia a 6 KHz del orden de 30 a 40 dB. Aparecen algunos picos destacados en 3 KHz y 5 KHz, que pueden ser debidos a resonancias más altas del tracto vocal que no varían con el tiempo. Un locutor diferente o una señal de voz diferente producirían con seguridad una estimación del espectro diferente, pero la naturaleza general de las estimaciones del espectro serían similares a las que se muestran en la Figura 10.36.

10.7. RESUMEN

Una de las aplicaciones importantes del tratamiento de señales es el análisis espectral. Debido a la eficiencia computacional de la FFT, muchas de las técnicas de análisis espectral de señales en tiempo

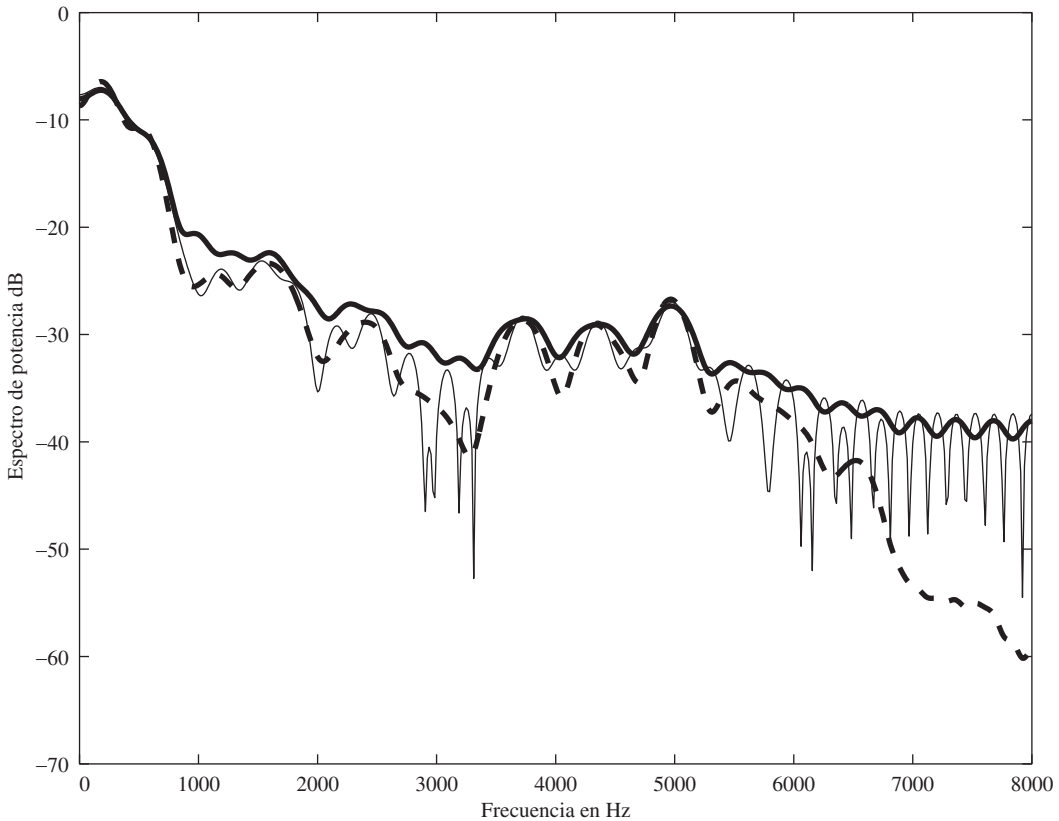


Figura 10.36 Estimaciones del espectro de potencia mediante el método de Blackman–Tukey utilizando una ventana de Bartlett (línea gruesa) y una ventana de Hamming (línea fina) con $M = 50$. La línea de trazos muestra el espectro de potencia obtenido promediando periodogramas solapados utilizando una ventana de Hamming de longitud $M = 50$.

continuo o en tiempo discreto utilizan la DFT directa o indirectamente. En este capítulo se exploran e ilustran algunas de esas técnicas.

Muchos de los aspectos relacionados con el análisis espectral se pueden entender mejor en el contexto del análisis de señales sinusoidales. Como el uso de la DFT requiere señales de longitud finita, antes de realizar el análisis de debe aplicar un enventanado. Para el caso de señales sinusoidales, la anchura del pico del espectro que se observa en la DFT depende de la longitud de la ventana, de tal manera que si esta longitud crece el pico se hace más estrecho. Por tanto, la capacidad de distinguir sinusoides cercanas mediante estimación del espectro decrece a medida que la ventana se hace más corta. Un segundo efecto independiente, inherente al análisis espectral mediante la DFT, es el muestreo espectral asociado. Concretamente, como el espectro sólo se calcula en un conjunto discreto de frecuencias, pueden producirse confusiones si no se realiza una interpretación cuidadosa. Por ejemplo, puede haber características importantes del espectro que no aparezcan directamente de forma evidente en el espectro muestreado. Para evitar esto, se puede reducir el espaciado entre las muestras del espectro, incrementando el tamaño de la DFT de dos formas posibles. Un método es incrementar el tamaño de la DFT manteniendo fija la longitud de la ventana (lo que requiere rellenar con ceros la secuencia enventanada). Esto no incrementa la resolución. El segundo método es incrementar tanto el tamaño de la ventana como

el tamaño de la DFT. En este caso el espaciado entre las muestras del espectro se reduce y la capacidad de distinguir componentes sinusoidales cercanas en frecuencia aumenta.

Aunque una mayor longitud de la ventana y una mayor resolución representan beneficios en el análisis espectral de datos estacionarios, para el caso de datos variantes con el tiempo, generalmente, es preferible mantener la longitud de la ventana lo suficientemente corta como para que en la duración de la ventana, las características de la señal sean aproximadamente estacionarias. Esto lleva al concepto de transformada de Fourier dependiente del tiempo que es, en efecto, una secuencia de transformadas de Fourier que se obtienen a medida que la señal se desliza por una ventana de longitud finita. Una común y útil interpretación de la transformada de Fourier dependiente del tiempo es la de banco de filtros, en el que la respuesta en frecuencia de cada filtro corresponde a la transformada de la ventana, desplazada a una de las frecuencias de la DFT. La transformada de Fourier dependiente del tiempo tiene importantes aplicaciones tanto como paso intermedio en el filtrado de señales como en el análisis y la interpretación de señales variantes con el tiempo, como señales de voz y señales radar. El análisis espectral de señales no estacionarias requiere generalmente un compromiso entre la resolución en el tiempo y en la frecuencia. Concretamente, la capacidad de seguir las características espectrales en el tiempo se incrementa a medida que decrece la longitud de la ventana de análisis. Sin embargo, una ventana de análisis más corta reduce la resolución en frecuencia.

La DFT juega también un papel importante en el análisis de señales aleatorias estacionarias. Un procedimiento intuitivo para estimar el espectro de potencia de las señales aleatorias es calcular el módulo al cuadrado de la DFT de un segmento de la señal. El estimador resultante se denomina periodograma, y es asintóticamente insesgado. Sin embargo, la varianza del periodogama no tiende a cero a medida que se incrementa la longitud del segmento, y por lo tanto, el periodograma no es un buen estimador. Sin embargo, dividiendo la secuencia de señal disponible en segmentos más cortos y promediando los periodogramas asociados se puede obtener un estimador con un buen comportamiento. Un planteamiento alternativo es estimar primero la función de autocorrelación. Esto se puede hacer directamente con la DFT. Si se aplica una ventana a la función de autocorrelación y se calcula después la DFT, el resultado, denominado periodograma suavizado, es un buen estimador del espectro.

Problemas

Problemas básicos con respuestas

10.1. Una señal real en tiempo continuo $x_c(t)$ es de banda limitada a frecuencias por debajo de 5 kHz. Es decir, $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. La señal $x_c(t)$ se muestrea a una frecuencia de 10.000 muestras por segundo (10 kHz) y se produce una secuencia $x[n] = x_c(nT)$ con $T = 10^{-4}$. Sea $X[k]$ la DFT de 1000 puntos de $x[n]$.

(a) ¿A qué frecuencia en tiempo continuo corresponde el índice $k = 150$ en $X[k]$?
(b) ¿A qué frecuencia en tiempo continuo corresponde el índice $k = 800$ en $X[k]$?

10.2. Una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ es de banda limitada a 5 kHz. es decir, $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. Se muestrea $x_c(t)$ con periodo T, lo que produce una secuencia $x[n] = x_c(nT)$. Para examinar las propiedades del espectro de la señal, se calcula la DFT de N puntos de un segmento de N muestras de $x[n]$ utilizando un programa de ordenador que requiere que $N = 2^v$, siendo v un entero. Determine el *mínimo* valor de N y el intervalo de frecuencias de muestreo

$$F_{\min} < \frac{1}{T} < F_{\max}$$

para que se evite el solapamiento y el espaciado efectivo entre los valores de la DFT sea *menor* que 5 Hz. Es decir, las frecuencias equivalentes en tiempo continuo en las que se evalúa la transformada de Fourier están separadas menos de 5 Hz.

10.3. Una señal en tiempo continuo $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$ se muestrea con periodo T y se produce la secuencia $x[n] = x_c(nT)$. Se aplica a $x[n]$ una ventana rectangular de N puntos, para $0, 1, \ldots, N-1$, y $X[k]$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$, es la DFT de N puntos de la secuencia resultante.

(a) Suponiendo que Ω_0, N y k_0 son fijos, ¿cómo se debería escoger T para que $X[k_0]$ y $X[N-k_0]$ sean distintos de cero y $X[k] = 0$ para los restantes valores de k?

(b) ¿Es única su respuesta? Si no lo es, proporcione otro valor de T que satisfaga las condiciones del apartado (a).

10.4. Sea $x_c(t)$ una señal real de banda limitada cuya transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ es cero para $|\Omega| \geq 2\pi(5000)$. Se obtiene una secuencia $x[n]$ muestreando $x_c(t)$ a 10 kHz. Suponga que la secuencia $x[n]$ es cero para $n < 0$ y $n > 999$.

Sea $X[k]$ la DFT de 1000 puntos de $x[n]$. Se sabe que $X[900] = 1$ y que $X[420] = 5$. Determine $X_c(j\Omega)$ para todos los valores de Ω que pueda en la región $|\Omega| < 2\pi(5000)$.

10.5. Considere la estimación del espectro de una señal en tiempo discreto $x[n]$ utilizando la DFT con una ventana de Hamming $x[n]$. Una regla conservativa aproximada para estimar la resolución en frecuencia de un análisis mediante la DFT que utilice enventanado es que la resolución en frecuencia es igual a la anchura del lóbulo principal de $W(e^{j\omega})$. Se desea poder resolver señales sinusoidales tan poco separadas como $\pi/100$ en ω. Además, la longitud de la ventana L debe ser una potencia de 2. ¿Cuál es la mínima longitud $L = 2^\nu$ que cumple este requisito de resolución?

10.6. A continuación se presentan tres señales $x_i[n]$ que son la suma de dos sinusoides:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos(\pi n/4) + \cos(17\pi n/64), \\ x_2[n] &= \cos(\pi n/4) + 0{,}8\cos(21\pi n/64), \\ x_3[n] &= \cos(\pi n/4) + 0{,}001\cos(21\pi n/64). \end{aligned}$$

Se desea estimar el espectro de cada una de esas señales utilizando una DFT de 64 puntos con una ventana rectangular $w[n]$ de 64 puntos. Indique cuál de las DFT de 64 puntos de las señales tendrían dos picos espectrales distinguibles tras el enventanado.

10.7. Sea $x[n]$ una secuencia de 5000 puntos que se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ con $T = 50\ \mu$s. Suponga que $X[k]$ es la DFT de 8192 puntos de $x[n]$. ¿Cuál es la separación equivalente en frecuencia en tiempo continuo de las muestras adyacentes de la DFT?

10.8. Suponga que $x[n]$ es una secuencia de 1000 puntos que se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ a 8 kHz y que $X_c(j\Omega)$ está suficientemente limitada en banda como para evitar el solapamiento. ¿Cuál es la mínima longitud N de la DFT tal que las muestras adyacentes de $X[k]$ corresponden a una separación en frecuencia como máximo de 5 Hz. en la señal original en tiempo continuo?

10.9. Sea $X_r[k]$ la transformada de Fourier dependiente del tiempo definida en la Ecuación (10.40). En este problema se considera la transformada de Fourier dependiente del tiempo para una longitud de la DFT $N = 36$ y un intervalo de muestreo $R = 36$. Sea $w[n]$ la ventana rectangular de longitud $L = 36$. Calcule la transformada de Fourier dependiente del tiempo $X_r[k]$ para $-\infty < r < \infty$ y $0 \leq k \leq N-1$ de la señal

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/6), & 0 \leq n \leq 35, \\ \cos(\pi n/2), & 36 \leq n \leq 71, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

10.10. La Figura P10.10 de la página siguiente muestra el espectrograma de una señal *chirp* de la forma

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(\omega_0 n + \frac{1}{2}\lambda n^2\right).$$

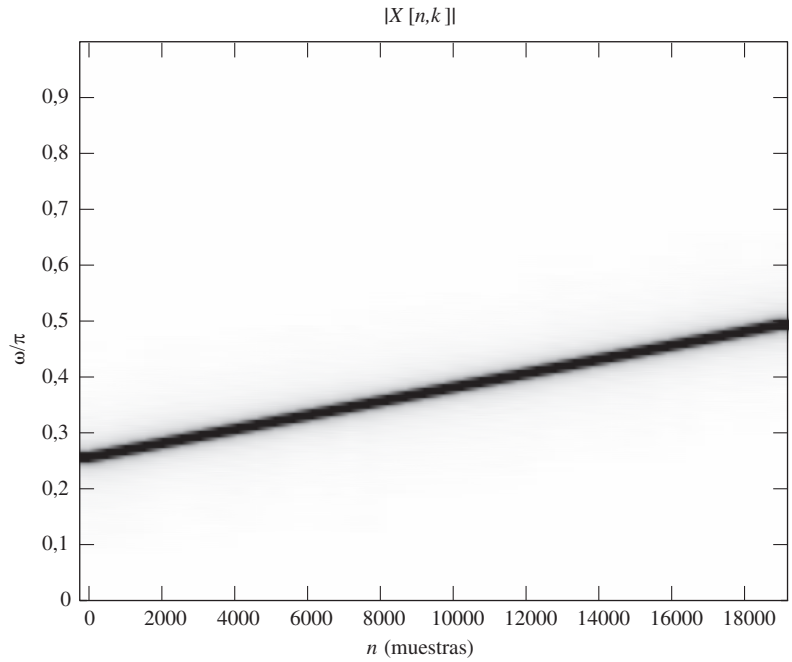


Figura P10.10

Tenga en cuenta que el espectrograma es una representación del módulo de $X[n,k]$, tal como se define en la Ecuación (10.34), donde la región oscura indica los valores altos de $|X[n,k]|$. Basándose en la figura, estime ω_0
y λ.

10.11. Una señal en tiempo continuo se muestrea a una frecuencia de 10 kHz., y se calcula la DFT de 1024 muestras. Determine la separación en frecuencia entre las muestras del espectro. Justifique su respuesta.

10.12. Sea $x[n]$ una señal con una única componente sinusoidal. La señal $x[n]$ se enventana con una ventana de Hamming $w[n]$ de L puntos, se obtiene $v_1[n]$ y se calcula $V_1(e^{j\omega})$. La señal $x[n]$ se enventana con una ventana rectangular de L puntos y se obtiene $v_2[n]$, que se utiliza para calcular $V_2(e^{j\omega})$. ¿Tendrán la misma altura los picos de $|V_2(e^{j\omega})|$ y de $|V_1(e^{j\omega})|$? Si es así, justifique su respuesta. Si no, indique cuál presentaría un pico mayor.

10.13. Se desea estimar el espectro de $x[n]$ aplicando una ventana de Kaiser de 512 puntos a la señal antes de calcular $X(e^{j\omega})$.

(a) Los requisitos de resolución en frecuencia del sistema especifican que la máxima anchura del lóbulo principal de la ventana de Kaiser es $\pi/100$. ¿Cuál es la máxima atenuación en los lóbulos laterales que se puede obtener bajo esas condiciones?

(b) Suponga que se sabe que $x[n]$ contiene dos componentes sinusoidales separadas como mínimo $\pi/50$ y que la amplitud de la componente más fuerte es 1. Basándose en su respuesta al apartado (a), proporcione un umbral para el valor mínimo de la componente más débil que se podría distinguir sobre el lóbulo lateral de la componente más fuerte.

10.14. Una señal de voz se muestrea con frecuencia de muestreo de 16000 muestras por segundo (16 kHz). Para realizar el análisis de Fourier dependiente del tiempo de la señal, tal como se describe en la Sección 10.3, se utiliza una ventana de 20 ms de duración, y la ventana se desplaza 40 muestras entre cada uno de los cálculos de la DFT. Suponga que la longitud de cada DFT es de $N = 2^v$.

(a) ¿Cuántas muestras hay en cada segmento de voz seleccionado por esta ventana?

(b) ¿Cuál es la "velocidad de trama" del análisis de Fourier dependiente del tiempo? Es decir, ¿cuántos cálculos de DFT se realizan por segundo de la señal de entrada?

(c) ¿Cuál es el mínimo tamaño N de la DFT para que la señal de entrada original se pueda reconstruir a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo?

(d) ¿Cuál es la separación (en Hz) entre las muestras de la DFT para el valor mínimo de N obtenido en el apartado (c)?

10.15. Un segmento de una señal real en tiempo continuo $x_c(t)$ se muestrea con una frecuencia de 20.000 muestras por segundo, y se produce una secuencia finita en tiempo discreto $x[n]$ de 1000 puntos de longitud, que es distinta de cero en el intervalo $0 \leq n \leq 999$. Se sabe que $x_c(t)$ es de banda limitada tal que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(10.000)$. Es decir, suponga que la operación de muestreo no introduce ninguna distorsión debida al solapamiento. $X[k]$ indica la DFT de 1000 puntos de $x[n]$. Se sabe que $X[800]$ tiene el valor $X[800] = 1 + j$.

(a) Utilizando la información suministrada ¿es capaz de determinar $X[k]$ para otros valores de k? Si es así, indique para qué valores de k y cuáles son los correspondientes valores de $X[k]$. Si no es así, explique por qué.

(b) Utilizando la información suministrada indique los valores de Ω para los que $X_c(j\Omega)$ es conocido, y los correspondientes valores de $X_c(j\Omega)$.

10.16. Sea $x[n]$ una señal en tiempo discreto cuyo espectro se desea estimar utilizando una DFT enventanada. Se desea obtener una resolución en frecuencia de al menos $\pi/25$ y se requiere también utilizar una ventana de longitud $N = 256$. Una estimación conservadora de la resolución en frecuencia de un estimador del espectro es la anchura del lóbulo principal de la ventana utilizada ¿Qué ventanas de la Tabla 7.1 satisfarán el criterio de resolución en frecuencia dado?

10.17. Sea $x[n]$ una señal en tiempo discreto que se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ con un periodo de muestreo T tal que $x[n] = x_c(nT)$. Suponga que $x_c(t)$ es de banda limitada a 100 kHz. Es decir, $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(100)$. Se desea estimar el espectro en tiempo continuo $X_c(j\Omega)$ calculando la DFT de 1024 puntos de $x[n]$, $X[k]$. ¿Cuál es el mínimo valor de T tal que la separación equivalente en frecuencia entre muestras consecutivas de la DFT $X[k]$ corresponde como mucho a 1 Hz. de frecuencia en tiempo continuo?

10.18. La Figura P10.18 muestra el módulo $|V[k]|$ de la DFT de 128 puntos $V[k]$ de una señal $v[n]$. La señal $v[n]$ se obtiene multiplicando $x[n]$ por una ventana rectangular $w[n]$ de 128 puntos. Es decir, $v[n] = x[n]w[n]$. Nótese que la Figura 10.18 muestra $|V[k]|$ sólo en el intervalo $0 \leq k \leq 64$. ¿Cuál de las siguientes señales podría ser $x[n]$? Es decir, ¿cuáles son consistentes con la información que se muestra en la figura?

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= \cos(\pi n/4) + \cos(0{,}26\pi n),\\
x_2[n] &= \cos(\pi n/4) + (1/3)\,\mathrm{sen}(\pi n/8),\\
x_3[n] &= \cos(\pi n/4) + (1/3)\cos(\pi n/8),\\
x_4[n] &= \cos(\pi n/8) + (1/3)\cos(\pi n/16),\\
x_5[n] &= (1/3)\cos(\pi n/4) + \cos(\pi n/8),\\
x_6[n] &= \cos(\pi n/4) + (1/3)\cos(\pi n/8 + \pi/3).
\end{aligned}
$$

10.19. Se analiza una señal $x[n]$ utilizando la transformada de Fourier dependiente del tiempo $X_r[k]$, como se define en la ecuación (10.36). Inicialmente, el análisis se realiza con una DFT de $N = 128$ puntos, utilizando una ventana de Hamming $w[n]$ de $L = 128$ puntos. El muestreo en el dominio del tiempo de bloques adyacentes es $R = 128$. Es decir, los segmentos enventanados se desplazan 128 muestras. La resolución en frecuencia que se obtiene con este análisis no es suficiente y se desea mejorar. Se sugieren varios métodos para realizar este objetivo ¿Cuál de los siguientes métodos mejorará la resolución en frecuencia de la transformada de Fourier dependiente del tiempo $X_r[k]$?

MÉTODO 1: Incrementar N hasta 256 manteniendo L y R en los mismos valores.

MÉTODO 2: Incrementar N y L hasta 256, dejando R en el mismo valor.

MÉTODO 3: Disminuir R a 64 manteniendo el mismo valor de N y L.

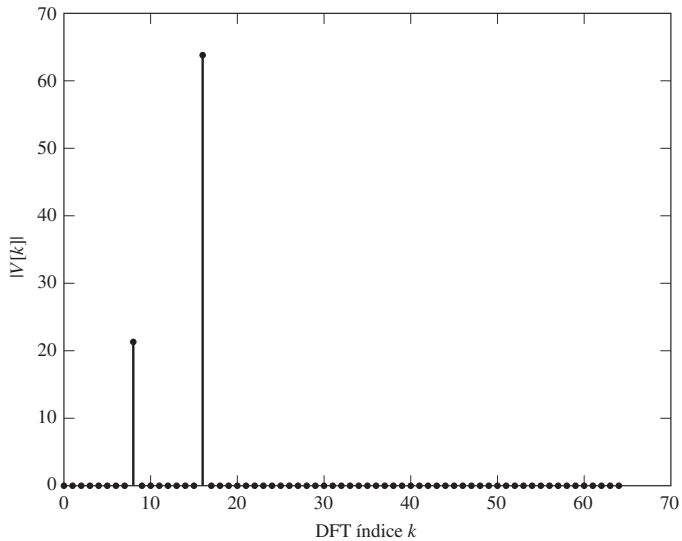


Figura P10.18

MÉTODO 4: Disminuir L a 64 manteniendo el mismo valor de N y R.
MÉTODO 5: Mantener N, R y L en el mismo valor y cambiar $w[n]$ a una ventana rectangular.

10.20. Suponga que se desea estimar el espectro de $x[n]$ aplicando una ventana de Kaiser a la señal antes de calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto. Se requiere que el lóbulo lateral de la ventana esté 30 dB por debajo del lóbulo principal y que la resolución en frecuencia sea de $\pi/40$. La anchura del lóbulo principal de la ventana es un estimador conservativo de la resolución en frecuencia. Estime la mínima longitud de ventana L que cumplirá esos requisitos.

Problemas básicos

10.21. Sea $x[n] = \cos(2\pi n/5)$ y $v[n]$ la secuencia que se obtiene aplicando una ventana rectangular de 32 puntos a $x[n]$ para calcular $V(e^{j\omega})$. Dibuje $|V(e^{j\omega})|$ para $-\pi \le \omega \le \pi$, indicando las frecuencias de todos los picos y de los primeros nulos a cada lado del pico. Además, indique las amplitudes de los picos y del lóbulo lateral más fuerte correspondiente a cada pico.

10.22. En este problema estamos interesados en estimar los espectros de tres secuencias muy largas de datos reales $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$. Todas consisten en la suma de dos componentes sinusoidales. Sin embargo, sólo un segmento de 256 puntos está visible para su análisis. Sean $\bar{x}_1[n]$, $\bar{x}_2[n]$ y $\bar{x}_3[n]$ los segmentos de 256 puntos de $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$, respectivamente. Disponemos de cierta información sobre la naturaleza de los espectros de las secuencias de longitud infinita, que se indica en las Ecuaciones (P10.22-1) a (P10.22-3). Se considera el uso de dos procedimientos de análisis espectral diferentes, uno de los cuales utiliza una ventana rectangular de 256 puntos y el otro una ventana de Hamming de 256 puntos. Dichos procedimientos se explican posteriormente. En las descripciones, la señal $\mathscr{R}_N[n]$ indica la ventana rectangular de N puntos y $\mathscr{H}_N[n]$ indica la ventana de Hamming de N puntos. El operador $\text{DFT}_{2048}\{\cdot\}$ expresa la operación de realizar la DFT de 2048 puntos de su argumento, tras rellenar con ceros al final de la secuencia de entrada. Esto produce una buena interpolación de la transformada de Fourier en tiempo discreto a partir de las muestras en frecuencia de la DFT.

$$X_1(e^{j\omega}) \approx \delta(\omega + \frac{17\pi}{64}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega - \frac{17\pi}{64}) \qquad \text{(P10.22-1)}$$

$$X_2(e^{j\omega}) \approx 0{,}017\delta(\omega + \frac{11\pi}{32}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + 0{,}017\delta(\omega - \frac{11\pi}{32}) \qquad \text{(P10.22-2)}$$

$$X_3(e^{j\omega}) \approx 0{,}01\delta(\omega + \frac{257\pi}{1024}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4}) + \delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + 0{,}01\delta(\omega - \frac{257\pi}{1024}) \qquad \text{(P10.22-3)}$$

Basándose en las Ecuaciones (P10.22-1) a (P10.22-3), indique cuál de los procedimientos de análisis espectral descritos a continuación le permitiría concluir si las componentes en frecuencia que se anticipan estarán realmente presentes. Una buena justificación debe incluir como mínimo una consideración cuantitativa tanto de la resolución como del comportamiento de los lóbulos laterales de los estimadores espectrales. Observe que es posible que ambos algoritmos, o ninguno de ellos, funcionen para cualquier secuencia de entrada dada. La Tabla 7.2 puede ser útil para decidir qué algoritmo(s) utilizar con cada secuencia.

Algoritmos de análisis espectral

Algoritmo 1: Utilice el segmento de datos completo con una ventana rectangular

$$v[n] = \mathscr{R}_{256}[n]\bar{x}[n]$$

$$\left|V(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{2\pi k}{2048}} = \left|\mathrm{DFT}_{2048}\{v[n]\}\right|.$$

Algoritmo 2: Utilice el segmento de datos completo con una ventana de Hamming

$$v[n] = \mathscr{H}_{256}[n]\bar{x}[n]$$

$$\left|V(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{2\pi k}{2048}} = \left|\mathrm{DFT}_{2048}\{v[n]\}\right|.$$

10.23. Represente el espectrograma que se obtiene utilizando una ventana rectangular de 256 puntos y las DFT de 256 puntos sin solapamiento ($R = 256$) siendo la señal

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi n}{4} + 1000\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{8000}\right)\right]$$

en el intervalo $0 \le n \le 16.000$.

10.24. **(a)** Considere el sistema de la Figura P10.24-1 con entrada $x(t) = e^{j(3\pi/8)10^4 t}$, periodo de muestreo $T = 10^{-4}$ y

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

¿Cuál es el mínimo valor distinto de cero de N tal que $X_w[k]$ sea distinto de cero exactamente en un sólo valor de k?

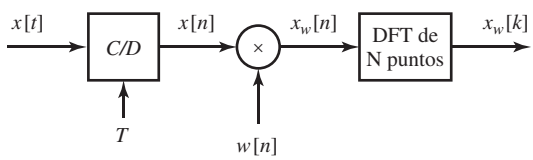


Figura P10.24-1

(b) Suponga ahora que $N = 32$, la señal de entrada es $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ y el periodo de muestreo T se elige de forma que no se produzca solapamiento en el proceso de muestreo. Las Figuras P10.24-2 y P10.24-3 muestran el módulo de la secuencia $X_w[k]$ para $k = 0, \ldots, 31$ para las dos posibilidades diferentes siguientes de $w[n]$:

$$w_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 31, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

$$w_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 7, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Indique qué figura corresponde a cada posibilidad de $w[n]$. Explique claramente su razonamiento.

(c) Dadas la señal de entrada y los parámetros del sistema del apartado (b), desearíamos estimar el valor de Ω_0 a partir de la Figura P10.24-3 cuando el periodo de muestreo es $T = 10^{-4}$. Suponiendo que la secuencia

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 31, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

y que el periodo de muestreo es suficiente como para asegurar que no se produce solapamiento durante el muestreo, estime el valor de Ω_0. ¿Es exacta su estimación? Si no lo es, ¿cuál es el máximo error posible de su estimación de frecuencia?

(d) Suponga que se dispone de los valores exactos de la DFT de 32 puntos $X_w[k]$ para las dos posibilidades de ventana $w_1[n]$ y $w_2[n]$. Describa brevemente un procedimiento para obtener una estimación precisa de Ω_0.

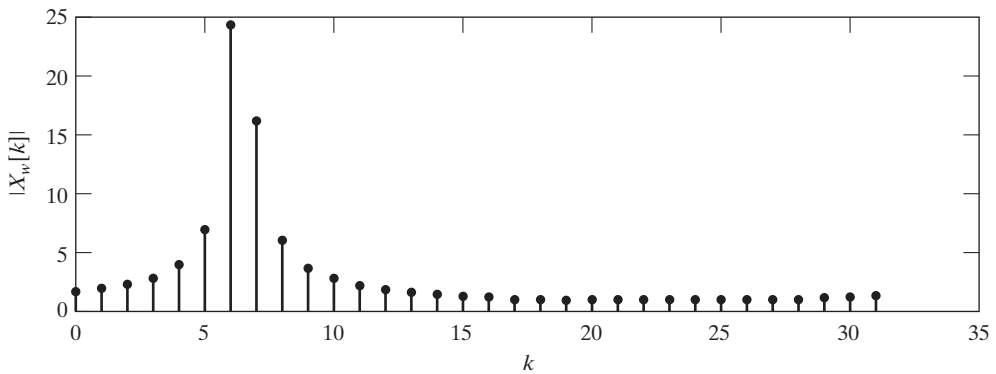


Figura P10.24-2

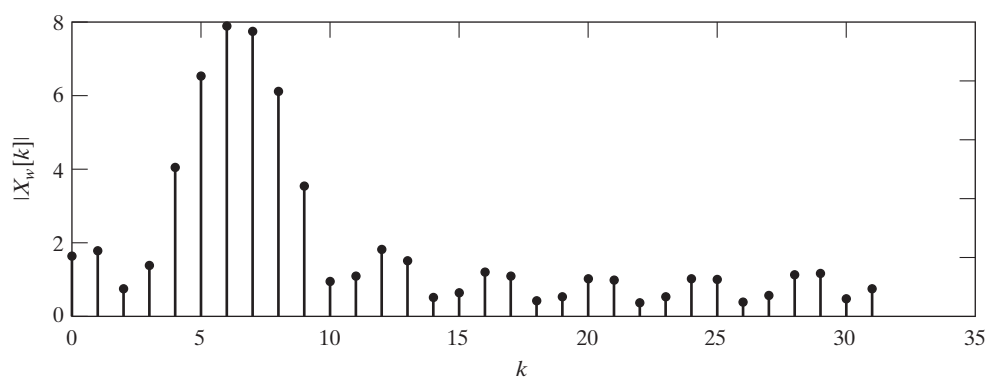


Figura P10.24-3

Problemas avanzados

10.25. En la Figura P10.25 se muestra un banco de filtros para el que

$$h_0[n] = 3\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1],$$

y

$$h_q[n] = e^{j\frac{2\pi qn}{M}} h_0[n], \qquad \text{para } q = 1, \ldots, N-1.$$

El banco de filtros está formado por N filtros, modulados por una fracción $1/M$ de la banda total de frecuencias. Suponga que tanto N como M son mayores que la longitud de $h_0[n]$.

(a) Exprese $y_q[n]$ en función de la transformada de Fourier dependiente del tiempo $X[n,\lambda)$ de $x[n]$, y dibuje y etiquete explícitamente los valores de la ventana asociada en la transformada de Fourier dependiente del tiempo.

En los apartados (b) y (c), suponga que $M = N$. Como $v_q[n]$ depende de las dos variables enteras q y n, la expresaremos alternativamente como la secuencia bidimensional $v[q,n]$.

(b) Para $R = 2$, describa un procedimiento para recuperar $x[n]$ para todos los valores de n si $v[q,n]$ está disponible para todos los valores enteros de q y n.

(c) ¿Funcionaría su procedimiento del apartado (b) para $R = 5$? Explique claramente su respuesta.

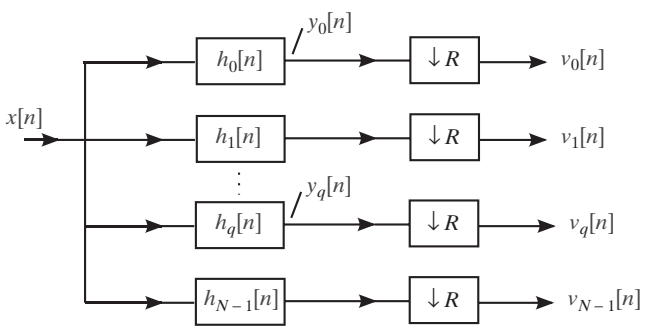
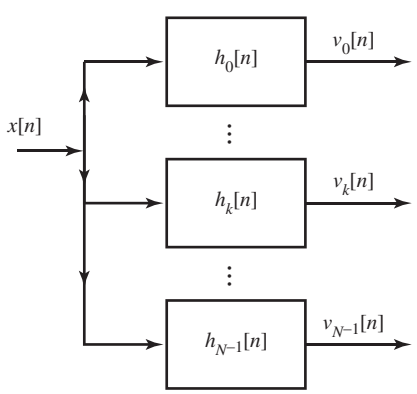


Figura P10.25 Banco de filtros.

10.26. El sistema de la Figura P.10.26-1 utiliza un banco de filtros modulados para realizar análisis espectral. La Figura P10.26-2 muestra cómo se relacionan las respuestas en frecuencia $H_k(e^{j\omega})$. La Figura P10.26.3 muestra la respuesta al impulso del filtro prototipo $h_0[n]$.



$h_k[n] = e^{j\omega_k n} h_0[n]$, $\qquad \omega_k = \dfrac{2\pi k}{N}$, $\qquad$ siendo $k = 0, 1, \ldots, N-1$

$h_0[n]$ = filtro prototipo paso bajo $\qquad H_k(z) = H_0(e^{-j2\pi k/N} z)$

Figura P10.26-1

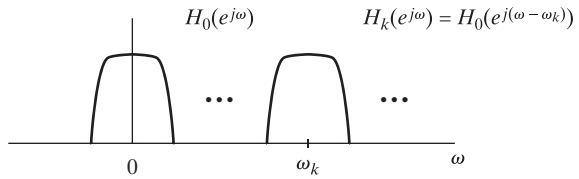


Figura P10.26-2

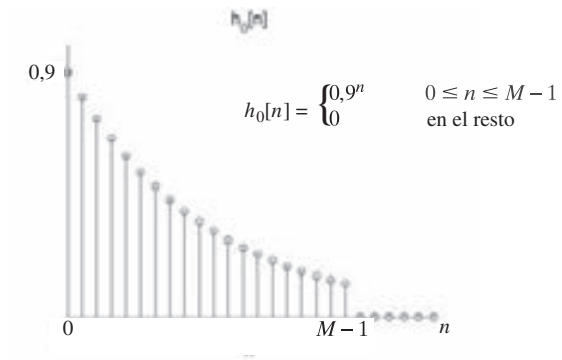


Figura P10.26-3

La Figura P10.26-4 muestra un sistema alternativo de análisis espectral. Determine $w[n]$ de forma que $G[k] = v_k[0]$, para $k = 0, 1, ..., N-1$.

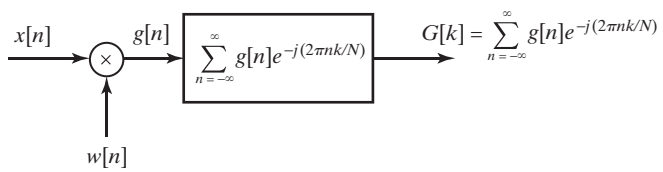


Figura P10.26-4

10.27. Estamos interesados en obtener 256 muestras equiespaciadas de la transformada Z de $x_w[n]$, siendo $x_w[n]$ una versión enventanada de una secuencia arbitraria $x[n]$ con $x_w[n] = x[n]w[n]$ y $w[n] = 1$, $0 \le n \le 255$ y $w[n] = 0$ en el resto. La transformada Z de $x_w[n]$ se define como

$$X_w(z) = \sum_{n=0}^{255} x_w[n]z^{-n}.$$

Las muestras $X_w[k]$ que se desearía calcular son

$$X_w[k] = X_w(z)\big|_{z=0{,}9e^{j\frac{2\pi}{256}k}} \qquad k = 0, 1, \ldots, 255.$$

Se desea procesar la señal $x[n]$ con un banco de filtros modulados, como se indica en la Figura P10.27.

Cada filtro del banco tiene una respuesta al impulso relacionada con el filtro paso bajo *causal* $h_0[n]$ como sigue:

$$h_k[n] = h_0[n]e^{-j\omega_k n} \qquad k = 1, 2, \ldots, 255.$$

La salida de cada filtro del banco se muestrea una vez, en el instante $n = N_k$, para obtener $X_w[k]$, es decir,

$$X_w[k] = v_k[N_k].$$

Determine $h_0[n]$, ω_k y N_k de forma que

$$X_w[k] = v_k[N_k] = X_w(z)\big|_{z=0{,}9e^{j\frac{2\pi}{256}k}} \qquad k = 0, 1, \ldots, 255.$$

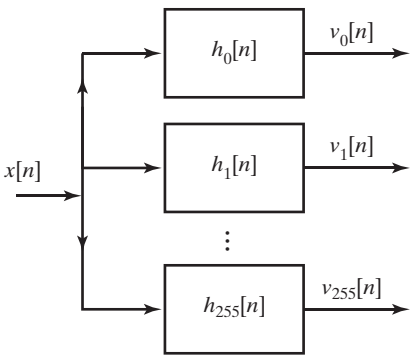


Figura P10.27

10.28. **(a)** En la Figura P10.28-1 se muestra un sistema para realizar análisis espectral de una señal $x_c(t)$, siendo

$$G_k[n] = \sum_{l=0}^{N-1} g_l[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}lk},$$

$$N = 512 \quad \text{y} \quad LR = 256.$$

Para el caso más general del coeficiente a_l, determine los valores de L y R que produzcan el mínimo número de multiplicaciones por segundo.

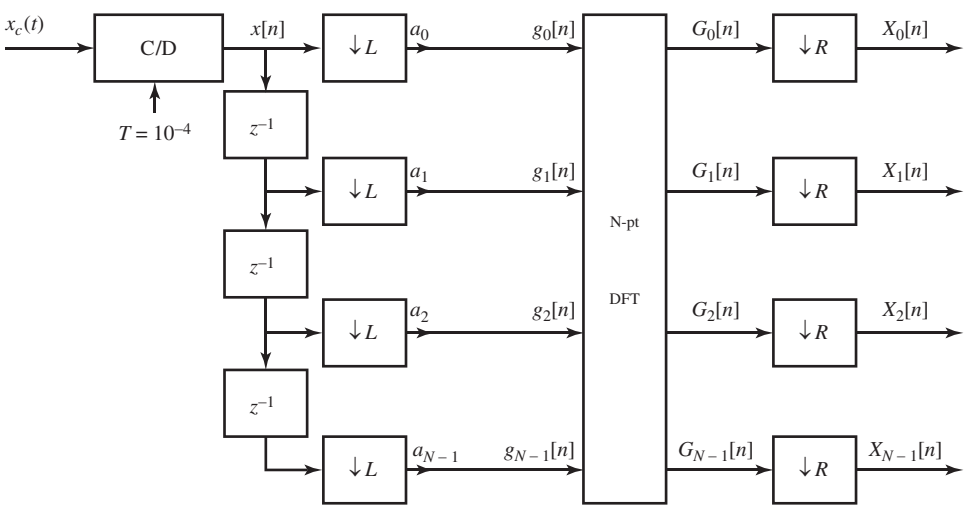


Figura P10.28-1

(b) En la Figura P10.28-2, se muestra otro sistema para realizar análisis espectral de una señal $x_c(t)$, siendo

$$h[n] = \begin{cases} (0{,}93)^n & 0 \le n \le 255 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases},$$

$$h_k[n] = h[n]e^{-j\omega_k n}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1 \quad \text{y} \quad N = 512.$$

Seguidamente se enumeran **dos** posibles valores de M, **cuatro** posibles valores de ω_k, y **seis** posibles valores de los coeficientes a_l. Identifique en este conjunto todas las combinaciones para las que $Y_k[n] = X_k[n]$; es decir, para las que ambos sistemas realizan el mismo análisis espectral. Puede haber más de una.

M: (a) 256 (b) 512

ω_k : (a) $\frac{2\pi k}{256}$ (b) $\frac{2\pi k}{512}$ (c) $\frac{-2\pi k}{256}$ (d) $\frac{-2\pi k}{512}$

a_l:	(a)	$(0{,}93)^l$	l=0, 1, $\cdots$, 255,	cero en el resto
	(b)	$(0{,}93)^{-l}$	l=0, 1, $\cdots$, 511	
	(c)	$(0{,}93)^l$	l=0, 1, $\cdots$, 511	
	(d)	$(0{,}93)^{-l}$	l=0, 1, $\cdots$, 255,	cero en el resto
	(e)	$(0{,}93)^l$	l=256, 257, $\cdots$, 511,	cero en el resto
	(f)	$(0{,}93)^{-l}$	l=256, 257, $\cdots$, 511,	cero en el resto

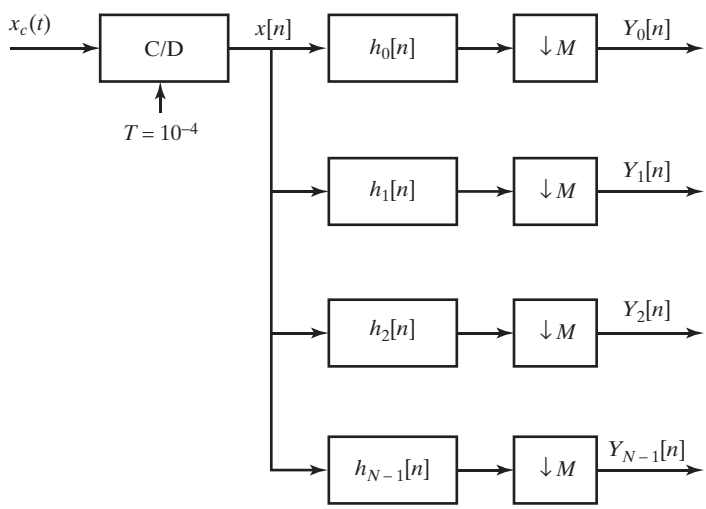


Figura P10.28-2

10.29. El sistema de la Figura 10.29 se propone como analizador de espectro. Su operación básica es como sigue: el espectro de la entrada muestreada se desplaza en frecuencia, el filtro paso bajo selecciona la banda paso bajo de frecuencias, el submuestreador "amplía" la banda de frecuencias seleccionada hasta el intervalo completo $-\pi < \omega < \pi$ y, finalmente, la DFT muestrea uniformemente esa banda de frecuencias en N frecuencias.

Suponga que la entrada es de banda limitada, de modo que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$. El sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es un filtro paso bajo ideal con ganancia unidad y frecuencia de corte π/M. Suponga además que $0 < \omega_1 < \pi$ y que la ventana de datos $w[n]$ es rectangular de longitud N.

(a) Dibuje las transformadas de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $R(e^{j\omega})$ y $R_d(e^{j\omega})$ para la $X_c(j\Omega)$ dada y para $\omega_1 = \pi/2$ y $M = 4$. Proporcione la relación entre las transformadas de Fourier de la entrada y de la salida en cada etapa del proceso, es decir, en la cuarta gráfica, debe indicar $R(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$.

(b) Utilizando el resultado del apartado (a), generalice para determinar la banda de frecuencias en tiempo continuo de $X_c(j\Omega)$ que está dentro de la banda de paso del filtro en tiempo discreto. Su respuesta de-

penderá de M, ω_1 y T. Para el caso específico de $\omega_1 = \pi/2$ y $M = 4$, indique esta banda de frecuencias sobre la gráfica de $X_c(j\Omega)$ dada en el apartado (a).

(c) (I) ¿Qué frecuencias en tiempo continuo de $X_c(j\Omega)$ están asociadas con los valores de la DFT $V[k]$ para $0 \le k \le N/2$?

(II) ¿A qué frecuencias en tiempo continuo de $X_c(j\Omega)$ corresponden los valores para $N/2 < k \le N-1$? Proporcione en cada caso una fórmula para las frecuencias Ω_k.

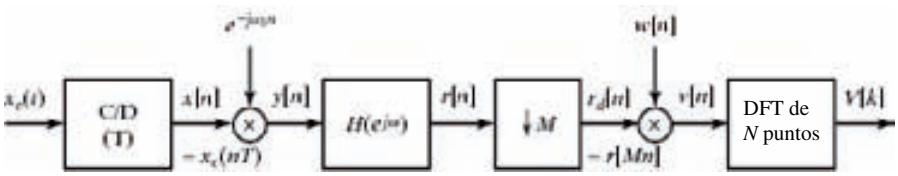


Figura P10.29

10.30. Considere una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ real y limitada en el tiempo, cuya duración es de 100 ms. Suponga que esta señal tiene una transformada de Fourier de banda limitada tal que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \ge 2\pi(10.000)$ rad/s. Es decir, suponga que el solapamiento es despreciable. Se desea calcular muestras de $X_c(j\Omega)$ con una separación de 5 Hz en el intervalo $0 \le \Omega \le 2\pi(10.000)$. Esto se puede hacer utilizando una DFT de 4000 puntos. Concretamente, se desea obtener una secuencia de 4000 puntos tal que su DFT esté relacionada con $X_c(j\Omega)$ por

$$X[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot k), \qquad k = 0, 1, \ldots, 1999,$$

siendo α un factor de escala conocido. Se proponen tres métodos para obtener una secuencia de 4000 puntos cuya DFT proporcione las muestras deseadas de $X_c(j\Omega)$.

MÉTODO 1: $x_c(t)$ se muestrea con periodo de muestreo $T = 25\ \mu$s; es decir, se calcula $X_1[k]$, la DFT de la secuencia

$$x_1[n] = \begin{cases} x_c(nT), & n = 0, 1, \ldots, 3999, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Como $x_c(t)$ está limitada en el tiempo a 100 ms, $x_1[n]$ es una secuencia finita de longitud 4000 (100 ms/25 μs).

MÉTODO 2: $x_c(t)$ se muestrea con periodo de muestreo $T = 50\ \mu$s. Como $x_c(t)$ está limitada en el tiempo a 100 ms, la secuencia resultante tendrá sólo 2000 muestras distintas de cero (100 ms/50 μs); es decir,

$$x_2[n] = \begin{cases} x_c(nT), & n = 0, 1, \ldots, 1999, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

En otras palabras, la secuencia se amplía con muestras de valor cero hasta crear una secuencia de 4000 puntos, de la que se calcula la DFT de 4000 puntos $X_2[k]$.

MÉTODO 3: $x_c(t)$ se muestrea con periodo de muestreo $T = 50\ \mu$s, como en el Método 2. La secuencia de 2000 puntos resultante se utiliza para formar la señal $x_3[n]$ como se indica a continuación:

$$x_3[n] = \begin{cases} x_c(nT), & 0 \le n \le 1999, \\ x_c((n-2000)T), & 2000 \le n \le 3999, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se calcula la DFT $X_3[k]$ de 4000 puntos de esta secuencia.

Para cada uno de los tres métodos, determine cómo se relaciona cada una de las DFT de 4000 puntos con $X_c(j\Omega)$. Exprese esta relación mediante una gráfica con una transformada de Fourier "típica" $X_c(j\Omega)$. Indique explícitamente qué método o métodos proporcionan las muestras deseadas de $X_c(j\Omega)$.

10.31. Una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ de duración finita se muestrea con una frecuencia de 20.000 muestras/s, produciéndose una secuencia finita de 1000 puntos $x[n]$ distinta de cero en el intervalo $0 \leq n \leq 999$. Suponga en este problema que la señal en tiempo continuo es de banda limitada de forma que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq 2\pi(10.000)$. Es decir, suponga que en el proceso de muestreo la distorsión debida al solapamiento es despreciable. Suponga también que existe un dispositivo o programa disponible para calcular las DFT y las DFT inversas de 1000 puntos.

(a) Si $X[k]$ indica la DFT de 1000 puntos de la secuencia $x[n]$, ¿cómo se relaciona $X[k]$ con $X_c(j\Omega)$? ¿Cuál es la separación efectiva en frecuencia entre las muestras de la DFT?

Se propone el siguiente procedimiento para obtener una ampliación de la transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ en el intervalo $|\Omega| \leq 2\pi(5000)$, partiendo de la DFT de 1000 puntos $X[k]$.

Paso 1. Formar la nueva DFT de 1000 puntos

$$W[k] = \begin{cases} X[k], & 0 \leq k \leq 250, \\ 0, & 251 \leq k \leq 749, \\ X[k], & 750 \leq k \leq 999. \end{cases}$$

Paso 2. Calcular la DFT inversa de 1000 puntos de $W[k]$ y obtener $w[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, 999$.

Paso 3. Diezmar la secuencia $w[n]$ por un factor de 2, y aumentar el resultado con 500 muestras consecutivas de valor cero, obteniendo la secuencia

$$y[n] = \begin{cases} w[2n], & 0 \leq n \leq 499, \\ 0, & 500 \leq n \leq 999. \end{cases}$$

Paso 4. Calcular la DFT de 1000 puntos de $y[n]$, obteniéndose $Y[k]$.

(b) El diseñador de este procedimiento asegura que

$$Y[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot k), \qquad k = 0, 1, \ldots, 500,$$

donde α es una constante de proporcionalidad. ¿Es correcta esa afirmación? Si no lo es, explique por qué.

10.32. Una señal analógica formada por una suma de sinusoides se muestrea con una frecuencia de $f_s = 10.000$ muestras/s y se obtiene $x[n] = x_c(nT)$. Se han calculado cuatro espectrogramas que muestran al transformada de Fourier dependiente del tiempo $|X[n, \lambda)|$ (se utiliza una escala de amplitudes logarítmica, y sólo se muestran los 35 dB superiores).

(a) ¿Qué espectrogramas se han calculado con una ventana rectangular?
(a) (b) (c) (d)

(b) ¿Qué pareja (o parejas) de espectrogramas tienen aproximadamente la misma resolución en frecuencia?
(a&b) (b&d) (c&d) (a&d) (b&c)

(c) ¿Qué espectrograma tiene la menor ventana temporal?
(a) (b) (c) (d)

(d) Estime, con una precisión de 100 muestras, la longitud de la ventana L (en muestras) de la ventana del espectrograma (b).

(e) Utilice los datos espectrográficos de la Figura P10.32 para ayudarle a obtener una ecuación (o ecuaciones) de una suma analógica de sinusoides $x_c(t)$, que, cuando se muestrean con una frecuencia de $f_s = 10000$, muestras/s producen los espectrogramas de dicha figura. Sea tan completo como pueda en la descripción de la señal. Indique cualquier parámetro que no pueda ser obtenido del espectrograma.

10.33. El periodograma $I(\omega)$ de una señal aleatoria en tiempo discreto $x[n]$ se define en la Ecuación (10.67) como

$$I(\omega) = \frac{1}{LU}|V(e^{j\omega})|^2,$$

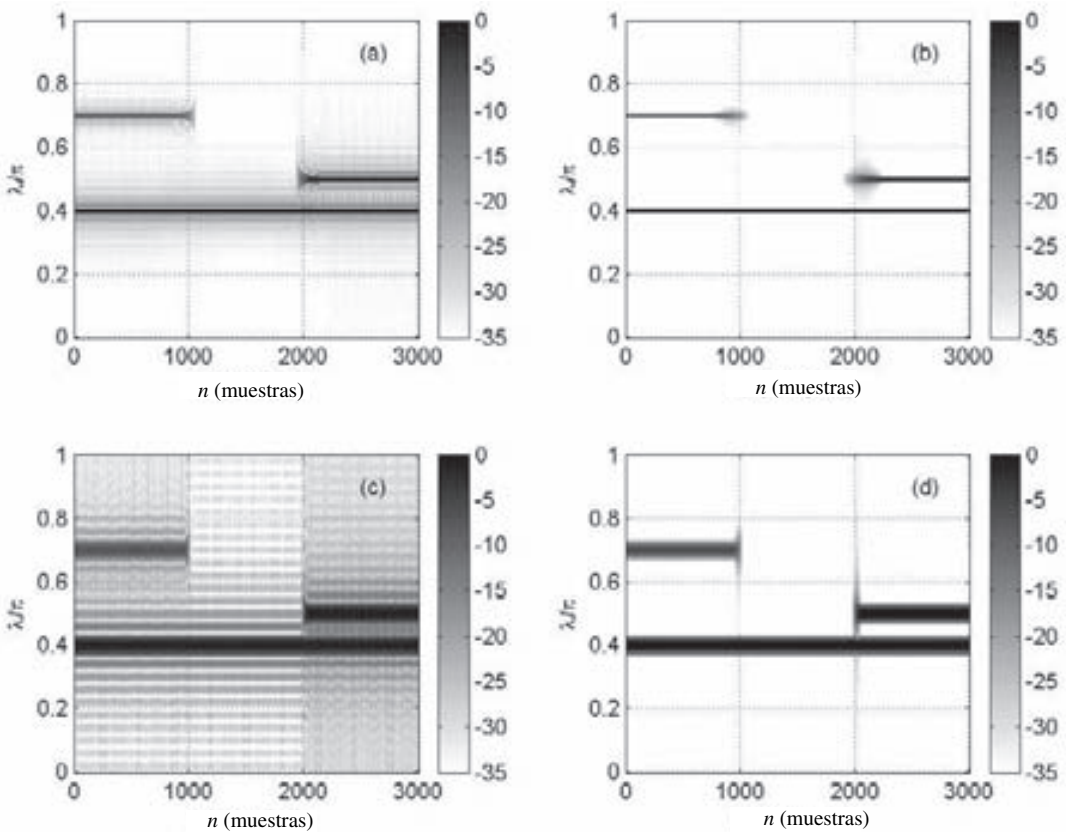


Figura P10.32

donde $V(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de longitud finita $v[n] = w[n]x[n]$, siendo $w[n]$ una ventana de longitud finita L, y U una constante de normalización. Suponga que $x[n]$ y $w[n]$ son reales.

Demuestre que el periodograma es también igual a $1/LU$ veces la transformada de Fourier de la secuencia de autocorrelación aperiódica de $v[n]$. Es decir,

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} \sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m] e^{-j\omega m},$$

donde

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m].$$

10.34. Considere una secuencia de longitud finita $x[n]$ tal que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq L$. Sea $X[k]$ la DFT de N puntos de la secuencia $x[n]$, siendo $N > L$. Sea $c_{xx}[m]$ la función de autocorrelación periódica de $x[n]$; es decir,

$$c_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m].$$

Se define

$$\tilde{c}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km}, \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

(a) Determine el mínimo valor de N que se puede utilizar en la DFT si se requiere que

$$c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m], \qquad 0 \le m \le L-1.$$

(b) Determine el mínimo valor de N que se puede utilizar en la DFT si se requiere que

$$c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m], \qquad 0 \le m \le M-1,$$

siendo $M < L$.

10.35. La ventana simétrica de Bartlett, que aparece en muchas aplicaciones de estimación del espectro de potencia, se define como

$$w_B[m] = \begin{cases} 1-|m|/M, & |m| \le M-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{P10.35-1}$$

Esta ventana es particularmente atractiva para obtener estimaciones del espectro de potencia mediante el enventanado de una función de autocorrelación estimada, como se comenta en la Sección 10.6. Esto es porque su transformada de Fourier es no negativa, lo que garantiza que el estimador espectral suavizado será no negativo para todas las frecuencias.

(a) Demuestre que la ventana de Bartlett, tal como se define en la Ecuación (P10.35-1) es $(1/M)$ veces la autocorrelación aperiódica de la secuencia $(u[n]-u[n-M])$.

(b) Utilizando el resultado del apartado (a), demuestre que la transformada de Fourier de la ventana de Bartlett es

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega M/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right]^2, \tag{P10.35-2}$$

que claramente es no negativa.

(c) Describa un procedimiento para generar otras secuencias de ventana de longitud finita que tengan transformadas de Fourier no negativas.

10.36. Considere una señal

$$x[n] = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]^2 u[n]$$

cuya transformada discreta de Fourier dependiente del tiempo se calcula utilizando la ventana de análisis

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 13, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Sea $X[n,k] = X[n, 2\pi k/7)$ para $0 \le k \le 6$, donde $X[n,\lambda)$ se define en la Sección 10.3.

(a) Determine $X[0,k]$ para $0 \le k \le 6$.

(b) Evalúe $\sum_{k=0}^{6} X[n,k]$ para $0 \le n < \infty$.

Problemas de ampliación

10.37. En la Sección 10.6 demostramos que se puede obtener un estimador suavizado del espectro de potencia enventanando un estimador de la función de autocorrelación. Se obtuvo (véase la Ecuación (10.109)) que la varianza del estimador espectral suavizado es

$$\operatorname{var}[S(\omega)] \simeq F P_{xx}^2(\omega),$$

donde F, la *razón de varianzas* o *factor de reducción de varianza* es

$$F = \frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(w_c[m])^2 = \frac{1}{2\pi Q}\int_{-\pi}^{\pi}|W_c(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Como se comentó en la Sección 10.6, Q es la longitud de la secuencia $x[n]$ y $(2M-1)$ es la longitud de la ventana simétrica $w_c[m]$ que se aplica a la estimación de la autocorrelación. Por tanto, si Q es fijo, la varianza del espectro suavizado se puede reducir ajustando la forma y la duración de la ventana que se aplica a la función de correlación.

En este problema se demuestra que F decrece a medida que la longitud de la ventana decrece, pero se ha visto también en la exposición sobre ventanas que se hizo en el Capítulo 7 que la anchura del lóbulo principal de $W_c(e^{j\omega})$ decrece al disminuir la longitud de la ventana, por lo que la capacidad de resolver dos componentes en frecuencia cercanas va disminuyendo a medida que decrece la longitud de la ventana. Por tanto, existe un compromiso entre reducción de varianza y resolución. Se estudia este compromiso para las siguientes ventanas comúnmente utilizadas:

Rectangular

$$w_R[m] = \begin{cases} 1, & |m| \le M-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Bartlett (triangular)

$$w_B[m] = \begin{cases} 1-|m|/M, & |m| \le M-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hanning/Hamming

$$w_H[m] = \begin{cases} \alpha+\beta\cos[\pi m/(M-1)], & |m| \le M-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

($\alpha = \beta = 0{,}5$ para la ventana de Hanning y $\alpha = 0{,}54$ y $\beta = 0{,}46$ para la ventana de Hamming.)

(a) Obtenga la transformada de Fourier de cada una de las ventanas anteriores. Es decir, calcule $W_R(e^{j\omega})$, $W_B(e^{j\omega})$ y $W_H(e^{j\omega})$. Dibuje dichas transformadas de Fourier en función de ω.

(b) Demuestre para las tres ventanas, que los valores de la tabla que sigue son aproximadamente ciertos cuando $M \gg 1$:

Nombre de la ventana	Anchura aproximada del lóbulo principal	Razón aproximada de varianzas (F)
Rectangular	$2\pi/M$	$2M/Q$
Bartlett	$4\pi/M$	$2M/(3Q)$
Hanning/Hamming	$3\pi/M$	$2M(\alpha^2+\beta^2/2)/Q$

10.38. Demuestre que la transformada de Fourier dependiente del tiempo, tal como se define en la Ecuación (10.18), tiene las siguientes propiedades:

(a) *Linealidad:* si $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$,sentonces $X[n,\lambda) = aX_1[n,\lambda) + bX_2[n,\lambda)$.

(b) *Desplazamiento:* si $y[n] = x[n-n_0]$, entonces $Y[n,\lambda) = X[n-n_0,\lambda)$.

(c) *Modulación:* si $y[n] = e^{j\omega_0 n}x[n]$, entonces $Y[n,\lambda) = e^{j\omega_0 n}X[n,\lambda-\omega_0)$.

(d) *Simetría conjugada:* si $x[n]$ es real, entonces $X[n,\lambda) = X^*[n,-\lambda)$.

10.39. Suponga que $x_c(t)$ es una señal aleatoria estacionaria en tiempo continuo cuya función de autocorrelación es

$$\phi_c(\tau) = \mathscr{E}\{x_c(t)x_c(t+\tau)\}$$

y cuya densidad espectral de potencia es

$$P_c(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau.$$

Considere una señal aleatoria estacionaria en tiempo discreto $x[n]$ que se obtiene muestreando $x_c(t)$ con periodo de muestreo T. Es decir, $x[n] = x_c(nT)$.

(a) Demuestre que $\phi[m]$, la secuencia de autocorrelación de $x[n]$, es

$$\phi[m] = \phi_c(mT).$$

(b) ¿Cuál es la relación entre la densidad espectral de potencia $P_c(\Omega)$ de la señal aleatoria en tiempo continuo y la densidad espectral de potencia $P(\omega)$ de la señal aleatoria en tiempo discreto?

(c) ¿Qué condición es necesaria para que

$$P(\omega) = \frac{1}{T}P_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi?$$

10.40. En la Sección 10.5.5 consideramos la estimación del espectro de potencia de una sinusoide con ruido blanco. En este problema se determina el verdadero espectro de potencia de esa señal. Suponga que

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + e[n],$$

siendo θ una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo de 0 a 2π y $e[n]$ una secuencia de variables aleatorias con media cero, incorreladas entre sí e incorreladas con θ. En otras palabras, la componente del coseno tiene una fase seleccionada aleatoriamente, y $e[n]$ representa ruido blanco.

(a) Demuestre que bajo los supuestos anteriores, la función de autocorrelación de $x[n]$ es

$$\phi_{xx}[m] = \mathscr{E}\{x[n]x[m+n]\} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m) + \sigma_e^2\delta[m],$$

siendo $\sigma_e^2 = \mathscr{E}\{(e[n])^2\}$.

(b) A partir del resultado del apartado (a), demuestre que sobre un periodo en frecuencia, el espectro de potencia de $x[n]$ es

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \sigma_e^2, \qquad |\omega| \le \pi.$$

10.41. Considere una señal en tiempo discreto $x[n]$ de N muestras de longitud que se obtiene muestreando una señal en tiempo continuo blanca, estacionaria y de media cero. Entonces

$$\mathscr{E}\{x[n]x[m]\} = \sigma_x^2\delta[n-m],$$

$$\mathscr{E}\{x[n]\} = 0.$$

Suponga que se calcula la DFT de la secuencia de longitud finita $x[n]$, obteniéndose $X[k]$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

(a) Determine la varianza aproximada de $|X[k]|^2$ utilizando las Ecuaciones (10.80) y (10.81).

(b) Determine la correlación cruzada entre los valores de la DFT, es decir, determine $\mathscr{E}\{X[k]X^*[r]\}$ en función de k y r.

10.42. Una señal en tiempo continuo de banda limitada tiene un espectro que es cero para $|\Omega| \geq 2\pi(10^4)$ rad/s. La señal se muestrea con una frecuencia de 20000 muestras por segundo durante un intervalo temporal de 10 s. Se estima el espectro de potencia de la señal por el método de promediado de periodogramas que se describe en la Sección 10.5.3.

(a) ¿Cuánto vale la longitud Q (número de muestras) del registro de datos?

(b) Si se utiliza un programa que calcula la FFT de base 2 para obtener los periodogramas, ¿cuál es la mínima longitud N que se debe utilizar, si se desea obtener estimaciones del espectro de potencia en frecuencias equiespaciadas separadas no más de 10 Hz?

(c) Si la longitud L del segmento es igual a la longitud N de la FFT en el apartado (b), ¿cuántos segmentos K hay disponibles si dichos segmentos no se solapan?

(d) Suponga que se desea reducir la varianza del estimador del espectro en un factor de 10, manteniendo la separación en frecuencia del apartado (b). Sugiera dos métodos para hacerlo. ¿Proporcionan los dos métodos los mismos resultados? Si no es así, explique en qué se diferencian.

10.43. Suponga que se obtiene un estimador del espectro de potencia mediante el método de promediado de periodogramas, presentado en la Sección 10.5.3. Es decir, el estimador del espectro es

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega),$$

donde los K periodogramas $I_r(\omega)$ se calculan a partir de segmentos de L puntos de la señal utilizando las Ecuaciones (10.82) y (10.83). Se define un estimador de la función de autocorrelación como la transformada inversa de Fourier de $\bar{I}(\omega)$. Es decir,

$$\bar{\phi}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{I}(\omega)e^{j\omega m}d\omega.$$

(a) Demuestre que

$$\mathscr{E}\{\bar{\phi}[m]\} = \frac{1}{LU}c_{ww}[m]\phi_{xx}[m],$$

donde L es la longitud de los segmentos, U es un factor de normalización dado por la Ecuación (10.79) y $c_{ww}[m]$, dada por la Ecuación (10.75), es la función de autocorrelación aperiódica de la ventana que se aplica a los segmentos de la señal.

(b) En la aplicación del promediado de periodogramas, normalmente se utiliza un algoritmo de FFT para calcular $\bar{I}(\omega)$ en N frecuencias equiespaciadas, es decir,

$$\bar{I}[k] = \bar{I}(2\pi k/N), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde $N \geq L$. Suponga que se obtiene un estimador de la función de autocorrelación calculando la DFT inversa de $\bar{I}[k]$, así

$$\bar{\phi}_p[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{I}[k]e^{j(2\pi/N)km}, \qquad m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Obtenga una expresión de $\mathscr{E}\{\bar{\phi}_p[m]\}$.

(c) ¿Cómo se debería escoger N para que

$$\mathscr{E}\{\bar{\phi}_p[m]\} = \mathscr{E}\{\bar{\phi}[m]\}, \qquad m = 0, 1, \ldots, L-1?$$

10.44. Considere el cálculo del estimador de la autocorrelación

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|], \tag{P10.44-1}$$

donde $x[n]$ es una secuencia real. Como $\hat{\phi}_{xx}[-m] = \hat{\phi}_{xx}[m]$, para obtener $\hat{\phi}_{xx}[m]$ para $-(M-1) \le m \le M-1$, (lo que es necesario para estimar la densidad espectral de potencia según la Ecuación (10.88)), sólo hace falta evaluar la Ecuación (P10.44-1) para $0 \le m \le M-1$.

(a) Cuando $Q \gg M$, puede no ser posible calcular $\hat{\phi}_{xx}[m]$ utilizando un solo cálculo de FFT. En esos casos, es conveniente expresar $\hat{\phi}_{xx}[m]$ como una suma de estimadores de la autocorrelación basados en secuencias más cortas. Demuestre que si $Q = KM$,

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{i=0}^{K-1} c_i[m],$$

donde

$$c_i[m] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n+iM]x[n+iM+m],$$

para $0 \le m \le M-1$.

(b) Demuestre que las correlaciones $c_i[m]$ se pueden obtener calculando las correlaciones *circulares* de N puntos

$$\tilde{c}_i[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_i[n]y_i[((n+m))_N],$$

con las secuencias

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n+iM], & 0 \le n \le M-1, \\ 0, & M \le n \le N-1, \end{cases}$$

y

$$y_i[n] = x[n+iM], \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{P10.44-2}$$

¿Cuál es el *mínimo* valor de N (en función de M) tal que $c_i[m] = \tilde{c}_i[m]$ para $0 \le m \le M-1$?

(c) Indique un procedimiento para calcular $\hat{\phi}_{xx}[m]$ para $0 \le m \le M-1$ mediante el cálculo de $2K$ DFT de N puntos de secuencias reales y *una* DFT inversa de N puntos. ¿Cuántas multiplicaciones complejas se requieren para calcular $\hat{\phi}_{xx}[m]$ para $0 \le m \le M-1$ si se utiliza una FFT de base 2?

(d) ¿Qué modificaciones al procedimiento desarrollado en el apartado (c) serían necesarias para calcular el estimador de la correlación cruzada

$$\hat{\phi}_{xy}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]y[n+m], \qquad -(M-1) \le m \le M-1,$$

donde $x[n]$ e $y[n]$ son secuencias reales conocidas para $0 \le n \le Q-1$?

(e) Rader (1970) demostró que para calcular el estimador de la autocorrelación $\hat{\phi}_{xx}[m]$ para $0 \le m \le M-1$, se puede conseguir un ahorro significativo en el coste computacional si $N = 2M$. Demuestre que la DFT de N puntos de un segmento $y_i[n]$ como se define en la ecuación (P10.44-2), se puede expresar como

$$Y_i[k] = X_i[k] + (-1)^k X_{i+1}[k], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Indique un procedimiento para calcular $\hat{\phi}_{xx}[m]$ para $0 \le m \le M-1$ mediante el cálculo de K DFT de N puntos y una DFT inversa de N puntos. Determine el número total de multiplicaciones complejas si se usa en este caso una FFT de base 2.

10.45. En la Sección 10.3 definimos la transformada de Fourier dependiente del tiempo de una señal $x[m]$, de forma que para n fijo es equivalente a la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $x[n+m]w[m]$, siendo $w[m]$ la secuencia de ventana. Es también útil definir una función de autocorrelación dependiente del tiempo para la secuencia $x[n]$ tal que para un n fijo, su transformada de Fourier sea el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier dependiente del tiempo. Concretamente, la función de autocorrelación dependiente del tiempo se define como

$$c[n,m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,\lambda)|^2 e^{j\lambda m} d\lambda,$$

donde $X[n,\lambda)$ se define en la Ecuación (10.18).

(a) Demuestre que si $x[n]$ es real

$$c[n,m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]x[m+n+r]w[m+r];$$

es decir, para un n fijo, $c[n,m]$ es la autocorrelación aperiódica de la secuencia $x[n+r]w[r]$, $-\infty < r < \infty$.

(b) Demuestre que la función de autocorrelación dependiente del tiempo es una función par de m para n fijo, y utilice este hecho para obtener la expresión equivalente

$$c[n,m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]x[r-m]h_m[n-r],$$

donde

$$h_m[r] = w[-r]w[-(m+r)]. \tag{P10.45-1}$$

(c) ¿Qué condición debe satisfacer la ventana $w[r]$ para que se pueda utilizar la Ecuación (P10.45-1) para calcular $c[n,m]$ para un m fijo y $-\infty < n < \infty$ mediante operaciones causales?

(d) Suponga que

$$w[-r] = \begin{cases} a^r, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \tag{P10.45-2}$$

Obtenga la respuesta al impulso $h_m[r]$ para calcular el m-ésimo valor de la autocorrelación, y calcule la correspondiente función de transferencia $H_m(z)$. A partir de la función de transferencia, dibuje el diagrama de bloques de un sistema causal para calcular el m-esimo valor de la autocorrelación $c[n,m]$ con $-\infty < n < \infty$, para la ventana de la Ecuación (P10.45-2).

(e) Repita el apartado (d) para

$$w[-r] = \begin{cases} ra^r, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

10.46. El análisis de Fourier dependiente del tiempo se realiza a veces mediante un banco de filtros, e incluso cuando se utilizan métodos basados en la FFT, la interpretación del banco de filtros puede dar una perspectiva útil. Este problema examina esa interpretación, que se basa en el hecho de que cuando λ es fijo, la transformada de Fourier dependiente del tiempo $X[n,\lambda)$, definida en la Ecuación (10.18), es simplemente una secuencia que se puede ver como el resultado de una combinación de operaciones de filtrado y modulación.

(a) Demuestre que $X[n,\lambda)$ es la salida del sistema que se muestra en la Figura P10.46-1, si la respuesta al impulso del sistema lineal e invariante con el tiempo es $h_0[n] = w[-n]$. Demuestre también que si λ es fijo, el sistema global de la Figura P10.46-1 se comporta como un sistema lineal e invariante con el tiempo. Determine además la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del sistema lineal e invariante con el tiempo equivalente.

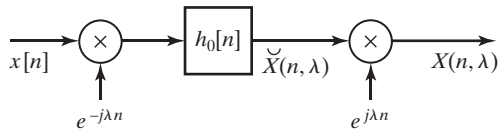


Figura P10.46-1

(b) Suponiendo que λ es fijo en la Figura P10.46-1, demuestre que para secuencias de ventana típicas y para λ fijo, la secuencia $s[n] = \breve{X}[n,\lambda)$ tiene una transformada de Fourier en tiempo discreto que es paso bajo. Demuestre también que, para secuencias de ventana típicas, la respuesta en frecuencia del sistema global de la Figura P10.46-1 es un filtro paso banda centrado en $\omega = \lambda$.

(c) La Figura P10.46-2 muestra un banco de filtros paso banda de N canales, donde cada canal se realiza como se indica en la Figura P10.46-1. Las frecuencias centrales de los canales son $\lambda_k = 2\pi k/N$, y $h_0[n] = w[-n]$ es la respuesta al impulso de un filtro paso bajo. Demuestre que las salidas $y_k[n]$ son muestras (en la dimensión de λ) de la transformada de Fourier dependiente del tiempo. Demuestre también que la salida completa es $y[n] = Nw[0]x[n]$; es decir, demuestre que el sistema de la Figura P10.46-2 reconstruye la entrada exactamente (salvo por un factor de escala) a partir de la transformada de Fourier dependiente del tiempo muestreada.

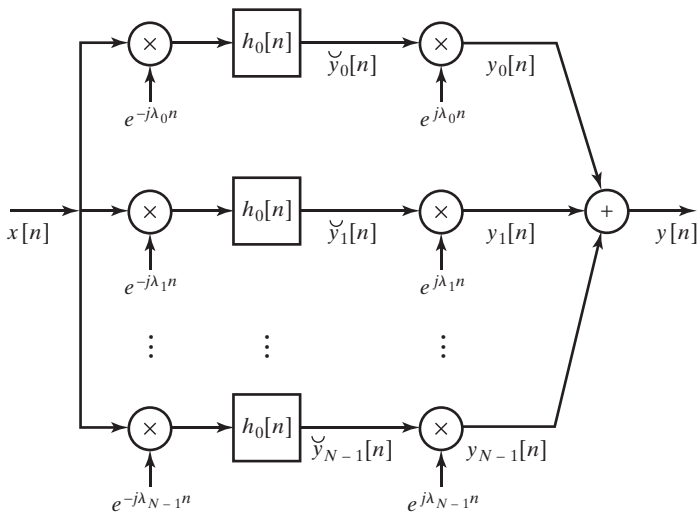


Figura P10.46-2

El sistema de la Figura P10.46-2 convierte la secuencia de entrada $x[n]$ en N secuencias, incrementando por tanto el número de muestras por segundo en un factor de N. Como se demuestra en el apartado (b), para secuencias de ventana típicas, las señales de los canales $\breve{y}_k[n]$ tienen transformadas de Fourier paso bajo. Por tanto, debería ser posible reducir la velocidad de muestreo de esas señales, como se muestra en la Figura P10.46-3. En particular, si la frecuencia de muestreo se reduce en un factor de $R = N$, el número total de muestras por segundo es el mismo que el de $x[n]$. En este caso, se dice que el banco de filtros tiene *muestreo crítico*, (véase Crochiere y Rabiner, 1983). La reconstrucción de la señal original a partir de las señales de los canales diezmados requiere una interpolación, como se muestra. Claramente, es interesante determinar lo bien que la señal original $x[n]$ es reconstruida por el sistema.

(d) Para el sistema de la Figura P10.46-3, demuestre que la transformada de Fourier en tiempo discreto de la salida está dada por la relación

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{R}\sum_{\ell=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{N-1} G_0(e^{j(\omega-\lambda_k)})H_0(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi\ell/R)})X\left(e^{j(\omega-2\pi\ell/R)}\right),$$

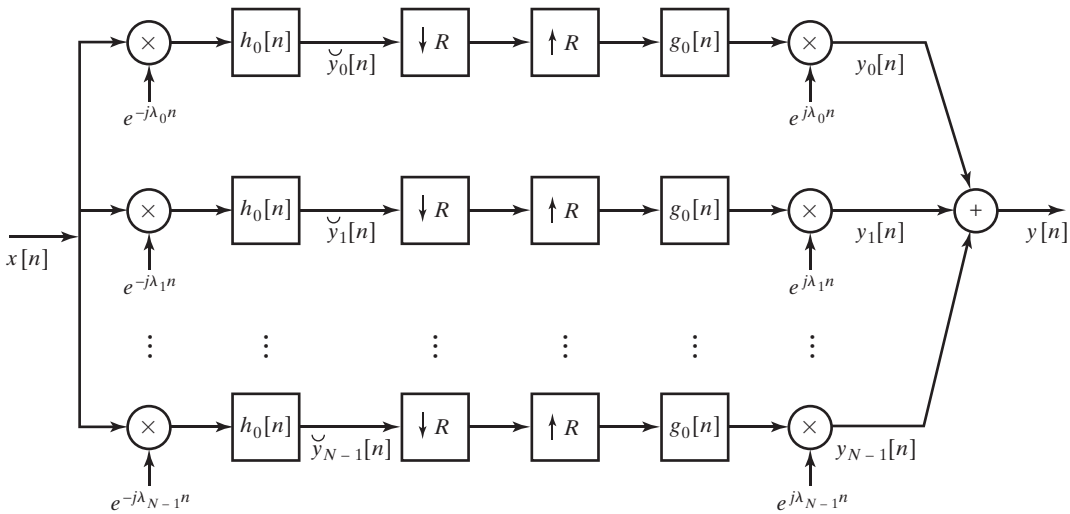


Figura P10.46-3

donde $\lambda_k = 2\pi k/N$. Esta expresión muestra claramente el solapamiento resultante del diezmado de las señales del canal $\breve{y}[n]$. A partir de la expresión de $Y(e^{j\omega})$, determine una relación o un conjunto de relaciones que se deben satisfacer conjuntamente por $H_0(e^{j\omega})$ y $G_0(e^{j\omega})$, de forma que el solapamiento se cancele e $y[n] = x[n]$.

(e) Suponga que $R = N$ y que la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo es ideal,

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/N, \\ 0, & \pi/N < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Para esta respuesta en frecuencia $H_0(e^{j\omega})$, determine si es posible obtener una respuesta en frecuencia del filtro de interpolación $G_0(e^{j\omega})$ tal que se cumpla la condición obtenida en el apartado (d). Si es posible, determine $G_0(e^{j\omega})$.

(f) *Opcional:* explore la posibilidad de una reconstrucción exacta cuando la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo $H_0(e^{j\omega})$ (la transformada de Fourier de $w[-n]$) es no ideal y distinta de cero en el intervalo $|\omega| < 2\pi/N$.

(g) Demuestre que la salida del sistema de la Figura P10.46-3 es

$$y[n] = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n - \ell R] h_0[\ell R + rN - n].$$

A partir de esta expresión, determine una relación o conjunto de relaciones que deben cumplir conjuntamente $h_0[n]$ y $g_0[n]$ de forma que $y[n] = x[n]$.

(h) Suponga que $R = N$ y que la respuesta al impulso del filtro paso bajo es

$$h_0[n] = \begin{cases} 1, & -(N-1) \leq n \leq 0, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Para esta respuesta al impulso $h_0[n]$, determine si es posible obtener una respuesta al impulso del filtro de interpolación $g_0[n]$ de forma que se cumpla la condición obtenida en el apartado (g). Si es así, determine $g_0[n]$.

(i) *Opcional:* explore la posibilidad de una reconstrucción exacta cuando la respuesta al impulso del filtro paso bajo $h_0[n] = w[-n]$ es una ventana suavizada en sus extremos con una longitud mayor que N.

10.47. Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable, con una entrada real $x[n]$, una respuesta al impulso real $h[n]$ y una salida $y[n]$. Suponga que la entrada $x[n]$ es ruido blanco de media cero y varianza σ_x^2. La función de transferencia es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}},$$

donde se supone que los coeficientes a_ks y b_ks son reales. La entrada y la salida satisfacen la siguiente ecuación en diferencias con coeficientes constantes:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

Si todos los coeficientes a_ks valen cero, $y[n]$ se denomina proceso aleatorio lineal de *promediado móvil* (MA, *Moving-Average*). Si todos los coeficientes b_ks son cero, excepto b_0, entonces $y[n]$ se denomina proceso aleatorio *autoregresivo* (AR *autoregressive*). Si N y M son distintos de cero, $y[n]$ es un proceso aleatorio lineal *autoregresivo de promediado móvil* (ARMA, *Autoregressive Moving-Average*).

(a) Exprese la autocorrelación de $y[n]$ en función de la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema lineal.

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para expresar la densidad espectral de potencia de $y[n]$ en función de la respuesta en frecuencia del sistema.

(c) Demuestre que la secuencia de autocorrelación $\phi_{yy}[m]$ de un proceso MA es distinta de cero sólo en el intervalo $|m| \leq M$.

(d) Obtenga una expresión general de la secuencia de autocorrelación de un proceso AR.

(e) Demuestre que si $b_0 = 1$, la función de autocorrelación de un proceso AR satisface la ecuación en diferencias

$$\phi_{yy}[0] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[k] + \sigma_x^2,$$

$$\phi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k], \qquad m \geq 1.$$

(f) Utilice el resultado del apartado (e) y la simetría de $\phi_{yy}[m]$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[|m-k|] = \phi_{yy}[m], \qquad m = 1, 2, \ldots, N.$$

Se puede demostrar que, dado $\phi_{yy}[m]$ para $m = 0, 1, \ldots, N$, siempre se puede obtener una solución única para los valores del modelo de proceso aleatorio, a_ks y σ_x^2. Estos valores se pueden utilizar en el resultado del apartado (b) para obtener una expresión de la densidad espectral de potencia de $y[n]$. Este planteamiento es la base de varias técnicas de estimación espectral paramétrica (para una profundización en estos métodos, véanse Gardner, 1988, Kay, 1988 y Marple, 1987).

10.48. Este problema ilustra las bases de un procedimiento basado en la FFT para interpolar las muestras (obtenidas a una frecuencia que satisface el criterio de Nyquist) de una señal periódica en tiempo continuo. Sea

$$x_c(t) = \frac{1}{16} \sum_{k=-4}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jkt}$$

una señal periódica procesada por el sistema de la Figura P10.48.

(a) Dibuje la secuencia de 16 puntos $G[k]$.

(b) Especifique cómo se podría transformar $G[k]$ en una secuencia de 32 puntos $Q[k]$ de forma que la DFT inversa de 32 puntos de $Q[k]$ sea una secuencia

$$q[n] = \alpha x_c\left(\frac{n2\pi}{32}\right), \qquad 0 \le n \le 31,$$

para alguna constante α distinta de cero. No es necesario especificar el valor de α.

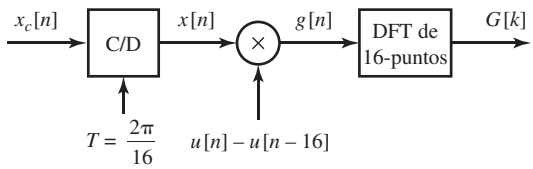


Figura P10.48

10.49. En muchas aplicaciones reales, las restricciones prácticas no permiten procesar secuencias temporales largas. Sin embargo, se puede obtener información significativa de una sección enventanada de una secuencia. En este problema se considera el cómputo de la transformada de Fourier de una señal de duración infinita $x[n]$, a partir de sólo un bloque de 256 muestras en el intervalo $0 \le n \le 255$. Se decide utilizar una DFT de 256 puntos para estimar dicha transformada. Se define entonces la señal

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le 255, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

y se calcula la DFT de 256 puntos de $\hat{x}[n]$.

(a) Suponga que la señal $x[n]$ procede de muestrear una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ con frecuencia de muestreo $f_s = 20$ kHz; es decir,

$$x[n] = x_c(nT_s), \quad 1/T_s = 20 \text{ kHz}.$$

Suponga que $x_c(t)$ es de banda limitada a 10 kHz. Si la DFT de $\hat{x}[n]$ se denomina $\hat{X}[k], k = 0, 1, \ldots, 255$, ¿cuáles son las frecuencias en tiempo continuo correspondientes a los índices de la DFT $k = 32$ y $k = 231$? Asegúrese de expresar sus respuestas en Hertzios.

(b) Exprese la transformada de Fourier en tiempo discreto de $\hat{x}[n]$ en función de la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ y la DFT de 256 puntos de la ventana rectangular $w_R[n]$. Utilice la notación $X(e^{j\omega})$ y $W_R(e^{j\omega})$ para indicar las transformadas de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ y $w_R[n]$, respectivamente.

(c) Suponga que se intenta una técnica basada en promediado para estimar la transformada para $k = 32$:

$$X_{\text{avg}}[32] = \alpha\hat{X}[31] + \hat{X}[32] + \alpha\hat{X}[33].$$

Promediar de esta forma es equivalente a multiplicar la señal $\hat{x}[n]$ por una nueva ventana $w_{\text{avg}}[n]$ antes de calcular la DFT. Demuestre que $W_{\text{avg}}(e^{j\omega})$ debe satisfacer

$$W_{\text{avg}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega = 0, \\ \alpha, & \omega = \pm 2\pi/L, \\ 0, & \omega = 2\pi k/L, \quad \text{for } k = 2, 3, \ldots, L-2, \end{cases}$$

donde $L = 256$.

(d) Demuestre que la transformada de Fourier en tiempo discreto de esta nueva ventana se puede expresar en función de $W_R(e^{j\omega})$ y de dos versiones desplazadas de $W_R(e^{j\omega})$.

(e) Obtenga una fórmula simple de $w_{\text{avg}}[n]$ y dibuje la ventana para $\alpha = -0{,}5$ y $0 \leq n \leq 255$.

10.50. A menudo es de interés ampliar una región de la DFT de una señal para examinarla con más detalle. En este problema se exploran dos algoritmos para realizar el proceso de obtener muestras adicionales de $X(e^{j\omega})$ en una región de frecuencia de interés.

Suponga que $X_N[k]$ es la DFT de N puntos de una señal de longitud finita $x[n]$. Recuérdese que $X_N[k]$ son muestras de $X(e^{j\omega})$ tomadas con una separación de $2\pi/N$ en ω. Dada $X_N[k]$, se desea calcular N muestras de $X(e^{j\omega})$ entre $\omega = \omega_c - \Delta\omega$ y $\omega = \omega_c + \Delta\omega$ separadas $2\Delta\omega/N$, donde

$$\omega_c = \frac{2\pi k_c}{N} \quad \text{y} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi k_\Delta}{N}.$$

Esto es equivalente a realizar una ampliación de $X(e^{j\omega})$ en la región $\omega_c - \Delta\omega < \omega < \omega_c + \Delta\omega$. Un sistema utilizado para realizar esta ampliación es el que se muestra en la Figura P10.50-1. Suponga que $x_z[n]$ se rellena con los suficientes ceros antes de calcular la DFT de N puntos y que $h[n]$ es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\Delta\omega$.

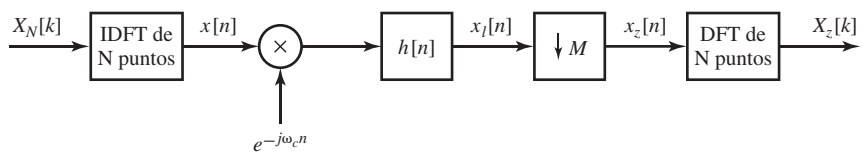


Figura P10.50-1

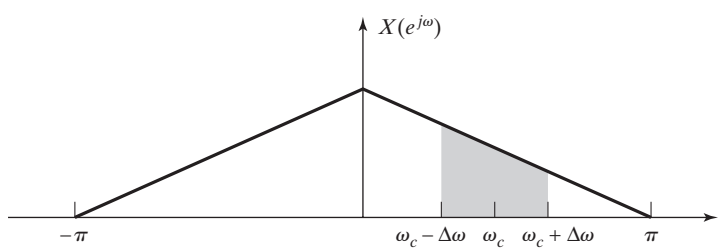


Figura P10.50-2

(a) En función de k_Δ y de la longitud de la transformada N, ¿cuál es el máximo valor de M (posiblemente no entero) que se puede usar si se desea evitar el solapamiento en el sistema de submuestreo?

(b) Considere la señal $x[n]$ con la transformada de Fourier que se muestra en la Figura P10.50-2. Utilizando el valor máximo de M obtenido en el apartado (a), dibuje las transformadas de Fourier de las señales intermedias $x_\ell[n]$ y $x_z[n]$ cuando $\omega_c = \pi/2$ y $\Delta\omega = \pi/6$. Demuestre que el sistema proporciona las muestras en frecuencia deseadas.

Otro procedimiento para obtener las muestras deseadas se puede plantear si se ve la secuencia $X_N[k]$ indexada en k como una secuencia en tiempo discreto que se va a procesar como se muestra en la Figura P10.50-3. La respuesta al impulso del primer sistema es

$$p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n + rN],$$

y la respuesta en frecuencia del filtro $h[n]$ es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/M, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

La señal de salida ampliada se define como

$$X_z[n] = \tilde{X}_{NM}[Mk_c - Mk_\Delta + n], \quad 0 \le n \le N-1,$$

para los valores apropiados de k_c y k_Δ. Suponga en los siguientes apartados que k_Δ se escoge de forma que M sea entero.

(c) Suponga que el filtro paso bajo ideal $h[n]$ se aproxima mediante un filtro causal de fase lineal de tipo I de longitud 513 (distinto de cero para $0 \le n \le 512$). Indique qué muestras de $\tilde{X}_{NM}[n]$ proporcionan las muestras en frecuencia deseadas.

(d) Utilizando dibujos de un espectro típico de $X_N[k]$ y $X(e^{j\omega})$, demuestre que el sistema de la Figura P10.50-3 produce las muestras deseadas.

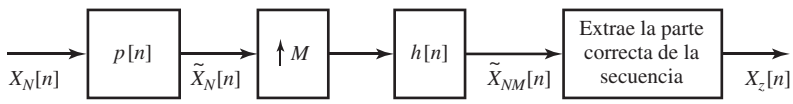
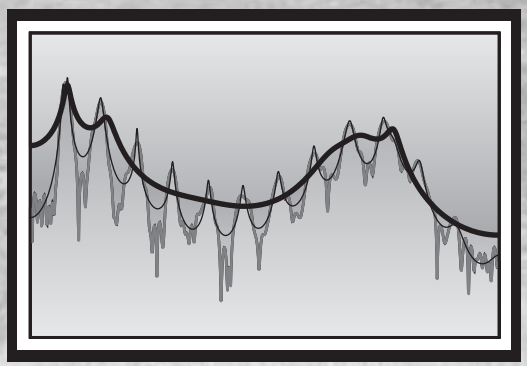


Figura P10.50-3

11

Modelado paramétrico de señales



11.0. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este texto, hemos presentado diversas representaciones de señales y sistemas. Por ejemplo, la representación de una señal en tiempo discreto como una secuencia de impulsos escalados se utilizó en la Ecuación (2.5) del Capítulo 2 para desarrollar la suma de convolución para sistemas lineales e invariantes con el tiempo. La representación en forma de combinación lineal de sinusoides y exponenciales complejas nos llevó al desarrollo en serie de Fourier, a la transformada de Fourier y a la caracterización en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Aunque estas representaciones son particularmente útiles a causa de su generalidad, no son siempre la representación más eficiente para señales con una estructura conocida.

Este capítulo presenta otro potente método de representación de señales denominado *modelado paramétrico de señales*. En este procedimiento, la señal se representa mediante un modelo matemático que tiene una estructura predefinida en la que interviene un número limitado de parámetros. Una señal dada $s[n]$ se representa eligiendo el conjunto concreto de parámetros que produce una salida del modelo $\hat{s}[n]$ lo más cercana posible en algún sentido determinado a dicha señal dada. Un ejemplo común es el modelado de de una señal como la salida de un sistema lineal en tiempo discreto como muestra la Figura 11.1. Estos modelos, que constan de la señal de entrada $v[n]$ y la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal, resultan útiles cuando se añaden restricciones que hacen posible la obtención de los parámetros de $H(z)$ dada la señal que se desea representar. Por ejemplo, si se especifica la entrada $v[n]$ y se supone que la función de transferencia es una función racional de la forma

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}, \tag{11.1}$$

entonces la señal queda modelada por los valores de los coeficientes a_k y b_k o, de forma equivalente, por los polos y los ceros de $H(z)$, junto con el conocimiento de la entrada. Generalmente, se su‘pone que la señal de entrada $v[n]$ es un impulso unidad $\delta[n]$ para señales deterministas, o ruido blanco si la

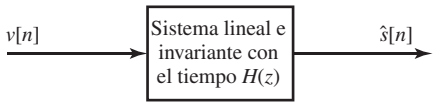


Figura 11.1 Modelo de una señal $s[n]$ basado en un sistema lineal.

señal $s[n]$ se considera aleatoria. Cuando el modelo se elige adecuadamente, es posible representar un gran número de muestras de señales utilizando un conjunto relativamente pequeño de parámetros.

El modelado paramétrico de señales tiene un amplio rango de aplicaciones, entre las que se incluyen la compresión de datos, el análisis espectral, la predicción de señales, la deconvolución, el diseño de filtros, la identificación de sistemas, la detección de señales y la clasificación de señales. Por ejemplo, en compresión de datos, lo que se transmite o almacena es el conjunto de parámetros del modelo, y el receptor utiliza el modelo con esos parámetros para regenerar la señal. En la aplicación de diseño de filtros, los parámetros del modelo se escogen para aproximar, en algún sentido, la respuesta en frecuencia deseada o, de forma equivalente, la respuesta al impulso deseada, y el modelo con esos parámetros corresponde al filtro diseñado. Los dos elementos clave para el éxito en todas las aplicaciones son una elección apropiada del modelo y una estimación precisa de sus parámetros.

11.1. MODELADO TODO POLOS DE SEÑALES

El modelo que representa la Ecuación (11.1) tiene en general polos y ceros. Aunque existen diversas técnicas para determinar el juego completo de coeficientes del numerador y del denominador de la Ecuación (11.11), los más útiles y más ampliamente utilizados se han concentrado en restringir el valor de q a cero y, en ese caso, $H(z)$ en la Figura 11.1 tiene la forma

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} = \frac{G}{A(z)}, \tag{11.2}$$

donde se ha sustituido el parámetro b_0 por el parámetro G para resaltar su papel como factor de ganancia global. Estos modelos se denominan acertadamente modelos "todo polos".[1] Dada su naturaleza, podría esperarse que un modelo todo polos sólo sirviera para modelar señales de duración infinita. Aunque esto puede ser cierto en sentido teórico, seleccionar esta forma de función de transferencia del modelo funciona bien en señales que aparecen en muchas aplicaciones, y como veremos, los parámetros se pueden calcular de forma directa partiendo de segmentos de duración finita de la señal dada.

La entrada y salida del sistema todo polos de la Ecuación (11.2) satisfacen la ecuación en diferencias de coeficientes constantes

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k \hat{s}[n-k] + Gv[n], \tag{11.3}$$

lo que indica que la salida del modelo en el instante n está formada por una combinación lineal de las muestras anteriores más una muestra de entrada escalada. Como veremos, esta estructura sugiere que el modelo todo polos es equivalente al supuesto de que la señal se puede aproximar mediante una combinación lineal de (o, de forma equivalente, es linealmente predecible a partir de) sus valores anteriores.

[1] En Kay (1988), Thierrien (1992), Hayes (1996) y Stoica y Moses (2005) se pueden encontrar exposiciones detalladas de este caso y del caso polo/cero general.

En consecuencia, este método de modelado de señales se denomina a menudo *análisis predictivo lineal* o *predicción lineal.*[2]

11.1.1. Aproximación por mínimos cuadrados

El objetivo del modelado todo polos es escoger la señal de entrada $v[n]$ y los parámetros G y $a_1,\ldots,a_p$ de la Ecuación (11.3) tales que $\hat{s}[n]$ es una aproximación en algún sentido a $s[n]$, la señal que se va a modelar. Si, como es en general el caso, $v[n]$ se especifica previamente (por ejemplo, $v[n]=\delta[n]$), un procedimiento directo para determinar los valores óptimos de los parámetros sería minimizar la energía total de la señal de error $e_{se}[n]=(s[n]-\hat{s}[n])$, obteniéndose así una aproximación por mínimos cuadrados a $s[n]$. Concretamente, para el caso de señales deterministas, los parámetros del modelo se pueden escoger de forma que minimicen el error cuadrático total

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(s[n]-\hat{s}[n])^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(s[n]-\sum_{k=1}^{p}a_k\hat{s}[n-k]-Gv[n]\right)^2. \tag{11.4}$$

En principio, los coeficientes a_k que minimizan este error cuadrático se pueden obtener diferenciando la expresión de la Ecuación (11.4) con respecto a cada parámetro, igualando la derivada a cero y resolviendo las ecuaciones resultantes. Sin embargo, esto produce un conjunto de ecuaciones no lineales, cuya solución es, en general, computacionalmente difícil. Aunque este problema de mínimos cuadrados es demasiado difícil en la mayoría de las aplicaciones prácticas, el principio básico de los mínimos cuadrados se puede aplicar a formulaciones ligeramente diferentes.

11.1.2. Modelo inverso de mínimos cuadrados

Una formulación basada en el filtrado inverso proporciona una solución relativamente directa y tratable para obtener los valores de los parámetros del modelo todo polos. En cualquier planteamiento de aproximación, se acepta de entrada que, en la mayoría de los casos, la salida del modelo no será exactamente igual a la señal que está siendo modelada. El procedimiento del filtrado inverso se basa en reconocer que si la señal $s[n]$ es realmente la salida del filtro $H(z)$ en el modelo de la Figura 11.1, entonces cuando $s[n]$ es la entrada al filtro inverso de $H(z)$, la salida será $v[n]$. En consecuencia, como se muestra en la Figura 11.2 y suponiendo que $H(z)$ es un sistema todo polos como se especifica en la Ecuación (11.2), el filtro inverso, cuya función de transferencia es

$$A(z)=1-\sum_{k=1}^{p}a_kz^{-k}, \tag{11.5}$$

se puede ver de forma que su salida $g[n]$ será igual a la entrada escalada $Gv[n]$. En esta formulación, entonces, escogeremos los parámetros del filtro inverso (y por tanto, implícitamente, los parámetros del modelo de sistema) de forma que se minimice el error cuadrático medio entre $g[n]$ y $Gv[n]$. Como veremos, esto conduce a un conjunto de ecuaciones lineales con buen comportamiento.

A partir de la Figura 11.2 y de la Ecuación (11.5) se deduce que $g[n]$ y $s[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$g[n]=s[n]-\sum_{k=1}^{p}a_ks[n-k]. \tag{11.6}$$

[2]Cuando se utiliza en el contexto de predicción de voz, el análisis predictivo lineal se denomina a menudo *codificación predictiva lineal* (LPC, *Linear Predictive Coding*). (Véanse Rabner y Schafer, 1978 y Quatieri, 2002.)

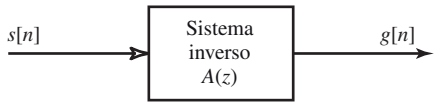


Figura 11.2 Formulación de filtro inverso para el modelado todo polos de una señal.

El error de modelado $\hat{e}[n]$ se define ahora como

$$\hat{e}[n] = g[n] - Gv[n] = s[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k] - Gv[n]. \tag{11.7}$$

Si $v[n]$ es un impulso, entonces, para $n > 0$, el error $\hat{e}[n]$ corresponde al error entre $s[n]$ y la predicción lineal de $s[n]$ utilizando los parámetros del modelo. Por tanto, es conveniente expresar también la Ecuación (11.7) como

$$\hat{e}[n] = e[n] - Gv[n], \tag{11.8}$$

siendo $e[n]$ el error de predicción dado por

$$e[n] = s[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k]. \tag{11.9}$$

Si una señal se ajusta de forma exacta al modelo de todo polos de la Ecuación (11.3), el error de modelado $\hat{e}[n]$ será cero y el error de predicción $e[n]$ será la entrada escalada, es decir,

$$e[n] = Gv[n]. \tag{11.10}$$

Esta formulación en función del filtrado inverso conduce a una considerable simplificación, ya que $v[n]$ se supone conocida y $e[n]$ se puede calcular a partir de $s[n]$ utilizando la Ecuación (11.9). Los valores de los parámetros a_k se calculan entonces de forma que se minimice

$$\mathscr{E} = \left\langle |\hat{e}[n]|^2 \right\rangle, \tag{11.11}$$

donde la notación $\langle \cdot \rangle$ indica la operación de suma para señales deterministas de energía finita y la operación de promediado sobre el conjunto para señales aleatorias. La minimización de $\mathscr{E}$ en la Ecuación (11.11) produce un filtro inverso que minimiza la energía total del error de modelado en el caso de señales deterministas o el valor cuadrático medio del error de modelado en el caso de señales aleatorias. Por conveniencia, denominaremos frecuentemente al operador $\langle \cdot \rangle$ operador de promediado, donde su interpretación como suma o promediado sobre un conjunto debe quedar clara a partir del contexto donde se aplique. Nótese de nuevo que al calcular los parámetros a_k especificando el sistema inverso del a Figura 11.2, el sistema todo polos está también especificado implícitamente.

Para obtener los valores óptimos de los parámetros, se sustituye la Ecuación (11.8) en la Ecuación (11.11) con lo que se obtiene

$$\mathscr{E} = \left\langle (e[n] - Gv[n])^2 \right\rangle, \tag{11.12}$$

o, de forma equivalente,

$$\mathscr{E} = \left\langle e^2[n] \right\rangle + G^2 \left\langle v^2[n] \right\rangle - 2G \left\langle v[n]e[n] \right\rangle. \tag{11.13}$$

Para obtener los parámetros que minimizan $\mathscr{E}$, diferenciamos la Ecuación (11.12) con respecto al i-ésimo coeficiente del filtro a_i e igualamos a cero la derivada, lo que conduce al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\left\langle e^2[n] \right\rangle - 2G \left\langle v[n]s[n-i] \right\rangle \right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{11.14}$$

donde hemos supuesto que G es independiente de a_i y, por supuesto, también lo es $v[n]$, y en consecuencia, que

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left[G^2\left\langle v^2[n]\right\rangle\right]=0. \tag{11.15}$$

Para los modelos de nuestro interés, $v[n]$ será un impulso si $s[n]$ es una señal causal de energía finita y será ruido blanco si $s[n]$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio. Cuando $v[n]$ es un impulso y $s[n]$ es cero para $n<0$, el producto $v[n]s[n-i]=0$ será cero para $i=1,2,\ldots p$. Cuando $v[n]$ es ruido blanco,

$$\langle v[n]s[n-i]\rangle=0, \qquad i=1,2,\ldots p, \tag{11.16}$$

ya que para cualquier valor de n, la entrada de un sistema causal, cuando ésta es ruido blanco, está incorrelada con los valores de la salida previos al instante n. Por tanto, en ambos casos, la Ecuación (11.14) se reduce a

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_i}=\frac{\partial}{\partial a_i}\left\langle e^2[n]\right\rangle=0 \quad i=1,2,,\ldots,p \tag{11.17}$$

En otras palabras, calcular el conjunto de coeficientes que minimizan el valor cuadrático medio del error de modelado $\left\langle \hat{e}^2[n]\right\rangle$ es equivalente a minimizar el valor cuadrático medio de error de predicción $\left\langle e^2[n]\right\rangle$. Desarrollando la Ecuación (11.17) y teniendo en cuenta la linealidad del operador de promediado, se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\langle s[n]s[n-i]\rangle-\sum_{k=1}^{p}a_k\langle s[n-k]s[n-i]\rangle=0, \quad i=1,\ldots,p. \tag{11.18}$$

Definiendo

$$\phi_{ss}[i,k]=\langle s[n-i]s[n-k]\rangle, \tag{11.19}$$

las Ecuaciones (11.18) se pueden expresar de forma más compacta como

$$\sum_{k=1}^{p}a_k\phi_{ss}[i,k]=\phi_{ss}[i,0], \quad i=1,2,\ldots,p. \tag{11.20}$$

Las Ecuaciones (11.20) forman un sistema de p ecuaciones con p incógnitas. El cálculo de los parámetros del modelo se puede realizar resolviendo dicho sistema para obtener los parámetros a_k para $k=1,2,\ldots,p$, utilizando los valores conocidos de $\phi_{ss}[i,k]$ para $i=1,2,\ldots,p$ y $k=0,1,\ldots,p$ o calculándolos primero a partir de $s[n]$.

11.1.3. Formulación de predicción lineal del modelado todo polos

Como sugerimos anteriormente, una interpretación alternativa y útil del modelado de señales todo polos surge de la interpretación de la Ecuación (11.3) como predicción lineal de la salida en términos de los valores anteriores, siendo el error de predicción $e[n]$ la entrada escalada $Gv[n]$, es decir,

$$e[n]=s[n]-\sum_{k=1}^{p}a_ks[n-k]=Gv[n]. \tag{11.21}$$

Como indica la Ecuación (11.17), minimizar el error de modelado inverso $\mathscr{E}$ en la Ecuación (11.11) es equivalente a minimizar el error de predicción promediado $\left\langle e^2[n]\right\rangle$. Si la señal $s[n]$ fuera producida

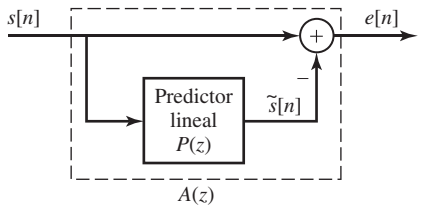


Figura 11.3 Formulación de predicción lineal para el modelado todo polos de una señal.

por el sistema modelo, si $v[n]$ es un impulso y si $s[n]$ se ajusta verdaderamente al modelo todo polos, entonces la señal en cualquier instante $n > 0$ es linealmente predecible a partir de sus valores pasados, es decir, el error de predicción es cero. Si $v[n]$ es ruido blanco, entonces el error de predicción es también blanco.

La interpretación en términos de predicción se muestra en la Figura 11.3, donde la función de transferencia $P(z)$ del filtro de predicción es

$$P(z) = \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}. \tag{11.22}$$

Este sistema se denomina *predictor lineal* de orden p-ésimo de la señal $s[n]$. Su salida es

$$\tilde{s}[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k], \tag{11.23}$$

y como muestra la Figura 11.3, la señal de error de predicción es $e[n] = s[n] - \tilde{s}[n]$. La secuencia $e[n]$ representa la cantidad en la que falla el predictor lineal para predecir exactamente la señal $s[n]$. Por este motivo, $e[n]$ se denomina también a veces *error de predicción residual* o simplemente *residuo*. Bajo este punto de vista, los coeficientes a_k se denominan *coeficientes de predicción*. Como también se muestra en la Figura 11.3, el filtro de error de se relaciona con el predictor lineal de la siguiente forma

$$A(z) = 1 - P(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}. \tag{11.24}$$

11.2. MODELOS DE SEÑALES DETERMINISTAS Y ALEATORIOS

Para utilizar el filtro inverso óptimo o, equivalentemente, el predictor lineal óptimo como base del modelado paramétrico de señales, es necesario ser más concretos sobre la entrada $v[n]$ asumida y sobre el método de cálculo del operador de promediado $\langle\cdot\rangle$. Con este fin, consideraremos de forma separada el caso de señales deterministas y de señales aleatorias. En ambos casos, utilizaremos operaciones de promediado que suponen conocimiento de la señal que se modela en todo el eje temporal $-\infty < n < \infty$. En la Sección 11.3, comentaremos algunas consideraciones prácticas que aparecen cuando sólo se dispone de un segmento finito de la señal $s[n]$.

11.2.1. Modelado todo polos de señales deterministas de energía finita

En esta sección, supondremos un modelo todo polos causal y estable y supondremos también que tanto la entrada $v[n]$ como la señal $s[n]$ que se va a modelar son cero para $n < 0$. Además, asumiremos que

$s[n]$ tiene energía finita y se sabe que es para todo $n \geq 0$. Escogeremos el operador $\langle\cdot\rangle$ de la Ecuación (11.11) como la energía total de la secuencia de error de modelado $\hat{e}[n]$, es decir,

$$\mathscr{E} = \left\langle |\hat{e}[n]|^2 \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{e}[n]|^2. \tag{11.25}$$

Con esta definición de operador de promediado, $\phi_{ss}[i,k]$ en la Ecuación (11.19) es

$$\phi_{ss}[i,k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n-i]s[n-k], \tag{11.26}$$

y, de forma equivalente,

$$\phi_{ss}[i,k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s[n-(i-k)]. \tag{11.27}$$

Los coeficientes $\phi_{ss}[i,k]$ de la Ecuación (11.20) son ahora

$$\phi_{ss}[i,k] = r_{ss}[i-k], \tag{11.28}$$

donde para señales reales $s[n]$, $r_{ss}[m]$ es la secuencia de autocorrelación determinista

$$r_{ss}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n+m]s[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s[n-m]. \tag{11.29}$$

Por tanto, la Ecuación (11.20) toma la forma

$$\sum_{k=1}^{p} a_k r_{ss}[i-k] = r_{ss}[i] \qquad i = 1,2,\ldots,p. \tag{11.30}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones normales de la autocorrelación* y también *ecuaciones de Yule-Walker*. Proporcionan la base para calcular los parámetros $a_1,\ldots,a_p$ a partir de la función de autocorrelación de la señal. En la Sección 11.2.5 veremos un procedimiento para calcular el factor de ganancia G.

11.2.2. Modelado de señales aleatorias

Para el modelado todo polos de señales aleatorias estacionarias en sentido amplio y de media cero, supondremos que la entrada al modelo todo polos es ruido blanco de media cero y varianza unidad como se indica en la Figura 11.4. La ecuación en diferencias de este sistema es

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k \hat{s}[n-k] + Gw[n], \tag{11.31}$$

donde la entrada tiene función de autocorrelación $E\{w[n+m]w[n]\} = \delta[m]$, media cero ($E\{w[n]\} = 0$) y potencia media unidad ($E\{(w[n])^2\} = \delta[0] = 1$), y $E\{\cdot\}$ representa el operador esperanza o promediado en probabilidad.[3]

[3]El cálculo $E\{\cdot\}$ requiere conocer las densidades de probabilidad. En el caso de señales aleatorias estacionarias, sólo se necesita una densidad. En el caso de procesos aleatorios ergódicos, se puede utilizar un solo promediado temporal infinito. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, estos promedios se deben aproximar mediante estimaciones obtenidas de promedios temporales finitos.

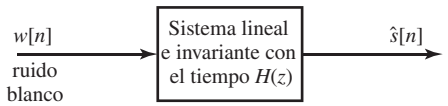


Figura 11.4 Modelo de sistema lineal para una señal aleatoria $s[n]$.

El modelo de análisis resultante es el mismo que el que se muestra en la Figura 11.2, pero la salida deseada $g[n]$ cambia. En el caso de señales aleatorias, deseamos que $g[n]$ se parezca a ruido blanco tanto como sea posible, en vez de a la secuencia impulso unidad que se deseaba en el caso determinista. Por esta razón, el filtro inverso óptimo para señales aleatorias se denomina a menudo *filtro blanqueador*.

Escogeremos también el operador $\langle\cdot\rangle$ de la Ecuación (11.11) de la forma apropiada para el caso de señales aleatorias, concretamente como el valor cuadrático medio o, equivalentemente, la potencia media. Entonces, la Ecuación (11.11) se convierte en

$$\mathscr{E} = E\{(\hat{e}[n])^2\}. \tag{11.32}$$

Si se supone que $s[n]$ es una muestra de un proceso aleatorio estacionario, entonces $\phi_{ss}[i,k]$ en la Ecuación (11.19) será la función de autocorrelación

$$\phi_{ss}[i,k] = E\{s[n-i]s[n-k]\} = r_{ss}[i-k]. \tag{11.33}$$

Los coeficientes del sistema se pueden obtener como antes a partir de la Ecuación (11.20). Por tanto, dichos coeficientes satisfacen un sistema de ecuaciones con la misma forma que la Ecuación (11.30), es decir,

$$\sum_{k=1}^{p} a_k r_{ss}[i-k] = r_{ss}[i], \quad i = 1,2,\ldots,p. \tag{11.34}$$

Así, el modelado de señales aleatorias lleva de nuevo a las ecuaciones de Yule–Walker, y en este caso la función de autocorrelación se define mediante el promediad probabilístico

$$r_{ss}[m] = E\{s[n+m]s[n]\} = E\{s[n]s[n-m]\}. \tag{11.35}$$

11.2.3. Error cuadrático medio mínimo

Para el modelado, bien de señales deterministas (Sección 11.2.1) o de señales aleatorias (Sección 11.2.2), el valor mínimo del error de predicción $e[n]$ de la Figura 11.3 se puede expresar, para obtener los coeficientes óptimos del predictor, en función de los correspondientes valores de la correlación en la Ecuación (11.20). Para ver cómo, escribamos $\mathscr{E}$ como

$$\mathscr{E} = \left\langle \left(s[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k] \right)^2 \right\rangle. \tag{11.36}$$

Como se planteará con más detalle en el Problema 11.2, si se desarrolla la Ecuación (11.20), y se sustituye la Ecuación (11.20) en el resultado, se deduce que en general,

$$\mathscr{E} = \phi_{ss}[0,0] - \sum_{k=1}^{p} a_k \phi_{ss}[0,k]. \tag{11.37}$$

La Ecuación (11.37) se cumple para cualquier selección adecuada del operador de promediado. En particular, en las definiciones de promediado en las que $\phi_{ss}[i,k] = r_{ss}[i-k]$, la Ecuación (11.37) se convierte en

$$\mathscr{E} = r_{ss}[0] - \sum_{k=1}^{p} a_k r_{ss}[k]. \tag{11.38}$$

11.2.4. Propiedad de ajuste de la autocorrelación

Una importante y útil propiedad del modelo todo polos que surge de la solución de la Ecuación (11.30) para señales deterministas y de la Ecuación (11.34) para señales aleatorias se denomina propiedad de ajuste de la autocorrelación (Makhoul, 1973). Las Ecuaciones (11.30) y (11.34) representan un conjunto de p ecuaciones de las que se pueden obtener los parámetros del modelo a_k para $k = 1, \ldots, p$. Los coeficientes de estas ecuaciones en los dos miembros de las mismas están formados por los $(p+1)$ valores de la correlación $r_{ss}[m]$, $m = 0, 1, \ldots, p$, con la función de correlación definida apropiadamente, dependiendo de si la señal que se modela es determinista o aleatoria.

La base para verificar la propiedad de ajuste de la autocorrelación es observar que, obviamente, la señal $\hat{s}[n]$ se ajusta al modelo cuando el modelo del sistema $H(z)$ en la Figura 1.1 se especifica como el sistema todo polos de la Ecuación (11.2). Si consideráramos aplicar de nuevo el modelado todo polos a $\hat{s}[n]$ obtendríamos por supuesto las Ecuaciones (11.30) o (11.34), pero esta vez con $r_{\hat{s}\hat{s}}[m]$ en vez de $r_{ss}[m]$. La solución debe ser entonces el mismo conjunto de parámetros a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, ya que $\hat{s}[n]$ se ajusta al modelo, y esta será en efecto la solución resultante si

$$r_{ss}[m] = c r_{\hat{s}\hat{s}}[m] \quad 0 \leq m \leq p, \tag{11.39}$$

siendo c una constante cualquiera. La igualdad de la Ecuación (11.39) surge de la forma de la solución recursiva de las ecuaciones de Yule–Walker, que se verá en la Sección 11.6. En otras palabras, las ecuaciones normales de la autocorrelación requieren que en los intervalos $|m| = 0, 1, \ldots, p$, las funciones de autocorrelación de la salida del modelo y de la señal modelada sean proporcionales.

11.2.5. Determinación del parámetro de ganancia G

Con el procedimiento que hemos seguido, la determinación de los valores óptimos de los coeficientes a_k del modelo no depende de la ganancia del sistema G. Desde la perspectiva de la formulación basada en el filtro inverso de la Figura 11.2, una posibilidad es elegir G para que se cumpla que $\langle (\hat{s}[n])^2 \rangle = \langle (s[n])^2 \rangle$. Para el caso de señales deterministas de energía finita, esto corresponde a igualar la energía total de la salida del modelo a la energía total de la señal modelada. Para señales aleatorias, lo que se iguala es la potencia media. En ambos casos, esto corresponde a elegir G de forma que $r_{\hat{s}\hat{s}}[0] = r_{ss}[0]$. En este caso, el factor de proporcionalidad c de la Ecuación (11.39) es la unidad.

Ejemplo 11.1 Sistema de primer orden

La Figura 11.5 muestra dos señales. Ambas son salidas de un sistema de primer orden con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}. \tag{11.40}$$

La señal $s_d[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$ es la salida cuando la entrada es un impulso unidad $\delta[n]$ y la señal $s_r[n]$ es la salida cuando la entrada al sistema es una secuencia de ruido blanco de media cero y varianza unidad. Ambas señales se extienden en el intervalo $-\infty < n < \infty$, como muestra la Figura 11.5.

La función de autocorrelación de la señal $s_d[n]$ es

$$r_{s_d s_d}[m] = r_{hh}[m] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+m} \alpha^n = \frac{\alpha^{|m|}}{1 - \alpha^2}, \tag{11.41}$$

que es también la función de autocorrelación de $s_r[n]$ ya que $s_r[n]$ es la respuesta del sistema a ruido blanco, y la función de autocorrelación del ruido blanco es un impulso unidad.

Como ambas señales se han generado con un sistema todo polos de primer orden, un modelo todo polos de primer orden se ajustará de forma exacta. En el caso determinista, la salida del filtro inverso óptimo será una secuencia de ruido blanco de media cero y de potencia media unidad. Para demostrar que el filtro inverso óptimo será exacto, nótese que en un modelo de primer orden, las Ecuaciones (11.30) o (11.34) se reducen a

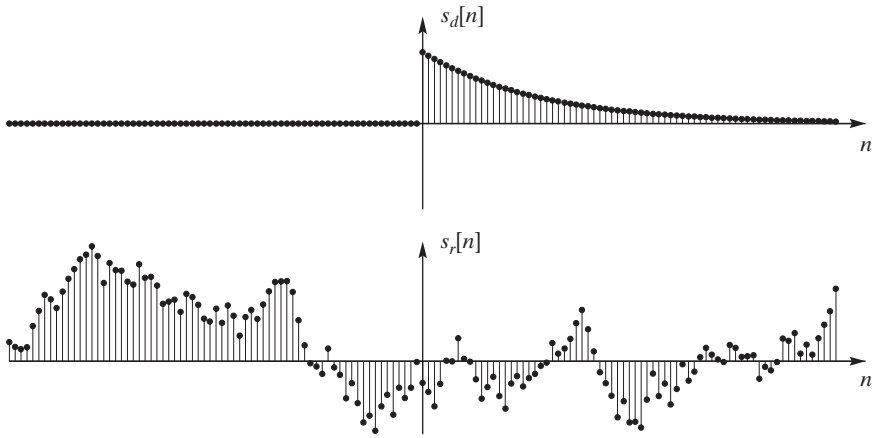


Figura 11.5 Ejemplos de salida determinista y de salida aleatoria de un sistema todo polos de primer orden.

$$r_{s_d s_d}[0]a_1 = r_{s_d s_d}[1], \tag{11.42}$$

por lo que, de la Ecuación (11.41), se deduce que el coeficiente predictor óptimo tanto para el caso de señal determinista como de señal aleatoria es

$$a_1 = \frac{r_{s_d s_d}[1]}{r_{s_d s_d}[0]} = \frac{\dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}}{\dfrac{1}{1-\alpha^2}} = \alpha. \tag{11.43}$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (11.38), el mínimo error cuadrático medio es

$$\mathscr{E} = \frac{1}{1-\alpha^2} - a_1 \frac{\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2} = 1, \tag{11.44}$$

que es la amplitud del impulso unidad en el caso determinista y la potencia media de la secuencia de ruido blanco en el caso aleatorio.

Como se mencionó anteriormente, y resulta claro en este ejemplo, cuando la señal se genera mediante un sistema todo polos excitado por un impulso o por ruido blanco, el modelado todo polos es capaz de determinar de forma exacta los parámetros del sistema todo polos. Esto requiere el conocimiento previo del orden del modelo p y de la función de autocorrelación. En este ejemplo ha sido posible obtenerlos, ya que existe una expresión cerrada de la suma infinita requerida para calcular la función de autocorrelación. En la práctica, en general es necesario estimar la función de autocorrelación a partir de un segmento de longitud finita de la señal dada. El Problema 11.14 considera el efecto de las estimaciones finitas de la autocorrelación (que se comentarán posteriormente) para la señal determinista $s_d[n]$ de esta sección.

11.3. ESTIMACIÓN DE LAS FUNCIONES DE CORRELACIÓN

Para utilizar los resultados de las Secciones 11.1 y 11.2 en el modelado de señales deterministas o aleatorias, se requiere un conocimiento *a priori* de las funciones de correlación $\phi_{ss}[i,k]$ necesarias para formar las ecuaciones de sistema satisfechas por los coeficientes a_k, o es necesario estimarlas a partir de la señal dada. Además, podemos desear aplicar procesado por bloques o técnicas de análisis de Fourier dependiente del tiempo para representar las propiedades de una señal no estacionaria, como la voz. En esta sección, explicaremos dos procedimientos distintos de cómputo de las estimaciones de la autocorrelación para la aplicación práctica de los conceptos del modelado paramétrico de señales. Estos dos procedimientos se conocen como *método de la autocorrelación* y *método de la covarianza*.

11.3.1. El método de la autocorrelación

Supongamos que tenemos disponible un conjunto de $M+1$ muestras de la señal $s[n]$ para $0 \leq n \leq M$, y deseamos calcular los coeficientes de un modelo todo polos. En el método de la autocorrelación, se supone que la señal se extiende en el intervalo $-\infty < n < \infty$, y las muestras de señal valen cero para todo n fuera del intervalo $0 \leq n \leq M$, incluso aunque se hayan extraído de una secuencia de mayor longitud. Esto, por supuesto, impone un límite a la exactitud que puede esperarse del modelo, ya que se utiliza la respuesta al impulso IIR de un modelo todo polos para modelar un segmento de longitud finita de $s[n]$.

Aunque no es necesario calcular explícitamente la secuencia de error de predicción para obtener los coeficientes del filtro, no obstante es informativo considerar su cómputo con algún detalle. La respuesta al impulso del filtro de error de predicción es, por la definición de $A(z)$, en la Ecuación (11.24),

$$h_A[n] = \delta[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k \delta[n-k]. \tag{11.45}$$

Puede verse que, como la señal $s[n]$ tiene una longitud finita de $M+1$ y $h_A[n]$, la respuesta al impulso del filtro de predicción $A[z]$, tiene una longitud de $p+1$, la secuencia de error de predicción $e[n] = h_A[n] * s[n]$ será siempre idénticamente cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq M+p$. La Figura 11.6 muestra un ejemplo de señal de error de predicción para un predictor lineal con $p = 5$. En la gráfica superior se muestra $h_A[n-m]$, la respuesta al impulso (invertida y desplazada) del filtro de error de predicción, en función de m para tres valores diferentes de n. Las líneas oscuras con puntos cuadrados representan $h_A[n-m]$, y las líneas más claras con puntos redondos muestran la secuencia $s[m]$ para $0 \leq m \leq 30$. En la parte izquierda está $h_A[0-m]$, que muestra que la primera muestra distinta de cero del error de predicción es $e[0] = s[0]$. Esto, por supuesto, es consistente con la Ecuación (11.9). En el extremo derecho está $h_A[M+p-m]$, que demuestra que la última muestra distinta de cero del error es $e[M+p] = -a_p s[M]$. La segunda gráfica de la Figura 11.6 muestra la señal de error $e[n]$ para $0 \leq n \leq M+p$. Desde el punto de vista de predicción lineal, se deduce que las primeras p muestras (líneas oscuras con puntos), son predichas utilizando muestras que se supone que valen cero. De forma similar, las muestras de la entrada para $n \geq M+1$ se supone que valen cero para obtener una señal de longitud finita. El predictor lineal intenta predecir esas muestras de valor cero en el intervalo $M+1 \leq n \leq M+p$ a partir de las muestras anteriores que son distintas de cero y parte de la señal original. De hecho, si $s[0] \neq 0$ y $s[M] \neq 0$, entonces será cierto que tanto $e[0] = s[0]$ como $e[M+p] = -a_p s[M]$ serán distintos de cero. Es decir, el error de predicción (error cuadrático total $\mathscr{E}$) nunca puede valer exactamente cero si se define que la señal vale cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq M$. Además, el error cuadrático total de predicción de un predictor de orden p sería

$$\mathscr{E}^{(p)} = \langle e[n]^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]^2 = \sum_{n=0}^{M+p} e[n]^2, \tag{11.46}$$

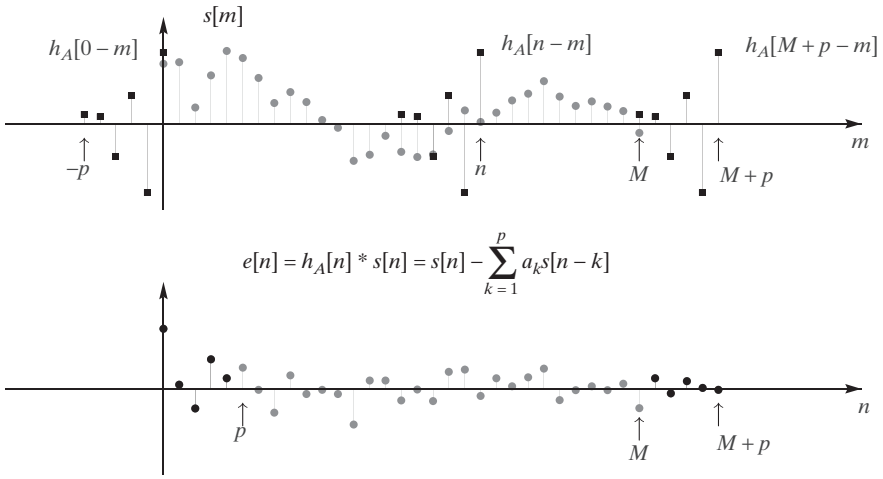


Figura 11.6 Ilustración (para $p = 5$) del cómputo del error de predicción por el método de la autocorrelación (los puntos cuadrados oscuros indican muestras de $h_A[n-m]$ y los puntos redondos más claros indican muestras de $s[m]$ en la gráfica superior y de $e[n]$ en la gráfica inferior).

es decir, los límites de la suma pueden ser infinitos por conveniencia, pero hablando en la práctica, son finitos.

Cuando se supone que la señal es idénticamente nula fuera del intervalo $0 \leq n \leq M$, la función de correlación $\phi_{ss}[i,k]$ se reduce a la función de autocorrelación $r_{ss}[m]$ donde los valores necesarios en la Ecuación (11.30) son para $m = |i-k|$. La Figura 11.7 muestra las secuencias desplazadas utilizadas en al cálculo de $r_{ss}[m]$ denotando $s[n]$ con puntos redondos y $s[n+m]$ con puntos cuadrados. Nótese que para una señal de longitud finita, el producto $s[n]s[n+m]$ sólo es distinto del cero en el intervalo $0 \leq n \leq M-m$ cuando $m \geq 0$. Como r_{ss} es una función par, es decir, $r_{ss}[-m] = r_{ss}[m] = r_{ss}[|m|]$ se deduce que los valores de la autocorrelación necesarios para las ecuaciones de Yule–Walker se pueden calcular así:

$$r_{ss}[|m|] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s[n+|m|] = \sum_{n=0}^{M-|m|} s[n]s[n+|m|]. \tag{11.47}$$

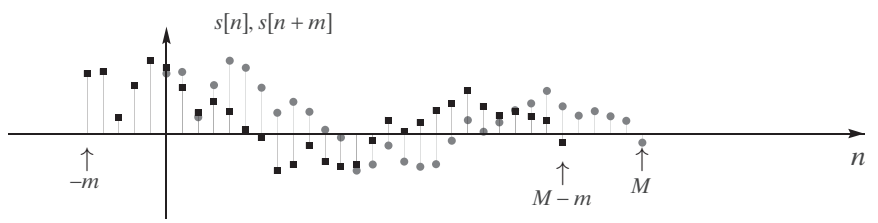


Figura 11.7 Ilustración del cómputo de la función de autocorrelación de una secuencia de longitud finita (los puntos cuadrados oscuros indican muestras de $s[n+m]$ y los puntos redondos más claros indican muestras de $s[n]$).

En el caso de la secuencia finita $s[n]$, la Ecuación (11.47) tiene todas las propiedades necesarias de una función de autocorrelación y $r_{ss}[m] = 0$ para $m > M$. Pero por supuesto $r_{ss}[m]$ no la misma función de autocorrelación de la secuencia de longitud infinita de la que se ha extraído el segmento.

La Ecuación (11.47) se puede utilizar para calcular estimaciones de la función de autocorrelación tanto para señales deterministas como aleatorias.[4] A menudo, la señal de entrada de longitud finita se extrae de una secuencia de muestras más larga. Este es el caso, por ejemplo, en aplicaciones como el tratamiento de voz, donde los segmentos sonoros (por ejemplo, los sonidos vocálicos) de voz se tratan como deterministas y los sonidos sordos (sonidos fricativos) se tratan como señales aleatorias.[5] De acuerdo con la presentación anterior, las primeras y últimas p muestras del error de predicción pueden ser grandes debido al intento de predecir muestras distintas de cero a partir de muestras que valen cero y de predecir muestras que valen cero con muestras distintas de cero. Como esto puede sesgar la estimación de los coeficientes del predictor, se aplica generalmente a la señal una ventana de suavizado en los bordes, como la ventana de Hamming, antes del cómputo de la función de autocorrelación.

11.3.2. El método de la covarianza

Una elección alternativa de operador de promediado para el error de predicción de un predictor de orden p es

$$\mathscr{E}_{\text{cov}}^{(p)} = \left\langle (e[n])^2 \right\rangle = \sum_{n=p}^{M} (e[n])^2. \tag{11.48}$$

Como en el método de la autocorrelación, el promediado se realiza sobre un intervalo finito ($p \leq n \leq M$), pero la diferencia es que la señal que se modela es conocida en el intervalo completo $0 \leq n \leq M$. El error cuadrático total de predicción sólo incluye valores de $e[n]$ que se pueden calcular con muestras dentro del intervalo $0 \leq n \leq M$. En consecuencia, el promediado tiene lugar en un intervalo más corto $p \leq n \leq M$. Esto es importante, ya que mitiga la inconsistencia entre al modelado todo polos y la señal de longitud finita.[6] En este caso, sólo buscamos ajustar la señal en un intervalo finito en vez de para todo n como en el método de la autocorrelación. La gráfica superior de la Figura 11.8 muestra la misma señal $s[m]$ que la gráfica superior de la Figura 11.6, pero en este caso, el error de predicción se calcula sólo en el intervalo $p \leq n \leq M$ tal como se necesita en la Ecuación (11.48). Como muestran las respuestas al impulso $h_A[n-m]$ del filtro de error de predicción de la gráfica superior, cuando el error de predicción se calcula de esta forma no existen efectos de bordes, ya que están disponibles todas las muestras de señal necesarias para calcular el error de predicción. Debido a esto, es posible que el error de predicción sea exactamente cero en el intervalo completo $p \leq n \leq M$, si la señal de la que se ha extraído el segmento de longitud finita se ha generado como la salida de un sistema todo polos. Viéndolo de otra forma, si $s[n]$ es la salida de un sistema todo polos con una entrada cero para $n > 0$, entonces, de acuerdo a las Ecuaciones (11.9) y (11.10), el error de predicción será cero para $n > 0$.

La función de covarianza hereda la misma definición del operador de promediado, es decir,

$$\phi_{ss}[i,k] = \sum_{n=p}^{M} s[n-i]s[n-k]. \tag{11.49}$$

[4]En la Sección 10.6 se demostró que, en el contexto de señales aleatorias, la Ecuación (11.47) es un estimador sesgado de la función de autocorrelación. Cuando $p \ll M$, como a menudo es el caso, el sesgo estadístico es generalmente despreciable.

[5]En ambos casos, se utiliza como estimador la función de correlación determinista de la Ecuación (11.47).

[6]Las definiciones de error cuadrático total de predicción de las Ecuaciones (11.48) y (11.46) son claramente diferentes, por lo que utilizaremos el subíndice $_{\text{cov}}$ para distinguirlas.

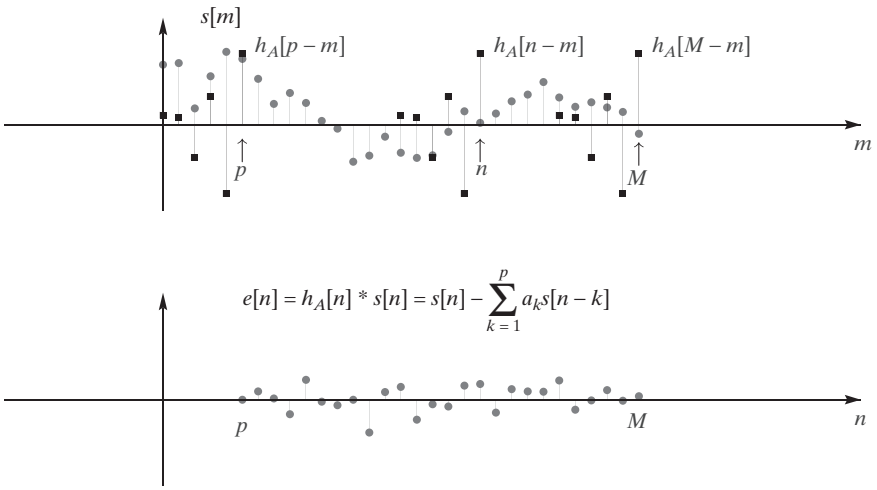


Figura 11.8 Ilustración (para $p = 5$) del cómputo del error de predicción por el método de la covarianza (en la gráfica superior, los puntos cuadrados oscuros indican muestras de $h_A[n-m]$ y los puntos redondos más claros indican muestras de $s[m]$).

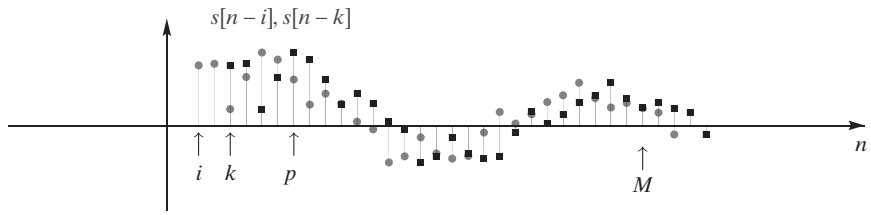


Figura 11.9 Ilustración del cómputo de la función de covarianza de una secuencia de longitud finita (los puntos cuadrados oscuros indican muestras de $s[n-k]$ y los puntos redondos más claros indican muestras de $s[n-i]$).

Las secuencias desplazadas $s[n-i]$ (líneas más claras y puntos redondos) y $s[n-k]$ (líneas más oscuras y puntos cuadrados) se muestran en la Figura 11.9. Esta figura muestra que, como sólo necesitamos $\phi_{ss}[i,k]$ para $i = 0,1,\ldots,p$ y para $k = 1,2,\ldots,p$, el segmento $s[n]$ para $0 \leq n \leq M$ contiene todas las muestras necesarias para calcular $\phi_{ss}[i,k]$ utilizando la Ecuación (11.49).

11.3.3. Comparación de métodos

Los métodos de la autocorrelación y la covarianza tiene muchas similitudes, pero también existen muchas diferencias importantes en dichos métodos y en los modelos todo polos resultantes. En esta sección, resumimos algunas de las diferencias que ya hemos demostrado y llamamos la atención sobre algunas otras.

Error de predicción

Tanto el error de predicción promediado $\langle e^2[n] \rangle$ como el error de predicción modelado $\langle \hat{e}^2[n] \rangle$ son no negativos y no crecientes al aumentar el orden del modelo p. En el método de la autocorrelación

basado en estimaciones obtenidas a partir de señales de longitud finita, los errores de predicción o de modelado nunca serán nulos, debido a que los valores de la autocorrelación no serán exactos. Además, el valor mínimo del error de predicción, incluso con un modelo exacto, es $Gv[n]$ como indica la Ecuación (11.10). En el método de la covarianza, el error de predicción para $n > 0$ puede ser exactamente cero si la señal original se generó con un modelo todo polos. Esto se demostrará en el Ejemplo 11.2.

Ecuaciones de los coeficientes del predictor

En ambos métodos, los coeficientes del predictor que minimizan el error de predicción promediado satisfacen en general un sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial como $\mathbf{\Phi a} = \psi$. Los coeficientes del modelo todo polos se obtienen invirtiendo la matriz Φ; es decir, $\mathbf{a} = \Phi^{-1}\psi$. En el método de la covarianza, los elementos $\phi_{ss}[i,k]$ de la matriz Φ los valores de la covarianza se convierten en valores de la autocorrelación, es decir, $\phi_{ss}[i,k] = r_{ss}[|i-k|]$ y se calculan utilizando la Ecuación (11.47). En ambos casos, la matriz Φ es simétrica y definida positiva, pero en el caso de la autocorrelación, la matriz Φ es también Toeplitz. Esto implica numerosas propiedades especiales de la solución, e implica que la solución de las ecuaciones se puede realizar de forma más eficiente de lo que sería en general. En la Sección 11.6 exploraremos algunas de estas implicaciones del método de la autocorrelación.

Estabilidad del sistema modelo

La función de transferencia del filtro de error de predicción $A(z)$ es un polinomio en z^{-1}. Por tanto, se puede representar en función de sus ceros como

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^{p}(1 - z_k z^{-1}). \tag{11.50}$$

En el método de la autocorrelación, se garantiza que los ceros del filtro de error de predicción $A(z)$ están estrictamente en el interior de la circunferencia unidad del plano z, es decir, $|z_k| < 1$. Esto significa que los polos de la función de transferencia causal $H(z) = G/A(z)$ del modelo están en el interior de la circunferencia unidad, lo qe implica que el sistema modelo es estable. En Lang y McClellan (1979) y McClellan (1988) se proporciona una demostración simple de esta afirmación. EL Problema 11.10 desarrolla una demostración que depende de la interpretación de filtro en celosía del sistema de error de predicción que se expondrá en la Sección 11.7.1. En el método de la covarianza, tal como lo hemos formulado, no existen garantías.

11.4. ORDEN DEL MODELO

Un aspecto importante en el modelado paramétrico de señales es el del orden del modelo p, cuya selección tiene un impacto importante en la exactitud del modelo. Un planteamiento habitual para escoger el valor de p es examinar el error de predicción promediado (denominado comúnmente residuo) para el modelo óptimo de orden p. Sean $a_k^{(p)}$ los parámetros del predictor óptimo de orden p, obtenidos utilizando la Ecuación (11.30). La energía del error de predicción para el modelo de orden p con el método de la autocorrelación es[7]

$$\mathscr{E}^{(p)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(s[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k^{(p)} s[n-k]\right)^2. \tag{11.51}$$

[7]Recuerde que $\mathscr{E}_{\text{cov}}^{(p)}$ indica el error cuadrático total de predicción obtenido mediante el método de la covarianza, y que utilizamos $\mathscr{E}^{(p)}$ sin subíndice para indicar el error cuadrático total de predicción obtenido mediante el método de la autocorrelación.

Para el predictor de orden cero, ($p = 0$), no hay términos de retardo en la Ecuación (11.51), es decir, el "predictor" es simplemente el sistema identidad, de forma que $e[n] = s[n]$. En consecuencia, para $p = 0$,

$$\mathscr{E}^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2[n] = r_{ss}[0]. \tag{11.52}$$

Dibujando el error cuadrático medio de predicción normalizado $\mathscr{V}^{(p)} = \mathscr{E}^{(p)}/\mathscr{E}^{(0)}$ en función de p, puede verse cómo al aumentar p se modifica la energía del error. En el método de la autocorrelación, demostramos que el error de predicción promediado nunca puede ser exactamente cero, incluso aunque la señal $s[n]$ hubiera sido generada con un sistema todo polos, y el orden del modelo es el orden del sistema de generación. Sin embargo, en el método de la covarianza, si el modelo todo polos es un modelo perfecto de la señal $s[n]$, $\mathscr{E}_{\text{cov}}^{(p)}$ será idénticamente nulo en la elección correcta de p, ya que el error de predicción promediado sólo considera valores para $p \leq n \leq M$. Incluso aunque $s[n]$ no se modele perfectamente mediante un sistema todo polos, existe frecuentemente un valor de p por encima del cual, incrementarlo tiene poco o ningún efecto sobre $\mathscr{V}^{(p)}$ o sobre $\mathscr{V}_{\text{cov}}^{(p)} = \mathscr{E}_{\text{cov}}^{(p)}/\mathscr{E}_{\text{cov}}^{(0)}$. Este umbral es una selección eficiente del orden del modelo que se debe utilizar para representar la señal mediante un modelo todo polos.

Ejemplo 11.2 Selección del orden del modelo

Para demostrar el efecto del orden del modelo, consideremos una señal $s[n]$ generada excitando un sistema de orden 10

$$H(z) = \frac{0{,}6}{\begin{aligned}(1 - 1{,}03z^{-1} + 0{,}79z^{-2} - 1{,}34z^{-3} + 0{,}78z^{-4} - 0{,}92z^{-5} \\ +1{,}22z^{-6} - 0{,}43z^{-7} + 0{,}6z^{-8} - 0{,}29z^{-9} - 0{,}23z^{-10})\end{aligned}} \tag{11.53}$$

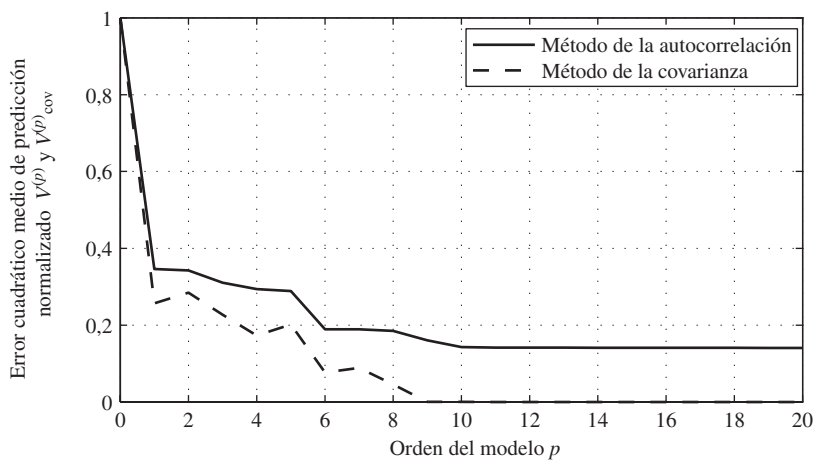


Figura 11.10 Error cuadrático medio de predicción normalizado $\mathbf{V}^{(p)}$ en función del orden del modelo p en el Ejemplo 11.2.

con un impulso $v[n] = \delta[n]$. En las gráficas superiores de las Figuras 11.6 y 11.8 se pueden ver los valores de las muestras de $s[n]$ para $0 \leq n \leq 30$. Esta señal va a ser modelada mediante un modelo todo polos mediante el método de la autocorrelación y el método de la covarianza. Utilizando las 31 muestras de

$s[n]$, se calcula los valores apropiados de la autocorrelación y de la covarianza, y después los coeficientes del predictor utilizando las Ecuaciones (11.30) y (11.34), respectivamente. Los errores cuadráticos medios de predicción normalizados se muestran en la Figura 11.10. Nótese que, tanto en el método de la autocorrelación como en el método de la covarianza, los errores disminuyen abruptamente en $p = 1$ y después disminuyen más lentamente a medida que p crece. En $p = 10$, el método de la covarianza produce un error de cero, mientras que el método de la autocorrelación produce un error promediado distinto de cero para $p \geq 10$. Esto es consistente con nuestra explicación del error de predicción en la Sección 11.3.

Aunque el Ejemplo 11.2 es una simulación ideal, es típico de la naturaleza general de la dependencia del error de predicción promediado en función de p cuando se aplica el modelado todo polos a señales muestreadas. La gráfica de $\mathscr{V}^{(p)}$ en función de p tiende a aplanarse en algún punto, y ese valor de p es a menudo seleccionado como el valor que se utilizará en el modelo. En aplicaciones como el análisis de voz, es posible elegir el orden del modelo basándose en modelos físicos de producción de la señal modelada (véase Rabiner y Schafer, 1978).

11.5. ANÁLISIS ESPECTRAL TODO POLOS

El modelado de señal todo polos proporciona un método de obtener estimaciones de alta resolución del espectro de una señal a partir de una ventana de datos truncados. El uso del modelado paramétrico de señales en análisis espectral se basa en el hecho de que si los datos se ajustan al modelo, entonces se puede utilizar un segmento finito de dichos datos para determinar los parámetros del modelo y, en consecuencia, también su espectro. Concretamente, en el caso determinista

$$|\hat{S}(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2 |V(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2 \tag{11.54}$$

dado que $|V(e^{j\omega})|^2 = 1$ para una excitación del sistema modelo en forma de un impulso unidad. Asimismo, en el caso de señales aleatorias, el espectro de potencia de la salida del modelo es

$$P_{\hat{s}\hat{s}}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 P_{ww}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2, \tag{11.55}$$

dado que $P_{ww}(e^{j\omega}) = 1$ en el caso de que la entrada sea ruido blanco. Por tanto, podemos obtener una estimación del espectro de una señal $s[n]$ calculando un modelo todo polos de la señal y obteniendo seguidamente el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del sistema modelo. Tanto para el caso determinista como para el aleatorio, el estimador del espectro toma la forma

$$\text{Estimador del espectro} = |H(e^{j\omega})|^2 = \left| \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}} \right|^2. \tag{11.56}$$

Para comprender mejor la naturaleza del estimador espectral de la Ecuación (11.56) en el caso determinista, es útil recordar que la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de longitud finita $s[n]$ es

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} s[n] e^{-j\omega n}. \tag{11.57}$$

Tenga en cuenta además que

$$r_{ss}[m] = \sum_{n=0}^{M-|m|} s[n+m]s[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S(e^{j\omega})|^2 e^{j\omega m} d\omega, \tag{11.58}$$

donde, debido a la longitud finita de $s[n]$, $r_{ss}[m] = 0$ para $|m| > M$. Los valores de $r_{ss}[m]$ para $m = 0, 1, 2, \ldots, p$ se utilizan en el cálculo del modelo todo polos mediante el método de la autocorrelación. Por consiguiente, es razonable suponer que existe una relación entre el espectro de Fourier de la señal, $|S(e^{j\omega})|^2$, y el espectro del modelo todo polos, $|\hat{S}(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2$.

Un planteamiento para iluminar esta relación es obtener una expresión del error de predicción promediado en función de la transformada de Fourier de la señal $s[n]$. Recuérdese que el error de predicción es $e[n] = h_A[n] * s[n]$, siendo $h_A[n]$ la respuesta al impulso del filtro de error de predicción. Utilizando el Teorema de Parseval, el error de predicción promediado es

$$\mathscr{E} = \sum_{n=0}^{M+p} (e[n])^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S(e^{j\omega})|^2 |A(e^{j\omega})|^2 d\omega, \tag{11.59}$$

siendo $S(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier en tiempo discreto de $s[n]$ dada por la Ecuación (11.57). Como $H(z) = G/A(z)$, la Ecuación (11.59) se puede expresar en función de $H(e^{j\omega})$ como

$$\mathscr{E} = \frac{G^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|S(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega})|^2} d\omega. \tag{11.60}$$

Como el integrando de la Ecuación (11.60) es positivo, y $|H(e^{j\omega})|^2 > 0$ para $-\pi < \omega \leq \pi$, se deduce por tanto a partir de dicha Ecuación (11.60) que minimizar $\mathscr{E}$ es equivalente a minimizar la razón entre la energía del espectro de la señal $s[n]$ y el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del sistema lineal en el modelo todo polos. La implicación de esto es que el espectro del modelo todo polos intentará ajustarse al espectro de energía de la señal en aquellas frecuencias donde el espectro de la señal sea grande, ya que las frecuencias en las que $|S(e^{j\omega})|^2 > |H(e^{j\omega})|^2$ contribuyen más al error cuadrático medio que las frecuencias donde ocurre lo contrario. Por tanto, el estimador del espectro del modelo todo polos favorece un buen ajuste alrededor de los picos del espectro de la señal. Esto se ilustrará en la explicación de la Sección 11.5.1. Un análisis y razonamiento similares aplican en el caso de que $s[n]$ sea aleatoria.

11.5.1. Análisis todo polos de señales de voz

El modelado todo polos se utiliza ampliamente en tratamiento de voz, tanto para codificación de voz, donde se utiliza a menudo el término de codificación predictiva lineal (LPC - *Linear Predictive Coding*) como para análisis espectral (véanse Atal y Hanauer, 1971, Makhoul, 1975, Rabiner y Schafer, 1978 y Quatieri, 2002). Para ilustrar muchas de las ideas que se presentan en este capítulo, presentaremos con algún detalle el uso del modelado todo polos para realizar análisis espectral de señales de voz. Este método se aplica generalmente de forma dependiente en el tiempo seleccionando periódicamente segmentos cortos de la señal de voz para su análisis, de manera muy similar a como se hace en el análisis mediante la transformada de Fourier dependiente del tiempo, que se expuso en la Sección 10.3. Como la transformada de Fourier dependiente del tiempo es esencialmente una secuencia de transformadas de Fourier en tiempo discreto de segmentos de longitud finita, la presentación realizada anteriormente sobre la relación entre la transformada de Fourier dependiente del tiempo y el espectro todo polos caracteriza asimismo la relación entre el análisis de Fourier dependiente del tiempo y el espectro todo polos dependiente del tiempo.

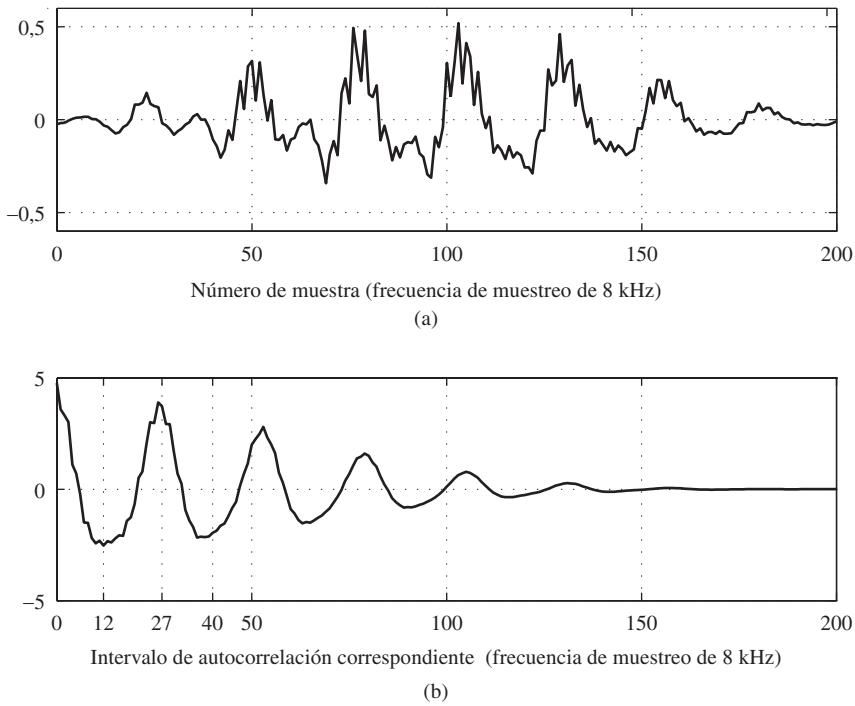


Figura 11.11 (a) Forma de onda de un segmento sonoro de voz. (b) Función de autocorrelación correspondiente (las muestras están unidas por rectas).

La parte superior de la Figura 11.11 muestra un segmento de señal de voz $s[n]$ enventanado con una ventana de Hamming de 201 puntos, y en su parte inferior, la correspondiente función de autocorrelación $r_{ss}[m]$ Durante este intervalo de tiempo, la señal de voz es sonora (las cuerdas vocales vibran), como evidencia la naturaleza periódica de la señal. Esta periodicidad se refleja en la función de autocorrelación en la pico cerca del intervalo 27 de autocorrelación ($27/8 = 3{,}375$ ms para una frecuencia de muestreo de 8 KHz), y en sucesivos múltiplos enteros.

Cuando se aplica un modelo todo polos al segmento sonoro de voz, es útil en considerar la señal como determinista, pero con una función de excitación que es un tren periódico de impulsos. Esto permite tener en cuenta la naturaleza periódica de la autocorrelación cuando la ventana incluye varios periodos de la señal, como muestra la Figura 11.11(a).

La Figura 11.12 muestra una comparación de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal de la Figura 11.11(a), donde el espectro se calcula mediante un modelo todo polos con dos órdenes del modelo diferentes y utilizando la función de autocorrelación de la Figura 11.11(b). Nótese que la transformada de Fourier en tiempo discreto de $s[n]$ muestra picos en múltiplos de la frecuencia fundamental $F_0 = 8\text{ kHz}/27 = 296$ Hz, así como muchos otros picos y depresiones menos prominentes que se pueden atribuir a los efectos del enventanado, comentados en la Sección 10.2.1. Si se usan las 13 primeras muestras de $r_{ss}[m]$ de la Figura 11.11(b) para calcular el espectro de un modelo todo polos ($p = 12$), el resultado es la curva suave correspondiente a la línea gruesa de la Figura 11.12(a). Con un orden del filtro de 12 y un periodo fundamental de 27 muestras, este estimador espectral ignora en efecto la estructura espectral debida a la periodicidad de la señal y produce un estimador espectral mucho más suave. Sin embargo, si se utilizan 41 valores de $r_{ss}[m]$ se obtiene el espectro correspondiente a la línea fina. Como el periodo de la señal es 27, un valor de $p = 40$ incluye el pico de la función

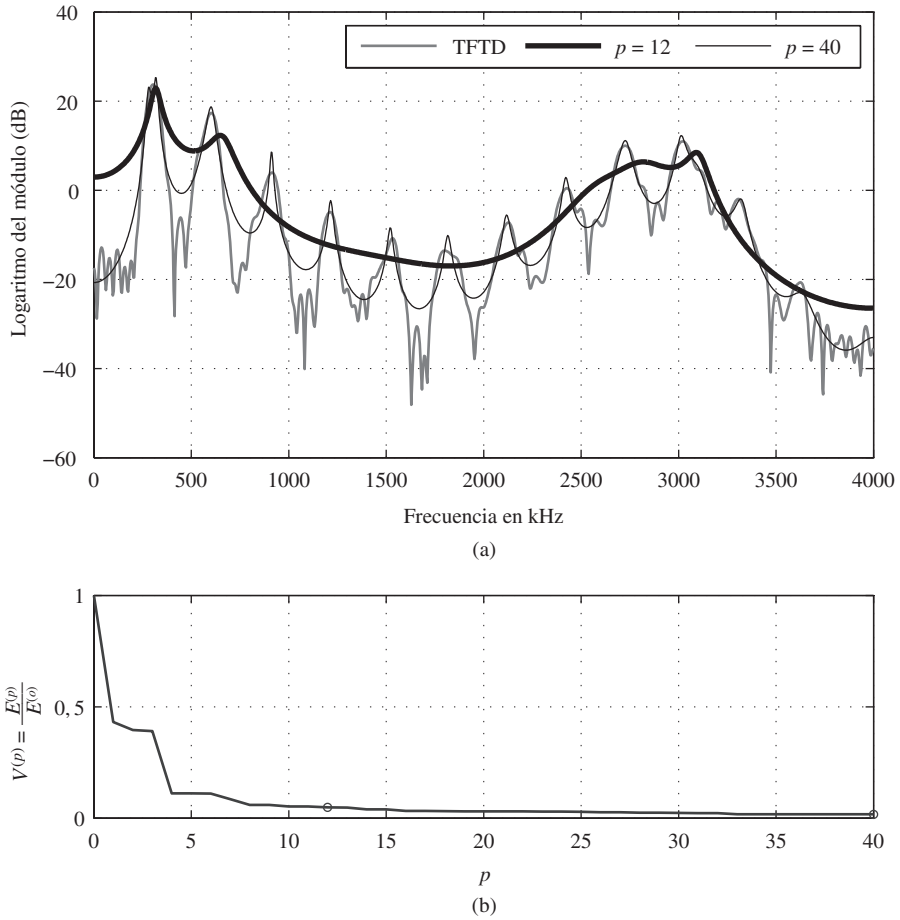


Figura 11.12 (a) Comparación de la transformada de Fourier en tiempo discreto (TFTD) y el espectro correspondiente a un modelo todo polos para el segmento sonoro de voz de la Figura 11.11(a). (b) Error de predicción normalizado en función de p.

de autocorrelación debido a la periodicidad y por tanto, el espectro todo polos tiende a representar una buena parte del detalle del espectro correspondiente a la transformada de Fourier en tiempo discreto. Nótese que ambos casos avalan nuestra afirmación anterior de que el estimador espectral todo polos tiende a favorecer una buena representación de los picos del espectro correspondiente a la transformada de Fourier en tiempo discreto.

Este ejemplo ilustra que la elección del orden del modelo p controla el grado de suavizado sobre el espectro correspondiente de la transformada de Fourier en tiempo discreto. La Figura 12.12(b) muestra que cuando p crece, el error cuadrático medio de predicción disminuye rápidamente y a continuación se nivela, como en nuestro ejemplo anterior. Recuérdese que en las Secciones 11.2.4 y 11.2.5 argumentamos que el modelo todo polos con una ganancia adecuadamente elegida produce un ajuste de las funciones de autocorrelación de la señal y del modelo todo polos hasta p intervalos de autocorrelación, como indica la Ecuación (11.39). Esto implica que cuando p crece, el espectro del modelo todo polos se aproximará al espectro correspondiente a la transformada de Fourier en tiempo discreto y, cuando $p \to \infty$, se deduce entonces que $r_{hh}[m] = r_{ss}[m]$ para todo m y, por tanto, $|H(e^{j\omega})|^2 = |S(e^{j\omega})|^2$. Sin embargo, esto no significa que $H(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega})$, ya que $H(z)$ es un sistema IIR y $S(z)$ es la transformada

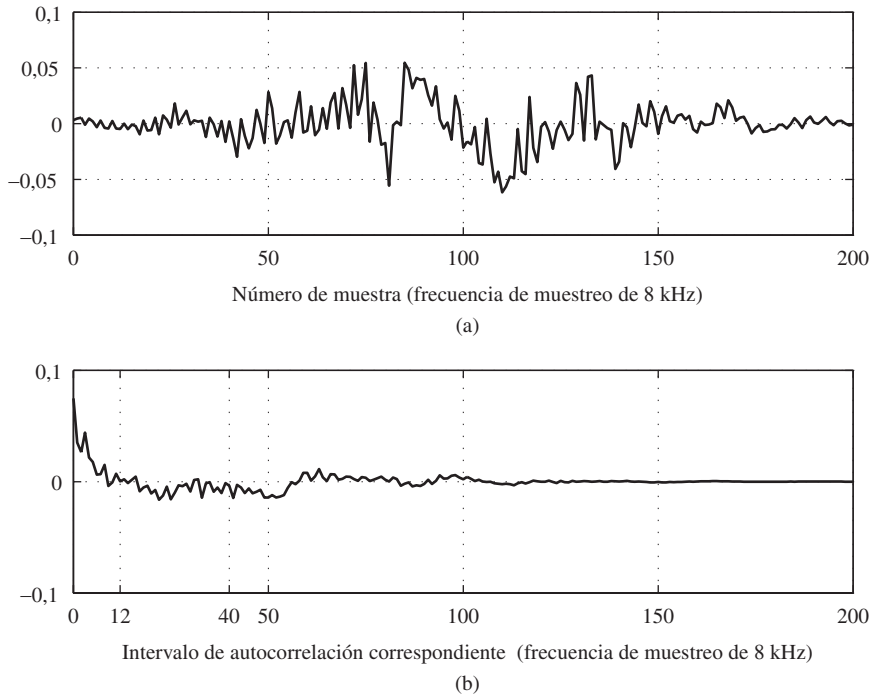


Figura 11.13 (a) Forma de onda de un segmento sordo de voz. (b) Función de autocorrelación correspondiente (las muestras están unidas por rectas).

Z de una secuencia de longitud finita. Nótese también que cuando $p \to \infty$, el error de predicción promediado no tiende a cero, incluso aunque $|H(e^{j\omega})|^2 \to |S(e^{j\omega})|^2$. Como hemos comentado, esto ocurre porque el error total en la Ecuación (11.11) es el error de predicción $\tilde{e}[n]$ menos $Gv[n]$. En otras palabras, el predictor lineal siempre debe predecir la primera muestra distinta de cero a partir de las muestras de valor cero precedentes.

La otra clase importante de sonidos de voz está formada por los sonidos sordos, como los fricativos. Estos sonidos se producen creando un flujo de aire turbulento y aleatorio en el tracto vocal. Por tanto, se modelan más adecuadamente utilizando un sistema todo polos excitado por ruido blanco. La Figura 11.13 muestra un ejemplo de un segmento sordo de voz enventanado con una ventana de Hamming de 201 puntos, junto con su correspondiente función de autocorrelación. Observe que la función de autocorrelación no muestra ninguna indicación de periodicidades ni en la forma de onda de la señal ni en la propia función de autocorrelación. La Figura 11.14(a) muestra una comparación de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal de la Figura 11.13(a) con dos espectros obtenidos mediante un modelo todo polos calculados a partir de la función de autocorrelación de la Figura 11.13(b). Desde el punto de vista de análisis espectral de señales aleatorias, el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier en tiempo discreto es un periodograma. Por tanto, contiene una componente que varía aleatoriamente con la frecuencia. De nuevo, eligiendo el orden del modelo, se puede suavizar el periodograma tanto como se desee.

11.5.2. Posiciones de los polos

En tratamiento de voz, los polos de un modelo todo polos tienen una relación cercana con las frecuencias de resonancia el tracto vocal, por lo que frecuentemente resulta de utilidad factorizar el polinomio

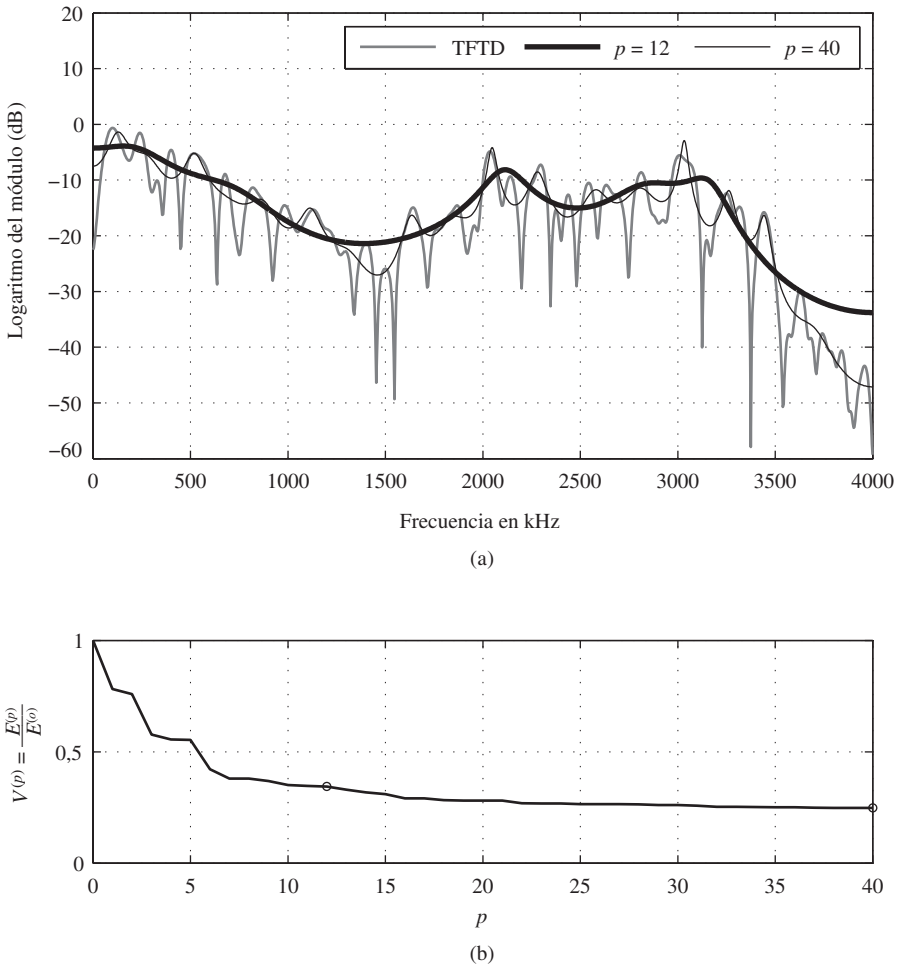


Figura 11.14 (a) Comparación de la transformada de Fourier en tiempo discreto (TFTD) y el espectro correspondiente a un modelo todo polos para el segmento sordo de voz de la Figura 11.13(a). (b) Error de predicción normalizado en función de p.

$A(z)$ obteniendo sus ceros y representándolo como indica la Ecuación (11.50). Como se indicó en la Sección 11.3.3, los ceros z_k del filtro de error de predicción son los polos de la función de transferencia del modelo todo polos. Los polos de la función de transferencia son los responsables de los picos del estimador espectral explicado en la Sección 11.5.1. Cuanto más cerca está un polo de la circunferencia unidad, más pronunciado es el pico que presenta el espectro en frecuencias cercanas al ángulo del polo.

La Figura 11.15 muestra los ceros de la función de transferencia del error de predicción $A(z)$ (polos del sistema modelo), para los dos estimadores espectrales de la Figura 11.12(a). Para $p = 12$, los ceros de $A(z)$ se indican como puntos sin rellenar. Hay cinco parejas de ceros complejos conjugados cercanos a la circunferencia unidad, y sus manifestaciones como polos son claramente evidentes en la curva gruesa de la Figura 11.12(a). En el caso de $p = 40$, los ceros de $A(z)$ se indican como puntos rellenos más grandes. Observe que la mayoría de los ceros están cerca de la circunferencia unidad, y están distribuidos de forma más o menos regular alrededor de dicha circunferencia. Esto da lugar a que los picos del espectro del modelo queden aproximadamente distribuidos en múltiplos de la frecuencia en

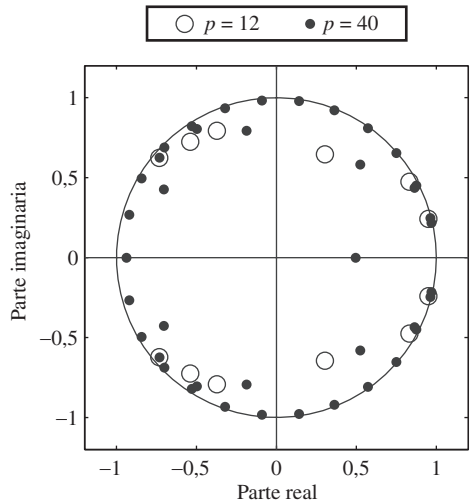


Figura 11.15 Ceros de los filtros de error de predicción (polos del sistema modelo) utilizados para obtener las estimaciones del espectro de la Figura 11.12.

radianes normalizada correspondiente a la frecuencia fundamental de la señal de voz, es decir, en los ángulos $2\pi(296\text{ Hz})/8\text{ kHz}$.

11.5.3. Modelado todo polos de señales sinusoidales

Como otro ejemplo importante, consideraremos el uso de los polos de un modelo todo polos para estimar frecuencias de señales sinusoidales. Para ver cómo se puede hacer, consideremos la suma de dos sinusoides

$$s[n] = [A_1\cos(\omega_1 n + \theta_1) + A_2\cos(\omega_2 n + \theta_2)]\,u[n]. \tag{11.61}$$

La transformada Z de $s[n]$ tiene la forma

$$S(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-e^{j\omega_1}z^{-1})(1-e^{-j\omega_1}z^{-1})(1-e^{j\omega_2}z^{-1})(1-e^{-j\omega_2}z^{-1})}. \tag{11.62}$$

Es decir, la suma de dos sinusoides se puede representar como la respuesta al impulso de un sistema LTI cuya función de transferencia tiene tanto polos como ceros. El polinomio del numerador es una función algo complicada de las amplitudes, frecuencias y desplazamientos de fase. Lo importante de nuestra presentación es que el numerador es un polinomio de tercer grado y el denominador es un polinomio de cuarto grado, cuyas raíces están en la circunferencia unidad en ángulos iguales a $\pm\omega_1$ y $\pm\omega_2$. La ecuación en diferencias que describe este sistema con excitación de un impulso tiene la forma

$$s[n] - \sum_{k=1}^{4} a_k s[n-k] = \sum_{k=1}^{3} b_k \delta[n-k] \tag{11.63}$$

donde los coeficientes a_k resultan de multiplicar los factores del denominador. Nótese que

$$s[n] - \sum_{k=1}^{4} a_k s[n-k] = 0 \quad \text{for } n \geq 4, \tag{11.64}$$

lo que sugiere que la señal $s[n]$ se puede predecir sin error utilizando un predictor de cuarto orden, excepto al principio ($0 \leq n \leq 3$). Los coeficientes del denominador se pueden estimar a partir de la

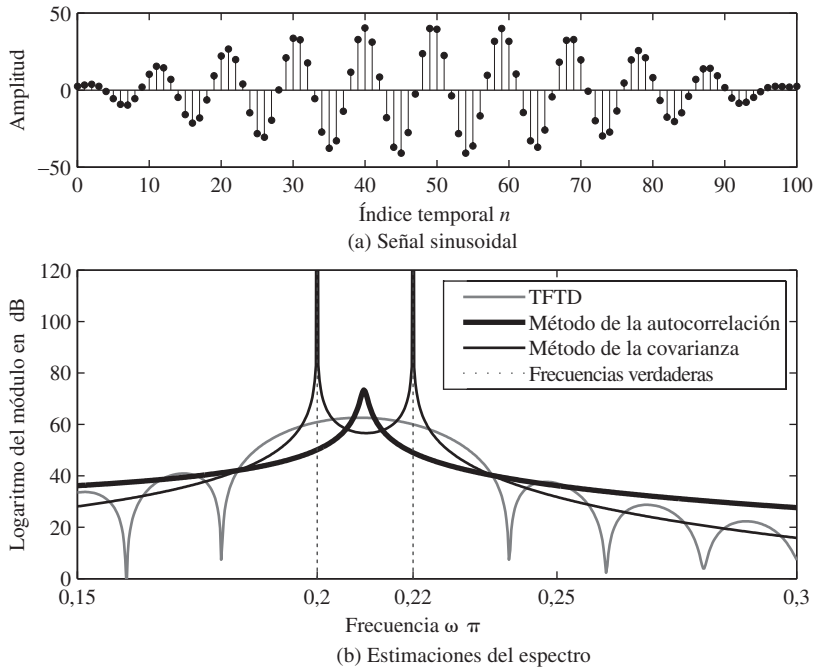


Figura 11.16 Estimación espectral de una señal sinusoidal.

señal aplicando el método de la covarianza a un segmento corto de la señal seleccionada que no incluya las cuatro primeras muestras. En el caso ideal en el que la Ecuación (11.61) representa exactamente la señal (es decir, cuando la relación señal-ruido es alta), las raíces del polinomio resultante proporcionan buenos estimadores de las frecuencias de las componentes sinusoidales.

La Figura 11.16(a) muestra una gráfica de 101 muestras de la señal[8]

$$s[n] = 20\cos(0{,}2\pi n - 0{,}1\pi) + 22\cos(0{,}22\pi n + 0{,}9\pi). \tag{11.65}$$

Como las dos frecuencias son cercanas, es necesario utilizar un número de muestras alto para resolverlas utilizando análisis de Fourier. Sin embargo, como la señal se ajusta perfectamente a un modelo todo polos, se puede emplear el método de la covarianza para obtener estimaciones muy precisas de las frecuencias utilizando segmentos muy cortos de la señal. Esto se ilustra en la Figura 11.16(b).

La transformada de Fourier en tiempo discreto de las 101 muestras (con ventana rectangular) no muestra ninguna indicación de que haya dos frecuencias diferentes alrededor de $\omega = 0{,}21\pi$. Recuerde que la anchura del lóbulo principal de una ventana rectangular de $(M+1)$ puntos es $\Delta\omega = 4\pi/(M+1)$. En consecuencia, una ventana rectangular de 101 puntos puede resolver claramente frecuencias que no estén separadas menos de $0{,}04\pi$ rad/s. Por consiguiente, la transformada de Fourier en tiempo discreto no puede resolver los dos picos espectrales.

[8]La disminución de amplitud del segmento de señal de la Figura 11.16(a) no es consecuencia de un enventanado. Está causado por el "batido" de los dos cosenos de frecuencia muy parecida. El periodo correspondiente a la frecuencia de batido (diferencia entre $0{,}22\pi$ y $0{,}2\pi$) es de 100 muestras.

Similarmente, el uso del método de la autocorrelación produce el espectro que muestra la línea gruesa. Esta estimación contiene sólo un pico espectral. El polinomio de error de predicción (en forma factorizada) que se obtiene mediante el método de la autocorrelación es

$$\begin{aligned} A_a(z) = {} & (1-0{,}998e^{j0{,}21\pi}z^{-1})(1-0{,}998e^{-j0{,}21\pi}z^{-1}) \\ & \cdot(1-0{,}426z^{-1})(1-0{,}1165z^{-1}) \end{aligned} \tag{11.66}$$

Los dos polos reales no producen picos, y los polos complejos están cerca de la circunferencia unidad, pero en frecuencias $\pm 0{,}21\pi$, la mitad de las dos frecuencias buscadas. Por tanto, el enventanado inherente al método de la autocorrelación hace que el modelo resultante se ajuste a la frecuencia promedio $0{,}21\pi$.

Por otra parte, el polinomio factorizado de error de predicción obtenido mediante el método de la covarianza es (redondeando los módulos y fases)

$$\begin{aligned} A_c(z) = {} & (1-e^{j0{,}2\pi}z^{-1})(1-e^{-j0{,}2\pi}z^{-1}) \\ & \cdot(1-e^{j0{,}22\pi}z^{-1})(1-e^{-j0{,}22\pi}z^{-1}). \end{aligned} \tag{11.67}$$

En este caso, las fase de los ceros están situadas a frecuencias casi iguales a las de las dos sinusoides. La Figura 11.16(b) muestra también la respuesta en frecuencia del modelo, es decir,

$$|H_{\text{cov}}(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{|A_{\text{cov}}(e^{j\omega})|^2}. \tag{11.68}$$

en dB. En este caso, el error de predicción es muy cercano a cero. Si se utilizara este error para estimar la ganancia de un modelo todo polos, produciría una estimación indeterminada. Por tanto, la ganancia se pone arbitrariamente a uno, lo que produce que la gráfica de la Ecuación (11.68) esté en una escala similar a la de las otras estimaciones. Como los polos están casi exactamente en la circunferencia unidad, el módulo del espectro será muy grande a las frecuencias de los polos. Nótese que las raíces del polinomio de error de predicción proporcionan una estimación precisa de las frecuencias. Este método, por supuesto, no proporciona información de las amplitudes ni de las fases de las componentes sinusoidales.

11.6. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES NORMALES DE LA AUTOCORRELACIÓN

En los métodos de la autocorrelación y de la covarianza para resolver las ecuaciones normales, los coeficientes del predictor que minimizan el error cuadrático medio del filtro inverso y, por tanto de forma equivalente, el error de predicción satisfacen un sistema de ecuaciones cuya forma general es

$$\begin{matrix} \phi_{ss}[1,1] & \phi_{ss}[1,2] & \phi_{ss}[1,3] & \cdots & \phi_{ss}[1,p] \\ \phi_{ss}[2,1] & \phi_{ss}[2,2] & \phi_{ss}[2,3] & \cdots & \phi_{ss}[2,p] \\ \phi_{ss}[3,1] & \phi_{ss}[3,2] & \phi_{ss}[3,3] & \cdots & \phi_{ss}[3,p] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{ss}[p,1] & \phi_{ss}[p,2] & \phi_{ss}[p,3] & \cdots & \phi_{ss}[p,p] \end{matrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_p \end{matrix} = \begin{matrix} \phi_{ss}[1,0] \\ \phi_{ss}[2,0] \\ \phi_{ss}[3,0] \\ \vdots \\ \phi_{ss}[p,0] \end{matrix}. \tag{11.69}$$

En notación matricial, estas ecuaciones lineales tienen la representación

$$\Phi a = \psi. \tag{11.70}$$

Como $\phi[i,k] = \phi[k,i]$, tanto en el método de la autocorrelación como en el de la covarianza, la matriz Φ es simétrica y, como aparece en un problema de mínimos cuadrados, es también definida positiva, lo que garantiza que es invertible. En general, esto conduce a métodos eficientes de solución, como la descomposición de Cholesky (véase Press et al., 2007), que se basan en factorizaciones de matrices y que se pueden aplicar cuando Φ es simétrica y definida positiva. Sin embargo, en el caso específico del método de la autocorrelación o de cualquier método en el que $\phi_{ss}[i,k] = r_{ss}[|i-k|]$, las Ecuaciones (11.69) se transforman en las ecuaciones normales de la autocorrelación (denominadas también ecuaciones de Yule–Walker).

$$\begin{matrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[p-1] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[p-2] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[p-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[p-1] & r_{ss}[p-2] & r_{ss}[p-3] & \cdots & r_{ss}[0] \end{matrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_p \end{matrix} = \begin{matrix} r_{ss}[1] \\ r_{ss}[2] \\ r_{ss}[3] \\ \vdots \\ r_{ss}[p] \end{matrix} . \tag{11.71}$$

En este caso, la matriz Φ además de ser simétrica y definida positiva, es también una matriz Toeplitz, es decir, los elementos de cada subdiagonal son iguales. Esta propiedad conduce a un algoritmo eficiente, denominado recursión de Levinson–Durbin, para obtener la solución de las ecuaciones.

11.6.1. La recursión de Levinson–Durbin

El algoritmo de Levinson–Durbin para calcular los coeficientes del predictor que minimizan el error cuadrático total de predicción es un resultado del alto grado de simetría de la matriz Φ y de que además, como confirma la Ecuación (11.71), los elementos del vector del miembro derecho ψ son los mismos valores que componen la matriz Φ. Las Ecuaciones (L–D.1) a (L–D.6) de la Figura 11.17 definen los cálculos a realizar. En la Sección 11.6.2 se explica la obtención de esas ecuaciones, pero antes de entrar en los detalles de dicha obtención, es útil examinar simplemente los pasos del algoritmo.

(L–D.1) En este paso se inicializa el error cuadrático medio de predicción con la energía de la señal. Es decir, un predictor de orden cero (no existencia de predictor) no produce ninguna reducción en la energía del error de predicción, ya que el error de predicción $e[n]$ es idéntico a la señal $s[n]$.

La siguiente línea de la Figura 11.17 indica que los pasos (L–D.2) a (L–D.5) se repiten p veces, y en cada repetición de dichos pasos se incrementa en uno el orden del predictor. En otras palabras, el algoritmo calcula un predictor de orden i a partir del predictor de orden $i-1$ empezando en $i-1=0$.

(L–D.2) En este paso se calcula una cantidad denominada k_i. La secuencia de parámetros k_i, $i = 1,2,\ldots,p$ que se denominan parámetros k, tiene un papel crucial en la generación del siguiente conjunto de coeficientes del predictor.[9]

(L–D.3) Esta ecuación indica que $a_i^{(i)}$, el i-ésimo coeficiente del predictor de orden i-ésimo es igual a k_i.

(L–D.4) En esta ecuación se usa k_i para calcular los restantes coeficientes del predictor de orden i-ésimo, como combinación de los coeficientes del predictor de orden $(i-1)$ con esos mismos coeficientes en orden inverso.

[9] Por razones que se comentarán en la Sección 11.7, los parámetros k se denominan también *coeficientes PARCOR* (del término inglés *PARtial CORrelation*, correlación parcial) o también *coeficientes de reflexión*.

Algoritmo de Levinson–Durbin

$$\mathscr{E}^{(0)} = r_{ss}[0] \qquad \text{(L–D.1)}$$

for $i = 1, 2, \ldots, p$

$$k_i = \left(r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j] \right) / \mathscr{E}^{(i-1)} \qquad \text{(L–D.2)}$$

$$a_i^{(i)} = k_i \qquad \text{(L–D.3)}$$

if $i > 1$ then for $j = 1, 2, \ldots, i-1$

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)} \qquad \text{(L–D.4)}$$

end

$$\mathscr{E}^{(i)} = (1 - k_i^2)\mathscr{E}^{(i-1)} \qquad \text{(L–D.5)}$$

end

$$a_j = a_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \ldots, p \qquad \text{(L–D.6)}$$

Figura 11.17 Ecuaciones que definen el algoritmo de Levinson–Durbin.

(L–D.5) Esta ecuación actualiza el error de predicción del predictor de orden i-ésimo.

(L–D.6) Este es el paso final, donde se define el predictor de orden p-ésimo como el resultado de p iteraciones del algoritmo.

El algoritmo de Levinson–Durbin es valioso porque es un método eficiente de solucionar las ecuaciones normales de la autocorrelación y también por la forma en que permite entender las propiedades de la predicción lineal y los modelos todo polos. Por ejemplo, a partir de la Ecuación (L-D.5) se puede demostrar que el error de predicción promediado de un predictor de orden p es el producto de los errores de predicción de todos los predictores de orden inferior, de donde se deduce que $0 < \mathscr{E}^{(i)} \leq \mathscr{E}^{(i-1)} < \mathscr{E}^{(p)}$ y

$$\mathscr{E}^{(p)} = \mathscr{E}^{(0)} \prod_{i=1}^{p} (1 - k_i^2) = r_{ss}[0] \prod_{i=1}^{p} (1 - k_i^2). \qquad (11.72)$$

Como $\mathscr{E}^{(i)} > 0$, se debe cumplir que $-1 < k_i < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, p$. Es decir, los parámetros k deben tener módulo estrictamente menor que la unidad.

11.6.2. Obtención del algoritmo de Levinson–Durbin

Utilizando la Ecuación (11.30), se puede ver que los coeficientes del predictor óptimo satisfacen el sistema de ecuaciones

$$r_{ss}[i] - \sum_{k=1}^{p} a_k r_{ss}[i-k] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad (11.73a)$$

y el error cuadrático medio de predicción mínimo es

$$r_{ss}[0] - \sum_{k=1}^{p} a_k r_{ss}[k] = \mathscr{E}^{(p)}. \qquad (11.73b)$$

Como la Ecuación (11.73b) contiene los mismos valores de correlación que la Ecuación (11.73a), es posible utilizarlas juntas para escribir un nuevo sistema de $p+1$ ecuaciones satisfechas por los p coeficientes desconocidos del predictor y el correspondiente error cuadrático medio de predicción desconocido $\mathscr{E}^{(p)}$. Estas ecuaciones tienen la forma matricial

$$\begin{matrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[p] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[p-1] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[p-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[p] & r_{ss}[p-1] & r_{ss}[p-2] & \cdots & r_{ss}[0] \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ -a_1^{(p)} \\ -a_2^{(p)} \\ \vdots \\ -a_p^{(p)} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathscr{E}^{(p)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} . \tag{11.74}$$

Éste es el sistema de ecuaciones que se puede resolver de forma recursiva mediante el algoritmo de Levinson–Durbin. Para ello, se incorpora sucesivamente un nuevo valor de la correlación en cada iteración y se obtiene el nuevo predictor de orden superior en función del nuevo valor de la correlación y el predictor obtenido previamente.

Para cualquier orden i, el sistema de ecuaciones de la Ecuación (11.74) se puede representar en notación matricial como

$$\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}. \tag{11.75}$$

Deseamos demostrar cómo se puede obtener la solución i-ésima a partir de la solución de orden $(i-1)$. En otras palabras, dado $\mathbf{a}^{(i-1)}$, la solución de $\mathbf{R}^{(i-1)}\mathbf{a}^{(i-1)} = \mathbf{e}^{(i-1)}$, deseamos obtener la solución de $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$.

Primero, expresaremos las ecuaciones $\mathbf{R}^{(i-1)}\mathbf{a}^{(i-1)} = \mathbf{e}^{(i-1)}$ de forma desarrollada:

$$\begin{matrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[i-1] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[i-2] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[i-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & r_{ss}[i-3] & \cdots & r_{ss}[0] \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathscr{E}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} . \tag{11.76}$$

Seguidamente añadimos un cero al vector $\mathbf{a}^{(i-1)}$ y multiplicamos por la matriz $\mathbf{R}^{(i)}$, con lo que obtenemos

$$\begin{matrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[i] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[i-1] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[i-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & r_{ss}[i-3] & \cdots & r_{ss}[1] \\ r_{ss}[i] & r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & \cdots & r_{ss}[0] \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathscr{E}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma^{(i-1)} \end{matrix} . \tag{11.77}$$

donde, para satisfacer la Ecuación (11.77),

$$\gamma^{(i-1)} = r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j]. \tag{11.78}$$

En la Ecuación (11.78) se introduce el nuevo valor de la autocorrelación $r_{ss}[i]$. Sin embargo, la Ecuación (11.77) no está todavía en la forma deseada $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$. El paso clave en este proceso es darse cuenta de que debido a la especial simetría de la matriz Toeplitz $\mathbf{R}^{(i)}$, las ecuaciones se pueden expresar en orden inverso (la primera ecuación en último lugar y la última ecuación en primer lugar) y la matriz del sistema de ecuaciones resultante sigue siendo $\mathbf{R}^{(i)}$. Es decir,

$$\begin{matrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[i] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[i-1] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[i-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & r_{ss}[i-3] & \cdots & r_{ss}[1] \\ r_{ss}[i] & r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & \cdots & r_{ss}[0] \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ -a_{i-2}^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_1^{(i-1)} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \gamma^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathscr{E}^{(i-1)} \end{matrix}. \tag{11.79}$$

Ahora se combina la Ecuación (11.77) con la Ecuación (11.79) de acuerdo con

$$\mathbf{R}^{(i)} \begin{matrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ 0 \end{matrix} - k_i \begin{matrix} 0 \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ -a_{i-2}^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_1^{(i-1)} \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathscr{E}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma^{(i-1)} \end{matrix} - k_i \begin{matrix} \gamma^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathscr{E}^{(i-1)} \end{matrix}. \tag{11.80}$$

La Ecuación (11.80) se va aproximando a la forma deseada $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$. Todo lo que queda es seleccionar $\gamma^{(i-1)}$, de forma que el vector del miembro derecho tenga un único valor distinto de cero. Esto requiere que

$$k_i = \frac{\gamma^{(i-1)}}{\mathscr{E}^{(i-1)}} = \frac{r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j]}{\mathscr{E}^{(i-1)}}, \tag{11.81}$$

lo que asegura la cancelación del último elemento del vector del miembro derecho, y hace que el primer elemento sea

$$\mathscr{E}^{(i)} = \mathscr{E}^{(i-1)} - k_i\gamma^{(i-1)} = \mathscr{E}^{(i-1)}(1-k_i^2). \tag{11.82}$$

Con este valor de $\gamma^{(i-1)}$, se deduce que el vector de coeficientes de predicción de orden i-ésimo es

$$\begin{matrix} 1 \\ -a_1^{(i)} \\ -a_2^{(i)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i)} \\ -a_i^{(i)} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ 0 \end{matrix} - k_i \begin{matrix} 0 \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ -a_{i-2}^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_1^{(i-1)} \\ 1 \end{matrix} \tag{11.83}$$

A partir de la Ecuación (11.83), el sistema de ecuaciones para actualizar los coeficientes se expresa como

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)} \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1, \tag{11.84a}$$

y

$$a_i^{(i)} = k_i. \tag{11.84b}$$

Las Ecuaciones (11.81), (11.84b), (11.84a) y (11.82) son las ecuaciones clave del algoritmo de Levinson–Durbin. Se corresponden con las ecuaciones (L–D.2), (L–D.3), (L–D.4) y (L–D.5) de la Figura 11.17, que muestra cómo se utilizan mediante un procedimiento recursivo en el orden para calcular los coeficientes óptimos del predictor, así como los correspondientes errores cuadráticos medios de predicción y los coeficientes k_i para todos los predictores lineales hasta el orden p.

11.7. FILTROS EN CELOSÍA

Entre los muchos conceptos interesantes y útiles que surgen del algoritmo de Levinson–Durbin está su interpretación en términos de estructuras en celosía como las presentadas en la Sección 6.6. En dicha sección demostramos que un filtro FIR con función de transferencia de la forma

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{M} \alpha_k z^{-k} \tag{11.85}$$

se puede implementar mediante una estructura en celosía como muestra la Figura 6.37. Además, demostramos que los coeficientes de la función de transferencia del sistema FIR están relacionados con los parámetros k de un filtro en celosía asociado, mediante la recursión que se muestra en la Figura 6.38, que se repite por conveniencia en la mitad inferior de la Figura 11.18. Invirtiendo los pasos del algoritmo k-a-α se obtiene el algoritmo de la Figura 6.39, que permite calcular los parámetros k a partir de los coeficientes α_j, $j = 1, 2, \ldots, M$. Por tanto, existe una relación única entre los coeficientes de la representación en forma directa y la representación en celosía de un filtro FIR.

En este capítulo, hemos demostrado que un filtro de predicción de orden p es un filtro FIR con función de transferencia

$$A^{(p)}(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k^{(p)} z^{-k},$$

cuyos coeficientes se pueden calcular a partir de la función de autocorrelación de una señal, mediante un proceso que hemos denominado algoritmo de Levinson–Durbin. Un producto lateral del cómputo de Levinson–Durbin es el conjunto de parámetros que hemos denominado k_i los parámetros k. Una comparación de los dos algoritmos de la Figura 11.18 muestra que sus pasos son idénticos, excepto por un detalle importante. En el algoritmo obtenido en el Capítulo 6, comenzamos con el filtro en celosía de coeficientes k_i conocidos y obtuvimos la recursión para encontrar los coeficientes de la forma directa correspondiente del filtro FIR. En el algoritmo de Levinson–Durbin, partimos de la función de autocorrelación de una señal y calculamos recursivamente los parámetros k como un resultado intermedio del cómputo de los coeficientes del filtro FIR de error de predicción. Como ambos algoritmos producen un resultado único tras p iteraciones, y dado que existe una relación única entre los parámetros k y los coeficientes de un filtro FIR, se deduce que si $M = p$ y $a_j = \alpha_j$ para $j = 1, 2, \ldots, p$, los parámetros k producidos por el algoritmo de Levinson–Durbin deben ser los parámetros k de la implementación en celosía del filtro FIR de error de predicción $A^{(p)}(z)$.

11.7.1. Red en celosía de error de predicción

Para explorar algo más la interpretación de filtro en celosía, supongamos que tenemos la función de transferencia de un filtro de error de predicción de orden i

Algoritmo de Levinson–Durbin

$\mathscr{E}^{(0)} = r_{ss}[0]$
for $i = 1, 2, \ldots, p$
  $k_i = \left(r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j] \right) / \mathscr{E}^{(i-1)}$ Ec. (11.81)
  $a_i^{(i)} = k_i$ Eq. (11.84b)
  if $i > 1$ then for $j = 1, 2, \ldots, i-1$
    $a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)}$ Ec. (11.84a)
  end
  $\mathscr{E}^{(i)} = (1 - k_i^2)\mathscr{E}^{(i-1)}$ Ec. (11.82)
end
$a_j = a_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \ldots, p$

Algoritmo en celosía k-a-α

Dados $k_1, k_2, \ldots, k_M$
for $i = 1, 2, \ldots, M$
  $\alpha_i^{(i)} = k_i$ Ec. (6.66b)
  if $i > 1$ then for $j = 1, 2, \ldots, i-1$
    $\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)}$ Ec. (6.66a)
  end
end
$\alpha_j = \alpha_j^{(M)} \quad j = 1, 2, \ldots, M$ Ec. (6.68b)

Figura 11.18 Comparación del algoritmo de Levinson–Durbin y del algoritmo para convertir de parámetros k de una estructura en celosía a coeficientes de la respuesta al impulso de un filtro FIR en la Ecuación (11.85).

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} z^{-k}. \tag{11.86}$$

La representación mediante la transformada Z del error de predicción[10] sería

$$E^{(i)}(z) = A^{(i)}(z)S(z), \tag{11.87}$$

y la ecuación en diferencias en el dominio del tiempo de este filtro FIR es

$$e^{(i)}[n] = s[n] - \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} s[n-k]. \tag{11.88}$$

[10]Las ecuaciones de la transformada Z se utilizan suponiendo que existen las transformadas Z de $e[n]$ y $s[n]$. Aunque esto no es cierto para señales aleatorias, las relaciones entre las variables siguen siendo ciertas para el sistema. La notación de la transformada Z facilita el desarrollo de estas relaciones.

La secuencia $e^{(i)}[n]$ se denomina de forma más concreta *error de predicción hacia delante*, debido a que es el error al predecir $s[n]$ mediante sus i *muestras anteriores*.

La fuente de la interpretación del filtro en celosía son las Ecuaciones (11.84a) y (11.84b) que, sustituidas en la Ecuación (11.86) producen la siguiente relación entre $A^{(i)}(z)$ y $A^{(i-1)}(z)$:

$$A^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z) - k_i z^{-i} A^{(i-1)}(z^{-1}). \tag{11.89}$$

Este resultado no es sorprendente si consideramos la representación matricial del polinomio $A^{(i)}(z)$ en la Ecuación (11.83).[11] Ahora, si sustituye $A^{(i)}(z)$ de la Ecuación (11.87) en la Ecuación (11.89), el resultado es

$$E^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z)S(z) - k_i z^{-i} A^{(i-1)}(z^{-1})S(z). \tag{11.90}$$

El primer término de la Ecuación (11.90) es $E^{(i-1)}(z)$, es decir, el error de predicción de un filtro de orden $(i-1)$. El segundo término tiene una interpretación similar, si definimos

$$\tilde{E}^{(i)}(z) = z^{-i} A^{(i)}(z^{-1})S(z) = B^{(i)}(z)S(z), \tag{11.91}$$

donde $B^{(i)}(z)$ está definida como

$$B^{(i)}(z) = z^{-i} A^{(i)}(z^{-1}) \tag{11.92}$$

La interpretación en el dominio del tiempo de la Ecuación (11.91) es

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = s[n-i] - \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} s[n-i+k]. \tag{11.93}$$

La secuencia $\tilde{e}^{(i)}[n]$ se denomina *error de predicción hacia atrás*, ya que la Ecuación (11.93) sugiere que $s[n-i]$ se "predice" (utilizando los coeficientes $a_k^{(i)}$) utilizando las i muestras que *siguen* a la muestra $n-i$.

Con estas definiciones, se deduce de la Ecuación (11.90) que

$$E^{(i)}(z) = E^{(i-1)}(z) - k_i z^{-1} \tilde{E}^{(i-1)}(z). \tag{11.94}$$

y entonces

$$e^{(i)}[n] = e^{(i-1)}[n] - k_i \tilde{e}^{(i-1)}[n-1]. \tag{11.95}$$

Sustituyendo la Ecuación (11.89) en la Ecuación (11.91) obtenemos

$$\tilde{E}^{(i)}(z) = z^{-1} \tilde{E}^{(i-1)}(z) - k_i E^{(i-1)}(z), \tag{11.96}$$

que, en el dominio del tiempo, corresponde a

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n]. \tag{11.97}$$

Las ecuaciones en diferencias (11.95) y (11.97) expresan los errores de predicción hacia delante y hacia atrás de orden i en función de k_i y de los errores de predicción hacia delante y hacia atrás de orden $(i-1)$. Esta pareja de ecuaciones en diferencias se representa mediante el grafo de flujo de señales de la Figura 11.19. Por tanto, la Figura 11.19 representa una pareja de ecuaciones en diferencias que

[11] El procedimiento algebraico para obtener este resultado se sugiere como ejercicio en el Problema 11.21.

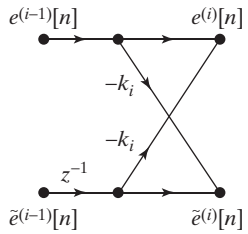


Figura 11.19 Grafo de flujo de señales del cálculo de error de predicción.

expresan una iteración del algoritmo de Levinson–Durbin. Como en la recursión de Levinson–Durbin, comenzamos con un predictor de orden cero para el que

$$e^{(0)}[n] = \tilde{e}^{(0)}[n] = s[n]. \tag{11.98}$$

Siendo $e^{(0)}[n] = s[n]$ y $\tilde{e}^{(0)}[n] = s[n]$ las entradas a la primera etapa, con la estructura de la Figura 11.19 y con k_1 como coeficiente, se obtienen como salidas $e^{(1)}[n]$ y $\tilde{e}^{(1)}[n]$. Estas salidas son las entradas necesarias para la etapa 2. Podemos utilizar p etapas sucesivas con la estructura de la Figura 11.19 para formar un sistema cuya salida será la señal de error de predicción de orden p deseada, $e[n] = e^{(p)}[n]$. Este sistema, como se muestra en la Figura 11.20, es idéntico a la red en celosía de la Figura 6.37 en la Sección 6.6.[12] En resumen, la Figura 11.20 es un grafo de flujo de señales de la representación de las ecuaciones

$$e^{(0)}[n] = \tilde{e}^{(0)}[n] = s[n] \tag{11.99a}$$

$$e^{(i)}[n] = e^{(i-1)}[n] - k_i\tilde{e}^{(i-1)}[n-1] \quad i = 1,2,\ldots,p \tag{11.99b}$$

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n] \quad i = 1,2,\ldots,p \tag{11.99c}$$

$$e[n] = e^{(p)}[n], \tag{11.99d}$$

donde, si los coeficientes k_i se determinan mediante la recursión de Levinson–Durbin, las variables $e^{(i)}[n]$ y $\tilde{e}^{(i)}[n]$ son los errores de predicción hacia delante y hacia atrás de los predictores óptimos de orden i.

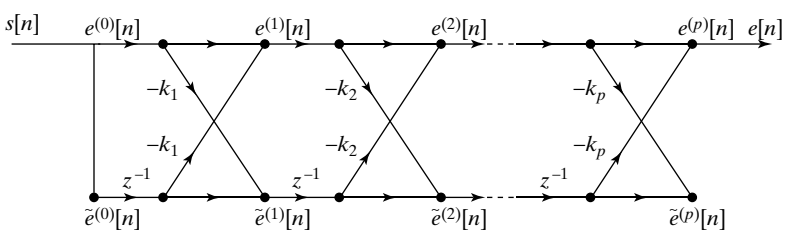


Figura 11.20 Grafo de flujo de señales de la implementación en celosía del cálculo del error de predicción de orden p.

[12]Observe que en la Figura 6.37 las variables de nodo se denominaron $a^{(i)}[n]$ y $b^{(i)}[n]$ en vez de $e^{(i)}[n]$ y $\tilde{e}^{(i)}[n]$, respectivamente.

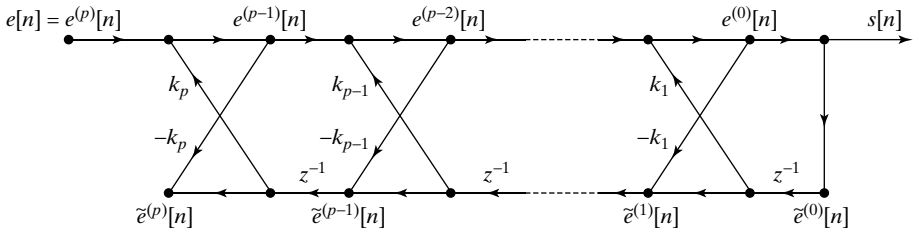


Figura 11.21 Sistema todo polos en celosía.

11.7.2. Red en celosía de un modelo todo polos

En la Sección 6.6.2, demostramos que la red en celosía de la Figura 6.42 es una implementación de la función de transferencia todo polos $H(z) = 1/A(z)$, siendo $A(z)$ la función de transferencia de un sistema FIR. Es decir, $H(z)$ es la inversa exacta de $A(z)$, y, en el presente contexto, es la función de transferencia de un modelo todo polos con $G = 1$. En esta sección revisaremos la estructura todo polos en celosía en función de la notación del error de predicción hacia delante y hacia atrás.

Si sustituimos las etiquetas de las variables de nodo $a^{(i)}[n]$ y $b^{(i)}[n]$ de la Figura 6.42 por los correspondientes $e^{(i)}[n]$ y $\tilde{e}^{(i)}[n]$, obtenemos el grafo de flujo de la Figura 11.21, que representa el conjunto de ecuaciones

$$e^{(p)}[n] = e[n] \tag{11.100a}$$

$$e^{(i-1)}[n] = e^{(i)}[n] + k_i\tilde{e}^{(i-1)}[n-1] \quad i = p, p-1, \ldots, 1 \tag{11.100b}$$

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n] \quad i = p, p-1, \ldots, 1 \tag{11.100c}$$

$$s[n] = e^{(0)}[n] = e^{(0)}[n]. \tag{11.100d}$$

Como explicamos en la Sección 6.6.2, todo sistema estable todo polos se puede realizar con una estructura en celosía como la de la Figura 11.21. En estos sistemas, la garantía de estabilidad inherente en la condición $|k_i| < 1$ es particularmente importante. Aunque la estructura en celosía requiere dos veces más multiplicaciones por muestra de salida que la forma directa, puede ser la implementación preferida cuando la cuantificación de los coeficientes es gruesa. La respuesta en frecuencia de la forma directa es extremadamente sensible a la cuantificación de los coeficientes. Además, hemos visto que la forma directa de sistemas IIR de orden alto se puede volver inestable debido a la cuantificación de los coeficientes. Este no es el caso en la estructura en celosía, siempre que se mantenga la condición $|k_i| < 1$ en los parámetros k cuantificados. Además, la respuesta en frecuencia de la red en celosía es relativamente insensible a la cuantificación de los parámetros k.

11.7.3. Cálculo directo de los parámetros k

La estructura correspondiente al grafo de flujo de la Figura 11.20 es consecuencia directa de la recursión de Levinson–Durbin, y los parámetros k_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ se pueden obtener a partir de los valores de la autocorrelación $r_{ss}[m]$, $m = 0, 1, \ldots, p$ realizando iteraciones del algoritmo de la Figura 11.17. De nuestra explicación hasta el momento, se desprende que los parámetros k_i son una consecuencia secundaria del cálculo de los parámetros del predictor. Sin embargo, Itakura y Saito (1968, 1970) demostraron que los parámetros k_i se pueden calcular directamente a partir de los errores de predicción hacia delante y

hacia atrás de la Figura 11.20. Y dado que la estructura iterativa es una cascada de etapas como la de la Figura 11.19, los parámetros k_i se pueden calcular secuencialmente a partir de las señales disponibles en las etapas anteriores de la celosía. El cálculo directo del parámetro k_i se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$k_i^P = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(i-1)}[n]\tilde{e}^{(i-1)}[n-1]}{\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(e^{(i-1)}[n])^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\tilde{e}^{(i-1)}[n-1])^2\right\}^{1/2}}. \tag{11.101}$$

Observe que la Ecuación (11.101) tiene la forma de una correlación cruzada normalizada en energía entre los errores de predicción hacia delante y hacia atrás en la salida de la etapa i-ésima. Por esta razón, el coeficiente k_i^P calculado mediante la Ecuación (11.101) se denomina coeficiente PARCOR, o, de forma más precisa, *coeficiente de CORrelación PARcial*. La Figura 11.20 tiene la interpretación de que la correlación de $s[n]$ representada por la función de autocorrelación $r_{ss}[m]$ es eliminada paso por paso mediante el filtro en celosía. En Stoica y Moses (2005) y en Markel y Gray (1976) se presenta de forma más detallada el concepto de correlación parcial.

La Ecuación (11.101) para el cálculo de k_i^P es la media geométrica entre un valor k_i^f que minimiza el error cuadrático medio de predicción hacia delante y un valor k_i^b que minimiza el error cuadrático medio de predicción hacia atrás. La obtención de este resultado se considera en el Problema 11.28. Nótese los límites de las sumas se indican como infinito para resaltar que *todas* las muestras del error intervienen en la suma. Para ser más concretos, todas las sumas de la Ecuación (11.101) podrían empezar en $n = 0$ y terminar en $n = M + i$, ya que ese es el intervalo en el que es distinta de cero la salida de señal de error de los predictores de orden i hacia delante y hacia atrás. Es el mismo supuesto que se hizo al plantear el método de la autocorrelación para secuencias de longitud finita. De hecho, en el Problema 11.29 se esboza una demostración de que los valores k_i^P calculados mediante la Ecuación (11.101) son exactamente el mismo resultado que los valores k_i calculados mediante la Ecuación (11.81) o la Ecuación (L–D.2) de la Figura 11.17. Por tanto, la Ecuación (11.101) se puede sustituir por la Ecuación (L–D.2) de la Figura 11.17, y el conjunto resultante de coeficientes de predicción será idéntico al calculado a partir de la función de autocorrelación.

Para utilizar la Ecuación (11.101), es necesario calcular realmente los errores de predicción hacia delante y hacia atrás empleando los cálculos que se indican en la Figura 11.19. En resumen, éstos son los pasos para el cómputo de los coeficientes PARCOR k_i^P para $i = 1, 2, \ldots, p$:

PARCOR.0 Inicializar con $e^{(0)}[n] = \tilde{e}^{(0)}[n] = s[n]$ para $0 \le n \le M$.

Para $i = 1, 2, \ldots, p$ repetir los siguientes pasos.

PARCOR.1 Calcular $e^{(i)}[n]$ y $\tilde{e}^{(i-1)}[n]$ utilizando la Ecuación (11.99b) y le Ecuación (11.99c), respectivamente, para $0 \le n \le M + i$. Almacenar las dos secuencias como entrada para la etapa siguiente.

PARCOR.2 Calcular k_i^P utilizando la Ecuación (11.101).

Otro planteamiento para calcular los coeficientes de la Figura 11.20 fue presentado por Burg en 1975, quien formuló el problema del modelado todo polos en términos del principio de la máxima entropía. Burg propuso utilizar la estructura de la Figura 11.20, que expresa el algoritmo de Levinson–Durbin, con coeficientes k_i^B que minimizan en cada etapa la suma de los errores cuadráticos medios de

predicción hacia delante y hacia atrás. El resultado está dado por la ecuación

$$k_i^B = \frac{2\sum_{n=i}^{N} e^{(i-1)}[n]\tilde{e}^{(i-1)}[n-1]}{\sum_{n=i}^{N}(e^{(i-1)}[n])^2 + \sum_{n=i}^{N}(\tilde{e}^{(i-1)}[n-1])^2} \tag{11.102}$$

El procedimiento de utilización de esta ecuación para obtener la secuencia k_i^B, $i = 1,2,\ldots,p$ es el mismo que en el método PARCOR. Al plantear el paso PARCOR.2, simplemente se sustituye k_i^P por k_i^B calculados según la Ecuación (11.102). En este caso, el operador de promediado es el mismo que en el método de la covarianza, lo que significa que se puede usar segmentos muy cortos de $s[n]$, manteniéndose todavía una alta resolución espectral.

Aunque el método de Burg utiliza un análisis del tipo de la covarianza, se mantiene la condición $|k_i^B| < 1$ lo que implica que el modelado todo polos implementado por el filtro en celosía será estable (véase el Problema 11.30). Como en el caso del método PARCOR, la Ecuación (11.102) se puede sustituir por la Ecuación (L–D.2) de la Figura 11.17 para calcular los coeficientes de predicción. Aunque los coeficientes resultantes serán diferentes de los calculados a partir de la función de autocorrelación o de la Ecuación (11.101), el modelo todo polos resultante será todavía estable. La obtención de la Ecuación (11.102) se considera en el Problema 11.30.

11.8. RESUMEN

En este capítulo se proporciona una introducción al modelado paramétrico de señales. Hemos resaltado los modelos todo polos, pero muchos conceptos presentados se pueden aplicar a técnicas más generales en las que aparecen funciones de transferencia racionales. Hemos demostrado que los parámetros de un modelo todo polos se pueden calcular mediante un proceso de dos pasos. El primer paso es calcular los valores de la correlación de una secuencia de longitud finita. El segundo paso es resolver un sistema de ecuaciones lineales, en el que los coeficientes son los valores de la correlación. Hemos demostrado que las soluciones que se obtienen dependen de la forma en que se calculan los valores de la correlación, y hemos visto que si los valores de la correlación son valores de autocorrelación verdaderos, se puede obtener un algoritmo particularmente útil, el algoritmo de Levinson–Durbin, para solucionar dichas ecuaciones. Además, hemos demostrado que la estructura del algoritmo de Levinson–Durbin permite deducir muchas propiedades de utilidad del modelado todo polos. El modelado paramétrico de señales tiene una rica historia, una voluminosa literatura y abundantes aplicaciones, todo lo cual hace que sea merecedor de un estudio avanzado posterior.

Problemas

Problemas básicos

11.1. $s[n]$ es una señal de energía finita conocida para todo n. $\phi_{ss}[i,k]$ se define como

$$\phi_{ss}[i,k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n-i]s[n-k].$$

Demuestre que $\phi_{ss}[i,k]$ se puede expresar en función de $|i-k|$.

11.2. En general, el error cuadrático medio de predicción se define en la Ecuación (11.36) como

$$\mathscr{E} = \left\langle \left(s[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k] \right)^2 \right\rangle. \tag{P11.2-1}$$

(a) Desarrolle la Ecuación (P11.2-1) y utilice el hecho de que $\langle s[n-i]s[n-k]\rangle = \phi_{ss}[i,k] = \phi_{ss}[k,i]$ para demostrar que

$$\mathscr{E} = \phi_{ss}[0,0] - 2\sum_{k=1}^{p} a_k \phi_{ss}[0,k] + \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{k=1}^{p} a_k \phi_{ss}[i,k] \tag{P11.2-2}$$

(b) Demuestre que para los coeficientes óptimos del predictor, que satisfacen las Ecuaciones (11.20), la Ecuación (P11.2-2) se convierte en

$$\mathscr{E} = \phi_{ss}[0,0] - \sum_{k=1}^{p} a_k \phi_{ss}[0,k]. \tag{P11.2-3}$$

11.3. La respuesta al impulso de un modelo todo polos causal con la forma de la Figura 11.1 y la Ecuación (11.3), con parámetros de sistema G y $\{a_k\}$, satisface la ecuación en diferencias

$$h[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k h[n-k] + G\delta[n] \tag{P11.3-1}$$

(a) La función de autocorrelación de la respuesta al impulso del sistema es

$$r_{hh}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n+m]$$

Sustituyendo la Ecuación (P11.3-1) en la ecuación de $r_{hh}[-m]$, y utilizando el hecho de que $r_{hh}[-m] = r_{hh}[m]$, demuestre que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k r_{hh}[|m-k|] = r_{hh}[m], \quad m = 1,2,\ldots,p \tag{P11.3-2}$$

(b) Utilizando el mismo planteamiento que en el apartado (a), demuestre ahora que

$$r_{hh}[0] - \sum_{k=1}^{p} a_k r_{hh}[k] = G^2. \tag{P11.3-3}$$

11.4. Considere una señal $x[n] = s[n] + w[n]$, donde $s[n]$ satisface la ecuación en diferencias

$$s[n] = 0{,}8s[n-1] + v[n].$$

$v[n]$ es una secuencia de ruido blanco de media cero y varianza $\sigma_v^2 = 0{,}49$ y $w[n]$ es una secuencia de ruido blanco de media cero y varianza $\sigma_w^2 = 1$. Los procesos $v[n]$ y $w[n]$ están incorrelados. Determine las secuencias de autocorrelación $\phi_{ss}[m]$ y $\phi_{xx}[m]$.

11.5. El planteamiento de filtro inverso del modelado todo polos de una señal determinista $s[n]$ se presenta en la Sección 11.1.2 y se muestra en la Figura 11.2. La Ecuación (11.5) es la función de transferencia del filtro inverso.

(a) Basándose en este planteamiento, determine los coeficientes a_1 y a_2 del modelo todo polos óptimo para $s[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$ con $p = 2$.

(b) Basándose de nuevo en este planteamiento, determine los coeficientes a_1, a_2 y a_3 del modelo todo polos óptimo para $s[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$ con $p = 3$.

11.6. Suponga que ha calculado los parámetros G y a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ del modelo todo polos

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}.$$

Explique cómo podría utilizar la DFT para evaluar la estimación del espectro todo polos $|H(e^{j\omega_k})|$ en N frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

11.7. Considere una respuesta al impulso causal deseada $h_d[n]$ que se desea aproximar mediante un sistema con respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}.$$

Nuestro criterio de optimización es minimizar la función de error dada por

$$\mathscr{E} = \sum_{n=0}^{\infty} (h_d[n] - h[n])^2.$$

(a) Suponga que se conoce a, y se desea determinar el parámetro desconocido b que minimiza $\mathscr{E}$. Suponga que $|a| < 1$. ¿Produce este resultado un sistema de ecuaciones no lineal? Si es así, demuestre por qué. Si no lo es, determine b.

(b) Suponga que se conoce b, y se desea determinar el parámetro desconocido a que minimiza $\mathscr{E}$. ¿Es un problema no lineal? Si es así, demuestre por qué. Si no lo es, determine a.

11.8. Suponga que $s[n]$ es una secuencia de longitud finita (enventanada) que es cero *fuera* del intervalo $0 \le n \le M-1$. La secuencia de error de predicción lineal *hacia atrás* de orden p para esta señal se define como

$$\tilde{e}[n] = s[n] - \sum_{k=1}^{p} \beta_k s[n+k]$$

Es decir, $s[n]$ se "predice" utilizando las p muestras que *siguen* a la muestra n. El error cuadrático medio de predicción hacia atrás se define como

$$\tilde{\mathscr{E}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\tilde{e}[m])^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(s[m] - \sum_{k=1}^{p} \beta_k s[m+k] \right)^2$$

donde los límites infinitos indican que la sume se realiza para todos los valores distintos de cero de $(\tilde{e}[m])^2$ como en el método de la autocorrelación utilizado en la "predicción hacia delante."

(a) La secuencia de error de predicción $\tilde{e}[n]$ es cero fuera de un intervalo finito $N_1 \le n \le N_2$. Determine N_1 y N_2.

(b) Siguiendo el planteamiento utilizado en este capítulo para obtener el predictor lineal hacia delante, obtenga el sistema de ecuaciones normales satisfechas por los coeficientes β_ks que minimizan el error cuadrático medio de predicción $\tilde{\mathscr{E}}$. Proporcione su respuesta final de une forma concisa y bien definida en función de los valores de la autocorrelación.

(c) Basándose en el resultado del apartado (b), indique cómo se relacionan los coeficientes del predictor hacia atrás $\{\beta_k\}$ con los coeficientes del predictor hacia delante $\{\alpha_k\}$?

Problemas avanzados

11.9. Considere una señal $s[n]$ que se modela como la respuesta al impulso de un sistema todo polos de orden p. Denomine $H^{(p)}(z)$ a la función de transferencia del modelo todo polos de orden p y $h^{(p)}[n]$ a la correspondiente respuesta al impulso. Denote a la inversa de $H^{(p)}(z)$ como $H_{\text{inv}}^{(p)}(z) = 1/H^{(p)}(z)$. La correspondiente respuesta al impulso es $h_{\text{inv}}^{(p)}[n]$. El filtro inverso, caracterizado por $h_{\text{inv}}^{(p)}[n]$, se escoge para minimizar el error cuadrático total $\mathscr{E}^{(p)}$ dado por

$$\mathscr{E}^{(p)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta[n] - g^{(p)}[n]\right]^2,$$

siendo $g^{(p)}[n]$ la salida del filtro $H_{\text{inv}}^{(p)}(z)$ cuando la entrada es $s[n]$.

(a) La Figura P11.9 muestra un grafo de flujo de señales de la implementación en celosía del filtro $H_{\text{inv}}^{(4)}(z)$. Determine $h_{\text{inv}}^{(4)}[1]$, su respuesta al impulso en $n = 1$.

(b) Suponga que ahora se desea modelar la señal $s[n]$ como la respuesta al impulso de un filtro todo polos de segundo orden. Dibuje un grafo de flujo de señales de la implementación mediante filtro en celosía de $H_{\text{inv}}^{(2)}(z)$.

(c) Determine la función de transferencia $H^{(2)}(z)$ del filtro todo polos de segundo orden.

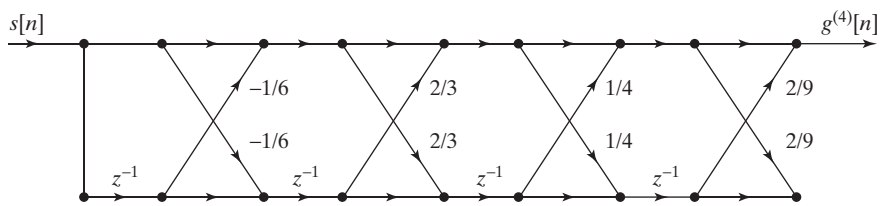


Figura P11.9

11.10. Considere un filtro predictor de orden i con función de transferencia de error de predicción

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{j=1}^{i} a_j^{(i)} z^{-j} = \prod_{j=1}^{i} (1 - z_j^{(i)} z^{-1}) \qquad \text{(P11.10-1)}$$

De la recursión de Levinson–Durbin, se deduce que $a_i^{(i)} = k_i$. Utilice este hecho, junto con la Ecuación (P11.10.1), para demostrar que si $|k_i| \geq 1$, entonces debe cumplirse que $|z_j^{(i)}| \geq 1$ para algún valor de j. Es decir, demuestre que la condición $|k_i| < 1$ es una condición *necesaria* para que $A^{(p)}(z)$ tenga todos sus ceros estrictamente *en el interior* de la circunferencia unidad.

11.11. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo con función de transferencia $H(z) = h_0 + h_1 z^{-1}$. La señal $y[n]$ es la salida de este sistema debida a una entrada que es ruido blanco de media cero y varianza unidad.

(a) ¿Cuál es la función de autocorrelación $r_{yy}[m]$ de la salida $y[n]$?

(b) El error de predicción hacia delante de segundo orden se define como

$$e[n] = y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2].$$

Sin utilizar directamente las ecuaciones de Yule–Walker, calcule a_1 y a_2, de forma que se minimice la varianza de $e[n]$.

(c) El error de predicción hacia atrás para $y[n]$ se define como

$$\tilde{e}[n] = y[n] - b_1 y[n+1] - b_2 y[n+2].$$

Calcule b_1 y b_2 de forma que se minimice la varianza de $\tilde{e}[n]$. Compare los coeficientes con los obtenidos en el apartado (b).

11.12. **(a)** Se conoce la función de autocorrelación, $r_{yy}[m]$ de un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio de media cero $y[n]$. Exprese, en función de $r_{yy}[m]$, las ecuaciones de Yule–Walker resultantes de modelar el proceso aleatorio como la respuesta a una secuencia de ruido blanco de un modelo todo polos de tercer orden con función de transferencia

$$H(z) = \frac{A}{1 - az^{-1} - bz^{-3}}.$$

(b) Un proceso aleatorio $v[n]$ es la salida del sistema que se muestra en la Figura P11.12-1, cuando $x[n]$ y $z[n]$ son señales de ruido blanco independientes, de media cero y varianza unidad, y $h[n] = \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$. Calcule $r_{vv}[m]$, la autocorrelación de $v[n]$.

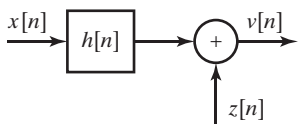


Figura P11.12-1

(c) El proceso aleatorio $y_1[n]$ es la salida del sistema que se muestra en la Figura P11.12-2, cuando $x[n]$ y $z[n]$ son señales de ruido blanco independientes, de media cero y varianza unidad, y

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1} - bz^{-3}}.$$

Se usan los mismos valores a y b obtenidos en el apartado (a) para realizar el modelado todo polos de $y_1[n]$. El error de modelado inverso, $w_1[n]$, es la salida del sistema que se muestra en la Figura P11.12-3. ¿Es $w_1[n]$ blanco? ¿Es $w_1[n]$ de media cero? Explique sus respuestas.

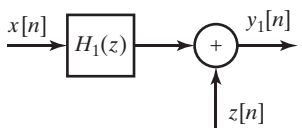


Figura P11.12-2

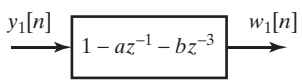


Figura P11.12-3

(d) ¿Cuál es la varianza de $w_1[n]$?

11.13. Se han observado las primeras seis muestras de una señal causal $s[n]$ dadas por $s[0] = 4$, $s[1] = 8$, $s[2] = 4$, $s[3] = 2$, $s[4] = 1$ y $s[5] = 0{,}5$. En los primeros apartados de este problema, se va a modelar la señal utilizando un sistema de dos polos estable, causal y de fase mínima, con respuesta al impulso $\hat{s}[n]$ y función de transferencia

$$H(z) = \frac{G}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

El planteamiento es minimizar el error de modelado $\mathscr{E}$ dado por

$$\mathscr{E} = \min_{a_1,a_2,A} \sum_{n=0}^{5} (g[n] - G\delta[n])^2 ,$$

siendo $g[n]$ la respuesta del sistema inverso a $s[n]$, y la función de transferencia del sistema inverso:

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}.$$

(a) Exprese los valores de $g[n] - G\delta[n]$ para $0 \leq n \leq 5$.
(b) Basándose en su trabajo del apartado (a), escriba las ecuaciones lineales de los parámetros a_1, a_2 y G.
(c) ¿Qué es G?
(d) Para esta señal $s[n]$, sin resolver las ecuaciones lineales del apartado (b), explique si se puede esperar que el error de modelado $\mathscr{E}$ sea cero.

En el resto del problema, modelaremos la señal utilizando un sistema diferente, estable causal y de fase mínima, con respuesta al impulso $\hat{s}_2[n]$ y función de transferencia

$$H_2(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}}.$$

El error de modelado a minimizar en este caso es $\mathscr{E}_2$, dado por

$$\mathscr{E}_2 = \min_{a,b_0,b_1} \sum_{n=0}^{5} (g[n] - r[n])^2 ,$$

siendo $g[n]$ la respuesta del sistema inverso a $s[n]$, y la función de transferencia del sistema inverso es ahora:

$$A(z) = 1 - a z^{-1}.$$

Además, $r[n]$ es la respuesta al impulso de un sistema cuya función de transferencia es

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1}.$$

(e) Para este modelo, exprese $g[n] - r[n]$ para $0 \leq n \leq 5$.
(f) Calcule los valores de los parámetros a, b_0 y b_1 que minimizan el error de modelado.
(g) Calcule el error de modelado $\mathscr{E}_2$ en el apartado (f).

11.14. En el Ejemplo 11.1, consideramos la secuencia $s_d[n] = \alpha^n u[n]$, que es la respuesta al impulso de un sistema todo polos de primer orden con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

En este problema se considera la estimación de los parámetros de un modelo todo polos de la señal $s_d[n]$ conocida sólo en el intervalo $0 \leq n \leq M$.

(a) En primer lugar, considere la estimación de un modelo de primer orden mediante el método de la autocorrelación. Para empezar, demuestre que la función de autocorrelación de la secuencia de longitud finita $s[n] = s_d[n](u[n] - u[n-M-1]) = \alpha^n (u[n] - u[n-M-1])$ es

$$r_{ss}[m] = \alpha^{|m|} \frac{1 - \alpha^{2(M-|m|+1)}}{1 - \alpha^2}. \qquad \text{(P11.14-1)}$$

(b) Utilice en la Ecuación (11.34) la función de autocorrelación determinada en el apartado (a), y obtenga el coeficiente a_1 del predictor de primer orden.

(c) Debe haber obtenido que el resultado del apartado (b) no es el valor exacto (es decir, $a_1 \neq \alpha$) obtenido en el Ejemplo 11.1, cuando la función de autocorrelación se calcula utilizando una secuencia infinita. Demuestre que, sin embargo, $a_1 \to \alpha$ cuando $M \to \infty$.

(d) Utilice en la Ecuación (11.38) los resultados de (a) y (b) para determinar el error cuadrático medio mínimo de predicción para este ejemplo. Demuestre que cuando $M \to \infty$ el error tiende al error cuadrático medio mínimo que se obtuvo en el Ejemplo 11.1 para la función de autocorrelación exacta.

(e) (e) Considere ahora el método de la covarianza para estimar la función de correlación. Demuestre que para $p = 1$, $\phi_{ss}[i,k]$ en la Ecuación (11.49) se expresa como

$$\phi_{ss}[i,k] = \alpha^{2-i-k}\frac{1-\alpha^{2M}}{1-\alpha^2} \qquad 0 \leq (i,k) \leq 1. \tag{P11.14-2}$$

(f) Utilice en la Ecuación (11.29) resultado de (e) para obtener el coeficiente del predictor óptimo de primer orden. Compare su resultado con el obtenido en (b) y con el resultado del Ejemplo 11.1.

(g) Utilice en la Ecuación (11.37) los resultados de (e) y (f) para obtener el mínimo error cuadrático medio de predicción. Compare su resultado con el resultado de (d) y con el resultado del Ejemplo 11.1.

11.15. Considere la señal

$$s[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^n u[n]\,.$$

(a) Se desea utilizar un modelo todo polos causal de segundo orden, es decir, un modelo de la forma

$$H(z) = \frac{A}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}\,,$$

para representar óptimamente la señal $s[n]$, en el sentido de error cuadrático medio mínimo. Calcule a_1, a_2 y A.

(b) Suponga ahora que se desea utilizar un modelo todo polos causal de tercer orden, es decir, un modelo de la forma

$$H(z) = \frac{B}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3}}\,,$$

para representar óptimamente la señal $s[n]$, en el sentido de error cuadrático medio mínimo. Calcule b_1, b_2, b_3 y B.

11.16. Considere la señal

$$s[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{P11.16-1}$$

Se desea modelar esta señal utilizando un modelo todo polos de segundo orden ($p = 2$) o, equivalentemente, utilizando un predictor lineal de segundo orden.

En este problema, como tenemos una expresión analítica de $s[n]$ y $s[n]$ es la respuesta al impulso de filtro todo polos, se pueden obtener los coeficientes de predicción lineal directamente a partir de la transformada Z de $s[n]$ (se pide que lo haga en el apartado (a)). En situaciones prácticas, en general lo que tendremos son datos, es decir, una serie de valores de señal, y no una expresión analítica. En este caso, aunque la señal a modelar sea la respuesta al impulso de un filtro todo polos, será necesario realizar algunos cálculos con los datos, utilizando métodos como los que se presentan en la Sección 1.3, para determinar los coeficientes de predicción lineal.

Hay situaciones en las que existe una expresión analítica para la señal, pero ésta no es la respuesta al impulso de un filtro todo polos, y nos gustaría modelarla de esa forma. En este caso, será necesario también realizar algunos cálculos como los que se presentan en la Sección 11.3.

(a) Para la señal $s[n]$ dada en la Ecuación (P11.16-1), determine los coeficientes de predicción lineal a_1, a_2 directamente a partir de la transformada Z de $s[n]$.
(b) Escriba las ecuaciones normales para $p = 2$ para obtener las ecuaciones de a_1, a_2 en función de $r_{ss}[m]$.
(c) Determine los valores de $r_{ss}[0]$, $r_{ss}[1]$ y $r_{ss}[2]$ para la señal $s[n]$ dada en la Ecuación (P11.16.1).
(d) Resuelva el sistema del apartado (b) utilizando los valores obtenidos en el apartado (c), para hallar los valores de los coeficientes a_ks.
(e) ¿Son los valores de a_k obtenidos en el apartado (d) los que cabría esperar para esta señal? Justifique claramente su respuesta.
(f) Suponga que ahora se desea modelar la señal con $p = 3$. Escriba las ecuaciones normales en este caso.
(g) Obtenga el valor de $r_{ss}[3]$.
(h) Calcule los valores de a_k cuando $p = 3$.
(i) ¿Son los valores de a_k obtenidos en el apartado (h) los que cabría esperar dada $s[n]$? Justifique claramente su respuesta.
(j) ¿Cambiarían los valores de a_1, a_2 obtenidos en (h) se modelara la señal con $p = 4$?

11.17. $x[n]$ e $y[n]$ son secuencias de muestras de procesos aleatorios de media cero y conjuntamente estacionarios en sentido amplio. Se conoce la siguiente información sobre la función de autocorrelación $\phi_{xx}[m]$ y sobre la correlación cruzada $\phi_{yx}[m]$:

$$\phi_{xx}[m] = \begin{cases} 0 & m \text{ impar} \\ \frac{1}{2^{|m|}} & m \text{ par} \end{cases}$$

$$\phi_{yx}[-1] = 2 \qquad \phi_{yx}[0] = 3 \qquad \phi_{yx}[1] = 8 \qquad \phi_{yx}[2] = -3$$
$$\phi_{yx}[3] = 2 \qquad \phi_{yx}[4] = -0{,}75$$

(a) Se denota como $\hat{y}_x$ a la estimación lineal de y dada x. Se diseña para minimizar

$$\mathscr{E} = E\left(\mid y[n] - \hat{y}_x[n] \mid^2 \right), \tag{P11.17-1}$$

siendo $\hat{y}_x[n]$ la señal formada procesando $x[n]$ con un filtro FIR cuya respuesta al impulso $h[n]$ es de longitud 3 y está dada por

$$h[n] = h_0\delta[n] + h_1\delta[n-1] + h_2\delta[n-2].$$

Determine h_0, h_1 y h_2 que minimizan $\mathscr{E}$.

(b) En este apartado $\hat{y}_x$, la estimación lineal de y dada x, se diseña de nuevo para minimizar $\mathscr{E}$ en la Ecuación (P11.17-1), pero con suposiciones diferentes sobre la estructura del filtro lineal. En este caso la estimación se forma procesando $x[n]$ con un filtro FIR cuya respuesta al impulso $g[n]$ es de longitud 2 y está dada por

$$g[n] = g_1\delta[n-1] + g_2\delta[n-2].$$

Determine los valores g_1 y g_2 que minimizan $\mathscr{E}$.

(c) La señal $x[n]$ se puede modelar como la salida de un filtro $H(z)$ de dos polos cuya entrada es $w[n]$, una señal de ruido blanco de media cero, varianza unidad y estacionario en sentido amplio.

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

Determine a_1 y a_2 basándose en el modelo de mínimos cuadrados de la Sección 11.1.2.

(d) Se desea implementar el sistema que se muestra en la Figura P11.17, en el que los coeficientes a_i son los del modelo todo polos del apartado (c) y los coeficientes h_i son los valores de la respuesta al impulso del estimador lineal del apartado (a). Dibuje una implementación que minimice el coste total

de los retardos, donde el coste de cada retardo individual está ponderado linealmente por su frecuencia de reloj.

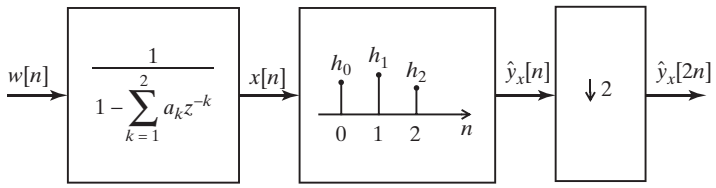


Figura P11.17

(e) Sea $\mathscr{E}_a$ el coste del apartado (a) y $\mathscr{E}_b$ el coste del apartado (b), donde cada $\mathscr{E}$ se define como indica la Ecuación (P11.17-1). ¿Es $\mathscr{E}_a$ mayor, menor o igual que $\mathscr{E}_b$, o no hay suficiente información para poder compararlos?

(f) Calcule $\mathscr{E}_a$ y $\mathscr{E}_b$ cuando $\phi_{yy}[0] = 88$. (*Sugerencia*: los filtros FIR óptimos calculados en los apartados (a) y (b) son tales que $E\left[\hat{y}_x[n](y[n] - \hat{y}_x[n])\right] = 0$.)

11.18. Un canal de comunicaciones en tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ se va a compensar con un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h_c[n]$ como se indica en la Figura P11.18. Se sabe que el canal $h[n]$ es un retardo de una muestra, es decir,

$$h[n] = \delta[n-1].$$

El compensador $h_c[n]$ es un filtro FIR causal de N puntos, es decir,

$$H_c(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}.$$

El compensador $h_c[n]$ se diseña para invertir (o compensar) el canal. Concretamente, $h_c[n]$ se diseña de forma que cuando $s[n] = \delta[n]$, $\hat{s}[n]$ sea tan "cercana" como sea posible a un impulso. Es decir, $h_c[n]$ se diseña de forma que se minimice el error

$$\mathscr{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{s}[n] - \delta[n]|^2$$

Obtenga el compensador óptimo de longitud N. Es decir, determine los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ que minimicen $\mathscr{E}$.

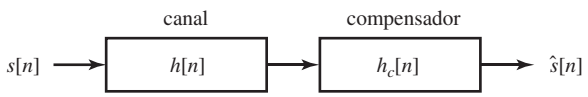


Figura P11.18

11.19. Se muestrea una señal de voz con una frecuencia de muestreo de 8 KHz. Se selecciona un segmento de 300 muestras de un sonido correspondiente a una vocal y se multiplica por una ventana de Hamming, tal como se muestra en la Figura P11.19. A partir de esta señal se calcula un conjunto de predictores lineales

$$P^{(i)}(z) = \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} z^{-k},$$

cuyos órdenes varían desde $i = 1$ hasta $i = 11$ utilizando el método de la autocorrelación. La Tabla 11.1 muestra este conjunto de predictores en una forma que sugiere al algoritmo de Levinson–Durbin.

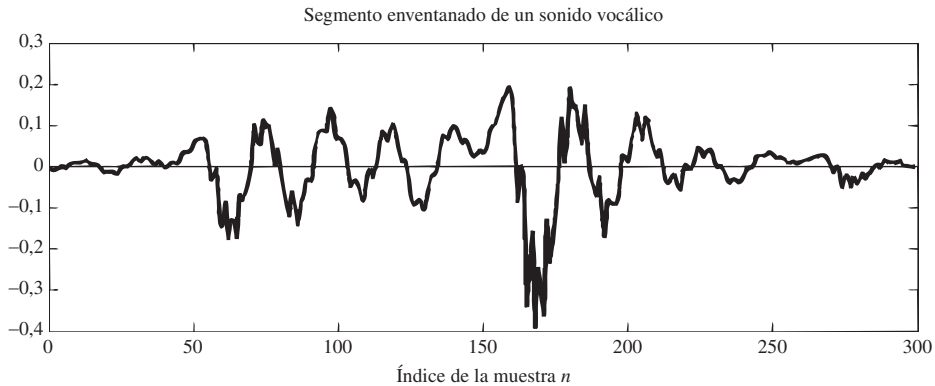


Figura P11.19

(a) Determine la transformada $ZA^{(4)}(z)$ del filtro de error de predicción de cuarto orden. Dibuje y etiquete el grafo de flujo de la implementación en forma directa de este sistema.

(b) Determine el conjunto de parámetros k $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ del filtro en celosía de error de predicción de orden 4. Dibuje y etiquete el grafo de flujo de la implementación en celosía de este sistema.

(c) El mínimo error cuadrático medio de predicción del predictor de segundo orden es $E^{(2)} = 0{,}5803$. ¿Cuál es el mínimo error cuadrático de predicción del predictor de tercer orden? ¿Cuál es la energía total de la señal $s[n]$? ¿Cuál es el valor de la función de autocorrelación $r_{ss}[1]$?

(d) Los errores cuadráticos medios de predicción mínimos de estos predictores forma una secuencia $\{E^{(0)}, E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(11)}\}$. Se puede demostrar que esta secuencia disminuye abruptamente al pasar de $i = 0$ a $i = 1$ y después disminuye más lentamente para varios órdenes, y posteriormente tiene un descenso abrupto. ¿En qué orden i puede esperar que ocurra esto?

(e) Dibuje cuidadosamente, con tanto detalle como le sea posible, la secuencia de error de predicción $e^{(11)}[n]$ para la entrada $s[n]$ dada en la Figura P11.19.

(f) La función de transferencia del modelo todo polos de orden 11 es

$$H(z) = \frac{G}{A^{(11)}(z)} = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{11} a_k^{(11)} z^{-k}} = \frac{G}{\prod_{i=1}^{11} (1 - z_i z^{-1})}.$$

TABLA 11.1 COEFICIENTES DE PREDICCIÓN DE UN CONJUNTO DE PREDICTORES LINEALES

i	$a_1^{(i)}$	$a_2^{(i)}$	$a_3^{(i)}$	$a_4^{(i)}$	$a_5^{(i)}$	$a_6^{(i)}$	$a_7^{(i)}$	$a_8^{(i)}$	$a_9^{(i)}$	$a_{10}^{(i)}$	$a_{11}^{(i)}$
1	0.8328										
2	0.7459	0.1044									
3	0.7273	−0.0289	0.1786								
4	0.8047	−0.0414	0.4940	−0.4337							
5	0.7623	0.0069	0.4899	−0.3550	−0.0978						
6	0.6889	−0.2595	0.8576	−0.3498	0.4743	−0.7505					
7	0.6839	−0.2563	0.8553	−0.3440	0.4726	−0.7459	−0.0067				
8	0.6834	−0.3095	0.8890	−0.3685	0.5336	−0.7642	0.0421	−0.0713			
9	0.7234	−0.3331	1.3173	−0.6676	0.7402	−1.2624	0.2155	−0.4544	0.5605		
10	0.6493	−0.2730	1.2888	−0.5007	0.6423	−1.1741	0.0413	−0.4103	0.4648	0.1323	
11	0.6444	−0.2902	1.3040	−0.5022	0.6859	−1.1980	0.0599	−0.4582	0.4749	0.1081	0.0371

A continuación se muestran cinco raíces del filtro de error de predicción de orden 11 $A^{(11)}(z)$.

i	$\lvert z_i \rvert$	$\angle z_i$ (rad)
1	0.2567	2.0677
2	0.9681	1.4402
3	0.9850	0.2750
4	0.8647	2.0036
5	0.9590	2.4162

Explique brevemente con palabras dónde estarán localizados los otros seis ceros de $A^{(11)}(z)$. Sea tan preciso como sea posible.

(g) Utilice la información proporcionada por la tabla y en el apartado (c) de este problema para determinar el parámetro de ganancia G del modelo todo polos de orden 11.

(h) Dibuje y etiquete cuidadosamente la gráfica de la respuesta en frecuencia del filtro del modelo todo polos de orden 11 para las frecuencias analógicas $0 \leq F \leq 4$ kHz.

11.20. El análisis espectral se aplica frecuentemente a señales compuestas por sinusoides. Las señales sinusoidales son de particular interés, ya que comparten propiedades de las señales deterministas y las señales aleatorias. Por una parte, se pueden describir utilizando una ecuación simple. Por otra parte, tienen energía infinita, por lo que muchas veces son caracterizadas en función de su potencia media, como las señales aleatorias. Este problema explora algunos aspectos teóricos del modelado de señales sinusoidales desde el punto de vista de las señales aleatorias.

Podemos considerar las señales aleatorias como señales aleatorias estacionarias suponiendo que el modelo de señal es $s[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)$ para $-\infty < n < \infty$, donde A y θ se consideran como variables aleatorias. En este modelo, la señal se considera como un conjunto de sinusoides descritas por leyes de probabilidad subyacentes de A y θ. Suponga por simplicidad que A es constante y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

(a) Demuestre que la función de autocorrelación de esa señal es

$$r_{ss}[m] = E\{s[n+m]s[n]\} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m). \tag{P11.20-1}$$

(b) Utilizando la Ecuación (11.34), escriba el sistema de ecuaciones satisfecho por los coeficientes de un predictor lineal de segundo orden de esta señal.

(c) Resuelva las ecuaciones de (b) para obtener los coeficientes del predictor óptimo. Su respuesta debe ser función de ω_0.

(d) Factorice el polinomio $A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$ que describe al filtro de error de predicción.

(e) Utilice la Ecuación (11.37) para determinar una expresión del error cuadrático medio de predicción mínimo. Su respuesta debería confirmar por qué las señales sinusoidales aleatorias se denominan "predecibles" y/o "deterministas".

11.21. Utilizando las Ecuaciones (11.84a) y (11.84b) de la recursión de Levinson–Durbin, obtenga la relación entre los filtros de error de predicción i-ésimo e $i-1$-ésimo dados en la Ecuación (11.89).

11.22. En este problema, consideraremos el diseño de filtros en celosía que implementen el filtro inverso para la señal

$$s[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

(a) Obtenga los valores de los parámetros k, k_1 y k_2 para el caso de segundo orden (es decir, $p = 2$).

(b) Dibuje el grafo de flujo de señales de la implementación en celosía del filtro inverso, es decir, el filtro cuya salida es $y[n] = A\delta[n]$ (un impulso escalado) cuando la entrada es $x[n] = s[n]$.

(c) Verifique que el grafo de flujo de señales dibujado en el apartado (b) tiene la respuesta al impulso correcta demostrando que la transformada Z del filtro inverso es realmente proporcional a la inversa de $S(z)$.

(d) Dibuje el grafo de flujo de señales de un filtro en celosía que implemente un sistema todo polos tal que cuando la entrada sea $x[n] = \delta[n]$, la salida sea la señal $s[n]$ dada anteriormente.

(e) Obtenga la función de transferencia a partir del grafo de flujo de señales que ha dibujado en el apartado (d) y demuestre que su respuesta al impulso $h[n]$ cumple que $h[n] = s[n]$.

11.23. Considere la señal

$$s[n] = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] + \beta \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

siendo α y β constantes. Se desea predecir linealmente $s[n]$ a partir de sus p muestras pasadas utilizando la relación

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k]$$

donde los coeficientes a_k son constantes. Los coeficientes a_k se elijen de forma que se minimice el error de predicción

$$\mathscr{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (s[n] - \hat{s}[n])^2.$$

(a) Siendo $r_{ss}[m]$ la función de autocorrelación de $s[n]$, escriba las ecuaciones para el caso de $p = 2$ cuya solución permite obtener los coeficientes a_1, a_2.

(b) Determine una pareja de valores de α y β tales que, cuando $p = 2$, la solución de las ecuaciones normales sea $a_1 = \frac{11}{12}$ y $a_2 = -\frac{1}{6}$. ¿Es única su respuesta? Explique por qué.

(c) Si $\alpha = 8$ y $\beta = -3$, determine el parámetro k_3, resultante de utilizar la recursión de Levinson–Durbin para resolver las ecuaciones normales cuando $p = 3$. ¿Será diferente k_3 cuando se resuelven las ecuaciones para el caso de $p = 4$?

11.24. Considere las siguientes ecuaciones de Yule–Walker $\Gamma_p\, a_p = \gamma_p$, siendo:

$$a_p = \begin{matrix} a_1^p \\ \vdots \\ a_p^p \end{matrix} \qquad \gamma_p = \begin{matrix} \phi[1] \\ \vdots \\ \phi[p] \end{matrix}$$

y

$$\Gamma_p = \begin{matrix} \phi[0] & \cdots & \phi[p-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi[p-1] & \cdots & \phi[0] \end{matrix} \qquad \text{(una matriz Toeplitz)}$$

El algoritmo de Levinson–Durbin proporciona la siguiente solución recursiva para el sistema de ecuaciones normales $\Gamma_{p+1}\, a_{p+1} = \gamma_{p+1}$:

$$a_{p+1}^{p+1} = \frac{\phi[p+1] - \left(\gamma_p^b\right)^T a_p}{\phi[0] - \left(\gamma_p\right)^T a_p} \qquad a_m^{p+1} = a_m^p - a_{p+1}^{p+1} \cdot a_{p-m+1}^p \qquad m = 1, \ldots, p$$

donde γ_p^b es la versión regresiva de γ_p: $\gamma_p^b = [\phi[p] \ldots \phi[1]]^T$, y $a_1^1 = \frac{\phi[1]}{\phi[0]}$. Nótese que para vectores, el orden del modelo se muestra como subíndice. Para escalares, dicho orden se muestra como superíndice.

Considere ahora la siguiente ecuación normal $\Gamma_p\, b_p = c_p$, siendo

$$\mathbf{b_p} = \begin{matrix} b_1^p \\ \vdots \\ b_p^p \end{matrix} \qquad c_p = \begin{matrix} c[1] \\ \vdots \\ c[p] \end{matrix}$$

Demuestre que la solución recursiva de $\Gamma_{p+1}\, b_{p+1} = c_{p+1}$ es:

$$b_{p+1}^{p+1} = \frac{c[p+1] - \left(\gamma_p^b\right)^T b_p}{\phi[0] - \left(\gamma_p\right)^T a_p} \qquad\qquad b_m^{p+1} = b_m^p - b_{p+1}^{p+1} \cdot a_{p-m+1}^p \qquad m = 1, \ldots, p$$

siendo $b_1^1 = \frac{c[1]}{\phi[0]}$.

(*Sugerencia*: puede serle útil advertir que $a_p^b = \Gamma_p^{-1}\gamma_p^b$.)

11.25. Considere una señal $s[n]$ coloreada y estacionaria en sentido amplio, que se desea blanquear utilizando el sistema de la Figura P11.25-1. Para diseñar el filtro blanqueador óptimo de orden p, se obtienen los coeficientes $a_k^{(p)}$, $k = 1, ..., p$ que satisfacen las ecuaciones normales de la autocorrelación dadas en la Ecuación (11.34), siendo $r_{ss}[m]$ la autocorrelación de $s[n]$.

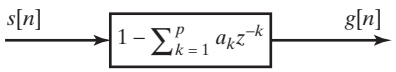


Figura P11.25-1

Se sabe que el filtro blanqueador óptimo de segundo orden para $s[n]$ es $H_2(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}$, (es decir, $a_1^{(2)} = -\frac{1}{4}$, $a_2^{(2)} = \frac{1}{8}$), que se implementa mediante la estructura en celosía de segundo orden que se muestra en la Figura P11-25-2. Se desea utilizar un sistema de cuarto orden, con función de transferencia

$$H_4(z) = 1 - \sum_{k=1}^{4} a_k^{(4)} z^{-k}.$$

Este sistema se implementa con la estructura en celosía que se muestra en la Figura P11.25-3. Determine cuáles (si hay alguno) de $H_4(z)$, k_1, k_2, k_3, k_4 se pueden determinar de forma exacta con la información proporcionada anteriormente. Si no es posible determinar todos, explique por qué no es posible determinar aquellos que no pueda.

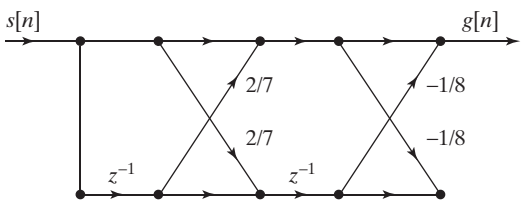


Figura P11.25-2 Estructura en celosía del sistema de segundo orden.

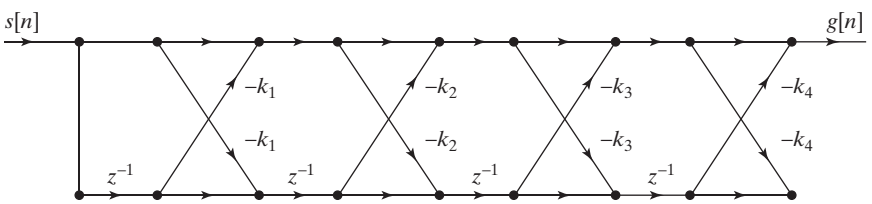


Figura P11.25-3 Estructura en celosía del sistema de cuarto orden.

Problemas de ampliación

11.26. Considere un modelo todo polos estable cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{m=1}^{p} a_m z^{-m}} = \frac{G}{A(z)}.$$

Suponga que G es positiva.

En este problema, demostraremos que el conjunto de $(p+1)$ muestras del módulo al cuadrado de $H(z)$ en la circunferencia unidad, es decir,

$$C[k] = |H(e^{j\pi k/p})|^2 \qquad k = 0, 1, \ldots, p,$$

es suficiente para representar al sistema. Concretamente, dados $C[k]$, $k = 0, 1, \ldots, p$, demostraremos que se pueden determinar los parámetros G y a_m, $m = 0, 1, \ldots, p$.

(a) Considere la transformada Z

$$Q(z) = \frac{1}{H(z)H(z^{-1})} = \frac{A(z)A(z^{-1})}{G^2},$$

que corresponde a una secuencia $q[n]$. Determine la relación entre $q[n]$ y $h_A[n]$, la respuesta al impulso del filtro de error de predicción cuya función de transferencia es $A(z)$. ¿En qué intervalo de valores de n será distinta de cero $q[n]$?

(b) Diseñe un procedimiento basado en la DFT para determinar $q[n]$ a partir de las muestras del módulo al cuadrado $C[k]$.

(c) Suponiendo conocida la secuencia $q[n]$ determinada en (b), obtenga un procedimiento para determinar $A(z)$ y G.

11.27. La estructura IIR general en celosía de la Figura 11.21 está restringida a sistemas todo polos. Sin embargo, con el sistema de la Figura P11.27-1 se pueden implementar tanto polos como ceros. (Gray y Markel, 1973, 1975). Cada sección de la Figura P11.27-1 se describe mediante el grafo de flujo de la Figura P11.27-2. En otras palabras, la Figura 11.21 está incluida en la Figura P11.27-1, formándose la salida como una combinación lineal de las secuencias de error de predicción hacia atrás.

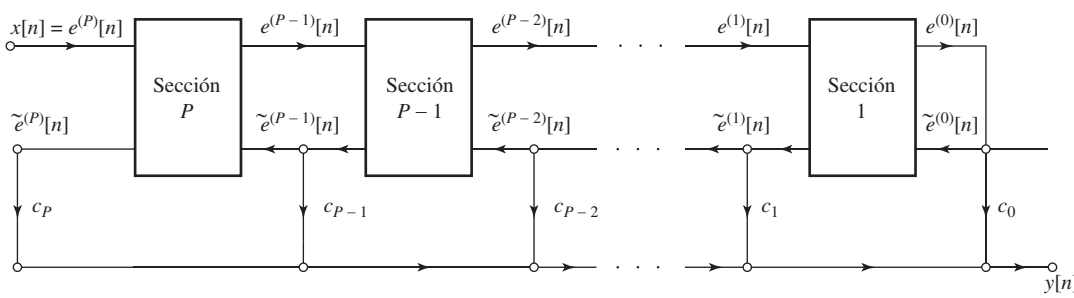


Figura P11.27-1

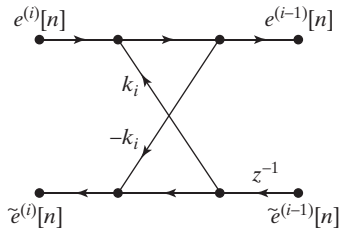


Figura P11.27-2

(a) Demuestre que la función de transferencia entre la entrada $X(z) = E^{(p)}(z)$ y $\tilde{E}^{(i)}(z)$ is

$$\tilde{H}^{(i)}(z) = \frac{\tilde{E}^{(i)}(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}A^{(i)}(z^{-1})}{A^{(p)}(z)}. \tag{P11.27-1}$$

(b) Demuestre que $\tilde{H}^{(p)}(z)$ es un sistema paso todo (este resultado no es necesario para el resto del problema).

(c) La función de transferencia completa desde $X(z)$ hasta $Y(z)$ es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{p} \frac{c_i z^{-1} A^{(i)}(z^{-1})}{A^{(p)}(z)} = \frac{Q(z)}{A^{(p)}(z)}. \tag{P11.27-2}$$

Demuestre que el numerador $Q(z)$ en la Ecuación (P11.27-2) es un polinomio de grado p de la forma

$$Q(z) = \sum_{m=0}^{p} q_m z^{-m} \tag{P11.27-3}$$

donde los coeficientes c_m de la Figura P11.27 están dados por la ecuación

$$c_m = q_m + \sum_{i=m+1}^{p} c_i a_{i-m}^{(i)} \quad m = p, p-1, \ldots, 1, 0. \tag{P11.27-4}$$

(d) Proporcione un procedimiento para calcular todos los parámetros necesarios para implementar una función de transferencia como la de la Ecuación (P11.27-2) utilizando la estructura en celosía de la Figura P11.27.

(e) Utilizando el procedimiento descrito en (c), dibuje el grafo de flujo completo de la implementación en celosía del sistema

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}64z^{-2} - 0{,}576z^{-3}}. \tag{P11.27-5}$$

11.28. En la Sección 11.7.3, se calculan los parámetros k mediante las Ecuaciones (11.101). Utilizando las relaciones $e^{(i)}[n] = e^{(i-1)}[n] - k_i \tilde{e}^{(i-1)}[n-1]$ and $\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n]$, demuestre que

$$k_i^P = \sqrt{k_i^f k_i^b},$$

donde k_i^f es el valor de k_i que minimiza el error cuadrático medio de predicción hacia delante

$$\mathscr{E}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{(i)}[n])^2,$$

y k_i^b es el valor de k_i que minimiza el error cuadrático medio de predicción hacia atrás

$$\tilde{\mathscr{E}}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{e}^{(i)}[n])^2.$$

11.29. Sustituya la Ecuación (11.88) y la Ecuación (11.93) en la Ecuación (11.101) para demostrar que

$$k_i^P = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(i-1)}[n]\tilde{e}^{(i-1)}[n-1]}{\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(e^{(i-1)}[n])^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\tilde{e}^{(i-1)}[n-1])^2\right\}^{1/2}}$$

$$= \frac{r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j]}{\mathscr{E}^{(i-1)}} = k_i.$$

11.30. Como se indicó en la Sección 11.7.3, Burg (1975) propuso calcular los parámetros k de forma que se minimice la suma de los errores de predicción hacia delante y hacia atrás en la i-ésima etapa del filtro en celosía, es decir,

$$\mathscr{B}^{(i)} = \sum_{n=i}^{M}\left[(e^{(i)}[n])^2 + (\tilde{e}^{(i)}[n])^2\right] \tag{P11.30-1}$$

donde la suma se realiza en el intervalo fijo $i \le n \le M$.

(a) Sustituya las señales del filtro en celosía $e^{(i)}[n] = e^{(i-1)}[n] - k_i\tilde{e}^{(i-1)}[n-1]$ y $\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n]$ en la Ecuación (P11.30-1) y demuestre que el valor de k_i que minimiza $\mathscr{B}^{(i)}$ es

$$k_i^B = \frac{2\sum_{n=i}^{M} e^{(i-1)}[n]\tilde{e}^{(i-1)}[n-1]}{\left\{\sum_{n=i}^{M}(e^{(i-1)}[n])^2 + \sum_{n=i}^{M}(\tilde{e}^{(i-1)}[n-1])^2\right\}}. \tag{P11.30-2}$$

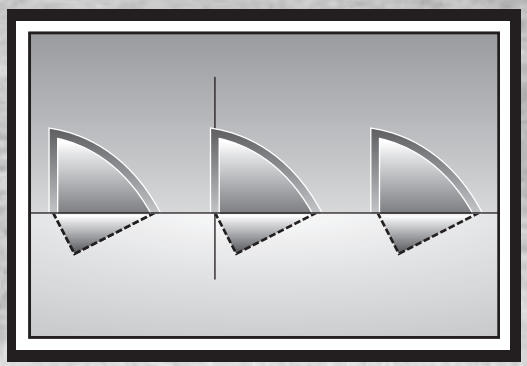
(b) Demuestre que $-1 < k_i^B < 1$.

Sugerencia: considere la expresión $\sum_{n=i}^{M}(x[n] \pm y[n])^2 > 0$ siendo $x[n]$ e $y[n]$ dos secuencias diferentes.

(c) Dado un conjunto de coeficientes de Burg k_i^B, $i = 1, 2, \ldots, p$, ¿cómo obtendría los coeficientes del correspondiente filtro de error de predicción $A^{(p)}(z)$?

12

Transformadas discretas de Hilbert



12.0. INTRODUCCIÓN

En general, la especificación de la transformada de Fourier de una secuencia requiere un conocimiento completo bien de la parte real e imaginaria, o del módulo y la fase, para todas las frecuencias en el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$. Sin embargo, hemos visto que, bajo ciertas condiciones, hay restricciones en la transformada de Fourier. Por ejemplo, en la Sección 2.8 vimos que si $x[n]$ es real, su transformada de Fourier es simétrica conjugada, es decir, $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$. De aquí se deduce que, para secuencias reales, la especificación de $X(e^{j\omega})$ para $0 \leq \omega \leq \pi$ determina su valor para $-\pi \leq \omega \leq 0$. De forma similar, vimos en la Sección 5.4 que, bajo la restricción de fase mínima, el módulo y la fase de la transformada de Fourier no son independientes. Es decir, la especificación del módulo determina la fase y la especificación de la fase determina el módulo salvo un factor de escala. En la Sección 8.5 vimos que, para secuencias de longitud finita N, la especificación de $X(e^{j\omega})$ en N frecuencias equiespaciadas determina $X(e^{j\omega})$ en todas las frecuencias.

En este capítulo, veremos que las restricciones de causalidad de una secuencia implican relaciones únicas entre las partes real e imaginaria de su transformada de Fourier. Las relaciones de este tipo entre las partes real e imaginaria de funciones complejas surgen en muchos campos además del tratamiento de señales, y se denominan comúnmente *relaciones de transformada de Hilbert*. Además de desarrollar esas relaciones para la transformada de Fourier de secuencias causales, obtendremos resultados relacionados para la DFT y para secuencias con transformadas de Fourier unilaterales. Además, en la Sección 12.3, indicaremos cómo se puede interpretar en términos de transformada de Hilbert la relación entre el módulo y la fase de secuencias de fase mínima.

Aunque este capítulo seguirá una perspectiva intuitiva (véase Gold, Oppenheim y Rader, 1970), es importante asegurarse de que las relaciones de transformada de Hilbert se deducen formalmente de las propiedades de las funciones analíticas (véase el Problema 12.21). Concretamente, las funciones complejas que surgen en la representación matemática de señales y sistemas discretos son, generalmente, funciones con buen comportamiento. Con pocas excepciones, las transformadas Z que son de nuestro interés tienen regiones bien definidas en las que el desarrollo en serie de potencias es absolutamente convergente. Como un desarrollo en serie de potencias es una función analítica en su región de con-

vergencia, se deduce que las transformadas Z son funciones analíticas en el interior de su región de convergencia. Por definición de función analítica, esto significa que la transformada Z tiene una derivada bien definida en todos los puntos del interior de su región de convergencia. Además, el carácter analítico implica que la transformada Z, y todas sus derivadas, son funciones continuas dentro de su región de convergencia.

Las propiedades de las funciones analíticas implican algunas restricciones importantes en el comportamiento de la transformada Z en el interior de la región de convergencia. Como la transformada de Fourier es la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad, esas restricciones limitan también el comportamiento de la transformada de Fourier. Una de esas restricciones es que las partes real e imaginaria satisfacen las condiciones de Cauchy–Riemann, que relacionan las derivadas parciales de las partes real e imaginaria de una función analítica (véase, por ejemplo, Churchill y Brown, 1990). Otra restricción es la del teorema de la integral de Cauchy, mediante el cual el valor de una función compleja queda especificado en el interior de la región donde es analítica en función de los valores de dicha función en la frontera de la región. Basándose en esas restricciones para funciones analíticas es posible, bajo ciertas condiciones, obtener relaciones integrales explícitas entre las partes real e imaginaria de una transformada Z en un contorno cerrado dentro de la región de convergencia. En la literatura matemática, esas relaciones se denominan *fórmulas de Poisson*. En el contexto de teoría de sistemas se conocen como las *relaciones de transformada de Hilbert*.

En lugar de seguir la perspectiva matemática que acabamos de comentar, desarrollaremos las relaciones de transformada de Hilbert explotando el hecho de que las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una secuencia causal son las transformadas de las componentes par e impar, respectivamente, de la secuencia (propiedades 5 y 6 de la Tabla 2.1). Como demostraremos, una secuencia causal está completamente especificada por su parte par, lo que implica que la transformada de Fourier de dicha secuencia está completamente especificada por su parte real. Además de aplicar este argumento para especificar la transformada de Fourier de una secuencia causal particular en función de su parte real, podemos aplicarlo también, bajo ciertas condiciones, para especificar la transformada de Fourier de una secuencia en función de su módulo.

La noción de señal analítica es un concepto importante en tratamiento de señales en tiempo continuo. Una señal analítica es una función del tiempo compleja (analítica) que tiene una transformada de Fourier que se hace cero para frecuencias negativas. Una secuencia compleja no se puede considerar analítica en un sentido formal, ya que es función de una variable entera. Sin embargo, de una forma similar a lo que se ha comentado en el párrafo anterior, es posible relacionar las partes real e imaginaria de una secuencia compleja cuyo espectro es cero en la circunferencia unidad para $-\pi < \omega < 0$. Se puede utilizar un planteamiento similar para relacionar las partes real e imaginaria de la DFT de una secuencia periódica. En este caso, la condición de "causalidad" es que la secuencia periódica sea cero en la segunda mitad de cada periodo.

Por tanto, en este capítulo, se aplicará la noción de causalidad para relacionar las componentes par e impar de una función, o equivalentemente, las partes real e imaginaria de su transformada. Aplicaremos este planteamiento en cuatro situaciones. Primero, relacionaremos las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de una secuencia $x[n]$ que es cero para $n < 0$. En la segunda situación, obtendremos una relación entre las partes real e imaginaria de la DFT de secuencias periódicas, o equivalentemente, de una secuencia finita de longitud N, con la restricción de que los últimos $(N/2) - 1$ puntos valen cero. En el tercer caso, relacionaremos las partes real e imaginaria del *logaritmo* de la transformada de Fourier bajo la condición de que la transformada inversa del logaritmo de la transformada es cero para $n < 0$. Relacionar las partes real e imaginaria del logaritmo de la transformada de Fourier corresponde a relacionar el módulo y la fase de $X(e^{j\omega})$. Finalmente, relacionaremos las partes real e imaginaria de una secuencia compleja cuya transformada de Fourier, considerada como una función periódica de ω, es cero en la segunda mitad de cada periodo.

12.1. SUFICIENCIA DE LAS PARTES REAL E IMAGINARIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA SECUENCIAS CAUSALES

Cualquier secuencia se puede expresar como la suma de una secuencia par y de una secuencia impar. Concretamente, sean $x_e[n]$ y $x_o[n]$ las partes par e impar, respectivamente, de $x[n]$.[1] Tenemos entonces

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \tag{12.1}$$

donde

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \tag{12.2}$$

y

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}. \tag{12.3}$$

Las Ecuaciones (12.1) a (12.3) se pueden aplicar a una secuencia arbitraria, sea, o no, causal y sea, o no, real. Sin embargo, si $x[n]$ es causal, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < 0$, es posible recuperar $x[n]$ a partir de $x_e[n]$ o recuperar $x[n]$ para $n \neq 0$ a partir de $x_o[n]$. Consideremos, por ejemplo, la secuencia causal $x[n]$ y sus componentes par e impar, como se muestra en la Figura 12.1. Como $x[n]$ es causal, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $x[-n] = 0$ para $n > 0$. Por tanto, las partes distintas de cero de $x[n]$ y de $x[-n]$ no se solapan excepto en $n = 0$. Por esta razón, se deduce de las Ecuaciones (12.2) y (12.3) que

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] \tag{12.4}$$

y

$$x[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n]. \tag{12.5}$$

La Figura 12.1 permite apreciar la validez de estas relaciones. Nótese que $x[n]$ queda completamente determinada por $x_e[n]$. Por otra parte, $x_o[0] = 0$, por lo que sólo se puede recuperar $x[n]$ a partir de $x_o[n]$ para $n \neq 0$.

Ahora, si $x[n]$ es estable, es decir, absolutamente sumable, entonces su transformada de Fourier existe. Indicaremos la transformada de Fourier de $x[n]$ como

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \tag{12.6}$$

siendo $X_R(e^{j\omega})$ y $X_I(e^{j\omega})$ las partes real e imaginaria, respectivamente, de $X(e^{j\omega})$. Recuerde que, como $x[n]$ es una secuencia *real*, entonces $X_R(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x_e[n]$ y $jX_I(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x_o[n]$. Por tanto, para una secuencia *causal, estable* y *real*, $X_R(e^{j\omega})$ determina completamente a $X(e^{j\omega})$, ya que si tenemos $X_R(e^{j\omega})$, $X(e^{j\omega})$ se puede obtener mediante el siguiente proceso:

1. Obtener $x_e[n]$ como la transformada inversa de Fourier de $X_R(e^{j\omega})$.
2. Obtener $x[n]$ utilizando la Ecuación (12.4).
3. Obtener $X(e^{j\omega})$ como la transformada de Fourier de $x[n]$.

[1] Si $x[n]$ es real, entonces $x_e[n]$ y $x_o[n]$ en las Ecuaciones (12.2) y (12.3), son las partes par e impar de $x[n]$ respectivamente, tal como se consideran en el Capítulo 2. Si $x[n]$ es compleja, para los objetivos de esta explicación, podemos definir todavía $x_e[n]$ y $x_o[n]$ como se indica en las Ecuaciones (12.2) y (12.3), aunque no corresponden a las partes simétrica conjugada y antisimétrica conjugada de una secuencia compleja, tal como se definieron en el Capítulo 2.

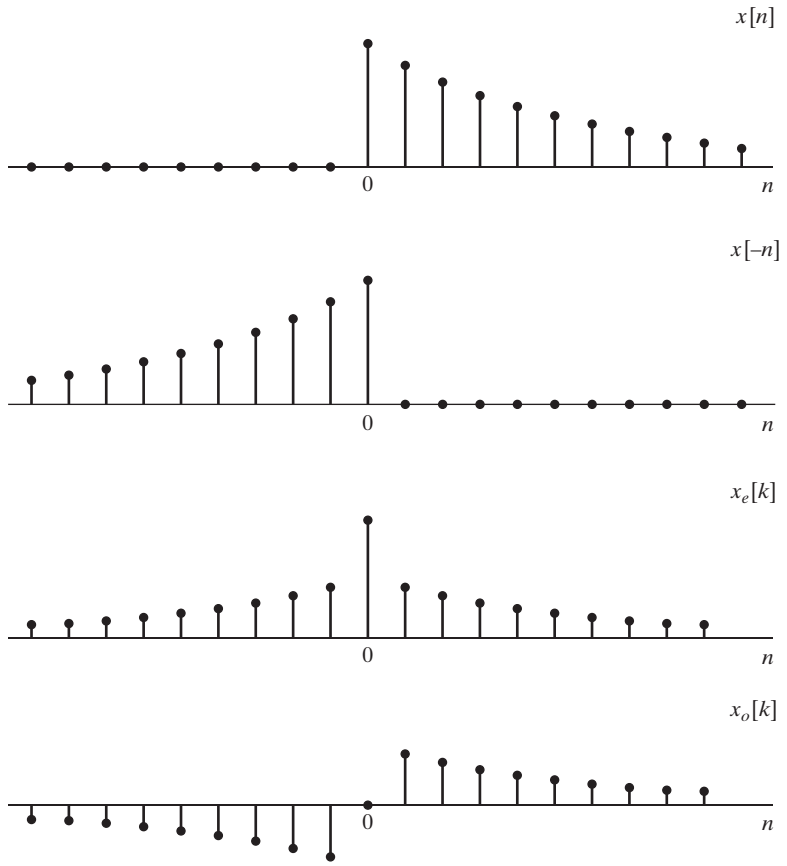


Figura 12.1 Partes par e impar de una secuencia real causal.

Esto también implica, por supuesto, que $X_I(e^{j\omega})$ se puede determinar a partir de $X_R(e^{j\omega})$. En el Ejemplo 12.1 ilustramos cómo se puede aplicar este procedimiento para obtener $X(e^{j\omega})$ y $X_I(e^{j\omega})$ a partir de $X_R(e^{j\omega})$.

Ejemplo 12.1 Secuencia de longitud finita

Considere una secuencia $x[n]$ real y causal, cuya parte real de su transformada de Fourier en tiempo discreto $X_R(e^{j\omega})$ es

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos 2\omega. \tag{12.7}$$

Deseamos determinar la secuencia original $x[n]$, su transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ y la parte imaginaria de su transformada de Fourier, $X_I(e^{j\omega})$. Como primer paso, escribiremos la Ecuación (12.7) expresando el coseno como suma de exponenciales complejas:

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j2\omega}. \tag{12.8}$$

Sabemos que $X_R(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x_e[n]$, la parte par de $x[n]$ tal como se define en la Ecuación (12.2). Comparando la Ecuación (12.8) con la definición de transformada de Fourier de la

Ecuación (2.131) e identificando términos, obtenemos

$$x_e[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n+2].$$

Ahora que hemos obtenido la parte par, podemos emplear la relación de la Ecuación (12.4) para obtener

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]. \tag{12.9}$$

A partir de $x[n]$, obtenemos

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= 1 + e^{-j2\omega} \\ &= 1 + \cos 2\omega - j \operatorname{sen} 2\omega. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Utilizando de la Ecuación (12.10), podemos confirmar que $X_R(e^{j\omega})$ es como se especifica en la Ecuación (12.7) y obtener también que

$$X_I(e^{j\omega}) = -\operatorname{sen} 2\omega. \tag{12.11}$$

Una forma alternativa de obtener $X_I(e^{j\omega})$, es utilizar primero la Ecuación (12.3) para hallar $x_o[n]$ a partir de $x[n]$. Sustituyendo la Ecuación (12.9) en la (12.3) se obtiene

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] - \frac{1}{2}\delta[n+2].$$

La transformada de Fourier de $x_o[n]$ es $jX_I(e^{j\omega})$, con lo que

$$\begin{aligned} jX_I(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}e^{-j2\omega} - \frac{1}{2}e^{j2\omega} \\ &= -j \operatorname{sen} 2\omega, \end{aligned}$$

de forma que

$$X_I(e^{j\omega}) = -\operatorname{sen} 2\omega,$$

que es consistente con la Ecuación (12.11).

Ejemplo 12.2 Secuencia exponencial

Sea

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha\cos\omega}{1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2}, \qquad |\alpha| < 1, \tag{12.12}$$

o equivalentemente

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\alpha/2)(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 - \alpha(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \alpha^2}, \qquad |\alpha| < 1, \tag{12.13}$$

con α real. Determinamos primero $x_e[n]$ y después $x[n]$ utilizando la Ecuación (12.4).

Para obtener $x_e[n]$, la transformada inversa de Fourier de $X_R(e^{j\omega})$, es conveniente obtener primero $X_R(z)$, la transformada Z de $x_e[n]$. Esto se deduce directamente de la Ecuación (12.13), dado que

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(z)\big|_{z=e^{j\omega}}.$$

Por tanto, sustituyendo $e^{j\omega}$ por z en la Ecuación (12.13), obtenemos que

$$X_R(z) = \frac{1-(\alpha/2)(z+z^{-1})}{1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2} \tag{12.14}$$

$$= \frac{1-\frac{\alpha}{2}(z+z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}. \tag{12.15}$$

Como hemos comenzado con la transformada de Fourier $X_R(e^{j\omega})$ y hemos obtenido $X_R(z)$ en el plano z, la región de convergencia de $X_R(e^{j\omega})$ debe, por supuesto, incluir a la circunferencia unidad y, por tanto, está limitada internamente por el polo en $z=\alpha$ y externamente por el polo en $z=1/\alpha$.

Utilizando la Ecuación (12.15), deseamos obtener $x_e[n]$, la transformada Z inversa de $X_R(z)$. Para ello realizaremos la descomposición en fracciones simples de la Ecuación (12.15), con lo que resulta

$$X_R(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z}\right], \tag{12.16}$$

con la región de convergencia especificada que incluye a la circunferencia unidad. La transformada Z inversa de la Ecuación (12.16) se puede aplicar separadamente a cada término, con lo que se obtiene

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\alpha^n u[n] + \frac{1}{2}\alpha^{-n}u[-n]. \tag{12.17}$$

Por tanto, de la Ecuación (12.4),

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha^n u[n] + \alpha^{-n}u[-n]u[n] - \delta[n] \\ &= \alpha^n u[n]. \end{aligned}$$

$X(e^{j\omega})$ está, por tanto, dada por

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}, \tag{12.18}$$

y $X(z)$ por

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad |z| > |\alpha|. \tag{12.19}$$

El procedimiento constructivo que ilustra el Ejemplo 12.1 se puede interpretar analíticamente para obtener una relación general que expresa directamente $X_I(e^{j\omega})$ en función de $X_R(e^{j\omega})$. A partir de la Ecuación (12.4), del teorema de convolución compleja y del hecho de que $x_e[0] = x[0]$, se deduce que

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})U(e^{j(\omega-\theta)})d\theta - x[0], \tag{12.20}$$

donde $U(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la secuencia escalón unidad. Como se indicó en la Sección 2.7, aunque el escalón unidad no es absolutamente sumable ni de cuadrado sumable, se puede representar por la transformada de Fourier

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega-2\pi k) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}, \tag{12.21}$$

o, ya que el término $1/(1-e^{-j\omega})$ se puede expresar como

$$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{12.22}$$

la Ecuación (12.21) se convierte en

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{12.23}$$

Utilizando la Ecuación (12.23) se puede expresar la Ecuación (12.20) como

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \\ &= X_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})d\theta \\ &\quad - \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta - x[0]. \end{aligned} \tag{12.24}$$

Igualando las partes real e imaginaria de la Ecuación (12.24) y teniendo en cuenta que

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})d\theta, \tag{12.25}$$

obtenemos la relación

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta. \tag{12.26}$$

Se puede seguir un procedimiento similar para obtener $x[n]$ y $X(e^{j\omega})$ a partir de $X_I(e^{j\omega})$ y $x[0]$ utilizando la Ecuación (12.5). Siguiendo el proceso se obtiene la siguiente ecuación de $X_R(e^{j\omega})$ en función de $X_I(e^{j\omega})$:

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta. \tag{12.27}$$

Las Ecuaciones (12.26) y (12.27), que se denominan *relaciones de transformada discreta de Hilbert*, son válidas para las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una secuencia real, causal y estable. Son integrales impropias, ya que el integrando es singular en $\omega - \theta = 0$. Se deben evaluar cuidadosamente para obtener un resultado consistente finito. Esto se puede realizar formalmente interpretando las integrales como *valores principales de Cauchy*. Así la Ecuación (12.26) se convierte en

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta, \tag{12.28a}$$

y la Ecuación (12.27) se convierte en

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta, \tag{12.28b}$$

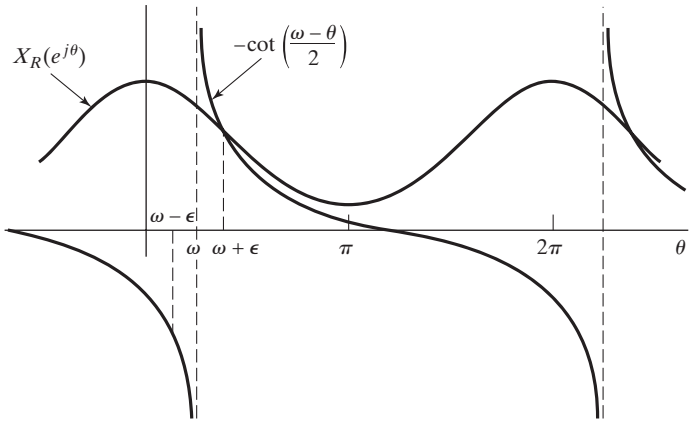


Figura 12.2 Interpretación de la transformada de Hilbert como una convolución periódica.

donde $\mathscr{P}$ indica el valor principal de Cauchy de la integral que sigue. El significado del valor principal de Cauchy, por ejemplo, en la Ecuación (12.28a) es

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\omega+\varepsilon}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta + \int_{-\pi}^{\omega-\varepsilon} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta\right]. \tag{12.29}$$

La Ecuación (12.29) muestra que $X_I(e^{j\omega})$ se obtiene mediante la convolución periódica de $-\cot(\omega/2)$ con $X_R(e^{j\omega})$, con especial cuidado en la vecindad de la singularidad en $\theta = \omega$. De una forma similar, la Ecuación (12.28b) involucra la convolución periódica de $\cot(\omega/2)$ con $X_I(e^{j\omega})$.

Las dos funciones que intervienen en la integral de convolución de la Ecuación (12.28a) o, equivalentemente de la ecuación (12.29), se ilustran en la Figura 12.2. El límite de la Ecuación (12.29) existe porque la función $\cot[(\omega-\theta)/2]$ es antisimétrica en el punto singular $\theta = \omega$ y el límite se toma simétricamente alrededor de la singularidad.

12.2. TEOREMAS DE SUFICIENCIA PARA SECUENCIAS DE LONGITUD FINITA

En la Sección 12.1 demostramos que la causalidad o la unilateralidad de una secuencia real implican restricciones fuertes en la transformada de Fourier de la secuencia. Los resultados de la sección anterior se aplican, por supuesto, a secuencias causales de longitud finita, pero como la propiedad de longitud finita es más restrictiva, quizá es razonable esperar que la transformada de Fourier de una secuencia de longitud finita esté más restringida. Veremos que éste es realmente el caso.

Una forma de aprovechar la propiedad de longitud finita es recordar que las secuencias de longitud finita se pueden representar mediante su transformada discreta de Fourier. Como la DFT utiliza sumas en vez de integrales, desaparecen los problemas asociados con las integrales impropias.

Como la DFT es en realidad una representación de una secuencia periódica, cualquier resultado que se obtenga se debe basar en los correspondientes resultados para secuencias periódicas. De hecho, es importante tener siempre en mente la periodicidad inherente a la DFT al obtener la relación deseada de

transformada de Hilbert para secuencias de longitud finita. Por tanto, consideraremos primero el caso periódico y después la aplicación al caso de longitud finita.

Consideremos una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ de periodo N, que se relaciona con una secuencia $x[n]$ de longitud finita de la siguiente forma

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \tag{12.30}$$

Como en la Sección 12.1, $\tilde{x}[n]$ se puede representar como suma de una secuencia par y otra impar

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \qquad n = 0, 1, \ldots, (N-1), \tag{12.31}$$

donde

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n]}{2}, \qquad n = 0, 1, \ldots, (N-1), \tag{12.32a}$$

y

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n]}{2}, \qquad n = 0, 1, \ldots, (N-1). \tag{12.32b}$$

Por supuesto, una secuencia periódica no puede ser causal en el sentido de la Sección 12.1. Sin embargo, podemos definir una secuencia periódica "periódicamente causal" como una señal que cumple que $\tilde{x}[n] = 0$ para $N/2 < n < N$. Es decir, $\tilde{x}[n]$ vale cero en la segunda mitad de cada periodo. Supondremos que N es par. El caso de N impar se considera en el Problema 12.25. Nótese que, debido a la periodicidad de $\tilde{x}[n]$, también se cumple que $\tilde{x}[n] = 0$ para $-N/2 < n < 0$. Para secuencias de longitud finita, esta restricción significa que, aunque la secuencia se considera de longitud N, los últimos $(N/2) - 1$ puntos son de hecho cero. En la Figura 12.3 mostramos un ejemplo de secuencia periódicamente causal y sus partes par e impar para $N = 8$. Como $\tilde{x}[n]$ es cero en la segunda mitad de cada periodo, $\tilde{x}[-n]$ es cero en la primera mitad de cada periodo y, por tanto, excepto en $n = 0$ y en $n = N/2$, no hay solapamiento entre las partes distintas de cero de $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{x}[-n]$. Por consiguiente, para secuencias periódicamente causales

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_e[n], & n = 1, 2, \ldots, (N/2) - 1, \\ \tilde{x}_e[n], & n = 0, N/2, \\ 0, & n = (N/2) + 1, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{12.33}$$

y

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_o[n], & n = 1, 2, \ldots, (N/2) - 1, \\ 0, & n = (N/2) + 1, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{12.34}$$

donde $\tilde{x}[n]$ no se puede recuperar a partir de $\tilde{x}_o[n]$ ya que $\tilde{x}_o[0] = \tilde{x}_o[N/2] = 0$. Si definimos la secuencia periódica

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, N/2, \\ 2, & n = 1, 2, \ldots, (N/2) - 1, \\ 0, & n = (N/2) + 1, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{12.35}$$

se deduce que, para N par, $\tilde{x}[n]$ se puede expresar como

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n]\tilde{u}_N[n] \tag{12.36}$$

y

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_o[n]\tilde{u}_N[n] + \tilde{x}[0]\tilde{\delta}[n] + \tilde{x}[N/2]\tilde{\delta}[n - (N/2)], \tag{12.37}$$

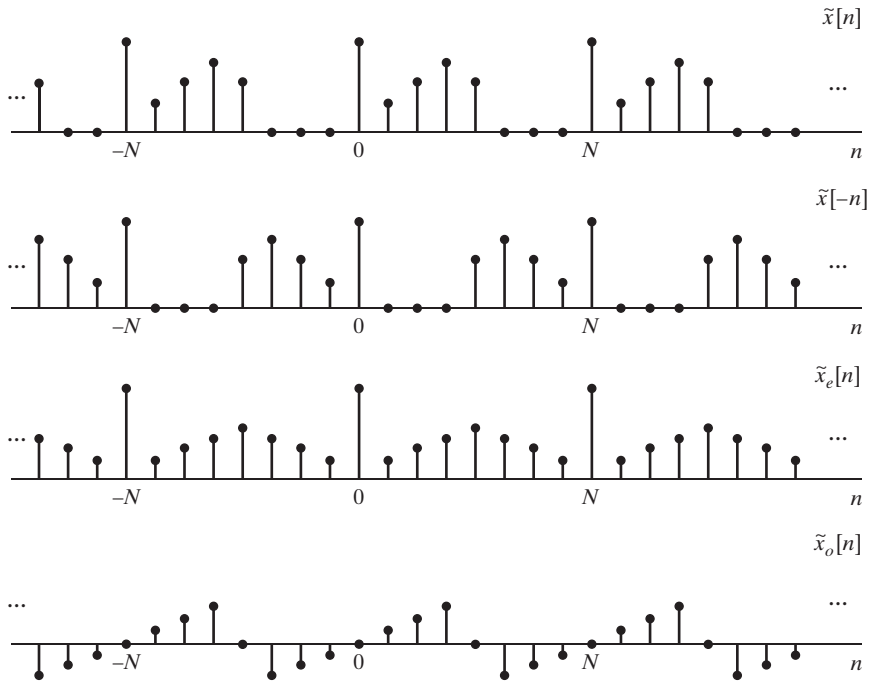


Figura 12.3 Partes par e impar de una secuencia periódica real y periódicamente causal de periodo $N = 8$.

donde $\tilde{\delta}[n]$ es la secuencia impulso unidad periódica de periodo N. Por tanto, la secuencia $\tilde{x}[n]$ se puede recuperar completamente a partir de $\tilde{x}_e[n]$. Por otra parte, $\tilde{x}_o[n]$ será siempre cero en $n = 0$ y en $n = N/2$, y por tanto, $\tilde{x}[n]$ sólo se puede recuperar a partir de $\tilde{x}_o[n]$ para $n \neq 0$ y $n \neq N/2$.

Si $\tilde{x}[n]$ es una secuencia periódica real de periodo N cuyo desarrollo en serie de Fourier es $\tilde{X}[k]$, entonces $\tilde{X}_R[k]$, la parte real de $\tilde{X}[k]$ es el desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}_e[n]$ y $j\tilde{X}_I[k]$ es el desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}_o[n]$. Por tanto, las Ecuaciones (12.36) y (12.37) implican que, para una secuencia periódica de periodo N, periódicamente causal en el sentido definido anteriormente, $\tilde{X}[k]$ se puede recuperar a partir de su parte real o (casi) de su parte imaginaria. Equivalentemente, $\tilde{X}_I[k]$ se puede obtener a partir de $\tilde{X}_R[k]$ y $\tilde{X}_R[k]$ se puede (casi) obtener a partir de $\tilde{X}_I[k]$.

Concretamente, supongamos que tenemos $\tilde{X}_R[k]$. Podemos obtener $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{X}_I[k]$ con el siguiente procedimiento:

1. Calcular $\tilde{x}_e[n]$ mediante la ecuación de síntesis del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_R[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{12.38}$$

2. Calcular $\tilde{x}[n]$ utilizando la Ecuación (12.36).
3. Calcular $\tilde{X}[k]$ utilizando la ecuación de análisis del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k]. \tag{12.39}$$

A diferencia del caso causal general presentado en la Sección 12.1, el procedimiento que se acaba de exponer se puede realizar con un computador, ya que las Ecuaciones (12.38) y (12.39) se pueden evaluar de forma precisa y eficiente utilizando un algoritmo de FFT.

Para obtener una relación explícita entre $\tilde{X}_R[k]$ y $\tilde{X}_I[k]$, se puede realizar el procedimiento analíticamente. A partir de la Ecuación (12.36) y de la Ecuación (8.34) se deduce que

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \tilde{X}_R[k] + j\tilde{X}_I[k] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m] \tilde{U}_N[k-m]; \end{aligned} \tag{12.40}$$

es decir, $\tilde{X}[k]$ es la convolución periódica de $\tilde{X}_R[k]$, el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{x}_e[n]$, con $\tilde{U}_N[k]$, el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{u}_N[n]$. Se puede demostrar que el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de $\tilde{u}_N[n]$ es (véase el Problema 12.24)

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -j2\cot(\pi k/N), & k \text{ impar}, \\ 0, & k \text{ par}. \end{cases} \tag{12.41}$$

Si definimos

$$\tilde{V}_N[k] = \begin{cases} -j2\cot(\pi k/N), & k \text{ impar}, \\ 0, & k \text{ par}, \end{cases} \tag{12.42}$$

la Ecuación (12.40) se puede expresar como

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_R[k] + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m] \tilde{V}_N[k-m]. \tag{12.43}$$

Por tanto,

$$j\tilde{X}_I[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_R[m] \tilde{V}_N[k-m], \tag{12.44}$$

que es la relación deseada entre las partes real e imaginaria del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de una secuencia periódicamente causal. De forma similar, empezando con la Ecuación (12.37), se puede demostrar que

$$\tilde{X}_R[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\tilde{X}_I[m] \tilde{V}_N[k-m] + \tilde{x}[0] + (-1)^k \tilde{x}[N/2]. \tag{12.45}$$

Las Ecuaciones (12.44) y (12.45) relacionan las partes real e imaginaria del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$. Si $\tilde{x}[n]$ se ve como la repetición periódica de la secuencia de longitud finita $x[n]$ como indica la Ecuación (12.30), entonces

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases} \tag{12.46}$$

Si $x[n]$ tiene la propiedad de "causalidad periódica" con respecto a un periodo N (es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y for $n > N/2$), entonces toda la explicación anterior se puede aplicar a la DFT de $x[n]$. En otras palabras, se pueden quitar las tildes de las Ecuaciones (12.44) y (12.45), con lo que se obtienen las relaciones de DFT

$$jX_I[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} X_R[m]V_N[k-m], & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{12.47}$$

y

$$X_R[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} jX_I[m]V_N[k-m] + x[0] + (-1)^k x[N/2], & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{12.48}$$

Nótese que la secuencia $V_N[k-m]$ dada en la Ecuación (12.42) es periódica de periodo N, por lo que no es necesario preocuparse por el cálculo de $((k-m))_N$ en las Ecuaciones (12.47) y (12.48), que son las relaciones buscadas entre las partes real e imaginaria de la DFT de N puntos de una secuencia real cuya longitud es menor o igual que $(N/2)+1$ (para N par). Estas ecuaciones son convoluciones circulares, y por ejemplo, la Ecuación (12.47) se puede evaluar eficientemente mediante el siguiente procedimiento:

1. Calcular la DFT inversa de $X_R[k]$ para obtener la secuencia

$$x_{\text{ep}}[n] = \frac{x[n] + x[((-n))_N]}{2}, \qquad 0 \le n \le N-1. \tag{12.49}$$

2. Calcular la parte periódica impar de $x[n]$ mediante

$$x_{\text{op}}[n] = \begin{cases} x_{\text{ep}}[n], & 0 < n < N/2, \\ -x_{\text{ep}}[n], & N/2 < n \le N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{12.50}$$

3. Calcular la DFT de $x_{\text{op}}[n]$ para obtener $jX_I[k]$.

Nótese que, si en vez de calcular la parte impar de $x[n]$ en el paso 2 calculáramos

$$x[n] = \begin{cases} x_{\text{ep}}[0], & n = 0, \\ 2x_{\text{ep}}[n], & 0 < n < N/2, \\ x_{\text{ep}}[N/2], & n = N/2, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{12.51}$$

la DFT de la secuencia resultante sería $X[k]$, la DFT completa de $x[n]$.

Ejemplo 12.3 Secuencia periódica

Considere una secuencia que es periódicamente causal con periodo $N = 4$ y para la que

$$X_R[k] = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 3, & k = 1, \\ 4, & k = 2, \\ 3, & k = 3. \end{cases}$$

Podemos obtener la parte imaginaria de la DFT de dos maneras. La primera de ellas es utilizar la Ecuación (12.47). Para $N = 4$,

$$V_4[k] = \begin{cases} 2j, & k = -1 + 4m, \\ -2j, & k = 1 + 4m, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases}$$

siendo m un entero. Realizando la convolución de la Ecuación (12.47) se obtiene

$$\begin{aligned} jX_I[k] &= \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} X_R[m]V_4[k-m], \qquad 0 \le k \le 3 \\ &= \begin{cases} j, & k = 1, \\ -j, & k = 3, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos seguir el procedimiento de tres pasos que incluye las Ecuaciones (12.49) y (12.50). Calculando la DFT inversa de $X_R[k]$ se obtiene

$$x_e[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X_R[k]W_4^{-kn} = \frac{1}{4}[2 + 3(j)^n + 4(-1)^n + 3(-j)^n] = \begin{cases} 3, & n = 0, \\ -\frac{1}{2}, & n = 1, 3, \\ 0, & n = 2. \end{cases}$$

Nótese que, aunque esta secuencia no tiene simetría par, una replicación periódica de $x_e[n]$ tiene simetría par. Por tanto, la DFT $X_R[k]$ de $x_e[n]$ es real. La Ecuación (12.50) nos permite obtener la parte periódicamente impar $x_{\text{op}}[n]$. Concretamente,

$$x_{\text{op}}[n] = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 1, \\ \frac{1}{2}, & n = 3, \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases}$$

Finalmente, se obtiene $jX_I[k]$ como la DFT de $x_{\text{op}}[n]$:

$$jX_I[k] = \sum_{n=0}^{3} x_{\text{op}}[n]W_4^{nk} = -\frac{1}{2}W_4^k + \frac{1}{2}W_4^{3k} = \begin{cases} j, & k = 1, \\ -j, & k = 3, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases}$$

que, por supuesto, coincide con la obtenida a partir de la Ecuación (12.47).

12.3. RELACIONES ENTRE EL MÓDULO Y LA FASE

Hasta ahora, nos hemos centrado en las relaciones entre las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una secuencia. A menudo son de interés las relaciones entre el módulo y la fase de la transformada de Fourier. En esta sección, consideraremos las condiciones bajo las que se pueden relacionar de forma única esas funciones. Aunque a primera vista puede parecer que una relación entre las partes real e imaginaria implica una relación entre el módulo y la fase, no es así. Esto se demuestra claramente en el Ejemplo 5.9 de la Sección 5.4. Las dos funciones de transferencia de ese ejemplo, $H_1(z)$ y $H_2(z)$ correspondían a sistemas causales y estables. Por tanto, las partes real e imaginaria de $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ se relacionan mediante las relaciones de transformada de Hilbert, Ecuaciones (12.28a) y (12.28b). Sin embargo, la fase de $\angle H_1(e^{j\omega})$ podría muy bien no obtenerse de $|H_1(e^{j\omega})|$, ya que $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ tienen el mismo módulo pero fase diferente.

La relación de transformación de Hilbert entre las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de una secuencia $x[n]$ se basa en la causalidad de $x[n]$. Se puede obtener una relación de transformación de Hilbert entre el módulo y la fase imponiendo causalidad a la secuencia $\hat{x}[n]$ obtenida a partir de $x[n]$ de forma que su transformada de Fourier $\hat{X}(e^{j\omega})$ sea el logaritmo de la transformada de Fourier de $x[n]$. Concretamente, si definimos $\hat{x}[n]$ de forma que

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}, \tag{12.52a}$$

$$\hat{x}[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \hat{X}(e^{j\omega}), \tag{12.52b}$$

donde

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})] = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})] \tag{12.53}$$

y, como se definió en la Sección 5.1, $\arg[X(e^{j\omega})]$ indica la fase continua de $X(e^{j\omega})$. La secuencia $\hat{x}[n]$ se denomina comúnmente el *cepstrum complejo* de $x[n]$, cuyas propiedades y aplicaciones se estudian con detalle en el Capítulo 13.[2]

Si requerimos ahora que $\hat{x}[n]$ sea causal, entonces las partes real e imaginaria de $\hat{X}(e^{j\omega})$, que corresponden respectivamente a $\log|X(e^{j\omega})|$ y $\arg[X(e^{j\omega})]$, se relacionarán mediante las Ecuaciones (12.28a) y (12.28b), es decir,

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi}\log|X(e^{j\theta})|\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{12.54}$$

y

$$\log|X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] + \frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi}\arg[X(e^{j\theta})]\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta, \tag{12.55a}$$

donde, en la Ecuación (12.55a), $\hat{x}[0]$ es

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|X(e^{j\omega})|d\omega. \tag{12.55b}$$

Aunque no es en absoluto obvio en este punto, en el Problema 12.35 desarrollamos el hecho de que la condición de fase mínima definida en la Sección 5.6, concretamente, que tiene todos sus polos

[2]Aunque $\hat{x}[n]$ se denomina *cepstrum complejo*, su valor es real ya que $x(e^{j\omega})$, tal como se define en la Ecuación (12.53), es simétrica conjugada.

y ceros dentro de la circunferencia unidad, garantiza la causalidad del cepstrum complejo. Por tanto, la condición de fase mínima de la Sección 5.6 y la condición de causalidad del cepstrum complejo resultan ser la misma restricción vista desde diferentes perspectivas. Nótese que cuando $\hat{x}[n]$ es causal, $\arg[X(e^{j\omega})]$ queda completamente determinado mediante la Ecuación (12.54) por $\log|X(e^{j\omega})|$. Sin embargo, la determinación completa de $\log|X(e^{j\omega})|$ mediante la Ecuación (12.55a) requiere conocer la fase $\arg[X(e^{j\omega})]$ y la cantidad $\hat{x}[0]$. Si $\hat{x}[0]$ no es conocida, entonces $\log|X(e^{j\omega})|$ queda determinado salvo una constante aditiva, o lo que es lo mismo, $|X(e^{j\omega})|$ queda determinado salvo una constante multiplicativa (ganancia).

La condición de fase mínima y la causalidad del cepstrum complejo no son las únicas restricciones que proporcionan una relación única entre el módulo y la fase de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Como un ejemplo de otro tipo de restricción, se ha demostrado (Hayes, Lim y Oppenheim, 1980) que si una secuencia es de longitud finita y su transformada Z no tiene ceros en parejas recíprocas conjugadas, entonces, salvo un factor de escala, la secuencia (y por tanto también el módulo de su transformada de Fourier en tiempo discreto) queda determinada de forma única por la fase de su transformada de Fourier.

12.4. RELACIONES DE TRANSFORMADA DE HILBERT PARA SECUENCIAS COMPLEJAS

Hasta ahora hemos considerado las relaciones de transformada de Hilbert para la transformada de Fourier de secuencias causales y para la DFT de secuencias periódicas que sean "periódicamente causales" en el sentido de que sean cero en la segunda mitad de cada periodo. En esta sección consideraremos *secuencias complejas* en las que su parte real e imaginaria se pueden relacionar mediante una convolución discreta similar a las relaciones de transformada de Hilbert obtenidas en las secciones anteriores. Estas relaciones son particularmente útiles para representar señales paso banda como señales complejas de una forma completamente análoga a las señales analíticas de teoría de señales en tiempo continuo (Papoulis, 1977).

Como se dijo anteriormente, es posible basar la obtención de las relaciones de transformada de Hilbert en una noción de causalidad o unilateralidad. Como estamos interesados en relacionar las partes real e imaginaria de una secuencia compleja, la unilateralidad se aplicará a la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia. Por supuesto, no podemos requerir que la transformada de Fourier en tiempo discreto sea cero para $\omega < 0$, ya que debe ser periódica. En vez de eso, consideraremos secuencias en las que la transformada de Fourier es cero en la segunda mitad de cada periodo. Es decir, su transformada Z es cero en la mitad inferior $(-\pi \leq \omega < 0)$ de la circunferencia unidad. Por tanto, si $x[n]$ indica la secuencia y $X(e^{j\omega})$ su transformada de Fourier, requerimos que

$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad -\pi \leq \omega < 0. \tag{12.56}$$

(Podríamos suponer también que $X(e^{j\omega})$ es cero para $0 < \omega \leq \pi$.) La secuencia $x[n]$ correspondiente a $X(e^{j\omega})$ debe ser compleja, ya que si $x[n]$ fuera real, $X(e^{j\omega})$ sería simétrica conjugada, es decir, $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$. Por tanto, se puede expresar $x[n]$ como

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n], \tag{12.57}$$

donde $x_r[n]$ y $x_i[n]$ son secuencias reales. En teoría de señales en tiempo continuo, la señal comparable es una función analítica y, por tanto, se denomina *señal analítica*. Aunque la propiedad de ser analítica

no tiene significado formal para secuencias, aplicaremos la misma terminología a secuencias complejas cuya transformada de Fourier es unilateral.

Si $X_r(e^{j\omega})$ y $X_i(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de las secuencias reales $x_r[n]$ y $x_i[n]$, entonces

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}), \tag{12.58a}$$

y se deduce que

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})], \tag{12.58b}$$

y

$$jX_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]. \tag{12.58c}$$

Nótese que la Ecuación (12.58c) proporciona una expresión de $jX_i(e^{j\omega})$, que es la transformada de Fourier de la señal imaginaria $jx_i[n]$. Nótese también que $X_r(e^{j\omega})$ y $X_i(e^{j\omega})$, las transformadas de Fourier de las partes real e imaginaria, respectivamente, de $x[n]$ son en general funciones complejas y que $X_r(e^{j\omega})$ y $jX_i(e^{j\omega})$ juegan un papel similar al desempeñado en las secciones anteriores por las partes par e impar, respectivamente, de las secuencias causales. Sin embargo, $X_r(e^{j\omega})$ es simétrica conjugada, es decir, $X_r(e^{j\omega}) = X_r^*(e^{-j\omega})$. Similarmente, $jX_i(e^{j\omega})$ es antisimétrica conjugada, es decir, $jX_i(e^{j\omega}) = -jX_i^*(e^{-j\omega})$.

La Figura 12.4 muestra un ejemplo de transformada de Fourier unilateral de una secuencia compleja $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, y las correspondientes transformadas bilaterales de las secuencias reales $x_r[n]$ y $x_i[n]$. La figura muestra gráficamente la cancelación que implican las Ecuaciones (12.58).

Si $X(e^{j\omega})$ es cero para $-\pi \leq \omega < 0$, entonces no hay solapamiento entre las partes distintas de cero de $X(e^{j\omega})$ y de $X^*(e^{-j\omega})$ excepto en $\omega = 0$. Por tanto, $X(e^{j\omega})$ se puede recuperar excepto para $\omega = 0$ a partir de $X_r(e^{j\omega})$ o de $X_i(e^{j\omega})$. Como se supone que $X(e^{j\omega})$ es cero en $\omega = \pm\pi$, $X(e^{j\omega})$ se puede recuperar totalmente a partir de $\omega = 0$ de $jX_i(e^{j\omega})$. Esto es diferente de la situación de la Sección 12.2, en la que la secuencia causal se podía recuperar a partir de su parte impar excepto en los puntos extremos.

En particular,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0, \end{cases} \tag{12.59}$$

y

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi, \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0. \end{cases} \tag{12.60}$$

Alternativamente, podemos relacionar $X_r(e^{j\omega})$ y $X_i(e^{j\omega})$ directamente por

$$X_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_r(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi, \\ jX_r(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0, \end{cases} \tag{12.61}$$

o

$$X_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_r(e^{j\omega}), \tag{12.62a}$$

siendo

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0. \end{cases} \tag{12.62b}$$

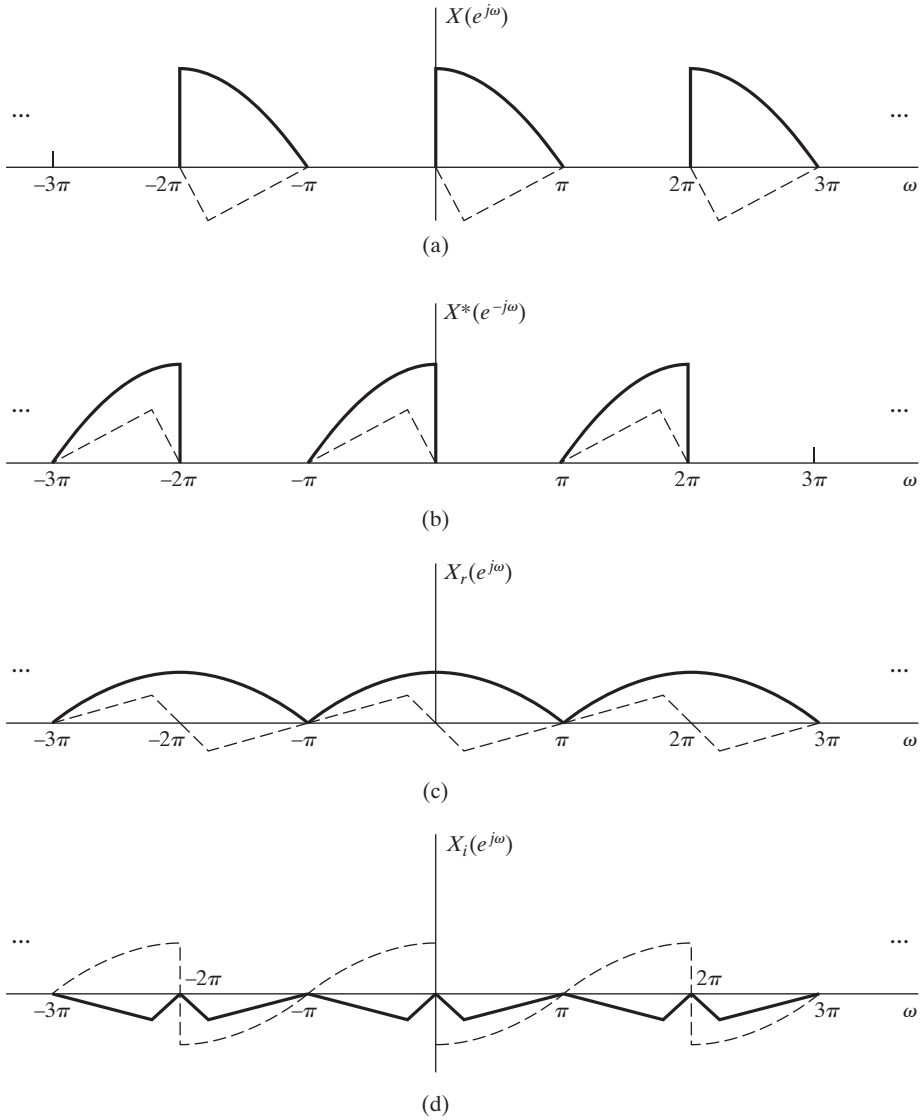


Figura 12.4 Ilustración de la descomposición de una transformada de Fourier unilateral (las curvas continuas son las partes reales y las discontinuas las partes imaginarias).

Las Ecuaciones (12.62) se ilustran comparando las Figuras 12.4(c) y 12.4(d). $X_i(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x_i[n]$, la parte imaginaria de $x[n]$, y $X_r(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x_r[n]$, la parte real de $x[n]$. Por tanto, de acuerdo con las Ecuaciones (12.62), $x_i[n]$ se puede obtener procesando $x_r[n]$ con un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, está dada por la Ecuación (12.62b). La respuesta en frecuencia tiene módulo unidad, una fase de $-\pi/2$ para $0 < \omega < \pi$, y una fase de $+\pi/2$ para $-\pi < \omega < 0$. Este sistema se denomina desplazador de fase de 90 grados ideal o *transformador de Hilbert*. De las Ecuaciones (12.62) se deduce que

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} X_i(e^{j\omega}) = -H(e^{j\omega}) X_i(e^{j\omega}). \tag{12.63}$$

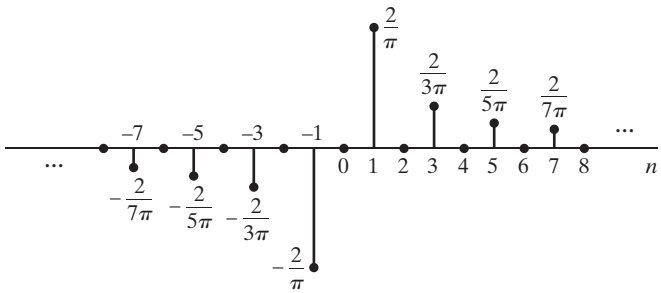


Figura 12.5 Respuesta al impulso de un transformador de Hilbert ideal o desplazador de fase de 90 grados.

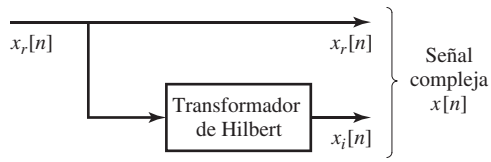


Figura 12.6 Representación mediante diagramas de bloques de la creación de una secuencia compleja cuya transformada de Fourier es unilateral.

Por tanto, $-x_r[n]$ se puede obtener a partir de $x_i[n]$ con un desplazamiento de fase de 90 grados.

La respuesta al impulso $h[n]$ del desplazador de fase de 90 grados, correspondiente a la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ de la Ecuación (12.62b) es

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} je^{j\omega n}d\omega,$$

o

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \tag{12.64}$$

La respuesta al impulso se muestra en la Figura 12.5. Utilizando las Ecuaciones (12.62) y (12.63), obtenemos las expresiones

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_r[m] \tag{12.65a}$$

y

$$x_r[n] = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_i[m]. \tag{12.65b}$$

Las Ecuaciones (12.65) son las relaciones de transformada de Hilbert deseadas entre las partes real e imaginaria de una señal analítica en tiempo discreto. La Figura 12.6 muestra cómo se puede usar un sistema transformador de Hilbert en tiempo discreto para formar una señal analítica compleja, que es simplemente una pareja de señales reales.

12.4.1. Diseño de transformadores de Hilbert

La respuesta al impulso de un transformador de Hilbert, dada en la Ecuación (12.64), no es absolutamente sumable. En consecuencia,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \tag{12.66}$$

converge a la Ecuación (12.62b) sólo en sentido cuadrático medio. Por tanto, el transformador de Hilbert ideal o desplazador de fase de 90 grados se alinea con el filtro paso bajo ideal y el diferenciador ideal de banda limitada, como un valioso concepto teórico que corresponde a un sistema no causal, y para el que la función de transferencia existe sólo en sentido restringido.

Por supuesto, se pueden obtener aproximaciones al transformador de Hilbert ideal. Las aproximaciones FIR con retardo de grupo constante se pueden diseñar utilizando el método de ventanas o el método de aproximación de rizado constante. En esas aproximaciones, el desplazador de fase de 90 grados se realiza exactamente, con una componente adicional de fase lineal necesaria para que sea un sistema FIR causal. Las propiedades de esas aproximaciones se ilustrarán con ejemplos de transformadores de Hilbert diseñados con ventanas de Kaiser.

Ejemplo 12.4 Diseño de transformadores de Hilbert con ventana de Kaiser

La aproximación FIR mediante la ventana de Kaiser a un transformador de Hilbert en tiempo discreto de orden M (longitud $M+1$) sería de la forma

$$h[n] = \begin{cases} \left(\dfrac{I_o\{\beta(1-[(n-n_d)/n_d]^2)^{1/2}\}}{I_o(\beta)}\right)\left(\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\operatorname{sen}^2[\pi(n-n_d)/2]}{n-n_d}\right), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \tag{12.67}$$

donde $n_d = M/2$. Si M es par, se trata de un sistema FIR de fase lineal generalizada de tipo III, como se presentó en la Sección 5.7.3.

La Figura 12.7(a) muestra la respuesta al impulso y la Figura 12.7(b), el módulo de la respuesta en frecuencia, para $M = 18$ y $\beta = 2{,}629$. Como $h[n]$ cumple la condición de simetría $h[n] = -h[M-n]$ para $0 \le n \le M$, la fase es exactamente 90 grados más una componente lineal correspondiente a un retardo de $n_d = 18/2 = 9$ muestras, es decir,

$$\angle H(e^{j\omega}) = \frac{-\pi}{2} - 9\omega, \qquad 0 < \omega < \pi. \tag{12.68}$$

Observando la Figura 12.7(b) vemos que, como se requiere en un sistema de tipo III, la respuesta en frecuencia es cero en $z = 1$ y $z = -1$ ($\omega = 0$ y $\omega = \pi$). Por tanto, el módulo de la respuesta en frecuencia no se puede aproximar muy bien a la unidad salvo en alguna banda intermedia $\omega_L < |\omega| < \omega_H$.

Si M es un entero impar, obtenemos un sistema de tipo IV, como muestra la Figura 12.8, con $M = 17$ y $\beta = 2{,}44$. Para sistemas de tipo IV, la respuesta en frecuencia sólo está obligada a valer cero en $z = 1$ ($\omega = 0$). Por tanto, se obtiene una aproximación mejor a un valor constante del módulo de la respuesta en las frecuencias alrededor de $\omega = \pi$. La respuesta de fase vale en todas las frecuencias exactamente 90 grados más una componente de fase lineal, correspondiente a un retardo de $n_d = 17/2 = 8{,}5$ muestras. Es decir,

$$\angle H(e^{j\omega}) = \frac{-\pi}{2} - 8{,}5\omega, \qquad 0 < \omega < \pi. \tag{12.69}$$

Comparando las Figuras 12.7(a) y 12.8(a) vemos que los transformadores de Hilbert basados en sistemas FIR de tipo III tienen una significativa ventaja computacional sobre los sistemas de tipo IV, cuando no es necesario aproximar un módulo constante en $\omega = \pi$. Esto es debido a que en los sistemas de tipo III, las muestras de índice par de la respuesta al impulso valen exactamente cero. Por tanto, aprovechando la antisimetría de ambos casos, el sistema con $M = 17$ necesitaría ocho multiplicaciones para calcular cada muestra de salida, mientras que el sistema con $M = 18$ necesitaría sólo cinco multiplicaciones por cada muestra de salida.

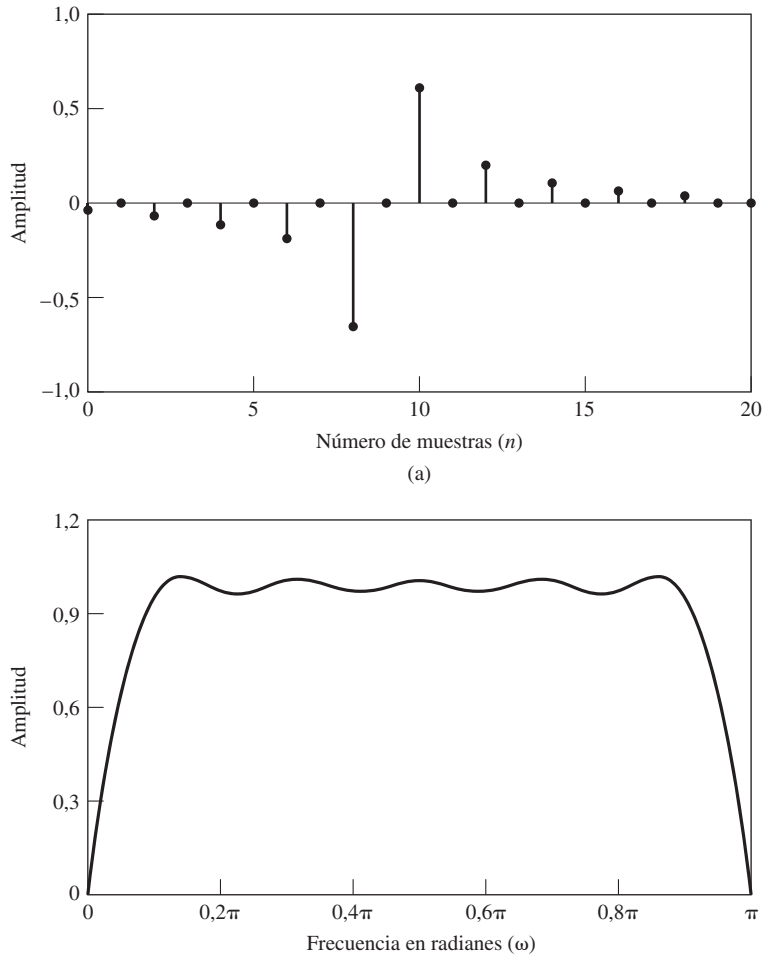


Figura 12.7 (a) Respuesta al impulso y (b) módulo de la respuesta en frecuencia de un transformador de Hilbert FIR diseñado utilizando la ventana de Kaiser ($M = 18$ y $\beta = 2{,}629$).

Se pueden diseñar aproximaciones a los transformadores de Hilbert mediante sistemas FIR de fase lineal de tipo III y de tipo IV con rizado constante y fase exactamente de 90 grados utilizando el algoritmo de Parks–McClellan, tal como se describe en las Secciones 7.4 y 7.5. Esto producirá una mejora en el error de aproximación del módulo con respecto a los filtros de la misma longitud diseñados por el método de ventanas (Rabiner y Schafer, 1974).

La exactitud de la fase de los sistemas de tipo III y IV es una motivación para su uso en la aproximación de transformadores de Hilbert. La aproximación a transformadores de Hilbert utilizando sistemas IIR presenta algún error en la respuesta de fase, así como en la respuesta en amplitud al aproximar el transformador de Hilbert. La aproximación más exitosa al diseño de transformadores de Hilbert IIR es el diseño de un "desplazador de fase", que consiste en dos sistemas paso todo cuyas respuestas de fase difieren aproximadamente 90 grados en alguna porción de la banda $0 < |\omega| < \pi$. Estos sistemas se pueden diseñar utilizando la transformación bilineal para convertir un sistema de desplazamiento de fase

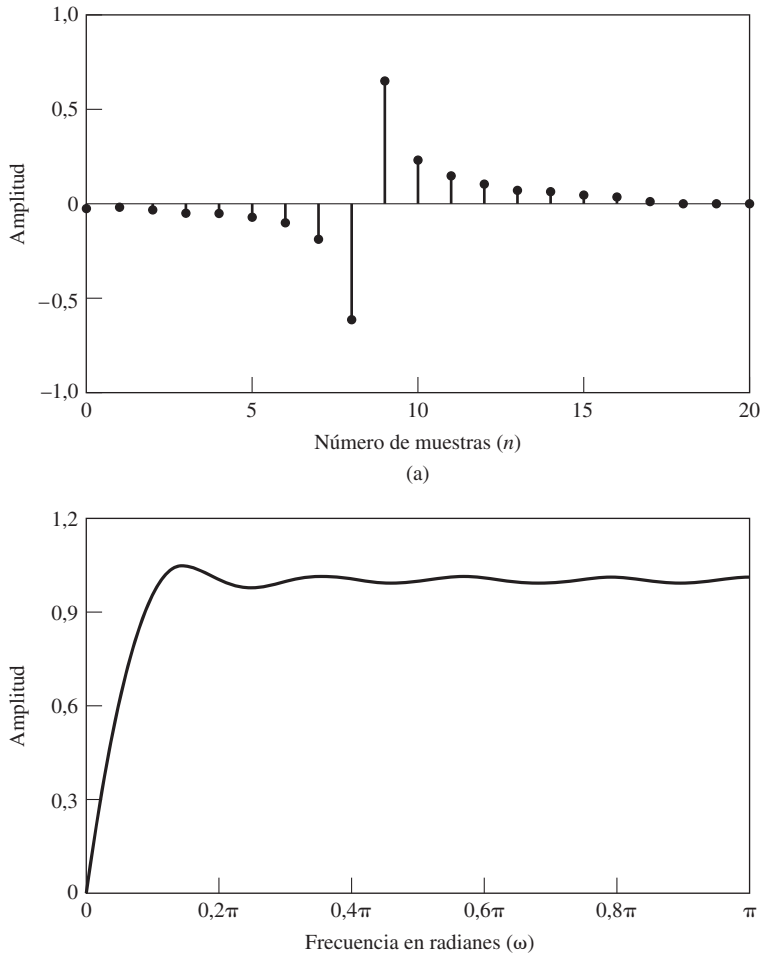


Figura 12.8 (a) Respuesta al impulso y (b) módulo de la respuesta en frecuencia de un transformador de Hilbert FIR diseñado utilizando la ventana de Kaiser ($M = 17$ y $\beta = 2{,}44$).

en tiempo continuo en uno en tiempo discreto (véase Gold, Oppenheim y Rader, 1970, para encontrar un ejemplo de un sistema de este tipo).

La Figura 12.9 muestra un sistema de desplazamiento de fase de 90 grados. Si $x_r[n]$ indica una señal de entrada real y $x_i[n]$ su transformada de Hilbert, entonces la secuencia compleja $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ tiene una transformada de Fourier que vale cero para $-\pi \leq \omega < 0$. Es decir, $X(z)$ es cero en la mitad inferior de la circunferencia unidad del plano z. En el sistema de la Figura 12.6 se utilizaba un transformador de Hilbert para formar la señal $x_i[n]$ a partir de $x_r[n]$. En la Figura 12.9, procesamos $x_r[n]$ con dos sistemas: $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$. Si $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$ son sistemas paso todo cuyas respuestas de fase se diferencian en 90 grados, la señal compleja $y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$ tiene una transformada de Fourier que también vale cero en $-\pi \leq \omega < 0$. Además, $|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$, ya que los sistemas de desplazamiento de fase son sistemas paso todo. Las fases de $Y(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ diferirán sólo en la componente de fase común a $H_1(e^{j\omega})$ y $H_2(e^{j\omega})$.

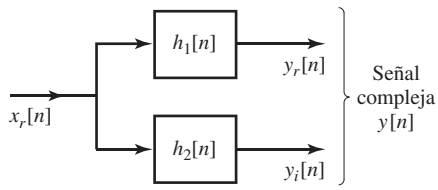


Figura 12.9 Representación mediante diagrama de bloques del método del desplazador de fase para la creación de una secuencia compleja cuya transformada de Fourier es unilateral.

12.4.2. Representación de señales paso banda

Muchas de las aplicaciones de las señales analíticas tienen que ver con las comunicaciones de banda estrecha. En esas aplicaciones, a veces es conveniente representar una señal paso banda en función de una señal paso bajo. Para ver cómo se puede hacer, consideremos la señal compleja paso bajo

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n],$$

donde $x_i[n]$ es la transformada de Hilbert de $x_r[n]$ y

$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad -\pi \leq \omega < 0.$$

Las Figuras 12.10(a) y 12.10(b) muestran respectivamente las transformadas de Fourier $X_r(e^{j\omega})$ y $jX_i(e^{j\omega})$, y la Figura 12.10(c) muestra la transformada resultante $X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega})$ (las curvas continuas muestran las partes reales y las curvas discontinuas las partes imaginarias). Consideremos ahora la secuencia

$$s[n] = x[n]e^{j\omega_c n} = s_r[n] + js_i[n], \tag{12.70}$$

donde $s_r[n]$ y $s_i[n]$ son secuencias reales. La correspondiente transformada de Fourier es

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_c)}), \tag{12.71}$$

que se muestra en la Figura 10.12(d). Aplicando las Ecuaciones (12.58) a $S(e^{j\omega})$ se llega a las ecuaciones

$$S_r(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}[S(e^{j\omega}) + S^*(e^{-j\omega})], \tag{12.72a}$$

$$jS_i(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}[S(e^{j\omega}) - S^*(e^{-j\omega})]. \tag{12.72b}$$

Las Figuras 12.10(e) y 12.10(f) ilustran, respectivamente, $S_r(e^{j\omega})$ y $jS_i(e^{j\omega})$ en el ejemplo de la Figura 12.10. Es inmediato demostrar que si $X_r(e^{j\omega}) = 0$ para $\Delta\omega < |\omega| \leq \pi$ y si $\omega_c + \Delta\omega < \pi$, entonces $S(e^{j\omega})$ será una señal paso banda unilateral tal que $S(e^{j\omega}) = 0$ *excepto* en el intervalo $\omega_c < \omega \leq \omega_c + \Delta\omega$. Como ilustra el ejemplo de la Figura 12.10, y se puede demostrar utilizando las Ecuaciones (12.57) y (12.58), $S_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S_r(e^{j\omega})$, o, en otras palabras, $s_i[n]$ es la transformada de Hilbert de $s_r[n]$.

Una representación alternativa de una señal compleja usa su módulo y fase. Es decir, $x[n]$ se puede expresar como

$$x[n] = A[n]e^{j\phi[n]}, \tag{12.73a}$$

donde

$$A[n] = (x_r^2[n] + x_i^2[n])^{1/2} \tag{12.73b}$$

y

$$\phi[n] = \arctan\left(\frac{x_i[n]}{x_r[n]}\right). \tag{12.73c}$$

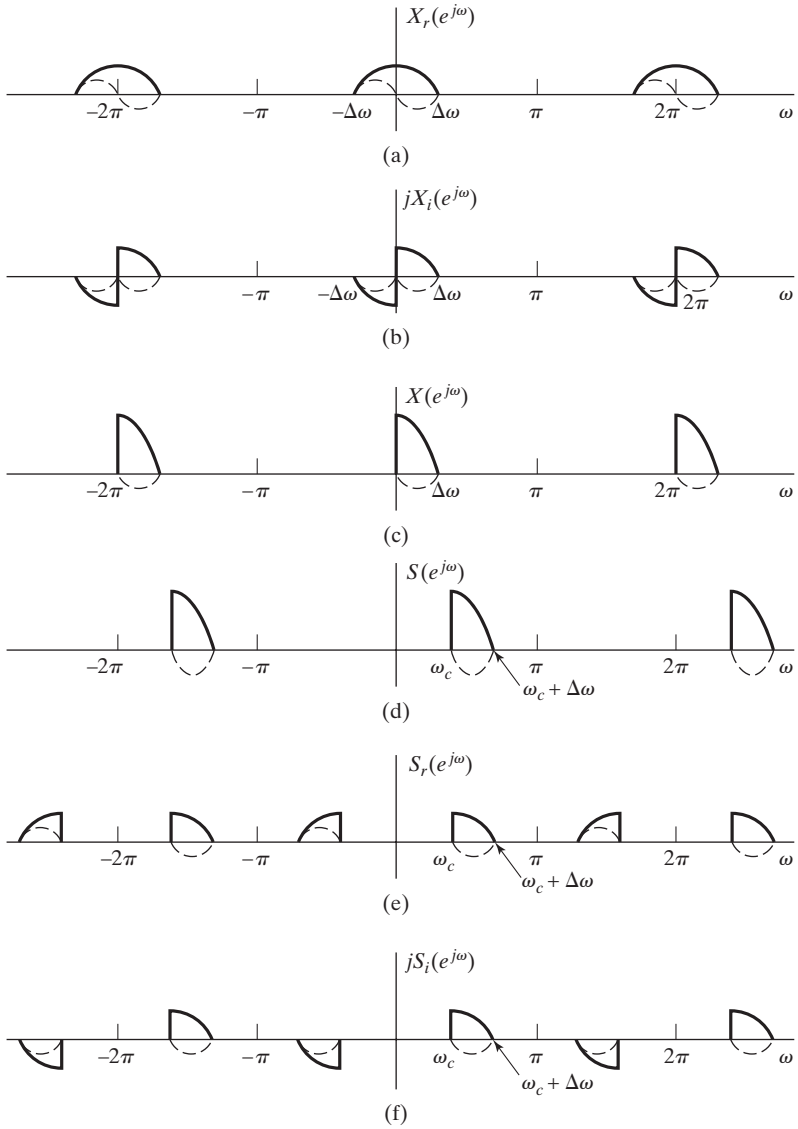


Figura 12.10 Transformadas de Fourier para la representación de señales paso banda (las líneas continuas son las partes reales y las líneas discontinuas las partes imaginarias). Nótese que en las partes (b) y (f) se dibujan las funciones $jX_i(e^{j\omega})$ y $jS_i(e^{j\omega})$, donde $X_i(e^{j\omega})$ y $S_i(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de las transformadas de Hilbert de $x_i[n]$ y $s_i[n]$, respectivamente.

Por tanto, a partir de las Ecuaciones (12.70) y (12.73), $s[n]$ se puede expresar como

$$s[n] = (x_r[n] + jx_i[n])e^{j\omega_c n} \tag{12.74a}$$

$$= A[n]e^{j(\omega_c n + \phi[n])}, \tag{12.74b}$$

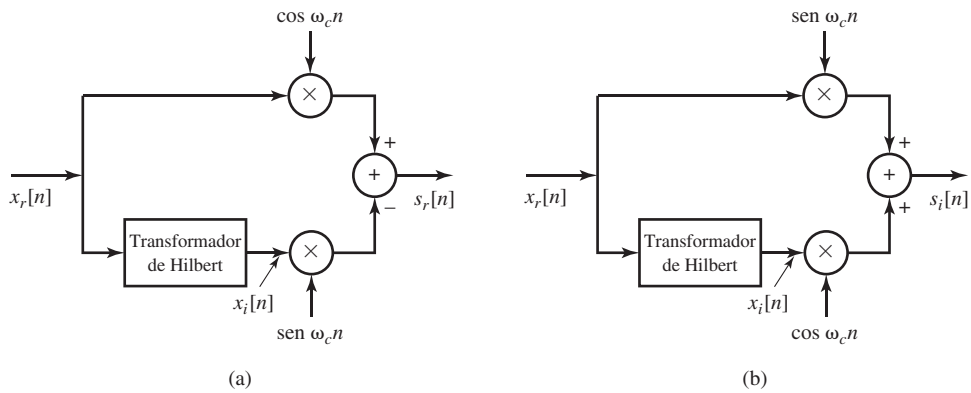


Figura 12.11 Representación mediante diagramas de bloques de las Ecuaciones (12.75a) y (12.75a) para la obtención de una señal de banda lateral única.

de donde se obtienen las expresiones

$$s_r[n] = x_r[n]\cos\omega_c n - x_i[n]\operatorname{sen}\omega_c n, \tag{12.75a}$$

o

$$s_r[n] = A[n]\cos(\omega_c n + \phi[n]), \tag{12.75b}$$

y

$$s_i[n] = x_r[n]\operatorname{sen}\omega_c n + x_i[n]\cos\omega_c n, \tag{12.76a}$$

o

$$s_i[n] = A[n]\operatorname{sen}(\omega_c n + \phi[n]). \tag{12.76b}$$

Las Ecuaciones (12.75a) y (12.76a) se muestran en las Figuras 12.11(a) y 12.11(b), respectivamente. Estos diagramas ilustran cómo se puede formar una señal compleja paso banda (banda lateral única) a partir de una señal real paso bajo.

Consideradas juntas, las Ecuaciones (12.75) y (12.76) son las representaciones deseadas en el dominio del tiempo de una señal general compleja paso banda $s[n]$ en función de las partes real e imaginaria de una señal compleja paso bajo $x[n]$. En general, esta representación compleja es un mecanismo conveniente para representar una señal real paso banda. Por ejemplo, la Ecuación (12.75a) proporciona una representación en el dominio del tiempo de la señal real paso banda en función de una componente "en fase" $x_r[n]$ y una componente "en cuadratura" (desfasada 90 grados) $x_i[n]$. De hecho, como se ilustra en la Figura 12.10(e), la Ecuación (12.75a) permite la representación de señales reales paso banda (o de respuestas al impulso de filtros) cuyas transformadas de Fourier no son conjugadas simétricas con respecto al centro de la banda de paso (como sería el caso para señales de la forma $x_r[n]\cos\omega_c n$).

De la forma de las Ecuaciones (12.75) y (12.76) y de la Figura 12.11, resulta claro que una señal paso banda general tiene la forma de una sinusoide cuya amplitud y fase están moduladas. La secuencia $A[n]$ se denomina envolvente y $\phi[n]$ fase. Esta representación de señales de banda estrecha se puede usar para representar una variedad de sistemas de modulación de amplitud y de fase. El ejemplo de la Figura 12.10 es una ilustración de una modulación en banda lateral única. Si consideramos la señal real $s_r[n]$ como el resultado de una modulación de banda lateral única con la señal paso bajo $x_r[n]$ como entrada, la Figura 12.11(a) representa un esquema para realizar un sistema de modulación en banda lateral única. Estos sistemas son útiles en esquemas de multiplexación por división en frecuencia, ya que pueden representar una señal real paso banda con un mínimo de ancho de banda.

12.4.3. Muestreo paso banda

Otro uso importante de las señales analíticas es el muestreo de señales paso banda. En el Capítulo 4 vimos que, en general, si una señal en tiempo continuo tiene una transformada de Fourier de banda limitada tal que $S_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$, la señal queda representada exactamente por sus muestras si la frecuencia de muestreo satisface la relación $2\pi/T \geq 2\Omega_N$. La clave de la demostración de este resultado era evitar el solapamiento de las réplicas de $S_c(j\Omega)$ que forman la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de muestras. Una señal paso banda en tiempo continuo tiene una transformada de Fourier tal que $S_c(j\Omega) = 0$ para $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c$ y para $|\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega$. Por tanto, su ancho de banda, o región de soporte, es realmente sólo $2\Delta\Omega$ en vez de $2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, Con estrategias de muestreo adecuadas, la región $-\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c$ se puede rellenar con imágenes de la parte distinta de cero de $S_c(j\Omega)$ sin solapamiento. Esto se facilita enormemente si utilizamos una representación compleja de la señal paso banda.

Como ejemplo, consideremos el sistema de la Figura 12.12 y la señal que se muestra en la Figura 11.13(a). La máxima frecuencia de la señal de entrada es $\Omega_c + \Delta\Omega$. Si esta señal se muestrea exactamente a la frecuencia de Nyquist, $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, la secuencia resultante de muestras, $s_r[n] = s_c(nT)$, tiene la transformada de Fourier $S_r(e^{j\omega})$ que se ilustra en la Figura 12.13(b). Utilizando un transformador de Hilbert en tiempo discreto, podemos formar la secuencia compleja $s[n] = s_r[n] + js_i[n]$, cuya transformada de Fourier, $S(e^{j\omega})$ se muestra en la Figura 12.13(c). La anchura de la región distinta de cero de $S(e^{j\omega})$ es $\Delta\omega = (\Delta\Omega)T$. Definiendo M como el mayor entero menor o igual que $2\pi/\Delta\omega$, vemos que habrá M copias de $S(e^{j\omega})$ en el intervalo $-\pi < \omega < \pi$ (en el ejemplo de la Figura 12.13(c), $2\pi/\Delta\omega = 5$). Por tanto, la frecuencia de muestreo de $s[n]$ se puede reducir mediante diezmado, como se muestra en la Figura 12.12, generándose una secuencia compleja a frecuencia de muestreo reducida $s_d[n] = s_{\mathrm{rd}}[n] + js_{\mathrm{id}}[n] = s[Mn]$ cuya transformada de Fourier es

$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} S(e^{j[(\omega-2\pi k)/M]}). \tag{12.77}$$

La Figura 12.13(d) muestra $S_d(e^{j\omega})$ con $M = 5$ en la Ecuación (12.77). En esta figura se indican explícitamente $S(e^{j\omega})$ y dos de las copias de $S(e^{j\omega})$ escaladas y trasladadas en frecuencia. Puede verse claramente que se evita el solapamiento y que toda la información necesaria para reconstruir la señal real original paso banda muestreada reside ahora en el intervalo de frecuencias en tiempo discreto $-\pi < \omega \leq \pi$. La aplicación de un filtro complejo a $s_d[n]$ puede transformar esta información de forma útil, como limitando adicionalmente el ancho de banda, compensando la amplitud o la fase, etc. La señal compleja puede también codificarse para su transmisión o almacenamiento digital. Estos procesos se realizan a baja frecuencia de muestreo, y éste es, por supuesto, el motivo de reducir la frecuencia de muestreo.

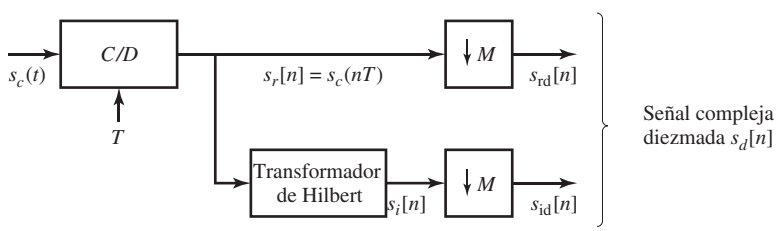


Figura 12.12 Sistema para reducir la frecuencia de muestreo de una señal real paso banda mediante el diezmado de la correspondiente señal paso banda compleja.

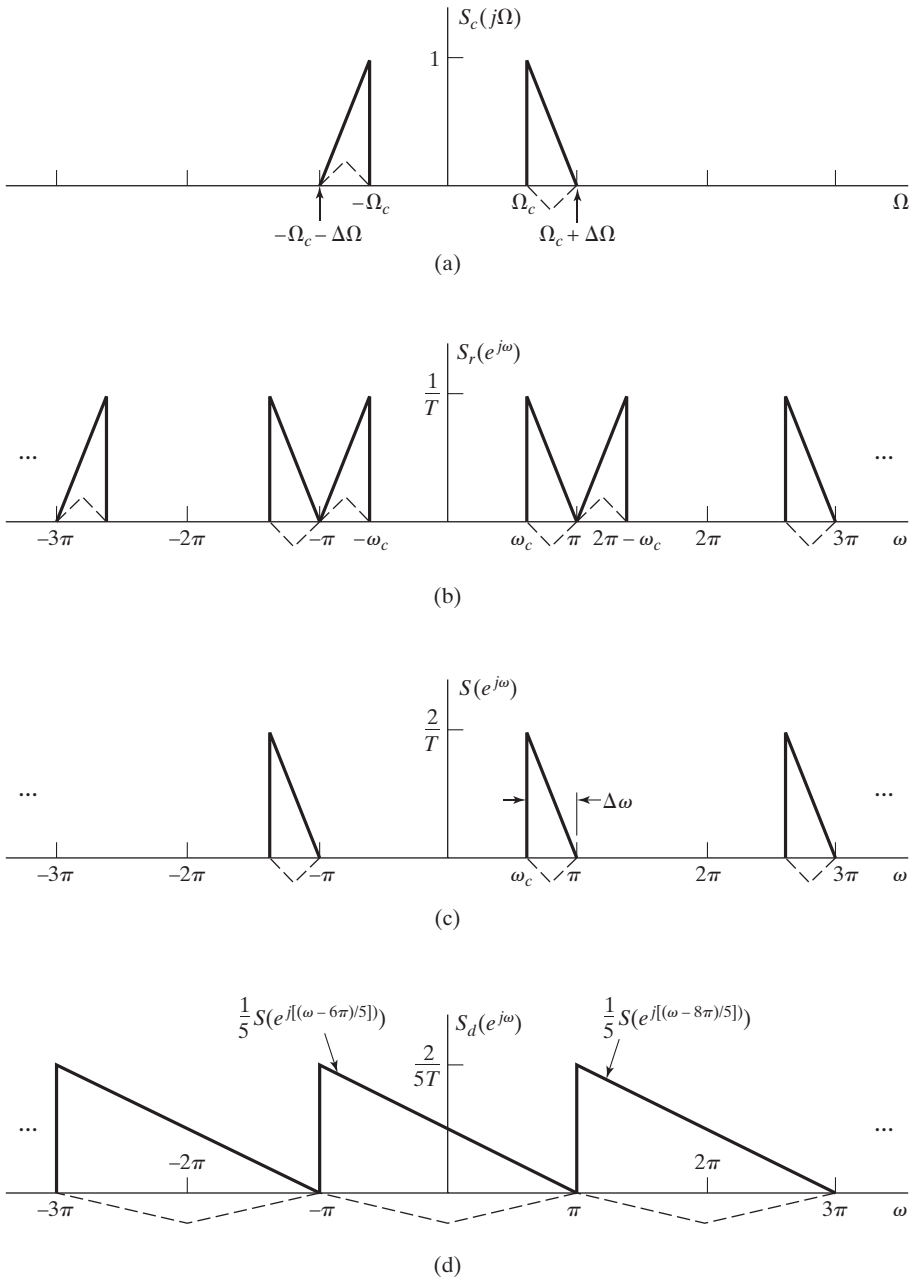


Figura 12.13 Ejemplo de reducción de la frecuencia de muestreo de una señal paso banda utilizando el sistema de la Figura 12.12. (a) Transformada de Fourier de la señal continua paso banda. (b) Transformada de Fourier de la señal muestreada. (c) Transformada de Fourier de la señal compleja paso banda en tiempo discreto obtenida a partir de la señal de la parte (a). (d) Transformada de Fourier de la señal compleja paso banda diezmada del apartado (c). Las líneas continuas representan las partes reales y las líneas discontinuas las partes imaginarias.

La señal paso banda real original $s_r[n]$ se puede reconstruir idealmente mediante el siguiente procedimiento:

1. Expandir la secuencia compleja por un factor de M, es decir, obtener

$$s_e[n] = \begin{cases} s_{\mathrm{rd}}[n/M] + js_{\mathrm{id}}[n/M], & n = 0, \pm M, \pm 2M, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{12.78}$$

2. Filtrar la señal $s_e[n]$ utilizando un filtro paso banda ideal *complejo* $h_i[n]$ cuya respuesta en frecuencia sea

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega < \omega_c, \\ M, & \omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega, \\ 0, & \omega_c + \Delta\omega < \omega < \pi. \end{cases} \tag{12.79}$$

   (en nuestro ejemplo, $\omega_c + \Delta\omega = \pi$.)

3. Obtener $s_r[n] = Re\{s_e[n] * h_i[n]\}$.

Un ejercicio útil es representar la transformada de Fourier $S_e(e^{j\omega})$ para el ejemplo de la Figura 12.13 y verificar que el filtro de la Ecuación (12.79) recupera de verdad la señal $s[n]$.

Otro ejercicio útil es considerar una señal compleja en tiempo continuo con una transformada de Fourier unilateral igual a $S_c(j\Omega)$ para $\Omega \geq 0$. Se puede demostrar que una señal así se puede muestrear con frecuencia de muestreo $2\pi/T = \Delta\Omega$, produciéndose directamente la secuencia compleja $s_d[n]$.

12.5. RESUMEN

En este capítulo, hemos presentado diversas relaciones entre las partes real e imaginaria de las transformadas de Fourier y las partes real e imaginaria de secuencias complejas. Estas relaciones se denominan colectivamente *relaciones de transformada de Hilbert*. Nuestro planteamiento para obtener todas las relaciones de transformada de Hilbert ha sido aplicar un principio básico de causalidad que permite recuperar una secuencia o función a partir de su parte par. Demostramos que para una secuencia causal, las partes real e imaginaria de su transformada de Fourier se relacionan mediante una integral como la de la convolución. Además, para el caso especial que ocurre cuando el cepstrum complejo de una secuencia es causal, o equivalentemente, los polos y los ceros de su transformada Z están en el interior de la circunferencia unidad (la condición de fase mínima), el logaritmo del módulo y la fase de la transformada de Fourier son una pareja de transformadas de Hilbert.

Las relaciones de la transformada de Hilbert se han obtenido también para secuencias periódicas que satisfacen una restricción de causalidad modificada, y para secuencias complejas cuya transformada de Fourier vale cero en la mitad inferior de la circunferencia unidad. Se han presentado también las aplicaciones de las señales analíticas complejas en la representación y muestreo eficiente de señales paso banda.

Problemas

Problemas básicos

12.1. Considere una secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$. La secuencia $x[n]$ es real y causal, y

$$Re\{X(e^{j\omega})\} = 2 - 2a\cos\omega.$$

Determine $Im\{X(e^{j\omega})\}$.

12.2. Considere una secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$. Se sabe que:

$$x[n] \text{ es real y causal,}$$

$$Re\{X(e^{j\omega})\} = \tfrac{5}{4} - \cos\omega.$$

Determine una secuencia $x[n]$ que sea consistente con la información dada.

12.3. Considere una secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$. Se sabe que:

$$x[n] \text{ es real,}$$

$$x[0] = 0,$$

$$x[1] > 0,$$

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \tfrac{5}{4} - \cos\omega.$$

Determine dos secuencias distintas, $x_1[n]$ y $x_2[n]$, que sean consistentes con la información dada.

12.4. Considere una secuencia compleja $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, siendo $x_r[n]$ y $x_i[n]$ las partes real e imaginaria, respectivamente. La transformada Z, $X(z)$, de la secuencia $x[n]$ es cero en la mitad inferior de la circunferencia unidad. Es decir, $X(e^{j\omega}) = 0$ para $\pi \leq \omega < 2\pi$. La parte real de $x[n]$ es

$$x_r[n] = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ -1/4, & n = \pm 2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Determine la parte real e imaginaria de $X(e^{j\omega})$.

12.5. Obtenga las transformadas de Hilbert $x_i[n] = \mathscr{H}\{x_r[n]\}$ de las siguientes secuencias:

(a) $x_r[n] = \cos\omega_0 n$

(b) $x_r[n] = \operatorname{sen}\omega_0 n$

(c) $x_r[n] = \dfrac{\operatorname{sen}(\omega_0 n)}{\pi n}$

12.6. La parte imaginaria de $X(e^{j\omega})$ para una secuencia $x[n]$ real y causal es

$$X_I(e^{j\omega}) = 2\operatorname{sen}\omega - 3\operatorname{sen}4\omega.$$

Se sabe adicionalmente que $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 6$. Obtenga $x[n]$.

12.7. **(a)** $x[n]$ es una secuencia real y causal y la parte imaginaria de su transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ está dada por

$$Im\{X(e^{j\omega})\} = \operatorname{sen}\omega + 2\operatorname{sen}2\omega.$$

Determine un valor de $x[n]$.

(b) ¿Es única su respuesta al apartado (a)? Si es así, explique por qué. Si no es así, determine una segunda secuencia $x[n]$ diferente que satisfaga la relación dada en el apartado (a).

12.8. Considere una secuencia $x[n]$ real y causal cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$. La parte imaginaria de la transformada de Fourier en tiempo discreto es

$$X_I(e^{j\omega}) = 3\,\mathrm{sen}(2\omega).$$

¿Qué partes reales $X_{Rm}(e^{j\omega})$ de las que se presentan a continuación son consistentes con esta información?

$$\begin{aligned}
X_{R1}(e^{j\omega}) &= \frac{3}{2}\cos(2\omega),\\
X_{R2}(e^{j\omega}) &= -3\cos(2\omega) - 1,\\
X_{R3}(e^{j\omega}) &= -3\cos(2\omega),\\
X_{R4}(e^{j\omega}) &= 2\cos(3\omega),\\
X_{R5}(e^{j\omega}) &= \frac{3}{2}\cos(2\omega) + 1.
\end{aligned}$$

12.9. Se dispone de la siguiente información sobre una secuencia $x[n]$ real y causal, y sobre su transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned}
Im\{X(e^{j\omega})\} &= 3\,\mathrm{sen}(\omega) + \mathrm{sen}(3\omega),\\
X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} &= 3.
\end{aligned}$$

Determine una secuencia $x[n]$ consistente con esta información. ¿Es única la secuencia?

12.10. Considere la secuencia $h[n]$, respuesta al impulso de un sistema lineal, invariante con el tiempo, causal y estable, con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$. Se sabe lo siguiente:

(I) El sistema inverso es causal y estable.

(II) $\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \dfrac{\frac{5}{4} - \cos\omega}{5 + 4\cos\omega}$.

Determine $h[n]$ con tanto detalle como sea posible.

12.11. Sea $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ una secuencia compleja tal que $X(e^{j\omega}) = 0$ para $-\pi \leq \omega < 0$. Su parte imaginaria es

$$x_i[n] = \begin{cases} 4, & n = 3,\\ -4, & n = -3. \end{cases}$$

Especifique las partes real e imaginaria de $X(e^{j\omega})$.

12.12. $h[n]$ es una secuencia real y causal, con $h[0]$ un valor distinto de cero y positivo. El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de $h[n]$ está dado por

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(\omega).$$

(a) Determine una secuencia $h[n]$.

(b) ¿Es única su respuesta al apartado (b)? Si lo es, explique por qué. Si no, determine otra secuencia $h[n]$ que satisfaga las condiciones dadas.

12.13. Sea $x[n]$ una secuencia compleja causal cuya transformada de Fourier es

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}).$$

Si $X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega) + \operatorname{sen}(\omega) - \operatorname{sen}(2\omega)$, determine $X_I(e^{j\omega})$.

12.14. Considere una secuencia real anticausal $x[n]$, cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$. La parte real de $X(e^{j\omega})$ es

$$X_R(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \cos(k\omega).$$

Obtenga $X_I(e^{j\omega})$, la parte imaginaria de $X(e^{j\omega})$ (no olvide que una secuencia es anticausal si $x[n] = 0$ para $n > 0$).

12.15. Se sabe que $x[n]$ es una secuencia real y causal cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$. La parte imaginaria de $X(e^{j\omega})$ es

$$Im\{X(e^{j\omega})\} = \operatorname{sen}\omega,$$

y se sabe también que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 3.$$

Determine $x[n]$.

12.16. Considere una secuencia $x[n]$ real, causal y cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $X(e^{j\omega})$. Se conocen dos hechos sobre $X(e^{j\omega})$:

$$X_R(e^{j\omega}) = 2 - 4\cos(3\omega),$$

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 7.$$

¿Son consistentes esos hechos? Es decir, ¿puede una secuencia $x[n]$ satisfacer ambos? Si es así, indique una posible secuencia $x[n]$. Si no, explique por qué no.

12.17. Considere una secuencia $x[n]$ real, causal y de longitud finita, $N = 2$, cuya transformada discreta de Fourier de 2 puntos es $X[k] = X_R[k] + jX_I[k]$ para $k = 0, 1$. Si $X_R[k] = 2\delta[k] - 4\delta[k-1]$, ¿es posible determinar de forma única $x[n]$? Si es así, obtenga $x[n]$. Si no, proporcione varias posibilidades de secuencias $x[n]$ que satisfagan la condición de $X_R[k]$.

12.18. Sea $x[n]$ una secuencia real, causal y de longitud finita $N = 3$. Obtenga dos posibles secuencias $x[n]$ tales que la parte real de su transformada discreta de Fourier $X_R[k]$ se ajuste a lo que se muestra en la Figura P12.18. Observe que sólo una de las secuencias será "periódicamente causal", de acuerdo con la definición de la Sección 10.2, $x[n] = 0$ para $N/2 < n \leq N - 1$.

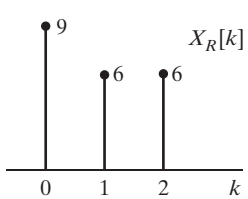


Figura P12.18

12.19. Sea $x[n]$ una secuencia real, causal y de longitud finita $N = 4$ que es periódicamente causal. La parte real de la transformada discreta de Fourier de 4 puntos de esta secuencia $X_R[k]$ se muestra en la Figura P12.19. Determine la parte imaginaria de la DFT $jX_I[k]$.

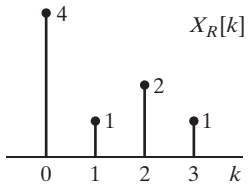


Figura P12.19

12.20. Considere una secuencia $x[n]$ real, causal y de longitud finita $N = 6$. La parte imaginaria de la transformada discreta de Fourier de 6 puntos de esta secuencia es

$$jX_I[k] = \begin{cases} -j2/\sqrt{3}, & k = 2, \\ j2/\sqrt{3}, & k = 4, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Además se sabe que

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X[k] = 1.$$

¿Cuáles de las secuencias que se muestran en la Figura P12.20 son consistentes con la información dada?

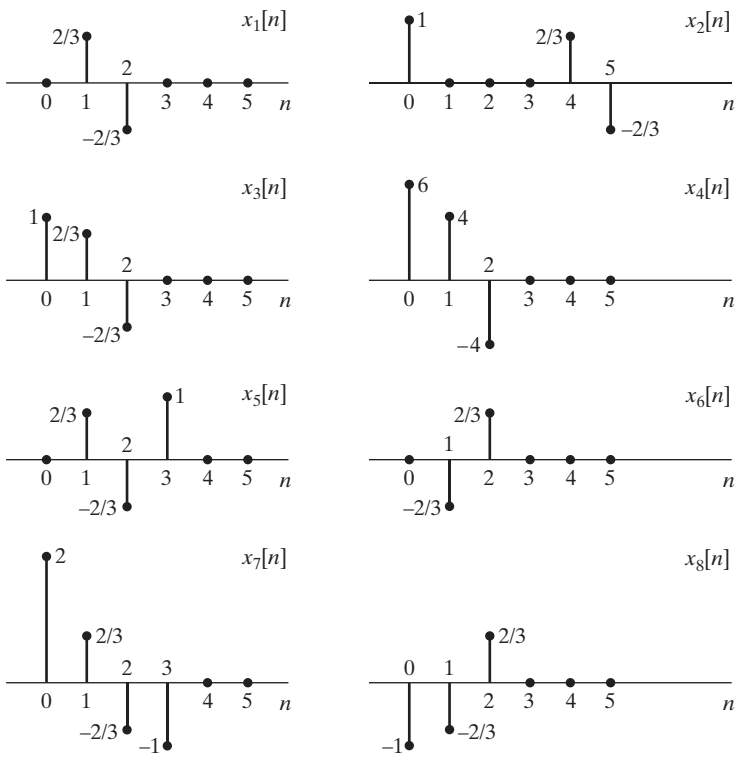


Figura P12.20

12.21. Sea $x[n]$ una secuencia real y causal que cumple que $|x[n]| < \infty$. La transformada Z de $x[n]$ es

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

que es un desarrollo en serie de Taylor en la variable z^{-1} y que, por tanto, converge a una función analítica en una región del exterior de un disco circular centrado en $z = 0$ (la región de convergencia incluye el punto $z = \infty$, y de hecho, $X(\infty) = x[0]$). La afirmación de que $X(z)$ es analítica (en la región de convergencia) implica restricciones importantes en dicha función $X(z)$ (véase Churchill y Brown, 1990). Concretamente, sus partes real e imaginaria satisfacen cada una las ecuaciones de Laplace y están relacionadas por las ecuaciones de Cauchy–Riemann. Utilizaremos estas propiedades para determinar $X(z)$ a partir de su parte real cuando $x[n]$ es una secuencia real, causal y de valores finitos.

Sea la transformada Z de la secuencia

$$X(z) = X_R(z) + jX_I(z).$$

donde $X_R(z)$ y $X_I(z)$ son funciones reales de z. Suponga que $X_R(z)$ es

$$X_R(\rho e^{j\omega}) = \frac{\rho + \alpha\cos\omega}{\rho}, \qquad \alpha \text{ real},$$

para $z = \rho e^{j\omega}$. Obtenga $X(z)$ (como función explícita de z), suponiendo que $X(z)$ es analítica en todo el plano complejo excepto en $z = 0$. Haga esto utilizando los dos métodos siguientes.

(a) *Método 1, en el dominio de la frecuencia*. Utilice el hecho de que las partes real e imaginaria de $X(z)$ deben satisfacer las condiciones de Cauchy–Riemann allí donde $X(z)$ sea analítica. Las condiciones de Cauchy–Riemann son las siguientes:

1. En coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

donde $z = x + jy$ y $X(x + jy) = U(x,y) + jV(x,y)$.

2. En coordenadas polares,

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \omega}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \omega},$$

donde $z = \rho e^{j\omega}$ y $X(\rho e^{j\omega}) = U(\rho,\omega) + jV(\rho,\omega)$.

Como se sabe que $U = X_R$, podemos integrar esas ecuaciones y obtener $V = X_I$ y de aquí X (es preciso tratar adecuadamente la constante de integración).

(b) *Método 2, en el dominio del tiempo*. La secuencia $x[n]$ se puede representar como $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, donde $x_e[n]$ es real y par, con transformada de Fourier $X_R(e^{j\omega})$ y $x_o[n]$ es real e impar, con transformada de Fourier $jX_I(e^{j\omega})$. Obtenga $x_e[n]$ y, utilizando la causalidad, obtenga $x_o[n]$ y de aquí $x[n]$ y $X(z)$.

12.22. Sea $x[n]$ una secuencia causal y real con transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$. Se sabe que

$$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 1 + 3\cos\omega + \cos 3\omega.$$

Determine una secuencia $x[n]$ consistente con esta información y especifique si dicha secuencia es o no única.

12.23. Sea $x[n]$ una secuencia causal y real con transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$. Determine una secuencia $x[n]$ si se sabe que la parte imaginaria de $X(e^{j\omega})$ está dada por:

$$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 3\,\mathrm{sen}(2\omega) - 2\,\mathrm{sen}(3\omega).$$

12.24. Demuestre que la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto de la secuencia

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \quad N/2, \\ 2, & n = 1, 2, \ldots, N/2 - 1, \\ 0, & n = N/2 + 1, \ldots, N - 1, \end{cases}$$

es

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -j2\cot(\pi k/N), & k \text{ impar}, \\ 0, & k \text{ par}, k \neq 0. \end{cases}$$

Sugerencia: obtenga la transformada Z de la secuencia

$$u_N[n] = 2u[n] - 2u[n - N/2] - \delta[n] + \delta[n - N/2],$$

y muestre dicha secuencia para obtener $\tilde{U}[k]$.

Problemas avanzados

12.25. Considere una secuencia real $x[n]$ de duración finita M. Concretamente, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > M - 1$. Sea $X[k]$ la DFT de N puntos de $x[n]$ con $N \geq M$ y N impar. La parte real de $X[k]$ se denomina $X_R[k]$.

(a) Determine, en función de M, el mínimo valor de N que permite que $X[k]$ quede determinado de forma única a partir de $X_R[k]$.

(b) Para un valor de N que satisfaga las condiciones del apartado (a), $X[k]$ se puede expresar como la convolución circular de $X_R[k]$ con una secuencia $U_N[k]$. Determine $U_N[k]$.

12.26. Sea $y_r[n]$ una secuencia real cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $Y_r(e^{j\omega})$. Las secuencias $y_r[n]$ e $y_i[n]$ de la Figura P12.26 se interpretan como las partes real e imaginaria de una secuencia compleja $y[n]$, es decir, $y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$. Determine un sistema $H(e^{j\omega})$ en la Figura P12.26 tal que $Y(e^{j\omega})$ sea $Y_r(e^{j\omega})$ para frecuencias *negativas* y cero para frecuencias *positivas* entre $-\pi$ y π. Es decir,

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} Y_r(e^{j\omega}), & -\pi < \omega < 0 \\ 0, & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$

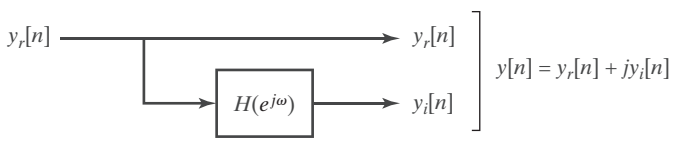


Figura P12.26 Sistema para obtener $y[n]$ a partir de $y_r[n]$.

12.27. Considere una secuencia compleja $h[n] = h_r[n] + jh_i[n]$, donde $h_r[n]$ y $h_i[n]$ son secuencias reales, y sea $H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$ la transformada de Fourier de $h[n]$, donde $H_R(e^{j\omega})$ y $H_I(e^{j\omega})$ son, respectivamente, la parte real e imaginaria de $H(e^{j\omega})$.

Sea $H_{\text{ER}}(e^{j\omega})$ y $H_{\text{OR}}(e^{j\omega})$ las partes par e impar, respectivamente, de $H_R(e^{j\omega})$, y sean $H_{\text{EI}}(e^{j\omega})$, y $H_{\text{OI}}(e^{j\omega})$ las partes par e impar, respectivamente, de $H_I(e^{j\omega})$. Sean además $H_A(e^{j\omega})$ y $H_B(e^{j\omega})$ las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de $h_r[n]$, y $H_C(e^{j\omega})$ y $H_D(e^{j\omega})$ las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de $h_i[n]$. Exprese $H_A(e^{j\omega})$, $H_B(e^{j\omega})$, $H_C(e^{j\omega})$ y $H_D(e^{j\omega})$ en función de $H_{\text{ER}}(e^{j\omega})$, $H_{\text{OR}}(e^{j\omega})$, $H_{\text{EI}}(e^{j\omega})$ y $H_{\text{OI}}(e^{j\omega})$.

12.28. El transformador de Hilbert ideal (desplazador de fase de 90 grados) tiene como respuesta en frecuencia (en un periodo)

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ j, & \omega < 0. \end{cases}$$

La Figura P12.28-1 muestra $H(e^{j\omega})$ y la Figura P12.28-2, la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo ideal $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/2$. Ambas respuestas en frecuencia son claramente similares, con discontinuidades separadas por π.

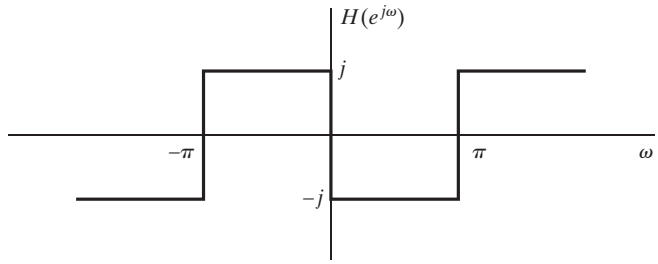


Figura P12.28-1

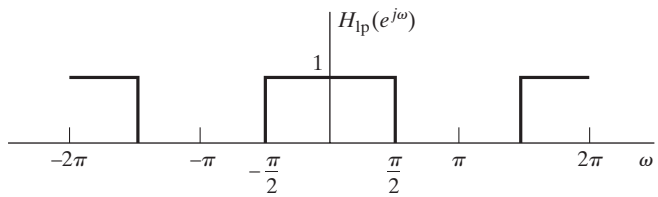


Figura P12.28-2

(a) Obtenga una relación que exprese $H(e^{j\omega})$ en función de $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$. Resuelva esta ecuación para obtener $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ en función de $H(e^{j\omega})$.

(b) Utilice las relaciones del apartado (a) para obtener expresiones de $h[n]$ en función de $h_{\text{lp}}[n]$ y de $h_{\text{lp}}[n]$ en función de $h[n]$.

Las relaciones obtenidas en los apartados (a) y (b) se basan en definiciones de sistemas ideales con fase cero. Sin embargo, se pueden obtener relaciones similares para sistemas no ideales con fase lineal generalizada

(c) Utilice los resultados del apartado (b) para obtener una relación entre la respuesta al impulso de una aproximación FIR causal al transformador de Hilbert y la respuesta al impulso de una aproximación FIR causal al filtro paso bajo. En ambos casos, las aproximaciones serán diseñadas (1) incorporando una fase lineal apropiada, (2) determinando la respuesta al impulso y (3) multiplicando por la misma ventana de longitud $(M+1)$ muestras, es decir, por el método de enventanado presentado en el Capítulo 7 (si es necesario, considere separadamente los casos de M par y de M impar).

(d) Para las aproximaciones al transformador de Hilbert del Ejemplo 12.4, dibuje el módulo de las respuestas en frecuencia de los correspondientes filtros paso bajo.

12.29. En la Sección 12.4.3, presentamos un esquema eficiente para muestrear una señal paso banda en tiempo continuo cuya transformada de Fourier cumple que

$$S_c(j\Omega) = 0 \qquad \text{para} \quad |\Omega| \leq \Omega_c \quad \text{y} \quad |\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega.$$

En esa explicación, se supuso que la señal se muestrea inicialmente con frecuencia $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$. La Figura 12.12 muestra el esquema del muestreo paso banda. Tras formar una señal paso banda en tiempo discreto $s[n]$ con la transformada de Fourier unilateral $S(e^{j\omega})$, la señal compleja se diezma por un factor M, que se supone que es el mayor entero menor o igual que $2\pi/(\Delta\Omega T)$.

(a) Utilizando un ejemplo, como el que se muestra en la Figura 12.13, demuestre que si la cantidad $2\pi/(\Delta\Omega T)$ no es entera para el periodo inicial de muestreo elegido, la señal diezmada resultante $s_d[n]$ tendrá regiones de longitud distinta de cero donde su transformada de Fourier $S_d(e^{j\omega})$ vale cero.

(b) ¿Cómo se debería escoger la frecuencia de muestreo inicial $2\pi/T$ para que se pueda encontrar un factor de diezmado M de forma que la secuencia diezmada $s_d[n]$ del sistema de la Figura 12.12 tenga una transformada de Fourier $S_d(e^{j\omega})$ que no esté solapada, pero sin regiones donde sea cero en un intervalo de longitud finita?

12.30. Considere un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \pi, \\ 0, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

La entrada al sistema $x[n]$ debe tener valores reales y tener transformada de Fourier (es decir, $x[n]$ debe ser absolutamente sumable). Determine si es o no posible recuperar siempre de forma única la entrada al sistema a partir de la salida del sistema. Si es posible, describa cómo. Si no es posible, explique por qué no.

Problemas de ampliación

12.31. Obtenga una expresión integral de $H(z)$ *fuera* de la circunferencia unidad en función de $Re\{H(e^{j\omega})\}$ cuando $h[n]$ es una secuencia real y estable que cumple que $h[n] = 0$ para $n > 0$.

12.32. Sea $\mathscr{H}\{\cdot\}$ la operación (ideal) de transformación de Hilbert, es decir,

$$\mathscr{H}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k],$$

donde $h[n]$ es

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{sen}^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Demuestre las siguientes propiedades del operador transformada de Hilbert ideal.

(a) $\mathscr{H}\{\mathscr{H}\{x[n]\}\} = -x[n]$

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathscr{H}\{x[n]\} = 0$ [*Sugerencia*: utilice el Teorema de Parseval.]

(c) $\mathscr{H}\{x[n] * y[n]\} = \mathscr{H}\{x[n]\} * y[n] = x[n] * \mathscr{H}\{y[n]\}$, donde $x[n]$ e $y[n]$ son secuencias cualesquiera.

12.33. Un transformador de Hilbert ideal con respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{sen}^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

tiene como entrada $x_r[n]$ y como salida $x_i[n] = x_r[n] * h[n]$, siendo $x_r[n]$ una señal aleatoria en tiempo discreto.

(a) Obtenga una expresión de la secuencia de autocorrelación $\phi_{x_i x_i}[m]$ en función de $h[n]$ y $\phi_{x_r x_r}[m]$.

(b) Obtenga una expresión de la correlación cruzada $\phi_{x_r x_i}[m]$. Demuestre que, en este caso, $\phi_{x_r x_i}[m]$ es una función impar de m.

(c) Obtenga una expresión de la función de autocorrelación de la señal analítica compleja $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$.

(d) Determine el espectro de potencia $P_{xx}(\omega)$ para la señal compleja del apartado (c).

12.34. En la Sección 12.4.3 presentamos un esquema eficiente para muestrear una señal paso banda en tiempo continuo cuya transformada de Fourier es tal que

$$S_c(j\Omega) = 0 \qquad \text{para} \quad |\Omega| \leq \Omega_c \quad \text{y} \quad |\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega.$$

La Figura 12.12 muestra el esquema de muestreo paso banda. Al final de la sección, se proporciona un esquema para reconstruir la señal original muestreada $s_r[n]$. La señal en tiempo continuo original $s_c(t)$ de la Figura 12.12 puede, por supuesto, reconstruirse a partir de $s_r[n]$ aplicando una interpolación ideal de banda limitada (conversión D/C ideal). La Figura P12.34-1 muestra un diagrama de bloques del sistema para reconstruir una señal paso banda ideal en tiempo continuo a partir de una señal compleja diezmada. El filtro paso banda complejo $H_i(e^{j\omega})$ de la figura tiene la respuesta en frecuencia que se indica en la Ecuación (12.79).

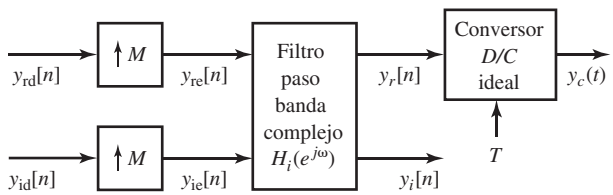


Figura P12.34-1

(a) Utilizando el ejemplo que se muestra en la Figura 12.13, demuestre que el sistema de la Figura P12.34-1 reconstruirá la señal original paso banda real; es decir, $y_c(t) = s_c(t)$), si las entradas al sistema de reconstrucción son $y_{\text{rd}}[n] = s_{\text{rd}}[n]$ e $y_{\text{id}}[n] = s_{\text{id}}[n]$.

(b) Determine la respuesta al impulso $h_i[n] = h_{\text{ri}}[n] + jh_{\text{ii}}[n]$ del filtro paso banda complejo de la Figura P12.34-1.

(c) Dibuje un diagrama de bloques más detallado del sistema de la Figura P12.34-1 en el que sólo se muestren operaciones reales. Elimine las partes del diagrama que no sean necesarias para calcular la salida final.

(d) Considere ahora colocar un sistema complejo, lineal e invariante con el tiempo, entre el sistema de la Figura 12.12 y el sistema de la Figura P12.34-1. Esto se muestra en la Figura P12.34-2, donde $H(e^{j\omega})$ indica la respuesta en frecuencia del sistema. Determine cómo debería escogerse $H(e^{j\omega})$ si se desea que

$$Y_c(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)S_c(j\Omega),$$

donde

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_c < |\Omega| < \Omega_c + \Delta\Omega/2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

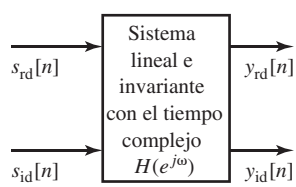


Figura P12.34-2

12.35. En la Sección 12.3 definimos una secuencia $\hat{x}[n]$ denominada cepstrum complejo de una secuencia $x[n]$ e indicamos que el cepstrum complejo causal $\hat{x}[n]$ es equivalente a la condición de fase mínima de la Sección 5.4 sobre $x[n]$. La secuencia $\hat{x}[n]$ es la transformada inversa de Fourier de $\hat{X}(e^{j\omega})$ definida en la Ecuación (12.53). Nótese que, como $X(e^{j\omega})$ y $\hat{X}(e^{j\omega})$ están definidas, la región de convergencia de $X(z)$ y $\hat{X}(z)$ debe incluir a la circunferencia unidad.

(a) Justifique la afirmación de que las singularidades (polos) de $\hat{X}(z)$ aparecerán siempre que $X(z)$ tenga polos o ceros. Utilice este hecho para demostrar que si $\hat{x}[n]$ es causal, $x[n]$ es de fase mínima.

(b) Justifique la afirmación de que si $x[n]$ es de fase mínima, las restricciones de la región de convergencia exigen que $\hat{x}[n]$ sea causal.

Podemos examinar esta propiedad para el caso de que $x[n]$ se pueda expresar como una superposición de exponenciales complejas. Concretamente, considere una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_i}(1-a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_o}(1-d_k z)},$$

donde $A > 0$ y el módulo de a_k, b_k, c_k y d_k es menor que uno.

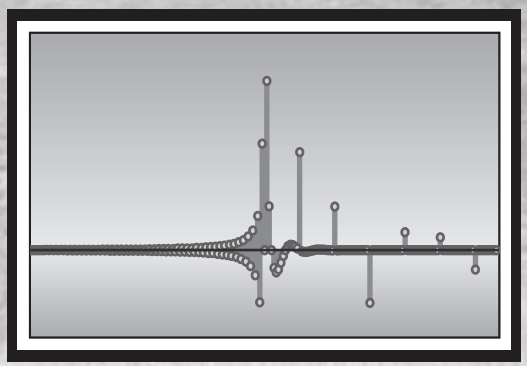
(c) Escriba una expresión de $\hat{X}(z) = \log X(z)$.

(d) Obtenga $\hat{x}[n]$ tomando la transformada z inversa de su respuesta del apartado (c).

(e) Basándose en el apartado (d) y en la expresión de $X(z)$, argumente que para secuencias $x[n]$ de esta forma, un cepstrum complejo causal es equivalente a tener fase mínima.

13

Análisis cepstral y deconvolución homomórfica



13.0. INTRODUCCIÓN

A lo largo del texto, nos hemos centrado principalmente en métodos lineales de procesado de señales. En este capítulo, presentaremos una clase de técnicas no lineales denominadas *análisis cepstral* o *deconvolución homomórfica*. Estos métodos han demostrado ser efectivos y útiles en una variedad de aplicaciones. Además, ilustran todavía más la flexibilidad y sofisticación ofrecidas por las tecnologías de tratamiento de señales en tiempo discreto.

En 1963, Bogert, Healy y Tukey publicaron un artículo con el inusual título "The Quefrency Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudoautocovariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking" ("Análisis "cuefrencial" de series temporales para ecos: cepstrum, pseudoautocovarianza, cepstrum cruzado y ruptura de forma") (véase Bogert, Healy y Tukey, 1963). Observaron que el logaritmo del espectro de potencia de una señal contenía un eco en forma de componente aditiva periódica debida a ese eco y, por tanto, el espectro de potencia del logaritmo de espectro de potencia debería mostrar un pico en el retardo correspondiente al eco. Denominaron *cepstrum*, a esta función, intercambiando las letras de la palabra *spectrum* porque, "en general, nos encontramos operando en el dominio de la frecuencia en formas que eran acostumbradas en el dominio del tiempo, y viceversa". Bogert et al. definieron un extenso vocabulario para describir su nueva técnica de tratamiento de señales, aunque sólo los términos cepstrum y "cuefrencia" se han utilizado ampliamente.

Aproximadamente al mismo tiempo, Oppenheim (1964, 1967, 1969a) propuso una nueva clase de sistemas denominados *sistemas homomórficos*. Aunque no lineales en sentido clásico, estos sistemas satisfacían una generalización del principio de superposición. Es decir, la señales de entrada y sus correspondientes respuestas se superponían (se combinaban) mediante una operación con las mismas propiedades algebraicas que la suma. El concepto de sistemas homomórficos es muy general, pero ha sido estudiado de forma más extensa para la combinación de operaciones de multiplicación y convolución, porque en muchos modelos de señales intervienen estas operaciones. La transformación de una señal en su cepstrum es una transformación homomórfica que transforma la convolución en suma, y una versión

refinada del cepstrum es parte fundamental de la teoría de sistemas homomórficos para tratamiento de señales que han sido combinadas mediante una operación de convolución.

Desde la introducción del cepstrum, los conceptos de cepstrum y sistemas homomórficos han demostrado su utilidad en análisis de señales y se han aplicado con éxito en el tratamiento de señales de voz (Oppenheim, 1969b, Oppenheim y Schafer, 1968 y Schafer y Rabiner, 1970), de señales sísmicas (Ulrych, 1971 y Tribolet, 1979), de señales biomédicas (Senmoto y Childers, 1972) de grabaciones acústicas antiguas (Stockham, Cannon e Ingebretsen, 1975) y de señales sonar (Reut, Pace y Heator, 1985). El cepstrum se ha propuesto también como una base para el análisis espectral (Stoica y Moses, 2005). Este capítulo proporciona un tratamiento detallado de las propiedades y de los aspectos computacionales asociados con el cepstrum y con la deconvolución basada en sistemas homomórficos. En la Sección 13.10 se ilustran algunos de estos conceptos en el contexto de tratamiento de voz.

13.1. DEFINICIÓN DE CEPSTRUM

La motivación original del cepstrum definido por Bogert et al. se ilustra mediante el siguiente ejemplo simple. Consideremos una señal muestreada $x[n]$ formada por la suma de una señal $v[n]$ y una copia desplazada y escalada (eco) de dicha señal, es decir,

$$x[n] = v[n] + \alpha v[n-n_0] = v[n] * (\delta[n] + \alpha\delta[n-n_0]). \tag{13.1}$$

Advirtiendo que $x[n]$ se puede representar como una *convolución*, se deduce que la transformada de Fourier en tiempo discreto de esa señal tendrá la forma de un producto.

$$X(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega})[1 + \alpha e^{-j\omega n_0}]. \tag{13.2}$$

El módulo de $X(e^{j\omega})$ es

$$|X(e^{j\omega})| = |V(e^{j\omega})|(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega n_0))^{1/2}, \tag{13.3}$$

que es una función real de ω. La observación básica motivadora del cepstrum fue que el logaritmo de un producto como el de la Ecuación (13.3) es la suma de dos términos, concretamente

$$\log|X(e^{j\omega})| = \log|V(e^{j\omega})| + \tfrac{1}{2}\log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(\omega n_0)). \tag{13.4}$$

Definiremos por conveniencia $C_x(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})|$. Además, anticipándonos a la presentación donde reforzaremos la dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia, sustituiremos $\omega = 2\pi f$, obteniendo

$$C_x(e^{j2\pi f}) = \log|X(e^{j2\pi f})| = \log|V(e^{j2\pi f})| + \tfrac{1}{2}\log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(2\pi f n_0)). \tag{13.5}$$

Esta función de la frecuencia normalizada f tiene dos componentes. El término $\log|V(e^{j2\pi f})|$ se debe solamente a la señal $v[n]$, y el segundo término, $\log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(2\pi f n_0))$ es debido a la combinación (eco) de la señal consigo misma. Podemos ver a $C_x(e^{j2\pi f})$ como una forma de onda con variable independiente continua f. La parte debida al eco será periódica en f con periodo $1/n_0$.[1] Estamos acostumbrados a la noción de que una señal periódica en el tiempo tiene un espectro de líneas, es decir,

[1] Como $\log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(2\pi f n_0))$ es el logaritmo del módulo de una transformada de Fourier en tiempo discreto, es también periódica en f con periodo uno (2π en ω), así como $1/n_0$.

su espectro se concentra en múltiplos enteros de una frecuencia fundamental común, que es el inverso del periodo fundamental. En este caso, tenemos una "señal" que es una función real y par de f (es decir, de la frecuencia). El análisis de Fourier apropiado para una función periódica de variable continua como $C_x(e^{j2\pi f})$ será de forma natural la transformada inversa de Fourier en tiempo discreto, es decir,

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_x(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} C_x(e^{j2\pi f})e^{j2\pi fn}df. \tag{13.6}$$

En la terminología de Bogert et al., $c_x[n]$ se denomina *cepstrum* de $C_x(e^{j2\pi f})$ (o, equivalentemente, de $x[n]$, ya que $C_x(e^{j2\pi f})$ se obtiene directamente a partir de $x[n]$). Aunque el cepstrum, tal como se define en la Ecuación (13.6), es claramente una función del índice de tiempo discreto n, Bogert et al. introdujeron el término "cuefrencia" (*quefrency*) para recalcar la distinción entre el dominio temporal del cepstrum y el de la señal original. Como el término $\log(1+\alpha^2+2\alpha\cos(2\pi fn_0))$ de $C_x(e^{j2\pi f})$ es periódico en f con periodo $1/n_0$, la correspondiente componente de $c_x[n]$ será distinta de cero sólo en múltiplos enteros de n_0, la cuefrencia fundamental del término $\log(1+\alpha^2+2\alpha\cos(2\pi fn_0))$. Posteriormente en este capítulo demostraremos que para este ejemplo de un eco simple con $|\alpha| < 1$, el cepstrum tiene la forma

$$c_x[n] = c_v[n] + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\alpha^k}{2k}(\delta[n+kn_0]+\delta[n-kn_0]), \tag{13.7}$$

donde $c_v[n]$ es la transformada inversa de Fourier en tiempo discreto de $\log|V(e^{j\omega})|$, (es decir, el cepstrum de $v[n]$), y los impulsos discreto sólo dependen de los parámetros del eco α y n_0. Fue este resultado lo que condujo a Bogert et al. a observar que el cepstrum de una señal con un eco tenía un "pico" en el retardo temporal del eco n_0 que sobresaldría claramente sobre $c_v[n]$. Por tanto, el cepstrum podría utilizarse como base para *detectar* ecos. Como se ha mencionado anteriormente, los extraños términos "cepstrum" y "cuefrencia" y otros similares se crearon para llamar la atención sobre una nueva forma de pensar en el análisis de Fourier de señales en la que los dominios del tiempo y de la frecuencia están intercambiados. En el resto de este capítulo, generalizaremos el concepto de cepstrum utilizando el logaritmo *complejo* y demostraremos muchas propiedades interesantes de la definición matemática resultante. Además, veremos que el cepstrum complejo puede servir como base para *separar* señales combinadas por una operación de convolución.

13.2. DEFINICIÓN DE CEPSTRUM COMPLEJO

Como base para generalizar el concepto de cepstrum, considere una secuencia estable $x[n]$ cuya transformada Z expresada en forma polar es

$$X(z) = |X(z)|e^{j\angle X(z)}, \tag{13.8}$$

siendo $|X(z)|$ y $\angle X(z)$ el módulo y la fase, respectivamente, de la función compleja $X(z)$. Como $x[n]$ es estable, la región de convergencia de $X(z)$ incluye a la circunferencia unidad, y la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ existe y es igual a $X(e^{j\omega})$. El *cepstrum complejo* asociado con $x[n]$ se define como la secuencia estable $\hat{x}[n]$,[2] cuya transformada Z es

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)]. \tag{13.9}$$

[2]En una definición algo más general de cepstrum complejo, no se requiere que $x[n]$ y $\hat{x}[n]$ sean estables. Sin embargo, con la restricción de estabilidad, los conceptos importantes se pueden ilustrar empleando una notación más simple que en el caso general.

Como el logaritmo se puede calcular en cualquier base, se suele emplear el logaritmo natural (es decir, en base e), y esto es lo que asumiremos en el resto de la explicación. El logaritmo de una cantidad compleja $X(z)$ expresada en la Ecuación (13.8) se define como

$$\log[X(z)] = \log[|X(z)|e^{j\angle X(z)}] = \log|X(z)| + j\angle X(z). \tag{13.10}$$

Como en la representación polar de un número complejo la fase es única sólo dentro de múltiplos enteros de 2π, la parte imaginaria de la Ecuación (13.10) no está bien definida. Nos ocuparemos de esto en breve. Por ahora supongamos que es posible plantear una definición apropiada y que ha sido utilizada.

El cepstrum complejo existe si $\log[X(z)]$ tiene una representación convergente en serie de potencias de la forma

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]z^{-n}, \qquad |z| = 1, \tag{13.11}$$

es decir, $\hat{X}(z) = \log[X(z)]$ debe tener todas las propiedades de la transformada Z de una secuencia estable. Concretamente, la región de convergencia de la representación en serie de potencias de $\log[X(z)]$ debe ser de la forma

$$r_R < |z| < r_L, \tag{13.12}$$

con $0 < r_R < 1 < r_L$. Si este es el caso, $\hat{x}[n]$, la secuencia de coeficientes de la serie de potencias, es lo que denominamos *cepstrum complejo* de $x[n]$.

Como requerimos que $\hat{x}[n]$ sea estable, la región de convergencia de $\hat{X}(z)$ incluye a la circunferencia unidad, y el cepstrum complejo se puede representar utilizando la transformada inversa de Fourier en tiempo discreto

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log[X(e^{j\omega})]e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\log|X(e^{j\omega})| + j\angle X(e^{j\omega})]e^{j\omega n}d\omega.\end{aligned} \tag{13.13}$$

El término cepstrum complejo distingue nuestra definición más general de la definición de cepstrum de Bogert et al. (1963), que fue establecida originalmente en función del espectro de potencia de señales en tiempo continuo. El uso del término *complejo* en este contexto implica que en la definición se utiliza el logaritmo complejo. No implica que el cepstrum complejo sea necesariamente una secuencia que tome valores complejos. De hecho, como veremos enseguida, la definición elegida para el logaritmo complejo asegura que el cepstrum complejo de una secuencia real será también una secuencia real.

La operación de transformar una secuencia real $x[n]$ en su cepstrum complejo $\hat{x}[n]$ se indica mediante un operador en tiempo discreto $D_*[\cdot]$; es decir, $\hat{x} = D_*[x]$. Esta operación se muestra como el diagrama de bloques de la izquierda de la Figura 13.1. De forma similar, como la Ecuación (13.9) es invertible con la función exponencial compleja, se puede definir también el sistema inverso $D_*^{-1}[\cdot]$, que recupera $x[n]$ a partir de $\hat{x}[n]$. La representación mediante diagrama de bloques de $D_*^{-1}[\cdot]$ se muestra en la parte derecha de la Figura 13.1. Concretamente, $D_*[\cdot]$ y $D_*^{-1}[\cdot]$ en la Figura 13.1 se definen de modo que si $\hat{y}[n] = \hat{x}[n]$ en dicha figura, entonces $y[n] = x[n]$. En el contexto de filtrado homomórfico de señales convolucionadas que se presentará en la Sección 13.8, $D_*[\cdot]$ se denomina *sistema característico* de la convolución.

Figura 13.1 Notación de sistema para la transformación y la transformación inversa entre una señal y su cepstrum complejo.

Como se indicó en la Sección 13.1, el cepstrum $c_x[n]$ de una señal[3] se define como la transformada inversa de Fourier del logaritmo del módulo de la transformada de Fourier, es decir

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\omega})|e^{j\omega n}d\omega. \tag{13.14}$$

Como el módulo de la transformada de Fourier es real y no negativo, no se requieren consideraciones especiales en la definición del logaritmo de la Ecuación (13.14). Comparando la Ecuación (13.14) con la Ecuación (13.13), podemos ver que $c_x[n]$ es la transformada inversa de la parte real de $\hat{X}(e^{j\omega})$. En consecuencia, $c_x[n]$ es igual a la parte conjugada simétrica de $\hat{x}[n]$; es decir,

$$c_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}^*[-n]}{2}. \tag{13.15}$$

El cepstrum es útil en muchas aplicaciones, y como no depende de la fase de $X(e^{j\omega})$, es mucho más fácil de calcular que el cepstrum complejo. Sin embargo, como se basa sólo en el módulo de la transformada de Fourier, no es invertible. Es decir, en general, no se puede recuperar $x[n]$ a partir de $c_x[n]$, excepto en casos especiales. El cepstrum complejo es algo más difícil de calcular, pero es invertible. Como el cepstrum complejo es un concepto más general que el cepstrum, y dado que las propiedades del cepstrum se pueden obtener a partir de las propiedades del cepstrum complejo utilizando la Ecuación (13.15), en este capítulo nos centraremos principalmente en el cepstrum complejo.

Merece la pena afrontar las dificultades adicionales que se encuentran al definir y calcular el cepstrum complejo por varias razones. En primer lugar, vemos a partir de la Ecuación (13.10) que el logaritmo complejo tiene el efecto de crear una nueva transformada de Fourier cuyas partes real e imaginaria son $\log|X(e^{j\omega})|$ y $\angle X(e^{j\omega})$, respectivamente. Por tanto, podemos obtener relaciones de transformada de Hilbert entre esas dos cantidades cuando el cepstrum complejo es causal. Consideraremos este punto posteriormente en la Sección 13.5.2 y en concreto veremos cómo se relaciona con las secuencias de fase mínima. Una segunda motivación más general, que se desarrolla en la Sección 13.8, surge del papel que tiene el cepstrum complejo en la definición de una clase de sistemas que sirven para separar y filtrar señales que han sido combinadas mediante la convolución.

13.3. PROPIEDADES DEL LOGARITMO COMPLEJO

Como el logaritmo complejo tiene un papel clave en la definición del cepstrum complejo, es importante entender su definición y sus propiedades. La ambigüedad en la definición del logaritmo complejo puede causar serios problemas computacionales. Estos aspectos se considerarán en detalle en la Sección 13.6. Una secuencia tiene cepstrum complejo si el logaritmo de su transformada Z admite un desarrollo en serie de potencias, como el de la Ecuación (13.11), donde hemos especificado la región de convergencia de forma que incluya a la circunferencia unidad. Esto significa que la transformada de Fourier

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\angle X(e^{j\omega}) \tag{13.16}$$

[3] $c_x[n]$ se denomina también *cepstrum real* para resaltar que corresponde sólo a la parte real del logaritmo complejo.

debe ser una función continua y periódica de ω y, en consecuencia, tanto $\log|X(e^{j\omega})|$ como $\angle X(e^{j\omega})$ deben ser funciones continuas de ω. Suponiendo que $X(z)$ no tiene ceros en la circunferencia unidad, la continuidad de $\log|X(e^{j\omega})|$ está garantizada, ya que se supone que $X(e^{j\omega})$ es analítica en la circunferencia unidad. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente en la Sección 5.1.1, $\angle X(e^{j\omega})$ es en general ambigua, ya que en cualquier valor de ω, se puede sumar cualquier múltiplo de 2π y la continuidad de $\angle X(e^{j\omega})$ depende de cómo se resuelva esta ambigüedad. Como $\mathrm{ARG}[X(e^{j\omega})]$ puede ser discontinua, en general es necesario especificar explícitamente que $\angle X(e^{j\omega})$ en la Ecuación (13.16) es la curva de fase desenrollada (y por tanto, continua) $\arg[X(e^{j\omega})]$.

Es importante destacar que si $X(z) = X_1(z)X_2(z)$, entonces

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arg[X_1(e^{j\omega})] + \arg[X_2(e^{j\omega})]. \tag{13.17}$$

En general, $\mathrm{ARG}[X(e^{j\omega})]$ no admitirá una propiedad aditiva similar. Es decir,

$$\mathrm{ARG}[X(e^{j\omega})] \neq \mathrm{ARG}[X_1(e^{j\omega})] + \mathrm{ARG}[X_2(e^{j\omega})]. \tag{13.18}$$

Por tanto, para que $\hat{X}(e^{j\omega})$ sea analítica (continua) y tenga la propiedad de que si $X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, entonces

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \hat{X}(e^{j\omega}) + \hat{X}_2(e^{j\omega}), \tag{13.19}$$

debemos definir $\hat{X}(e^{j\omega})$ como

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]. \tag{13.20}$$

Siendo $x[n]$ real, $\arg[X(e^{j\omega})]$ siempre se puede definir como una función periódica e impar en ω. Siendo $\arg[X(e^{j\omega})]$ una función impar de ω y $\log|X(e^{j\omega})|$ una función par de ω, está garantizado que el cepstrum complejo $\hat{x}[n]$ será real.[4]

13.4. EXPRESIONES ALTERNATIVAS PARA EL CEPSTRUM COMPLEJO

Hasta ahora hemos definido el cepstrum complejo como la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de potencias de $\hat{X}(z) = \log[X(z)]$, y hemos dado también la fórmula integral de la Ecuación (13.13) para determinar $\hat{x}[n]$ a partir de $\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + \angle X(e^{j\omega})$, siendo $\angle X(e^{j\omega})$ la función de fase desenrollada $\arg[X(e^{j\omega})]$. Se puede utilizar la derivada logarítmica para obtener otras relaciones del cepstrum complejo en las que no interviene explícitamente el logaritmo complejo. Suponiendo que $\log[X(z)]$ es analítica, entonces

$$\hat{X}'(z) = \frac{X'(z)}{X(z)} \tag{13.21}$$

donde $'$ indica diferenciación con respecto a z. Utilizando la Propiedad 4 de la Tabla 3.2, $z\hat{X}'(z)$ es la transformada Z de $-n\hat{x}[n]$, es decir,

$$-n\hat{x}[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z\hat{X}'(z) \tag{13.22}$$

[4] El planteamiento realizado sobre los problemas que presenta el logaritmo complejo se puede desarrollar más formalmente utilizando el concepto de superficie de Riemann (Brown y Churchill, 2008).

En consecuencia, a partir de la Ecuación (13.21),

$$-n\hat{x}[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{zX'(z)}{X(z)}. \tag{13.23}$$

Partiendo de nuevo de la Ecuación (13.21), podemos obtener también una ecuación en diferencias que satisfagan tanto $x[n]$ como $\hat{x}[n]$. Reordenando dicha Ecuación (13.21) y multiplicando por z obtenemos

$$zX'(z) = z\hat{X}'(z) \cdot X(z). \tag{13.24}$$

Utilizando la Ecuación (13.22), la transformada Z inversa de esta ecuación es

$$-nx[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k\hat{x}[k])x[n-k]. \tag{13.25}$$

Dividiendo ambos miembros por $-n$, obtenemos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k]x[n-k], \qquad n \neq 0. \tag{13.26}$$

El valor de $\hat{x}[0]$ se puede obtener teniendo en cuenta que

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\omega}) d\omega. \tag{13.27}$$

Como la parte imaginaria de $\hat{X}(e^{j\omega})$ es una función impar de ω, la Ecuación (13.27) se convierte en

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X(e^{j\omega})| d\omega. \tag{13.28}$$

En resumen, una señal y su cepstrum complejo satisfacen una ecuación en diferencias no lineal (Ecuación (13.26)). Bajo ciertas condiciones, esta relación implícita entre $\hat{x}[n]$ y $x[n]$ se puede reordenar en forma de una fórmula de recursión que se puede utilizar para el cálculo. En la Sección 13.6.4 se estudian fórmulas de este tipo.

13.5. EL CEPSTRUM COMPLEJO DE SECUENCIAS EXPONENCIALES DE FASE MÍNIMA Y DE FASE MÁXIMA

13.5.1. Secuencias exponenciales

Si una secuencia $x[n]$ es una suma de secuencias exponenciales complejas, su transformada Z $X(z)$ es una función racional de z. Este tipo de secuencias son útiles y susceptibles de análisis. En esta sección, consideramos el cepstrum complejo de secuencias estables $x[n]$ cuyas transformadas Z tienen la forma

$$X(z) = \frac{Az^r \prod_{k=1}^{M_i}(1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o}(1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_o}(1 - d_k z)}, \tag{13.29}$$

donde $|a_k|$, $|b_k|$, $|c_k|$ y $|d_k|$ son menores que la unidad, por lo que los factores de la forma $(1-a_k z^{-1})$ y $(1-c_k z^{-1})$ corresponden a los M_i ceros y a los N_i polos en el interior de la circunferencia unidad, y los factores de la forma $(1-b_k z)$ y $(1-d_k z)$ corresponden a los M_o ceros y a los N_o polos en el exterior de la circunferencia unidad. Estas transformadas Z son características de secuencias formadas por una suma de exponenciales estables. En el caso especial en el que no hay polos (es decir, el denominador de la Ecuación (13.29) es la unidad), entonces la correspondiente secuencia $x[n]$ es una secuencia de longitud $(M+1 = M_o + M_i + 1)$.

Mediante las propiedades del logaritmo complejo, el producto de términos de la Ecuación (13.29) se transforma en suma de términos logarítmicos:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) = &\log(A) + \log(z^r) + \sum_{k=1}^{M_i} \log(1-a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{M_o} \log(1-b_k z) \\ &- \sum_{k=1}^{N_i} \log(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{N_o} \log(1-d_k z).\end{aligned} \tag{13.30}$$

Las propiedades de $\hat{x}[n]$ dependen de la composición de las propiedades de la transformada inversa de cada término.

Para secuencias reales, A es real, y si A es positivo, el primer término $\log(A)$ contribuye sólo a $\hat{x}[0]$. Concretamente, (véase el Problema 13.15):

$$\hat{x}[0] = \log|A|. \tag{13.31}$$

Si A es negativo, es menos inmediato determinar la contribución al cepstrum complejo de $\log(A)$. El término z^r corresponde sólo a un retardo o adelanto de la secuencia $x[n]$. Si $r=0$, el término desaparece de la Ecuación (13.30). Sin embargo, si $r \neq 0$, entonces la función de fase desenrollada $\arg[X(e^{j\omega})]$ incluirá un término lineal de pendiente r. En consecuencia, siendo $\arg[X(e^{j\omega})]$ impar y periódico en ω y continuo para $|\omega| < \pi$, el término de fase lineal forzará la existencia de una discontinuidad de $\arg[X(e^{j\omega})]$ en $\omega = \pm\pi$, $\hat{X}(z)$ ya no será analítica en la circunferencia unidad. Aunque se pueden tener en cuenta formalmente los casos de A negativo y/o $r \neq 0$ hacerlo no reporta ninguna ventaja real, debido a que si dos transformadas de la Ecuación (13.29) se multiplican entre sí, no seremos capaces de determinar cuánto contribuye a A o a r cada componente. Esto es análogo a la situación del filtrado lineal ordinario en la que se suman dos señales, cada una de ellas con su propio nivel de continua. Por tanto, en la práctica, la cuestión se puede evitar determinando primero el signo algebraico de A y el valor de r y alterando después la entrada, de manera que su transformada Z sea de la forma

$$X(z) = \frac{|A| \prod_{k=1}^{M_i}(1-a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o}(1-b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1-c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_o}(1-d_k z)}. \tag{13.32}$$

De acuerdo con esto, la Ecuación (13.30) se transforma en

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) = &\log|A| + \sum_{k=1}^{M_i} \log(1-a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{M_o} \log(1-b_k z) \\ &- \sum_{k=1}^{N_i} \log(1-c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{N_o} \log(1-d_k z).\end{aligned} \tag{13.33}$$

Con la excepción del término $\log|A|$, que ya hemos considerado, todos los términos de la Ecuación (13.33) son de la forma $\log(1-\alpha z^{-1})$ y $\log(1-\beta z)$. Teniendo en cuenta que estos factores representan transformadas Z con regiones de convergencia que incluyen a la circunferencia unidad, podemos realizar el desarrollo en serie de potencias

$$\log(1-\alpha z^{-1}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^{-n}, \qquad |z| > |\alpha|, \tag{13.34}$$

$$\log(1-\beta z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} z^{n}, \qquad |z| < |\beta^{-1}|. \tag{13.35}$$

Utilizando estas expresiones, vemos que para señales con transformadas Z racionales, como la Ecuación (13.32), la forma general de $\hat{x}[n]$ es

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \log|A|, & n = 0, \quad (13.36a) \\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{M_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{N_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0, \quad (13.36b) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{M_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{N_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0. \quad (13.36c) \end{cases}$$

Observe que en el caso especial de secuencias de longitud finita, desaparece el segundo término de las Ecuaciones (13.36b) y (13.36c). Las Ecuaciones (13.16a) a (13.16c) sugieren las siguientes propiedades generales del cepstrum complejo:

Propiedad 1: el cepstrum complejo disminuye como mínimo tan rápido como $1/|n|$. Concretamente,

$$|\hat{x}[n]| < C\frac{\alpha^{|n|}}{|n|}, \qquad -\infty < n < \infty,$$

siendo C una constante y α igual al máximo de $|a_k|$, $|b_k|$, $|c_k|$ y $|d_k|$.[5]

Propiedad 2: $\hat{x}[n]$ tendrá duración infinita, incluso cuando $x[n]$ tenga duración finita.

Propiedad 3: si $x[n]$ es real, $\hat{x}[n]$ es también real.

Las propiedades 1 y 2 se deducen directamente de las Ecuaciones (13.36a)–(13.36c). Ya hemos sugerido anteriormente la propiedad 3, sobre la base de que cuando $x[n]$ es real, $\log|X(e^{j\omega})|$ es par y $\arg[X(e^{j\omega})]$ es impar, por lo que la transformada inversa de

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]$$

es real. Para ver la propiedad 3 en el contexto de esta sección, debemos advertir que si $x[n]$ es real, entonces los polos y los ceros de $X(z)$ aparecen en parejas complejas conjugadas. Por tanto, por cada término complejo de la forma α^n/n en las Ecuaciones (13.36a)–(13.36c) habrá un término complejo conjugado $(\alpha^*)^n/n$, de manera que la suma será real.

[5]En la práctica, trataremos generalmente con señales de duración finita, que se representan mediante polinomios en z^{-1}; es decir, el numerador de la Ecuación (13.32). En muchos casos, la secuencia tendrá una longitud de cientos o de miles de muestras. En estas secuencias, cuando se incrementa su longitud, va siendo cada vez más probable que casi todos los ceros del polinomio se agrupen alrededor de la circunferencia unidad (Hughes y Nikeghbali, 2005). Esto implica que para secuencias largas de longitud finita, el decrecimiento del cepstrum complejo se debe principalmente al factor $1/n$.

13.5.2. Secuencias de fase mínima y de fase máxima

Como se comentó en los Capítulos 5 y 12, una secuencia de fase mínima es una secuencia real, causal y estable con todos los polos y ceros de su transformada Z en el interior de la circunferencia unidad. Nótese que $\log[X(z)]$ tiene singularidades tanto en los polos como en los ceros de $X(z)$. Como se requiere que la región de convergencia de $\log[X(z)]$ incluya a la circunferencia unidad para que $\hat{x}[n]$ sea estable y como las secuencias causales tienen una región de convergencia de la forma $r_R < |z|$, se deduce que, si $\hat{x}[n] = 0$ para $n < 0$, no puede haber singularidades de $\log[X(z)]$ sobre la circunferencia unidad o en su exterior. A la inversa, si todas las singularidades de $\hat{X}(z) = \log[X(z)]$ están en el interior de la circunferencia unidad, se deduce entonces que $\hat{x}[n] = 0$ para $n < 0$. Como las singularidades de $\hat{X}(z)$ son los polos y los ceros de $X(z)$, el cepstrum complejo de $x[n]$ será causal ($\hat{x}[n] = 0$ para $n < 0$) si y sólo si los polos y los ceros de $X(z)$ están en el interior de la circunferencia unidad. En otras palabras, $x[n]$ es una secuencia de fase mínima si y sólo si su cepstrum complejo es causal.

Esto se puede ver fácilmente para el caso de secuencias exponenciales o de longitud finita, considerando las Ecuaciones (13.36a)–(13.36c). Claramente, todos los términos de la Ecuación (13.36c) serán cero si todos los coeficientes b_k y d_k son cero, es decir, si no hay polos ni ceros fuera de la circunferencia unidad. Por tanto, se obtiene otra propiedad del cepstrum complejo:

Propiedad 4: el cepstrum complejo es $\hat{x}[n] = 0$ para $n < 0$ si y sólo si $x[n]$ es de fase mínima, es decir, si $X(z)$ tiene todos sus polos y ceros en el interior de la circunferencia unidad.

Por tanto, la causalidad del cepstrum complejo es equivalente a las propiedades de retardo de fase mínimo, retardo de grupo mínimo y retardo de energía mínimo que caracterizan también a las secuencias de fase mínima.

Ejemplo 13.1 Cepstrum complejo de un sistema de eco de fase mínima

El concepto de cepstrum surgió inicialmente de consideraciones sobre los ecos. Como vimos en la Sección 13.1, una señal con un eco se representa mediante una convolución $x[n] = v[n] * p[n]$, siendo

$$p[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n - n_0] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} P(z) = 1 + \alpha z^{-n_0}. \tag{13.37}$$

Los ceros de $P(z)$ están en las posiciones $z_k = \alpha^{1/n_0} e^{j2\pi(k+1/2)/n_0}$, y si $|\alpha| < 1$, todos los ceros estarán en el interior de la circunferencia unidad, en cuyo caso $p[n]$ es un sistema de fase mínima. Para obtener el cepstrum complejo $\hat{p}[n]$, podemos utilizar el desarrollo en serie de potencias de $\log[P(z)]$, como en la Sección 13.5.1, obteniendo

$$\hat{P}(z) = \log[1 + \alpha z^{-n_0}] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n} z^{-nn_0}, \tag{13.38}$$

de donde se deduce que

$$\hat{p}[n] = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\alpha^m}{m} \delta[n - mn_0]. \tag{13.39}$$

Observando la Ecuación (13.39), podemos ver que, para $|\alpha| < 1$, $\hat{v}[n] = 0$ cuando $n < 0$, como corresponde a un sistema de fase mínima. Además, podemos ver que los valores distintos de cero del cepstrum complejo del sistema de eco de fase mínima aparecen en múltiplos enteros positivos de n_0.

Las secuencias de fase máxima son secuencias estables cuyos polos y ceros están todos en el *exterior* de la circunferencia unidad. Las secuencias de fase máxima están limitadas por la derecha y, utilizando argumentos análogos, se deduce que el cepstrum complejo de una secuencia de fase máxima está también limitado por la derecha. Por tanto, otra propiedad del cepstrum complejo es:

Propiedad 5: el cepstrum complejo es $\hat{x}[n] = 0$ para $n > 0$ si y sólo si $x[n]$ es de fase máxima, es decir, si $X(z)$ tiene todos sus polos y ceros en el exterior de la circunferencia unidad.

Esta propiedad del cepstrum complejo se puede verificar fácilmente en el caso de secuencias exponenciales o de longitud finita teniendo en cuenta que si todos los coeficientes c_k y a_k son cero (es decir, no hay polos ni ceros en el *interior* de la circunferencia unidad), entonces la Ecuación (13.36b) demuestra que $\hat{x}[n] = 0$ para $n > 0$.

En el Ejemplo 13.1, determinamos el cepstrum complejo de la respuesta al impulso del sistema de eco cuando $|\alpha| < 1$; es decir, cuando el eco es menor que la señal directa. Si $|\alpha| > 1$, el eco es mayor que la señal directa y los ceros de la función de transferencia $P(z) = 1 + \alpha z^{-n_0}$ están en el exterior de la circunferencia unidad. En este caso, el sistema de eco es un sistema de fase máxima.[6] El correspondiente cepstrum complejo es

$$\hat{p}[n] = \log|\alpha|\delta[n] + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\alpha^{-m}}{m}\delta[n+mn_0]. \tag{13.40}$$

A partir de la Ecuación (13.40), podemos ver que, para $|\alpha| > 1$, $\hat{p}[n] = 0$ cuando $n > 0$, como debe ocurrir para un sistema de fase máxima. En este caso, vemos que los valores distintos de cero del cepstrum complejo del sistema de eco de fase máxima aparecen en múltiplos enteros negativos de n_0.

13.5.3. Relación entre el cepstrum real y el cepstrum complejo

Como se indicó en las Secciones 13.1 y 13.2, la transformada de Fourier del cepstrum real $c_x[n]$ es la parte real de la transformada de Fourier del cepstrum complejo $\hat{x}[n]$, y, de forma equivalente, $c_x[n]$ corresponde a la parte par de $\hat{x}[n]$. Es decir,

$$c_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]}{2}. \tag{13.41}$$

Si $\hat{x}[n]$ es causal, como ocurre cuando $x[n]$ es de fase mínima, entonces la Ecuación (13.41) es reversible, es decir, $\hat{x}[n]$ se puede recuperar a partir de $c_x[n]$ aplicando la ventana apropiada a $c_x[n]$. Concretamente,

$$\hat{x}[n] = c_x[n]\ell_{min}[n], \tag{13.42a}$$

siendo

$$\ell_{min}[n] = 2u[n] - \delta[n] = \begin{cases} 2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}. \tag{13.42b}$$

Las Ecuaciones (13.42a) y (13.42b) indican cómo se puede obtener el cepstrum complejo a partir del cepstrum y, en consecuencia, también sólo a partir del logaritmo del módulo si se sabe que $x[n]$ es de fase mínima. Esto se ilustra también en forma de diagrama de bloques en la Figura 13.2.

En el ejemplo siguiente, ilustramos las Ecuaciones (13.41) y (13.42a) para el sistema de eco de fase mínima del Ejemplo 13.1.

---

[6] $P(z) = z^{-n_0}(\alpha + z^{n_0})$ tiene n_0 polos en $z = 0$, que se ignoran en el cálculo de $\hat{p}[n]$.

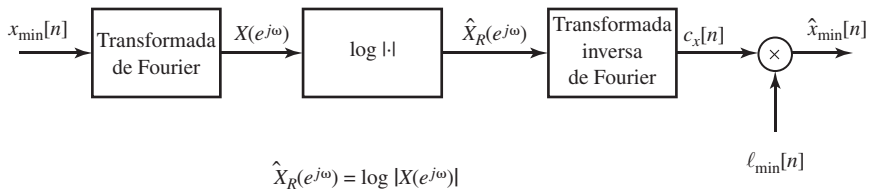


Figura 13.2 Determinación del cepstrum complejo para señales de fase mínima.

Ejemplo 13.2 Cepstrum real de un sistema de eco de fase mínima

Consideremos el cepstrum complejo del sistema de eco de fase mínima dado en la Ecuación (13.39) del Ejemplo 13.1. A partir de la Ecuación (13.41) se deduce que el cepstrum real del sistema de eco de fase mínima es

$$c_p[n] = \frac{1}{2}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\alpha^m}{m}\delta[n-mn_0] + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\alpha^m}{m}\delta[-n-mn_0]. \tag{13.43}$$

Como $\delta[-n] = \delta[n]$, la Ecuación (13.43) se puede expresar de forma más compacta

$$c_p[n] = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\alpha^m}{2m}\left(\delta[n-mn_0]+\delta[n+mn_0]\right). \tag{13.44}$$

Nótese también que si $c_p[n]$ está dado por la Ecuación (13.44) y $\ell_{min}[n]$ está dado por la Ecuación (13.42b), entonces $\ell_{min}[n]c_p[n]$ es igual a $\hat{p}[n]$ en la Ecuación (13.39).

13.6. CÁLCULO DEL CEPSTRUM COMPLEJO

El uso práctico del cepstrum complejo requiere métodos de cálculo exactos y eficientes para obtenerlo partiendo de una señal muestreada. En todas las explicaciones anteriores estaba implícito el supuesto de unicidad y continuidad del logaritmo complejo de la transformada de Fourier de la señal de entrada. Si deseamos que las representaciones matemáticas obtenidas anteriormente sirvan como base para el cálculo del cepstrum complejo, de forma equivalente, como base para obtener realizaciones del sistema $D_*[\cdot]$, entonces debemos considerar los aspectos asociados con el cálculo de la transformada de Fourier y del logaritmo complejo.

El sistema $D_*[\cdot]$ se representa en función de la transformada de Fourier mediante las ecuaciones

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \tag{13.45a}$$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})], \tag{13.45b}$$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{13.45c}$$

Estas ecuaciones corresponden a la cascada de tres sistemas que se muestra en la Figura 13.3.

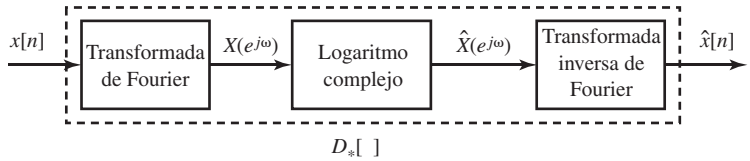


Figura 13.3 Cascada de tres sistemas para implementar el cálculo de la operación de cepstrum complejo $D_*[\,]$.

Al calcular numéricamente el cepstrum complejo, estamos limitados a tratar con secuencias de longitud finita, y sólo podemos calcular la transformada de Fourier en un número finito de frecuencias. Es decir, en vez de utilizar la transformada de Fourier en tiempo discreto, debemos emplear la DFT. Por tanto, en lugar de las Ecuaciones (13.45a)–(13.45c), tenemos la realización computacional

$$X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \tag{13.46a}$$

$$\hat{X}[k] = \log[X(e^{j\omega})]\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}, \tag{13.46b}$$

$$\hat{x}_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{13.46c}$$

Estas operaciones se muestran en la Figura 13.4(a), y las correspondientes operaciones para realizar el sistema inverso se ilustran en la Figura 13.4(b).

Como en la Ecuación (13.46b) $\hat{X}[k]$ es una versión muestreada de $\hat{X}(e^{j\omega})$ se deduce de la explicación de la Sección 8.4 que $\hat{x}_p[n]$ será una versión solapada en el tiempo de $\hat{x}[n]$, es decir, que $\hat{x}_p[n]$ se relaciona con el cepstrum $\hat{x}[n]$ deseado como

$$\hat{x}_p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n+rN]. \tag{13.47}$$

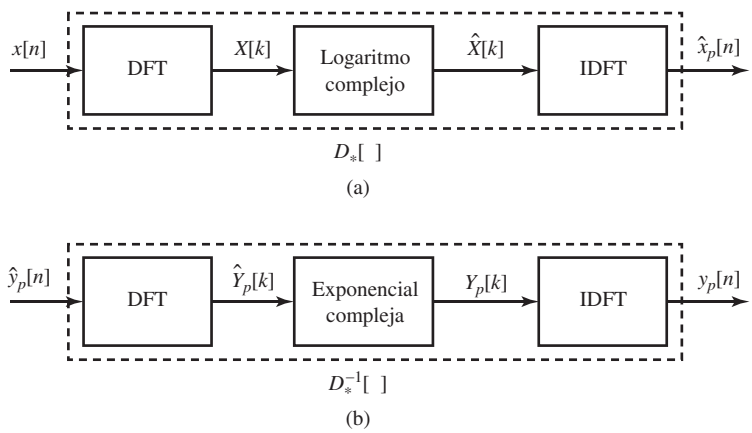


Figura 13.4 Realización aproximada utilizando la transformada discreta de Fourier de (a) $D_*[\cdot]$ y (b) $D_*^{-1}[\cdot]$.

Sin embargo, teniendo en cuenta la Propiedad 1 de la Sección 13.5, que indica que $\hat{x}[n]$ decrece más rápido que una secuencia exponencial, puede esperarse que la aproximación mejore cuando N crece. Añadiendo ceros a una secuencia de entrada, generalmente es posible aumentar la frecuencia de muestreo del logaritmo complejo de la transformada de Fourier, de forma que no se produzca un solapamiento severo en el cómputo del cepstrum complejo.

13.6.1. Desenrollado de la fase

Las muestras de $\hat{X}(e^{j\omega})$ dadas por la Ecuación (13,46b), requieren el cómputo de las muestras de $\log|X(e^{j\omega})|$ y de $\arg[X(e^{j\omega})]$. Las muestras de $\log|X(e^{j\omega})|$ a una frecuencia de muestreo adecuada se pueden obtener calculando la DFT de $x[n]$ rellenando con ceros. Las muestras de $\mathrm{ARG}[X(e^{j\omega})]$, es decir, de la fase módulo 2π se pueden asimismo calcular de forma directa a partir de las muestras de $X(e^{j\omega})$ utilizando rutinas de arco tangente disponibles en la mayor parte de los lenguajes de programación de alto nivel. Sin embargo, para obtener el cepstrum complejo o su versión solapada $\hat{x}_p[n]$, se requieren muestras de la fase desenrollada $\arg[X(e^{j\omega})]$. En consecuencia, los procedimientos para *desenrollar* la fase, es decir, para obtener muestras de la fase desenrollada a partir de muestras de la fase módulo 2π, son un aspecto computacional importante en la obtención del cepstrum complejo.

Para ilustrar estos aspectos, consideremos una secuencia de entrada causal de longitud finita cuya transformada de Fourier es de la forma

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= Ae^{-j\omega M_o}\prod_{k=1}^{M_i}(1-a_k e^{-j\omega})\prod_{k=1}^{M_o}(1-b_k e^{j\omega}), \end{aligned} \tag{13.48}$$

siendo $|a_k|$ y $|b_k|$ menores que la unidad, $M = M_o + M_i$ y A positivo. La Figura 13.5(a) muestra una curva continua de fase de una secuencia con esta forma. Los puntos indican muestras en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/N)k$. La Figura 13.5(b) muestra el valor principal y sus muestras calculadas mediante la DFT de la secuencia de entrada. Una forma de desenrollar el valor principal de la fase está basada en la relación

$$\arg(X[k]) = \mathrm{ARG}(X[k]) + 2\pi r[k], \tag{13.49}$$

donde $r[k]$ indica un entero que determina el múltiplo apropiado de 2π que hay que sumar al valor principal en la frecuencia $\omega_k = 2\pi k/N$. La Figura 13.5(c) muestra los valores de $2\pi r[k]$ necesarios para obtener la Figura 13.5(a) a partir de la 13.5(b). Este ejemplo sugiere el siguiente algoritmo para calcular $r[k]$ a partir de $\mathrm{ARG}(X[k])$ comenzando con $r[0] = 0$:

1. Si $\mathrm{ARG}(X[k]) - \mathrm{ARG}(X[k-1]) > 2\pi - \varepsilon_1$, entonces $r[k] = r[k-1] - 1$.
2. Si $\mathrm{ARG}(X[k]) - \mathrm{ARG}(X[k-1]) < -(2\pi - \varepsilon_1)$, entonces $r[k] = r[k-1] + 1$.
3. En otros casos, $r[k] = r[k-1]$.
4. Repetir los pasos 1 a 3 para $1 \le k < N/2$.

Tras determinar $r[k]$ se puede utilizar la Ecuación (13.49) para calcular $\arg(X[k])$ con $0 \le k < N/2$. En este momento, $\arg(X[k])$ contendrá una componente grande de fase lineal debida al factor $e^{-j\omega M_o}$ de la Ecuación (13.48). Esta componente se puede eliminar sumando $2\pi k M_o/N$ a la fase desenrollada en el intervalo $0 \le k < N/2$. Los valores de $\arg(X[k])$ en el intervalo $N/2 < k \le N-1$ se pueden obtener utilizando simetría. Finalmente, $\arg(X[N/2]) = 0$.

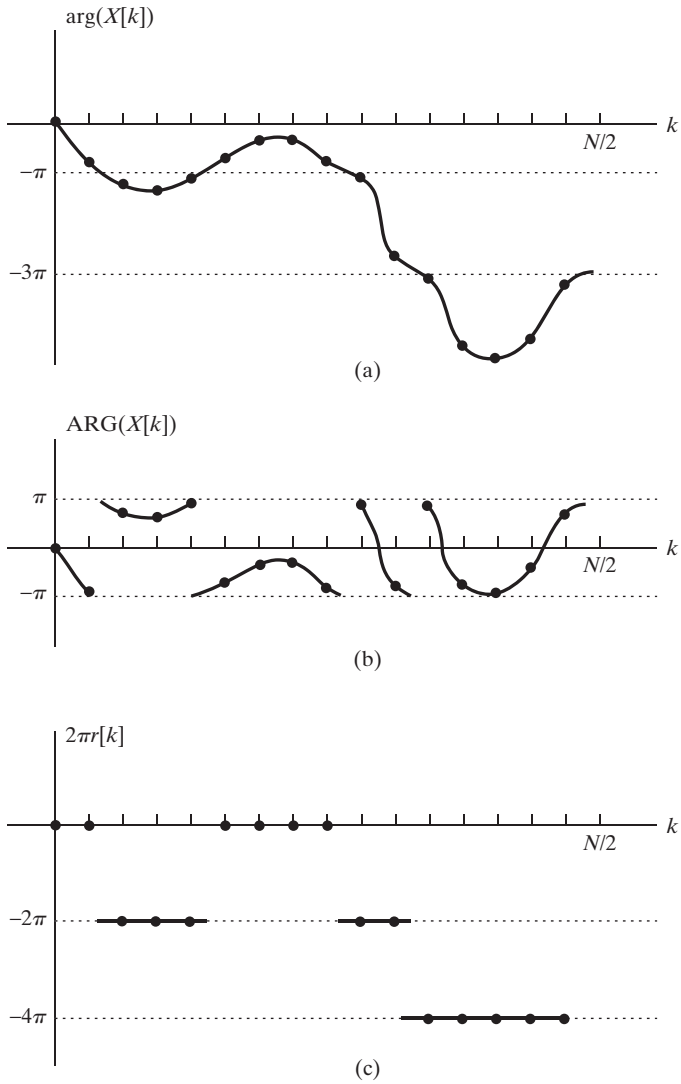


Figura 13.5 (a) Muestras de $\arg[X(e^{j\omega})]$. (b) Valor principal del apartado (a). (c) Secuencia de corrección para obtener arg a partir de ARG.

El algoritmo anterior funciona bien si las muestras de $\mathrm{ARG}(X[k])$ están lo suficientemente cercanas entre sí como para que las discontinuidades se puedan detectar fiablemente. El parámetro ε_1 es una tolerancia para reconocer que el módulo de la diferencia entre muestras adyacentes del valor principal de la fase siempre será menor que 2π. Si ε_1 es demasiado grande, se indicará una discontinuidad donde no la había. Si ε_1 es demasiado pequeño, el algoritmo perderá discontinuidades entre muestras adyacentes con una variación rápida de la función de fase desenrollada $\arg[X(e^{j\omega})]$. Obviamente, si se incrementa la frecuencia de muestreo de la DFT aumentando N se mejoran las posibilidades de detectar correctamente las discontinuidades y, por tanto, de calcular correctamente $\arg(X[k])$. Si $\arg[X(e^{j\omega})]$ varía rápidamente, entonces debemos esperar que $\hat{x}[n]$ decrezca menos rápidamente que si $\arg[X(e^{j\omega})]$ varía lentamente. Por tanto, el solapamiento en $\hat{x}[n]$ es un problema mayor cuando la fase varía rápidamente. Al aumentar el valor de N se reduce el solapamiento del cepstrum complejo y también mejoran las posibilidades de ser capaces de desenrollar correctamente la fase de $X[k]$ mediante el algoritmo descrito previamente.

En algunos casos, el algoritmo simple que hemos desarrollado puede fallar debido a que no es posible o no es práctico utilizar un valor de N suficientemente grande. A menudo, el solapamiento para un N dado es aceptable, pero las discontinuidades del valor principal no se pueden detectar de forma fiable. Tribolet (1977, 1979) propuso una modificación del algoritmo que utiliza tanto el valor principal de la fase como su derivada para calcular la fase desenrollada. Como antes, la Ecuación (13.49) proporciona el conjunto de valores permitidos en las frecuencias $\omega_k = (2\pi/N)k$ y buscamos determinar $r[k]$. Suponemos conocida la derivada de la fase

$$\arg'(X[k]) = \frac{d}{d\omega}\arg[X(e^{j\omega})]\bigg|_{\omega=2\pi k/N}$$

en todos los valores de k, (en la Sección 13.6.2 se desarrollará un procedimiento para calcular esas muestras de la derivada de la fase). Para calcular $\arg(X[k])$ suponemos además que $\arg(X[k-1])$ es conocido. Entonces $\arg(X[k])$, la estimación de $\arg(X[k])$, se define como

$$\arg(X[k]) = \arg(X[k-1]) + \frac{\Delta\omega}{2}\{\arg'(X[k]) + \arg'(X[k-1])\}. \tag{13.50}$$

La Ecuación (13.50) se obtiene aplicando integración numérica trapezoidal a las muestras de la derivada de la fase. Se dice que la estimación es *consistente* si para algún ε_2 existe un entero $r[k]$ tal que

$$|\arg(X[k]) - \mathrm{ARG}(X[k]) - 2\pi r[k]| < \varepsilon_2 < \pi. \tag{13.51}$$

Obviamente, la estimación mejora al disminuir el tamaño de paso de la integración numérica $\Delta\omega$. Inicialmente, $\Delta\omega = 2\pi/N$ tal como se obtiene de la DFT. Si ningún entero $r[k]$, satisface la Ecuación (13.51), entonces $\Delta\omega$ se reduce a la mitad, y se calcula una nueva estimación de $\arg(X[k])$ con el nuevo tamaño del paso. Después, se evalúa la Ecuación (13.51) con la nueva estimación. Se calculan mediante integración numérica estimaciones de $\arg(X[k])$ de exactitud creciente, hasta que exista un entero $r[k]$ que satisfaga la Ecuación (13.51). Este entero $r[k]$ se utiliza en la Ecuación (13.49) para calcular finalmente $\arg(X[k])$. A continuación, se utiliza la fase desenrollada para calcular $\arg(X[k+1])$, y así sucesivamente.

Otro planteamiento para desenrollar la fase de una secuencia de longitud finita se basa en el hacho de que la transformada Z de una secuencia de longitud finita es un polinomio de grado finito, y por consiguiente se puede ver como un producto de factores de primer orden. Para cada uno de esos factores, $\mathrm{ARG}[X(e^{j\omega})]$ y $\arg[X(e^{j\omega})]$ son iguales. Es decir, la fase de un factor de primer orden no requiere desenrollado. Además, la fase desenrollada del producto de factores individuales es la suma de las fases desenrolladas de los factores individuales. Por tanto, tratando una secuencia de longitud finita N como coeficientes de un polinomio de grado N, y factorizando primero el polinomio es sus factores de grado 1, se puede calcular fácilmente la fase desenrollada. Para valores pequeños de N, se pueden aplicar algoritmos convencionales de cálculo de raíces de polinomios. Para valores grandes, Sitton et al. (2003) han desarrollado un algoritmo efectivo que ha demostrado su eficacia con polinomios de grados del orden de millones. Sin embargo, hay casos en los que ese algoritmo también falla, particularmente al identificar raíces que no están cercanas a la circunferencia unidad.

En la explicación anterior, hemos descrito brevemente varios algoritmos para obtener la fase desenrollada. Karam y Oppenheim (2007) han propuesto también combinar estos algoritmos para explotar sus diversas ventajas.

Otros aspectos del cómputo del cepstrum complejo a partir de una señal de entrada muestreada $x[n]$ se relacionan con el término de fase lineal en $\arg[X(e^{j\omega})]$ y el signo del factor de escala global A. En nuestra definición de cepstrum complejo, se requiere que $\arg[X(e^{j\omega})]$ sea continua, impar y periódica

en ω. Por tanto, el signo de A debe ser positivo, ya que si fuera negativo, aparecería una discontinuidad de fase en $\omega = 0$. Además, $\arg[X(e^{j\omega})]$ no puede contener un término lineal, ya que impondría una discontinuidad en $\omega = \pi$. Consideremos, por ejemplo, una secuencia causal de longitud finita $M+1$. La correspondiente transformada Z tendrá la forma de la Ecuación (13.29) con N_o=N_i=0 y M=M_o+M_i. Además, como $x[n] = 0$ para $n < 0$, se deduce que $r = -M_o$. En consecuencia, la transformada de Fourier toma la forma

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= Ae^{-j\omega M_o} \prod_{k=1}^{M_i}(1 - a_k e^{-j\omega}) \prod_{k=1}^{M_o}(1 - b_k e^{j\omega}), \end{aligned} \tag{13.52}$$

con $|a_k|$ y $|b_k|$ menores que la unidad. El signo de A se determina fácilmente, ya que corresponderá al signo de $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 0$, que, a su vez, se puede calcular fácilmente como la suma de los términos de la secuencia de entrada.

13.6.2. Cálculo del cepstrum complejo utilizando la derivada logarítmica

Como alternativa al cálculo explícito del logaritmo complejo, se puede explotar una representación matemática basada en la derivada logarítmica. Para secuencias reales, la derivada de $\hat{X}(e^{j\omega})$ se puede representar en las formas equivalente

$$\hat{X}'(e^{j\omega}) = \frac{d\hat{X}(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\log|X(e^{j\omega})| + j\frac{d}{d\omega}\arg[X(e^{j\omega})] \tag{13.53a}$$

y

$$\hat{X}'(e^{j\omega}) = \frac{X'(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}, \tag{13.53b}$$

donde $'$ representa diferenciación con respecto a ω. Como la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \tag{13.54}$$

su derivada con respecto a ω es

$$X'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jnx[n])e^{-j\omega n}; \tag{13.55}$$

es decir, $X'(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier en tiempo discreto de $-jnx[n]$. Asimismo, $\hat{X}'(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $-jn\hat{x}[n]$. Por tanto, $\hat{x}[n]$ se puede determinar para $n \neq 0$ a partir de

$$\hat{x}[n] = \frac{-1}{2\pi nj}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega, \qquad n \neq 0. \tag{13.56}$$

El valor de $\hat{x}[0]$ se puede determinar del logaritmo del módulo como

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\omega})| d\omega. \tag{13.57}$$

Las Ecuaciones (13.54) a (13.57) representan el cepstrum complejo en función de las transformadas de Fourier en tiempo discreto de $x[n]$ y $nx[n]$ y, por tanto, en ellas no interviene explícitamente la fase desenrollada. Para secuencias de longitud finita, las muestras de estas transformadas se pueden calcular utilizando la DFT, con lo que se llega a las correspondientes ecuaciones

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}, \tag{13.58a}$$

$$X'[k] = -j\sum_{n=0}^{N-1} nx[n]e^{-j(2\pi/N)kn} = X'(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k}, \tag{13.58b}$$

$$\hat{x}_{dp}[n] = -\frac{1}{jnN}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X'[k]}{X[k]}e^{j(2\pi/N)kn}, \qquad 1 \le n \le N-1, \tag{13.58c}$$

$$\hat{x}_{dp}[0] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\log|X[k]|, \tag{13.58d}$$

donde el subíndice d se refiere al uso de la derivada logarítmica y el subíndice p sirve para recordar la periodicidad inherente a los cálculos mediante la DFT. Con el uso de las Ecuaciones (13.58a) a (13.58d) se evitan los problemas del cálculo de logaritmo complejo, con el coste, sin embargo, de un solapamiento más severo, ya que ahora,

$$\hat{x}_{dp}[n] = \frac{1}{n}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(n+rN)\hat{x}[n+rN], \quad n \neq 0. \tag{13.59}$$

Por tanto, suponiendo que la curva de fase continua muestreada se calcula de forma exacta, cabe esperar que para un valor dado de N, $\hat{x}_p[n]$ en la Ecuación (13.46c) sea una mejor aproximación a $\hat{x}[n]$ que la que sería $\hat{x}_{dp}[n]$ en la Ecuación (13.58c).

13.6.3. Realizaciones de fase mínima de secuencias de fase mínima

En el caso especial de secuencias de fase mínima, la representación matemática se simplifica, como se indica en la Figura 13.2. Las siguientes ecuaciones muestran una realización computacional basada en utilizar la DFT en vez de la transformada de Fourier de la Figura 13.2:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \tag{13.60a}$$

$$c_{xp}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\log|X[k]|e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{13.60b}$$

En este caso, el cepstrum está solapado. Es decir,

$$c_{xp}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_x[n+rN]. \tag{13.61}$$

Para calcular el cepstrum complejo a partir de $c_{xp}[n]$ basándose en la Figura 13.2, escribimos:

$$\hat{x}_{cp}[n] = \begin{cases} c_{xp}[n], & n = 0, \quad N/2, \\ 2c_{xp}[n], & 1 \leq n < N/2, \\ 0, & N/2 < n \leq N-1. \end{cases} \tag{13.62}$$

Claramente, $\hat{x}_{cp}[n] \neq \hat{x}_p[n]$, ya que es la parte par de $\hat{x}[n]$ que se encuentra solapada, en vez de la propia $\hat{x}[n]$. No obstante, para N grande, puede esperarse que $\hat{x}_{cp}[n]$ sea una aproximación razonable a $\hat{x}[n]$ en el intervalo finito $0 \leq n < N/2$. De forma similar, si $x[n]$ es de fase máxima, se puede obtener una aproximación al cepstrum complejo como

$$\hat{x}_{cp}[n] = \begin{cases} c_{xp}[n], & n = 0, \quad N/2, \\ 0, & 1 \leq n < N/2, \\ 2c_{xp}[n], & N/2 < n \leq N-1. \end{cases} \tag{13.63}$$

13.6.4. Cálculo recursivo del cepstrum complejo para secuencias de fase mínima y de fase máxima

Para secuencias de fase mínima, la ecuación en diferencias (13.26) se puede reordenar de forma que proporcione una fórmula de recursión para $\hat{x}[n]$. Como para secuencias de fase mínima tanto $\hat{x}[n] = 0$ como $x[n] = 0$ para $n < 0$, la Ecuación (13.26) se convierte en

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k]x[n-k], \qquad n > 0, \\ &= \hat{x}[n]x[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k]x[n-k], \end{aligned} \tag{13.64}$$

que es una recursión para $D_*[\,]$ para señales de fase mínima. Despejando $\hat{x}[n]$ se obtiene la fórmula de recursión

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \dfrac{x[n]}{x[0]} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] \frac{x[n-k]}{x[0]}, & n > 0. \end{cases} \tag{13.65}$$

Suponiendo $x[0] > 0$, se puede demostrar que el valor de $\hat{x}[0]$ es (véase el Problema 13.15):

$$\hat{x}[0] = \log(|A|) = \log(|x[0]|). \tag{13.66}$$

Por tanto, las Ecuaciones (13.65) y (13.66) constituyen un procedimiento para calcular el cepstrum complejo de señales de fase mínima. De la Ecuación (13.65) se deduce también que este cálculo es causal para entradas de fase mínima, es decir, la salida en el instante n_0 sólo depende de la entrada para $n \leq n_0$, con n_0 arbitrario (véase el Problema 13.20). De forma similar, las Ecuaciones (13.64) y (13.66) representan el cálculo de la secuencia de fase mínima a partir de su cepstrum complejo.

Para secuencias de fase máxima, $\hat{x}[n] = 0$ y $x[n] = 0$ para $n > 0$. Por tanto, en este caso, la Ecuación (13.26) se convierte en

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=n}^{0} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k]x[n-k], \qquad n < 0, \\ &= \hat{x}[n]x[0] + \sum_{k=n+1}^{0} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k]x[n-k]. \end{aligned} \tag{13.67}$$

Despejando $\hat{x}[n]$, tenemos

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]}{x[0]} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{0} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] \frac{x[n-k]}{x[0]}, & n < 0, \\ \log(x[0]), & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \tag{13.68}$$

La Ecuación (13.68) sirve como procedimiento de cálculo del cepstrum complejo de una secuencia de fase máxima y la Ecuación (13.67) es un procedimiento computacional del sistema característico para la convolución.

Por consiguiente, vemos que en el caso de secuencias de fase mínima o de fase máxima, tenemos también las fórmulas de las Ecuaciones (13.64)-(13.68) como posibles realizaciones del sistema característico y de su inverso. Estas ecuaciones pueden ser muy útiles cuando la secuencia de entrada es muy corta o cuando sólo se desean obtener unas pocas muestras del cepstrum complejo. Con estas fórmulas, por supuesto, no hay error de solapamiento.

13.6.5. Uso de ponderación exponencial

La ponderación exponencial de una secuencia se puede utilizar para evitar o mitigar algunos de los problemas que se encuentran al calcular el cepstrum complejo. La ponderación exponencial de una secuencia se define como

$$w[n] = \alpha^n x[n]. \tag{13.69}$$

La correspondiente transformada Z es

$$W(z) = X(\alpha^{-1}z). \tag{13.70}$$

Si la región de convergencia de $X(z)$ es $r_R < |z| < r_L$, entonces la región de convergencia de $W(z)$ será $|\alpha|r_R < |z| < |\alpha|r_L$, y los polos y ceros de $X(z)$ se desplazan radialmente un factor de $|\alpha|$. Es decir, si z_0 es un polo o un cero de $X(z)$, entonces $z_0\alpha$ es el correspondiente polo o cero de $W(z)$.

Una propiedad interesante de la ponderación exponencial es que conmuta con la convolución. Es decir, si $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ y $w[n] = a^n x[n]$, entonces

$$W(z) = X(\alpha^{-1}z) = X_1(\alpha^{-1}z)X_2(\alpha^{-1}z), \tag{13.71}$$

de forma que

$$\begin{aligned} w[n] &= (a^n x_1[n]) * (a^n x_2[n]) \\ &= w_1[n] * w_2[n]. \end{aligned} \tag{13.72}$$

Por tanto, al calcular el cepstrum complejo, si $X(z) = X_1(z)X_2(z)$,

$$\begin{aligned}\hat{W}(z) &= \log[W(z)] \\ &= \log[W_1(z)] + \log[W_2(z)].\end{aligned} \tag{13.73}$$

La ponderación exponencial se puede explotar para el cálculo del cepstrum de varias maneras. Por ejemplo, los polos o los ceros de $X(z)$ en la circunferencia unidad requieren especial cuidado al calcular el cepstrum complejo. Se puede demostrar (Carslaw, 1952) que un factor $\log(1 - e^{j\theta}e^{-j\omega})$ tiene un desarrollo en serie de Fourier

$$\log(1 - e^{j\theta}e^{-j\omega}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j\theta n}}{n} e^{-j\omega n} \tag{13.74}$$

y, por tanto, la contribución de este término al cepstrum complejo es $(e^{j\theta n}/n)u[n-1]$. Sin embargo, el logaritmo del módulo es infinito, y la fase es discontinua con un salto de π radianes en $\omega = \theta$. Esto presenta obvias dificultades computacionales que desearíamos evitar. Utilizando ponderación exponencial con $0 < \alpha < 1$, todos los polos y los ceros se mueven radialmente hacia dentro. Por tanto, un polo o un cero sobre la circunferencia unidad se moverá hacia el interior del círculo unidad.

Como otro ejemplo, consideremos una señal $x[n]$ causal y estable que no sea de fase mínima. La señal ponderada exponencialmente, $w[n] = \alpha^n x[n]$, se puede convertir en una secuencia de fase mínima si se escoge α de forma que $|z_{max}\alpha| < 1$, siendo z_{max} la posición del cero de módulo máximo.

13.7. CÁLCULO DEL CEPSTRUM COMPLEJO UTILIZANDO RAÍCES DE POLINOMIOS

En la Sección 13.6.1 hemos presentado el hecho de que para secuencias de longitud finita, podríamos explotar la propiedad de que la transformada Z es un polinomio de grado finito, y que la fase total desenrollada se puede obtener sumando las fases desenrolladas de cada uno de los factores. Si se factorizan en primer lugar los polinomios en sus términos de grado 1 utilizando un algoritmo de cálculo de raíces de polinomios, entonces la fase desenrollada de cada factor se puede especificar analíticamente de forma sencilla. De manera similar, el cepstrum complejo de una secuencia de longitud finita se puede obtener factorizando en primer lugar el polinomio, y sumando después los cepstra complejos de cada uno de los factores.

El planteamiento básico se sugiere en la Sección 13.5.1. Si la secuencia $x[n]$ tiene longitud finita, como esencialmente será siempre el caso de señales obtenidas por muestreo, entonces su transformada Z es un polinomio en z^{-1} de la forma

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M} x[n]z^{-n}. \tag{13.75}$$

Este polinomio de grado M en z^{-1} se puede representar como

$$X(z) = x[0] \prod_{m=1}^{M_i} (1 - a_m z^{-1}) \prod_{m=1}^{M_o} (1 - b_m^{-1} z^{-1}), \tag{13.76}$$

donde los valores a_m son los ceros (complejos) que están en el interior de la circunferencia unidad y los valores b_m^{-1} son los ceros que están en el exterior de la circunferencia unidad; es decir, $|a_m| < 1$ y $|b_m| < 1$. Suponemos que no hay ceros precisamente sobre la circunferencia unidad. Si sacamos como factor un término $-b_m^{-1}z^{-1}$ en cada uno de los factores del producto de la derecha e la Ecuación (13.76), dicha ecuación se puede expresar como

$$X(z) = Az^{-M_o} \prod_{m=1}^{M_i} (1 - a_m z^{-1}) \prod_{m=1}^{M_o} (1 - b_m z), \tag{13.77a}$$

siendo

$$A = x[0](-1)^{Mo} \prod_{m=1}^{M_o} b_m^{-1}. \tag{13.77b}$$

Esta representación se puede calcular utilizando un algoritmo de cálculo de raíces de polinomios para obtener los ceros a_m y $1/b_m$ que están en el interior y en el exterior de la circunferencia unidad, respectivamente, del polinomio cuyos coeficientes son los valores de la secuencia $x[n]$.[7]

Dada la representación numérica del polinomio de la transformada Z como se indica en las Ecuaciones (13.77a) y (13.77b), se pueden calcular los valores numéricos de la secuencia del cepstrum complejo a partir de las Ecuaciones (13.36a)–(13-36c), de la siguiente forma

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \log|A|, & n = 0, \\ -\displaystyle\sum_{m=1}^{M_i} \frac{a_m^n}{n}, & n > 0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{M_o} \frac{b_m^{-n}}{n}, & n < 0. \end{cases} \tag{13.78}$$

Si $A < 0$, este hecho se puede tener en cuenta de forma separada, junto con el valor de M_o, el número de raíces que están en el exterior de la circunferencia unidad. Con esta información y $\hat{x}[n]$, tenemos todo lo necesario para reconstruir la señal original $x[n]$. De hecho, en la Sección 13.8.2, se demostrará que, en principio, $x[n]$ se puede calcular de forma recursiva a partir de sólo $M + 1 = M_o + M_i + 1$ muestras de $\hat{x}[n]$.

Este método de cálculo es particularmente útil cuando $M = M_o + M_i$ es pequeño, pero no está limitado a valores de M pequeños. Steiglitz y Dickinson (1982) propusieron por primera vez este método y obtuvieron éxito en el cómputo de raíces de polinomios de grado tan alto como $M = 256$, que era el límite práctico impuesto por los recursos de cómputo disponibles en ese momento. Con el algoritmo de cálculo de raíces de polinomios de Sitton et al. (2003), se puede calcular de forma precisa el cepstrum complejo de secuencias de longitud finita pero extremadamente largas. Entre las ventajas de este método están el hecho de que no hay solapamiento y de que no existe ninguna de las incertidumbres asociadas al desenrollado de la fase.

13.8. DECONVOLUCIÓN UTILIZANDO EL CEPSTRUM COMPLEJO

El operador cepstrum complejo $D_*[\,]$, tiene un papel fundamental en la teoría de sistemas homomórficos, que se basa en una generalización del principio de superposición (Oppenheim, 1964, 1967, 1969a,

[7] Aunque no sorprendente, es raro que una raíz calculada de un polinomio esté precisamente en la circunferencia unidad. En los casos en los que esto sucede, dichas raíces se pueden mover utilizando ponderación exponencial, como se explica en la Sección 13.6.5.

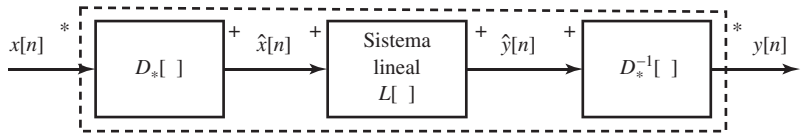


Figura 13.6 Forma canónica de sistemas homomórficos donde las entradas y las correspondientes salidas se combinan mediante convolución.

Schafer, 1969 y Oppenheim, Schafer y Stockham, 1968). En el filtrado homomórfico de señales convolucionadas, el operador $D_*[\,]$ se denomina *sistema característico para la convolución*, ya que tiene la especial propiedad de transformar convoluciones en sumas. Para verlo, supongamos

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \tag{13.79}$$

de forma que la correspondiente transformada Z es

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_z(z). \tag{13.80}$$

Si se calcula el logaritmo complejo con se ha indicado en la definición de cepstrum complejo, entonces

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \log[X(z)] = \log[X_1(z)] + \log[X_2(z)] \\ &= \hat{X}_1(z) + \hat{X}_2(z), \end{aligned} \tag{13.81}$$

lo que implica que el cepstrum complejo es

$$\hat{x}[n] = D_*[x_1[n] * x_2[n]] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n]. \tag{13.82}$$

Un análisis similar permite demostrar que si $\hat{y}[n] = y_1[n] + y_2[n]$, entonces se deduce que $D_*^{-1}[\hat{y}_1[n] + \hat{y}_2[n]] = \hat{y}_1[n] * \hat{y}_2[n]$. Si las componentes cepstrales $\hat{x}_1[n]$ y $\hat{x}_2[n]$ ocupan diferentes intervalos de cuefrencia, se puede aplicar filtrado lineal al cepstrum complejo para eliminar $x_1[n]$ o $x_2[n]$. Si a esto le sigue una transformación mediante el sistema inverso $D_*^{-1}[\,]$, la correspondiente componente será eliminada de la salida. La Figura 13.6 muestra este procedimiento de separación de señales convolucionadas (deconvolución), donde el sistema $L[\,]$ es un sistema lineal (aunque no necesariamente invariante con el tiempo). Los símbolos $*$ y $+$ en las entradas y salidas de los sistemas que componen la Figura 13.6 indican las operaciones de superposición que se cumplen en cada punto del diagrama. La Figura 13.6 es una representación general de una clase de sistemas que obedecen a un principio general de superposición con la convolución como operación de combinación de señales. Todos los miembros de esta clase de sistemas difieren entre sí sólo en la parte lineal $L[\,]$.

En el resto de esta sección, ilustraremos cómo se puede utilizar el análisis cepstral en los problemas especiales de deconvolución donde se descompone una señal, bien en una componente de fase mínima y una componente paso todo o bien en una componente de fase mínima y otra de fase máxima. En la Sección 13.9, ilustraremos cómo se puede aplicar el análisis cepstral a la deconvolución de una señal convolucionada con un tren de impulsos, que representa, por ejemplo, una idealización de un entorno multicamino. En la Sección 13.10 generalizaremos este ejemplo para ilustrar cómo se ha aplicado con éxito el análisis cepstral al tratamiento de voz.

13.8.1. Deconvolución homomórfica fase mínima/paso todo

Cualquier secuencia $x[n]$ para que exista su cepstrum complejo se puede expresar siempre como la convolución de una secuencia de fase mínima y una secuencia paso todo:

$$x[n] = x_{min}[n] * x_{ap}[n]. \tag{13.83}$$

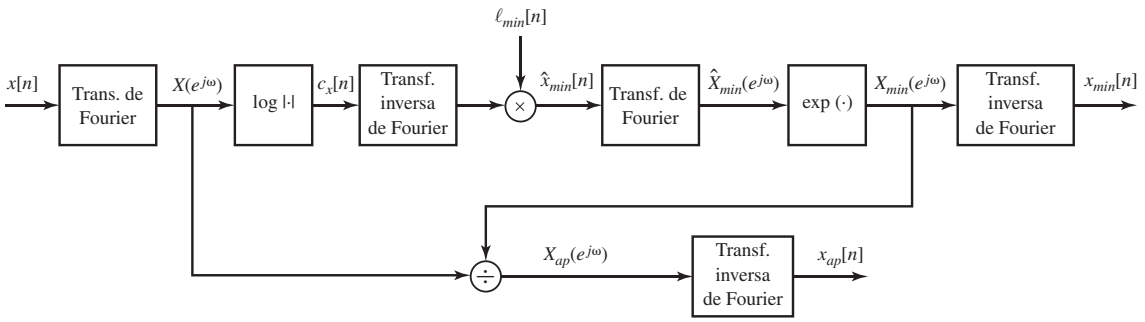


Figura 13.7 Deconvolución de una secuencia en componentes de fase mínima y paso todo utilizando el cepstrum.

En la Ecuación (13.83), $x_{min}[n]$ y $x_{ap}[n]$ indican las componentes de fase mínima y paso todo, respectivamente.

Si $x[n]$ no es de fase mínima, entonces el sistema de la Figura 13.2 con entrada $x[n]$ y $\ell_{min}[n]$ dado por la Ecuación (13.42b) produce el cepstrum complejo de la secuencia de fase mínima que tiene una transformada de Fourier con el mismo módulo que la de $x[n]$. Si se utiliza $\ell_{max}[n] = \ell_{min}[-n]$, la salida será el cepstrum complejo de la secuencia de fase máxima que tiene una transformada de Fourier con el mismo módulo que la de $x[n]$.

Podemos obtener el cepstrum complejo $\hat{x}_{min}[n]$ de la secuencia $x_{min}[n]$ en la Ecuación (13.83) mediante las operaciones de la Figura 13.2. El cepstrum complejo $\hat{x}_{ap}[n]$ se puede obtener a partir de $\hat{x}[n]$ restándole $\hat{x}_{min}[n]$ a partir de $\hat{x}[n]$, es decir,

$$\hat{x}_{ap}[n] = \hat{x}[n] - \hat{x}_{min}[n].$$

Para obtener $x_{min}[n]$ y $x_{ap}[n]$, aplicamos la transformación D_*^{-1} a $\hat{x}_{min}[n]$ y $\hat{x}_{ap}[n]$.

Aunque el planteamiento bosquejado anteriormente para obtener $x_{min}[n]$ y $x_{ap}[n]$ es teóricamente correcto, se requiere para su implementación la evaluación explícita del cepstrum complejo $\hat{x}[n]$. Si sólo estamos interesados en obtener $x_{min}[n]$ y $x_{ap}[n]$, se puede evitar la evaluación del cepstrum complejo y la necesidad asociada de desenrollado de la fase. La estrategia básica se incorpora en el diagrama de bloques de la Figura 13.7. El sistema se basa en el hecho de que

$$X_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{X_{min}(e^{j\omega})}. \tag{13.84a}$$

El módulo de $X_{ap}(e^{j\omega})$ es por tanto

$$|X_{ap}(e^{j\omega})| = \frac{|X(e^{j\omega})|}{|X_{min}(e^{j\omega})|} = 1 \tag{13.84b}$$

y

$$\angle X_{ap}(e^{j\omega}) = \angle X(e^{j\omega}) - \angle X_{min}(e^{j\omega}). \tag{13.84c}$$

Como $x_{ap}[n]$ se obtiene como la transformada inversa de Fourier de $e^{j\angle X_{ap}(e^{j\omega})}$, (es decir, $|X_{ap}(e^{j\omega})| = 1$), sólo es necesario especificar o conocer cada una de las funciones de fase de la Ecuación (13.84c) en un intervalo múltiplo entero de 2π. Por tanto, aunque como como una consecuencia natural del procedimiento que se muestra en la Figura 13.7, $\angle X_{min}(e^{j\omega}) = Im\{\hat{X}_{min}(e^{j\omega})\}$ sea una función de fase desenrollada, $\angle X(e^{j\omega})$ en la Ecuación (13.48c) se puede calcular módulo 2π.

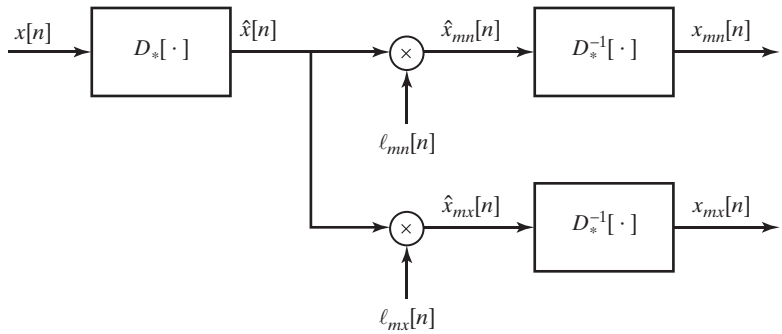


Figura 13.8 Uso de la deconvolución homomórfica para separar una secuencia en sus componentes de fase mínima y de fase máxima.

13.8.2. Deconvolución homomórfica fase mínima/fase máxima

Otra representación de una secuencia es como la convolución de una secuencia de fase mínima con una secuencia de fase máxima:

$$x[n] = x_{mn}[n] * x_{mx}[n], \tag{13.85}$$

donde $x_{mn}[n]$ y $x_{mx}[n]$ indican las componentes de fase mínima y de fase máxima, respectivamente.[8] En este caso, el correspondiente cepstrum complejo es

$$\hat{x}[n] = \hat{x}_{mn}[n] + \hat{x}_{mx}[n]. \tag{13.86}$$

Para extraer $x_{mn}[n]$ y $x_{mx}[n]$ de $x[n]$, especificamos $\hat{x}_{mn}[n]$ como

$$\hat{x}_{mn}[n] = \ell_{mn}[n]\hat{x}[n], \tag{13.87a}$$

siendo

$$\ell_{mn}[n] = u[n]. \tag{13.87b}$$

De forma similar, especificamos $\hat{x}_{mx}[n]$ como

$$\hat{x}_{mx}[n] = \ell_{mx}[n]\hat{x}[n] \tag{13.88a}$$

siendo

$$\ell_{mx}[n] = u[-n-1]. \tag{13.88b}$$

$x_{mn}[n]$ y $x_{mx}[n]$ se puede obtener a partir de $\hat{x}_{mn}[n]$ y $\hat{x}_{mx}[n]$, respectivamente, como la salida del sistema característico $D_*^{-1}[\cdot]$. Las operaciones requeridas para la descomposición de la Ecuación (13.85) se muestran en la Figura 13.8. Este método de factorizar una secuencia en sus componentes de fase mínima y de fase máxima ha sido utilizado por Smith y Barnwell (1986) en el diseño de bancos de filtros. Nótese que hemos asignado arbitrariamente todo el $\hat{x}[0]$ a $\hat{x}_{mn}[0]$ y que hemos hecho $\hat{x}_{mx}[0] = 0$. Obviamente, son posibles otras combinaciones, ya que todo lo que se requiere es que $\hat{x}_{mn}[0] + \hat{x}_{mx}[0] = \hat{x}[0]$.

Las fórmulas de recursión de la Sección 13.6.4 se pueden combinar con la representación de la Ecuación (13.85) para producir un interesante resultado para secuencias de longitud finita. Concretamente, a pesar de la extensión infinita del cepstrum complejo de una secuencia de longitud finita, podemos

[8]En general, la componente de fase mínima $x_{mn}[n]$ de la Ecuación (13.85) será diferente de la componente $x_{min}[n]$ de la Ecuación (13.83).

demostrar que para una secuencia de entrada de longitud $M+1$, sólo son necesarias $M+1$ muestras de $\hat{x}[n]$ para determinar $x[n]$. Para ver cómo, consideremos la transformada Z de la Ecuación (13.85), es decir,

$$X(z) = X_{mn}(z)X_{mx}(z), \tag{13.89a}$$

siendo

$$X_{mn}(z) = A\prod_{k=1}^{M_i}(1-a_k z^{-1}), \tag{13.89b}$$

$$X_{mx}(z) = \prod_{k=1}^{M_o}(1-b_k z), \tag{13.89c}$$

con $|a_k| < 1$ y $|b_k| < 1$. Nótese que hemos despreciado el retardo de M_o muestras que sería necesario para tener una secuencia causal, de forma que $x_{mn}[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \le n \le M_i$ y $x_{mx}[n] = 0$ fuera del intervalo $-M_o \le n \le 0$. Como la secuencia $x[n]$ es la convolución de $x_{mn}[n]$ y $x_{mx}[n]$, será distinta de cero en el intervalo $-M_o \le n \le M_i$. Utilizando las fórmulas de recursión anteriores, podemos expresar

$$x_{mn}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ e^{\hat{x}[0]}, & n = 0, \\ \hat{x}[n]x_{mn}[0] + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{x}[k]x_{mn}[n-k], & n > 0, \end{cases} \tag{13.90}$$

y

$$x_{mx}[n] = \begin{cases} \hat{x}[n] + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{0}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{x}[k]x_{mx}[n-k], & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \tag{13.91}$$

Claramente, son necesarios M_i+1 valores de $\hat{x}[n]$ para calcular $x_{mn}[n]$ y M_o valores de $\hat{x}[n]$ para calcular $x_{mx}[n]$. Por tanto, sólo se requieren M_i+M_o+1 valores de la secuencia infinita $\hat{x}[n]$ para recuperar completamente las componentes de fase mínima y de fase máxima de la secuencia de longitud finita $x[n]$.

Como se mencionó en la Sección 13.7, el resultado que acabamos de obtener se podría utilizar para implementar el sistema característico inverso para la convolución cuando el cepstrum se ha calculado mediante el cómputo de raíces de polinomios. Simplemente necesitamos calcular $x_{mn}[n]$ y $x_{mx}[n]$ mediante las expresiones recursivas de las Ecuaciones (13.90) y (13.91) y reconstruir después la señal original mediante la convolución $x[n] = x_{mn}[n] * x_{mx}[n]$.

13.9. CEPSTRUM COMPLEJO PARA UN MODELO MULTICAMINO SIMPLE

Como se expuso en el Ejemplo 13.1, un modelo altamente simplificado del multicamino o reverberación consiste en representar la señal recibida como convolución de la señal transmitida con un tren de

impulsos. Concretamente, siendo $v[n]$ la señal transmitida y $p[n]$ la respuesta al impulso de un canal multicamino o de otro sistema que genere ecos múltiples,

$$x[n] = v[n] * p[n], \tag{13.92a}$$

o, en el dominio de la transformada Z,

$$X(z) = V(z)P(z). \tag{13.92b}$$

En nuestro análisis de esta sección, escogeremos $p[n]$ de la forma

$$p[n] = \delta[n] + \beta\delta[n - N_0] + \beta^2\delta[n - 2N_0], \tag{13.93a}$$

y su transformada Z será entonces

$$P(z) = 1 + \beta z^{-N_0} + \beta^2 z^{-2N_0} = \frac{1 - \beta^3 z^{-3N_0}}{1 - \beta z^{-N_0}}. \tag{13.93b}$$

Como ya hemos indicado, $p[n]$ podría corresponder a la respuesta al impulso de un canal multicamino o de otro sistema que genere ecos múltiples con una separación de N_0 y $2N_0$. La componente $v[n]$ se tomará como la respuesta de un sistema de segundo orden, tal que

$$V(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})}, \qquad |z| > |r|. \tag{13.94a}$$

En el dominio del tiempo, $v[n]$ se puede expresar como

$$v[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1], \tag{13.94b}$$

siendo

$$w[n] = \frac{r^n}{4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\{\cos(\theta n) - \cos[\theta(n+2)]\}u[n], \qquad \theta \neq 0, \pi. \tag{13.94c}$$

La Figura 13.9 muestra el diagrama polo-cero de la transformada $X(z) = V(z)P(z)$ para el conjunto de parámetros específicos $b_0 = 0{,}98$, $b_1 = 1$, $\beta = r = 0{,}9$, $\theta = \pi/6$ y $N_0 = 15$. La Figura 13.10 muestra las señales $v[n]$, $p[n]$ y $x[n]$ para estos valores de los parámetros. Como puede verse en dicha figura, la convolución de la señal tipo pulso con el tren de impulsos $p[n]$ produce una serie de copias retardadas y superpuestas (ecos) de $v[n]$.

Este modelo de señal es una versión simplificada de modelos que se utilizan en el análisis y tratamiento de señales en diversos contextos, entre los que se encuentran los sistemas de comunicaciones, el tratamiento de voz, el sonar y el análisis de datos sísmicos. En un contexto de comunicaciones, $v[n]$ en las Ecuaciones (13.92a) y (13.92b) podría representar una señal transmitida por un canal multicamino, $x[n]$ la señal recibida y $p[n]$ la respuesta al impulso del canal. En tratamiento de voz, $v[n]$ representaría los efectos combinados de la forma del pulso glótico y los efectos de resonancia del tracto vocal humano, mientras que $p[n]$ representaría la periodicidad de la excitación vocal durante un sonido sonoro, como por ejemplo un sonido vocálico (Flanagan, 1972; Rabiner y Schafer, 1978; Quatieri, 2002). La Ecuación (13.94a) incorpora sólo una resonancia, mientras que en el modelo general de producción de voz, el denominador incluye al menos diez polos complejos. En análisis de datos sísmicos, $v[n]$ representaría la forma de onda de un pulso acústico que se propaga por la tierra debido a una explosión de dinamita o perturbación similar. La componente impulsiva $p[n]$ representaría reflexiones en los límites de capas con diferentes características de propagación. En el uso práctico de un modelo como este, $p[n]$

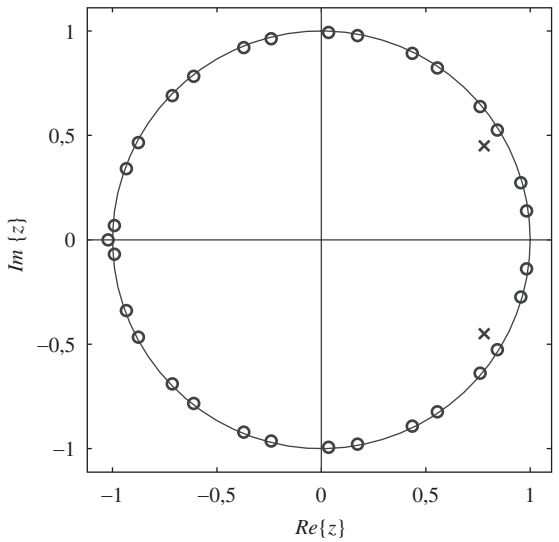


Figura 13.9 Diagrama polo-cero de la transformada $Z\,X(z) = V(z)P(z)$ de la señal ejemplo de la Figura 13.10.

tendrá más impulsos que los asumidos en la Ecuación (13.93a) y no estarán equiespaciados. Además, la componente $V(z)$ tendrá en general muchos más ceros, y frecuentemente no se incluyen polos en el modelo (Ulrych, 1971; Tribolet, 1979; Robinson y Treitel, 1980).

Aunque el modelo que acabamos de presentar es una representación altamente simplificada de los que se utilizan en aplicaciones típicas, es analíticamente conveniente y útil para obtener fórmulas exactas que permitan comparar con los resultados calculados a partir de las señales muestreadas. Además, veremos que este modelo simple ilustra todas las propiedades importantes del cepstrum de una señal con transformada Z racional.

En la Sección 13.9.1 evaluaremos analíticamente el cepstrum complejo de la señal recibida $x[n]$. En la Sección 13.9.2 ilustraremos el cálculo del cepstrum complejo utilizando la DFT y en la Sección 13.9.3 ilustratemos la técnica de deconvolución homomórfica.

13.9.1. Cómputo del cepstrum complejo mediante análisis de transformada Z

Para determinar una ecuación de $\hat{x}[n]$, el cepstrum complejo de $x[n]$ para el modelo simple de la Ecuación (13.92a), utilizamos las relaciones

$$\hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n], \tag{13.95a}$$

$$\hat{X}(z) = \hat{V}(z) + \hat{P}(z), \tag{13.95b}$$

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)], \tag{13.96a}$$

$$\hat{V}(z) = \log[V(z)], \tag{13.96b}$$

y

$$\hat{P}(z) = \log[P(z)]. \tag{13.96c}$$

Para determinar $\hat{v}[n]$, podemos aplicar directamente los resultados de la Sección 13.5. Concretamente, para expresar $V(z)$ en la forma de la Ecuación (13.29), debemos observar en primer lugar que para la

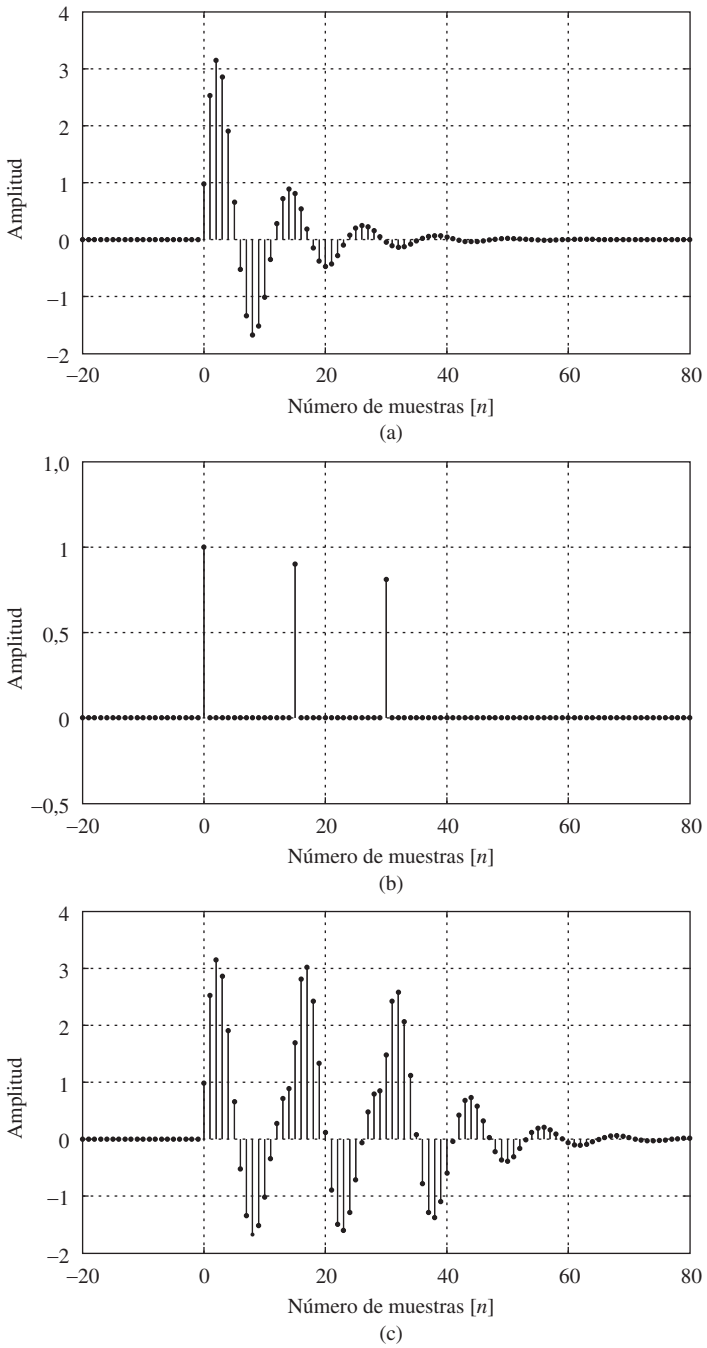


Figura 13.10 Las secuencias: (a) $v[n]$, (b) $p[n]$ y (c) $x[n]$ correspondientes al diagrama polo-cero de la Figura 13.9.

señal concreta $X(z)$ de la Figura 13.9, los polos de $V(z)$ están en el interior de la circunferencia unidad y el cero está en el exterior ($r = 0{,}9$ y $b_0/b_1 = 0{,}98$), por lo que de acuerdo con la Ecuación (13.29), podemos expresar $V(z)$ como

$$V(z) = \frac{b_1 z^{-1}(1 + (b_0/b_1)z)}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})}, \qquad |z| > |r|. \tag{13.97}$$

Como se expuso en la Sección 13.5, el factor z^{-1} contribuye a la fase desenrollada con una componente lineal, que forzará la existencia de una discontinuidad en $\omega = \pm\pi$ de la transformada de Fourier de $\hat{v}[n]$, por lo que $\hat{V}(z)$ no será analítica en la circunferencia unidad. Para evitar este problema, podemos alterar $v[n]$ (y por tanto también $x[n]$) con un desplazamiento temporal de una muestra, evaluando el cepstrum complejo de $v[n+1]$ y, en consecuencia, también de $x[n+1]$. Si $x[n]$ o $v[n]$ se van a resintetizar tras realizar algún procesado del cepstrum complejo, basta con recordar este desplazamiento de una muestra y compensarlo en la salida final.

Sustituyendo $v[n]$ por $v[n+1]$ y, por tanto, $V(z)$ por $zV(z)$, podemos considerar ahora que $V(z)$ tiene la forma

$$V(z) = \frac{b_1(1+(b_0/b_1)z)}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}. \tag{13.98}$$

Utilizando las Ecuaciones (13.36a) a (13.36c), podemos expresar $\hat{v}[n]$ de forma exacta como

$$\hat{v}[n] = \begin{cases} \log b_1, & n = 0, \quad (13.99a) \\ \dfrac{1}{n}[(re^{j\theta})^n + (re^{-j\theta})^n], & n > 0, \quad (13.99b) \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-b_0}{b_1}\right)^{-n}, & n < 0. \quad (13.99c) \end{cases}$$

Para determinar $\hat{p}[n]$, podemos evaluar la transformada Z inversa de $\hat{P}(z)$, que, teniendo en cuenta la Ecuación (13.93b), es

$$\hat{P}(z) = \log(1-\beta^3 z^{-3N_0}) - \log(1-\beta z^{-N_0}), \tag{13.100}$$

donde, en nuestro ejemplo, $\beta = 0{,}9$ y, por consiguiente, $|\beta| < 1$. Un planteamiento para determinar la transformada Z inversa de la Ecuación (13.100) es usar el desarrollo en serie de potencias de $\hat{P}(z)$. Concretamente, como $|\beta| < 1$,

$$\hat{P}(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{3k}}{k} z^{-3N_0 k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} z^{-N_0 k}, \tag{13.101}$$

de donde se deduce que $\hat{p}[n]$ es

$$\hat{p}[n] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{3k}}{k} \delta[n-3N_0 k] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \delta[n-N_0 k]. \tag{13.102}$$

Un planteamiento alternativo para obtener $\hat{p}[n]$ es utilizar la propiedad que se desarrolla en el Problema 13.28.

Utilizando la Ecuación (13.95a), el cepstrum complejo de $x[n]$ es

$$\hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}[n], \tag{13.103}$$

donde $\hat{v}[n]$ y $\hat{p}[n]$ están dados por las Ecuaciones (13.99a) y (13.102), respectivamente. Las secuencias $\hat{v}[n]$, $\hat{p}[n]$ y $\hat{x}[n]$ se muestran en la Figura 13.11.

El cepstrum de $x[n]$, $c_x[n]$, es la parte par de $\hat{x}[n]$, es decir,

$$c_x[n] = \tfrac{1}{2}(\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]) \tag{13.104}$$

y además,

$$c_x[n] = c_v[n] + c_p[n]. \tag{13.105}$$

A partir de las Ecuaciones (13.99a) a (13.99c),

$$\begin{aligned} c_v[n] = \log(b_1)\delta[n] &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (b_0/b_1)^{-k}}{2k} (\delta[n-k] + \delta[n+k]) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos(\theta k)}{k} (\delta[n-k] + \delta[n+k]). \end{aligned} \tag{13.106a}$$

y de la Ecuación (13.102),

$$\begin{aligned} c_p[n] = -\frac{1}{2} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{3k}}{k} \{\delta[n-3N_0k] + \delta[n+3N_0k]\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{k}}{k} \{\delta[n-N_0k] + \delta[n+N_0k]\}. \end{aligned} \tag{13.106b}$$

Las secuencias $c_v[n]$, $c_p[n]$ y $c_x[n]$ se muestran en la Figura 13.12.

13.9.2. Cómputo del cepstrum utilizando la DFT

En las Figuras 13.11 y 13.12 hemos mostrado los cepstra complejos y los cepstra correspondientes a evaluar las expresiones analíticas obtenidas en la Sección 13.9.1. En la mayoría de las aplicaciones, no tendremos fórmulas matemáticas simples para los valores de las señales y, en consecuencia, no podremos determinar analíticamente $\hat{x}[n]$ o $c_x[n]$. Sin embargo, para secuencias de longitud finita, podemos utilizar cómputo de raíces de polinomios o la DFT para calcular el cepstrum complejo. En este sección, ilustraremos el uso de la DFT para el cálculo del cepstrum complejo y del cepstrum de $x[n]$, para el ejemplo que estamos manejando.

Para calcular el cepstrum complejo o el cepstrum utilizando la DFT, como se muestra en la Figura 13.4(a), es necesario que la entrada sea de extensión finita. Por tanto, para el modelo de señal presentado al comienzo de esta sección, hay que truncar $x[n]$. En los ejemplos que se presentan en esta sección, la señal $x[n]$ de la Figura 13.10(c) se trunca a $N = 1024$ muestras y en el sistema de la Figura 13.4(a) se utiliza una DFT de 1024 puntos para calcular el cepstrum complejo y el cepstrum de la señal. La Figura 13.13 ilustra las transformadas de Fourier que intervienen en el cómputo del cepstrum complejo. La Figura 13.13(a) muestra el logaritmo del módulo de la DFT de 1024 muestras de la señal $x[n]$ de la Figura 13.10. Las muestras de la DFT se unen entre sí para sugerir la apariencia de una transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de longitud finita. La Figura 13.13(b) muestra el valor principal de la fase. Nótense las discontinuidades cuando la fase excede de $\pm\pi$ y se enrolla módulo 2π. La Figura 13.13(c) muestra la curva de fase continua"desenrollada" obtenida como se indica en la Sección 13.6.1. Como se indica anteriormente, y resulta evidente de una comparación cuidadosa de las Figuras 13.13(b) y 13.13(c), se ha eliminado una componente de fase lineal correspondiente a un retardo de una muestra , de forma que la curva de fase desenrollada es continua en 0 y en π. Por tanto, la fase desenrollada de la Figura 13.13(c) corresponde a $x[n+1]$ en lugar de a $x[n]$.

Las Figuras 13.13(a) y 13.13(c) corresponden al cálculo de las muestras de las partes real e imaginaria, respectivamente, de la transformada de Fourier en tiempo discreto del cepstrum complejo. Sólo se muestra el intervalo de frecuencias $0 \leq \omega \leq \pi$, ya que la función de la Figura 13.13(a) es par y periódica de periodo 2π, y la función de la Figura 13.13(c) es impar y periódica de periodo 2π. Al examinar

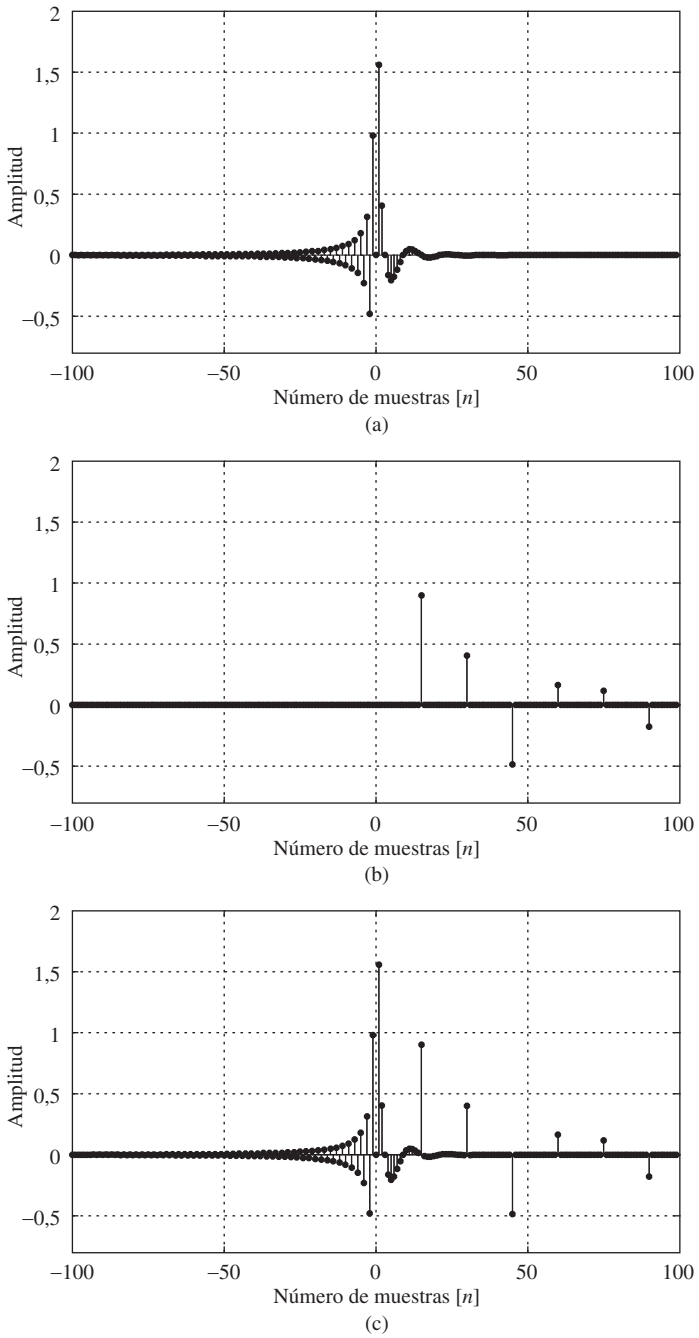


Figura 13.11 Las secuencias: (a) $\hat{v}[n]$, (b) $\hat{p}[n]$ y (c) $\hat{x}[n]$.

las gráficas de las Figuras 13.13(a) y 13.13(c), debemos advertir que tienen una apariencia general de una componente periódica (en frecuencia) de variación rápida, sumada a una componente de variación más lenta. La componente de variación periódica corresponde de hecho a $\hat{P}(e^{j\omega})$ y la componente de variación más lenta a $\hat{V}(e^{j\omega})$.

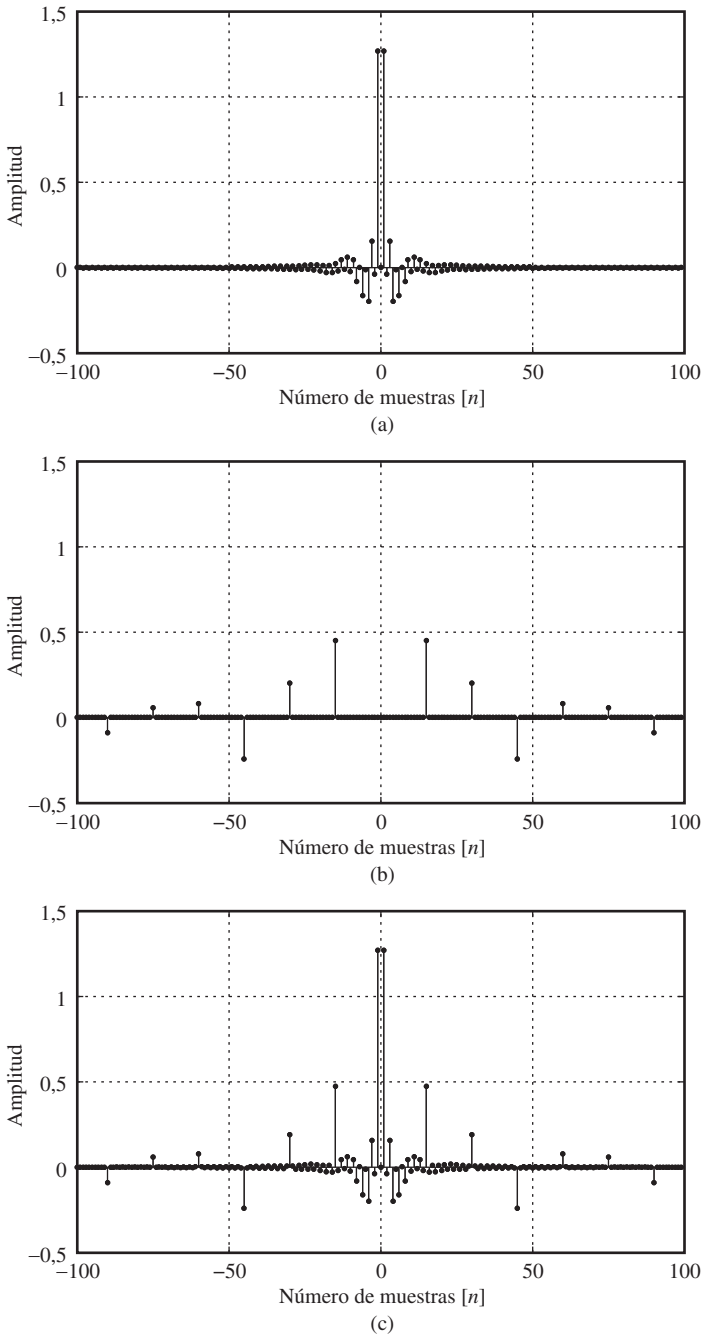


Figura 13.12 Las secuencias: (a) $c_v[n]$, (b) $c_p[n]$ y (c) $c_x[n]$.

En la Figura 13.14(a), se muestra la transformada inversa de Fourier del logaritmo complejo de la DFT, es decir, el cepstrum complejo solapado en el tiempo $\hat{x}_p[n]$. Nótense los impulsos en múltiplos enteros de $N_0 = 15$. Son contribución de $\hat{p}[n]$ y corresponden a la componente periódica de rápida

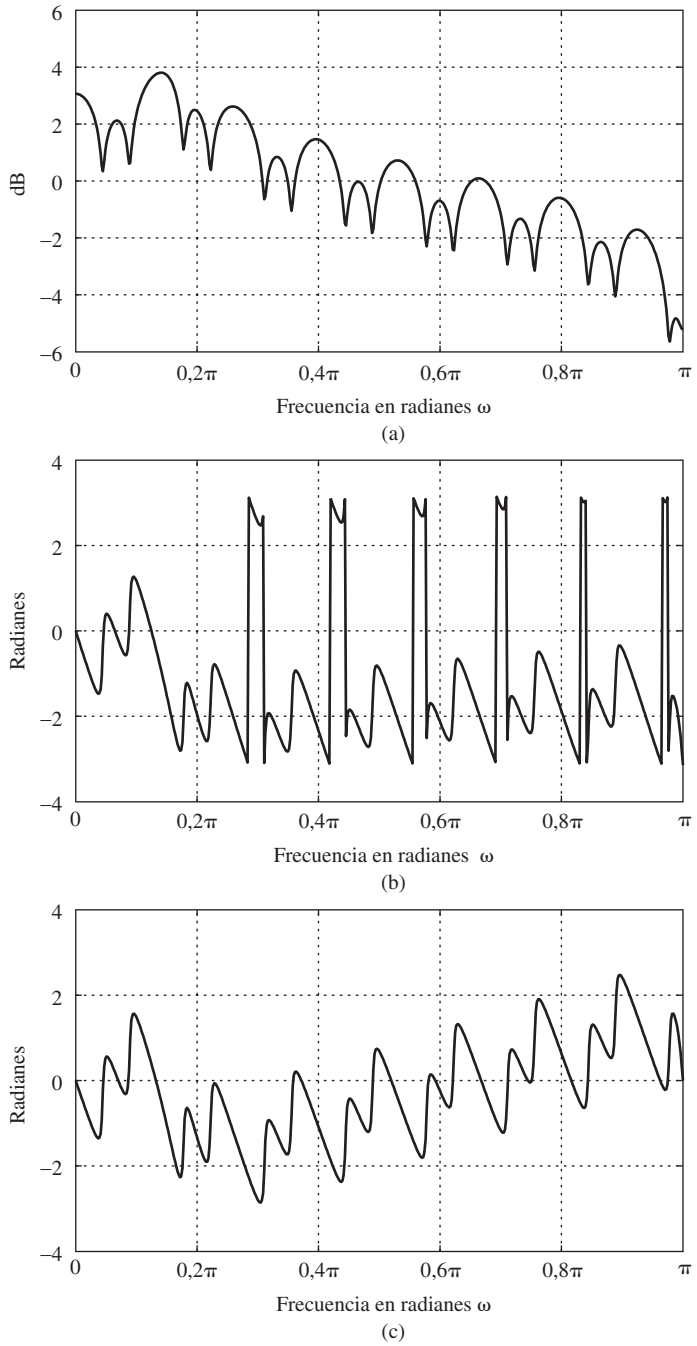


Figura 13.13 Transformadas de Fourier de $x[n]$ de la Figura 13.10. (a) Logaritmo del módulo. (b) Valor principal de la fase. (c) Fase continua Şdesenrollada" tras eliminar una componente de fase lineal de la parte (b). Las muestras de la DFT se conectan mediante líneas rectas.

variación que se observa en el logaritmo de la DFT. Vemos también que como la señal de entrada no es de fase mínima, el cepstrum complejo no es cero para $n < 0$.[9]

[9] Al utilizar la DFT para obtener la transformada inversa de Fourier de las Figuras 13.13(a) y 13.13(c), los valores asociados con $n < 0$ aparecerían normalmente en el intervalo $N/2 < n \leq N - 1$. Tradicionalmente, las secuencias temporales se muestran

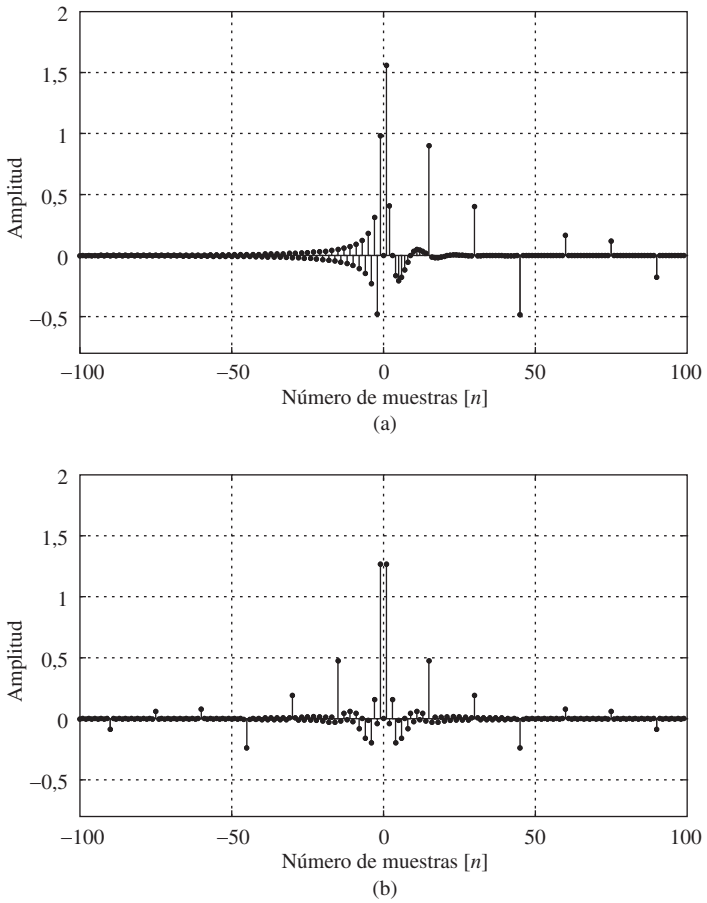


Figura 13.14 (a) Cepstrum complejo $\hat{x}_p[n]$ de la secuencia de la Figura 13.10(c). (b) Cepstrum $c_x[n]$ de la secuencia de la Figura 13.10(c).

Como se usa un gran número de puntos en el cómputo de la DFT, la versión solapada en el tiempo del cepstrum difiere muy poco de los valores exactos que se obtendrían evaluando las Ecuaciones (13.99a) a (13.99c), (13.102) y (13.103) para los valores concretos de los parámetros utilizados para generar la señal de entrada de la Figura 13.10.

El cepstrum solapado en el tiempo $c_{xp}[n]$ en este ejemplo se muestra en la Figura 13.14(b). Como en el caso de cepstrum complejo, son evidentes los impulsos en múltiplos de 15, que corresponden a la componente periódica del logaritmo de módulo de la transformada de Fourier.

Como se ha mencionado al comienzo de esta sección, la convolución de una señal $v[n]$ con un tren de impulsos como $p[n]$ es un modelo de una señal que contiene múltiples ecos. Como $x[n]$ es la convolución de $v[n]$ con $p[n]$, los instantes del eco en general no se pueden detectar fácilmente al examinar $x[n]$. Sin embargo, en el dominio cepstral, el efecto de $p[n]$ está presente como un tren de impulsos aditivo y, en consecuencia, la presencia y localización de los ecos es a menudo más evidente. Como se indicó en la Sección 13.1, fue esta observación la que motivó la propuesta de Bogert, Healey y Tukey (1963) de que el cepstrum se podía utilizar como un medio para detectar ecos. La misma idea fue utilizada posteriormente por Noll (1967) para detectar la frecuencia vocal en señales de voz.

---

con $n = 0$ en el centro, por lo que hemos reposicionado $\hat{x}_p[n]$ de acuerdo con eso y sólo mostramos un total de 201 puntos simétricamente alrededor de $n = 0$.

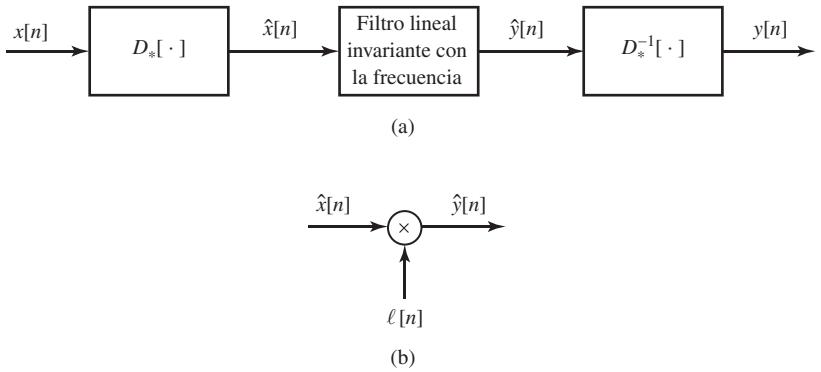


Figura 13.15 (a) Sistema de deconvolución homomórfica. (b) Representación en el dominio del tiempo del filtrado invariante con la frecuencia.

13.9.3. Deconvolución homomórfica del modelo multicamino

Para el modelo multicamino que es la base de la Sección 13.9, la componente de variación lenta del logaritmo complejo, y equivalentemente la parte de "tiempo bajo" (baja cuefrencia) del cepstrum complejo, se debe principalmente a $v[n]$. Análogamente, la componente de variación más rápida del logaritmo complejo y la componente de "tiempo alto" (alta cuefrencia) del cepstrum complejo se deben principalmente a $p[n]$. Esto sugiere que las dos componentes convolucionadas de $x[n]$ se pueden separar aplicando un filtrado lineal al logaritmo de la transformada de Fourier (es decir, un filtrado invariante con la frecuencia) o, de forma equivalente, las componentes del cepstrum complejo se pueden separar enventanando en el tiempo el cepstrum complejo.

La Figura 13.15(a) muestra las operaciones que intervienen en la separación de las componentes de la convolución mediante filtrado del logaritmo complejo de la transformada de Fourier de una señal. El filtro lineal invariante con la frecuencia se puede implementar mediante convolución en el dominio de la frecuencia o, como se indica en la Figura 13.15(b), mediante multiplicación en el dominio del tiempo. La Figura 13.16(a) muestra la respuesta temporal del sistema paso bajo invariante con la frecuencia requerido para recuperar una aproximación a $v[n]$, y la Figura 13.16(b) muestra la respuesta temporal de un sistema paso alto invariante con la frecuencia necesario para recuperar una aproximación a $p[n]$.[10]

La Figura 13.17 muestra el resultado del filtrado paso bajo invariante con la frecuencia. Las curvas de variación más rápida de las Figuras 13.17(a) y 13.17(b) son el logaritmo complejo de la transformada de Fourier de la señal de entrada, es decir, la transformada de Fourier del cepstrum complejo. las curvas de variación más lenta (a trazos) en las Figuras 13.17(a) y 13.17(b) son las partes real e imaginaria, respectivamente, de la transformada de Fourier de $\hat{y}[n]$, cuando el sistema lineal e invariante con la frecuencia $\ell[n]$ tiene la forma que se indica en la Figura 13.16(a) con $N_1 = 14$, $N_2 = 14$, e implementando el sistema de la Figura 13.15 mediante una DFT de longitud $N = 1024$. La Figura 13.17(c) muestra la correspondiente salida $y[n]$. Esta secuencia es la aproximación a $v[n]$ obtenida mediante deconvolución homomórfica. Para relacionar esta salida $y[n]$ con $v[n]$, recuérdese que al calcular la correspondiente fase desenrollada, se eliminó una componente lineal, correspondiente a un desplazamiento de una muestra de $v[n]$. En consecuencia, $y[n]$ en la Figura 13.17(c) corresponde a una aproximación a $v[n+1]$ obtenida mediante deconvolución homomórfica.

[10] La Figura 13.16 asume que los sistemas $D_*[\cdot]$ y $D_*^{-1}[\cdot]$ se implementan utilizando la DFT, como se indica en la Figura 13.4.

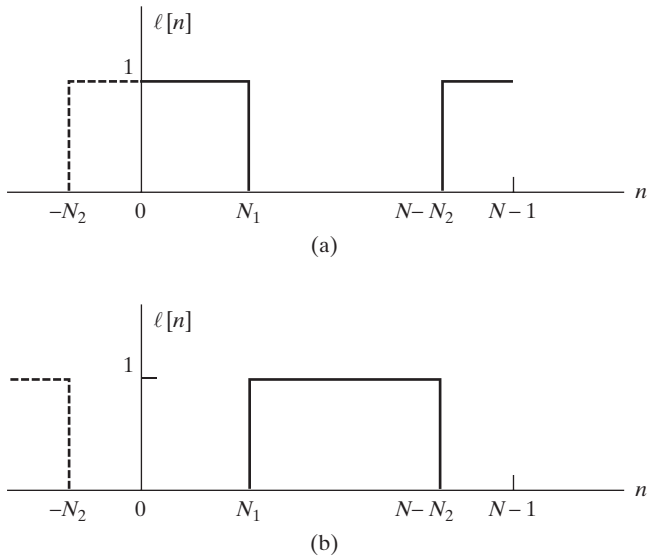


Figura 13.16 Respuesta temporal de los sistemas lineales invariantes con la frecuencia para realizar la deconvolución homomórfica. (a) Sistema paso bajo. (b) Sistema paso alto. (Las líneas continuas indican la envolvente de la secuencia $\ell[n]$ tal como se aplicaría en una implementación mediante la SFT. Las líneas a trazos indican la extensión periódica.)

Este tipo de filtrado se ha utilizado con éxito en tratamiento de voz para recuperar la información de la respuesta del tracto vocal (Oppenheim, 1969b; Schafer y Rabiner, 1970) y en análisis de señales sísmicas para recuperar la información sísmica (Ulrych, 1971; Tribolet, 1979).

La Figura 13.18 muestra el resultado de aplicar un filtrado paso alto invariante con la frecuencia. Las curvas de variación rápida de las Figuras 13.18(a) y (b) son las partes real e imaginaria, respectivamente, de la transformada de Fourier de $\hat{y}[n]$ cuando el sistema lineal e invariante con la frecuencia $\ell[n]$ tiene la forma que se indica en la Figura 13.16(b), con $N_1 = 14$ y $N_2 = 512$ (es decir, las partes negativas se eliminan completamente). De nuevo, el sistema se implementa utilizando una DFT de 1024 puntos. La Figura 13.18(c) muestra la correspondiente salida $y[n]$. Esta secuencia es la aproximación a $p[n]$ obtenida mediante deconvolución homomórfica. A diferencia del uso del cepstrum para *detectar* ecos o periodicidad, este planteamiento busca obtener el tren de impulsos que especifica la posición y el tamaño de las copias repetidas de $v[n]$.

13.9.4. Descomposición de fase mínima

En la Sección 13.8.1, presentamos formas en las que se podría utilizar la deconvolución homomórfica para descomponer una secuencia en componentes de fase mínima y paso todo o de fase mínima y de fase máxima. Vamos a aplicar estas técnicas al modelo de señal de la Sección 13.9. Concretamente, para los parámetros del ejemplo, la transformada Z de la entrada es

$$X(z) = V(z)P(z) = \frac{(0{,}98 + z^{-1})(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30})}{(1 - 0{,}9e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - 0{,}9e^{-j\pi/6}z^{-1})}. \tag{13.107}$$

Primero, podemos expresar $X(z)$ como el producto de una transformada Z de fase mínima y una transformada Z paso todo, es decir,

$$X(z) = X_{min}(z)X_{ap}(z), \tag{13.108}$$

siendo

$$X_{min}(z) = \frac{(1 + 0{,}98z^{-1})(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30})}{(1 - 0{,}9e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - 0{,}9e^{-j\pi/6}z^{-1})} \tag{13.109}$$

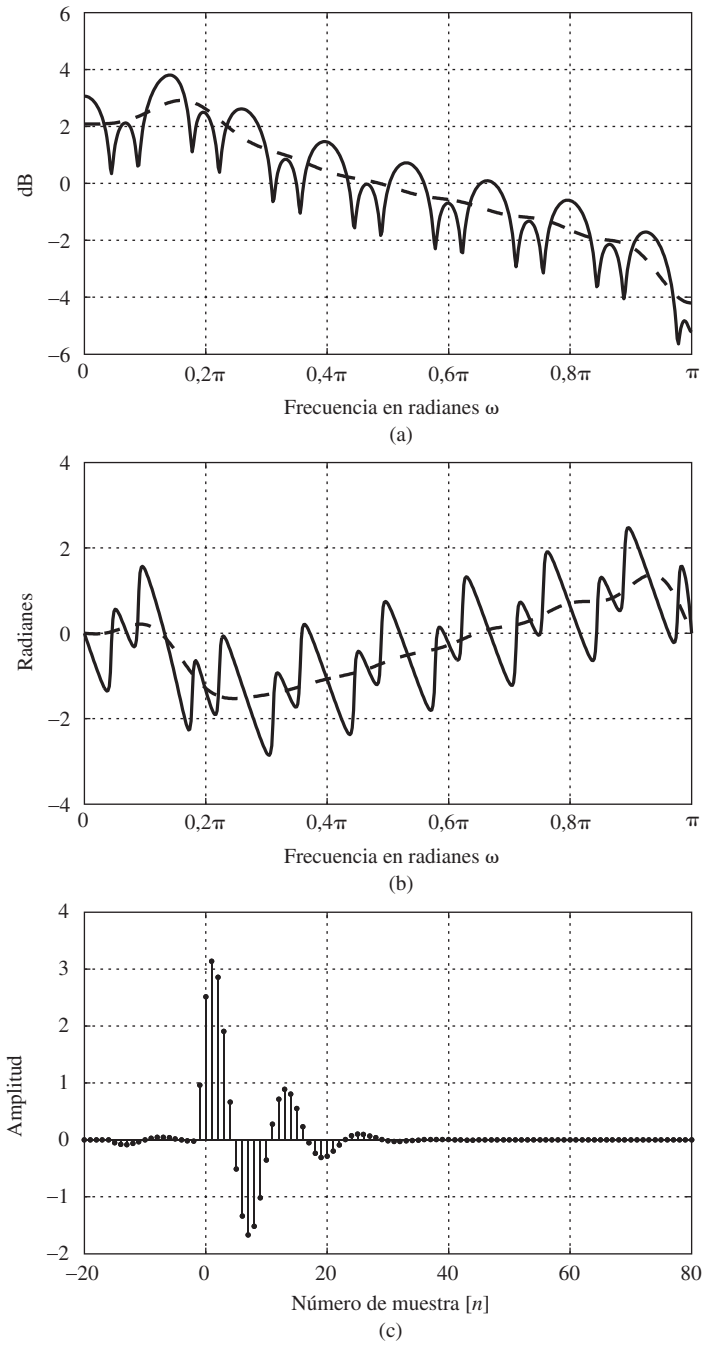


Figura 13.17 Filtrado paso bajo lineal e invariante con la frecuencia en el sistema de la Figura 13.15. (a) Partes reales de la transformada de Fourier de la entrada (línea continua) y de la salida (línea de trazos) del sistema paso bajo con $N_1 = 14$ y $N_2 = 14$ en la Figura 13.16(a). (b) Partes imaginarias de la transformada de Fourier de de la entrada (línea continua) y de la salida (línea de trazos). (c) Secuencia de salida $y[n]$ para la entrada de la Figura 13.10(c).

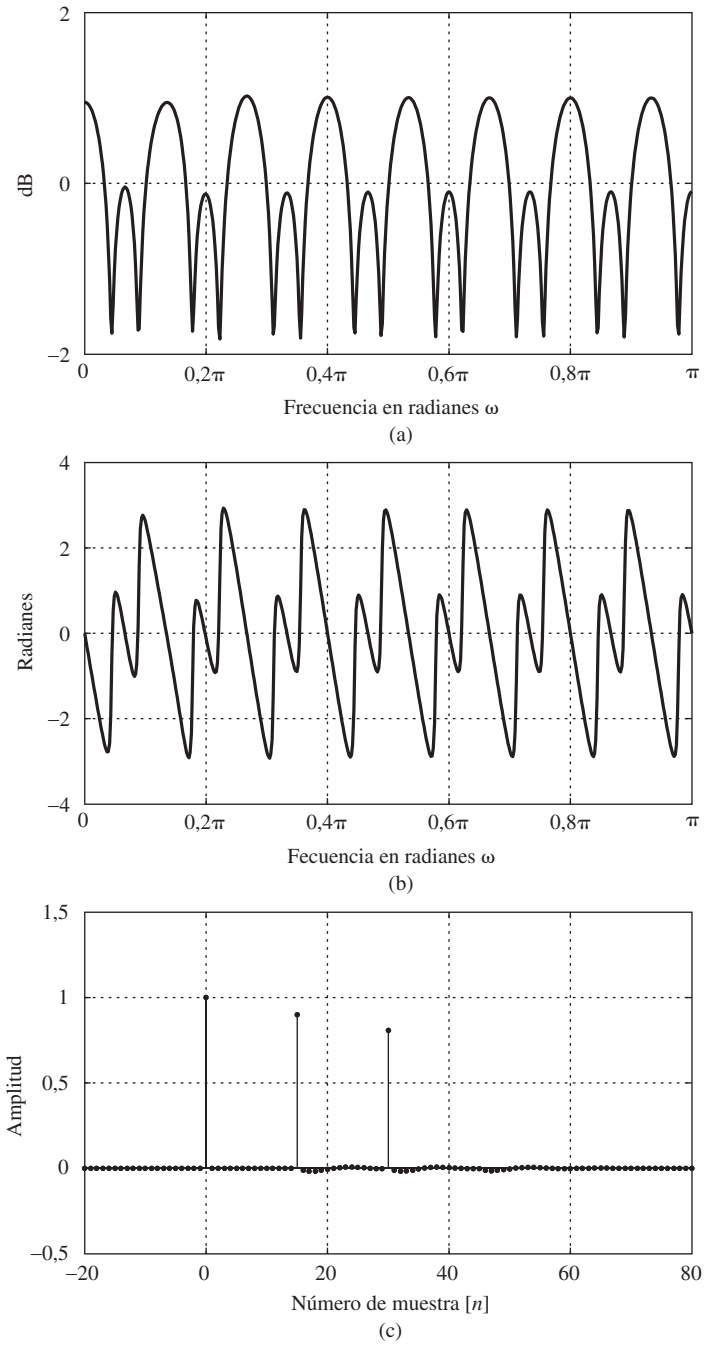


Figura 13.18 Ilustración del filtrado paso alto lineal e invariante con la frecuencia en el sistema de la Figura 13.15. (a) Parte real de la transformada de Fourier de la salida del sistema paso alto invariante con la frecuencia con $N_1 = 14$ y $N_2 = 512$ en la Figura 13.16(a). (b) Parte imaginaria en las condiciones del apartado (a). (c) Secuencia de salida $y[n]$ para la entrada de la Figura 13.10.

y

$$X_{ap}(z) = \frac{0{,}98 + z^{-1}}{1 + 0{,}98z^{-1}}. \tag{13.110}$$

Las secuencias $x_{min}[n]$ y $x_{ap}[n]$ se pueden obtener mediante los métodos de descomposición en fracciones simples del Capítulo 3, y los correspondientes cepstra complejos $\hat{x}_{min}[n]$ y $\hat{x}_{ap}[n]$ se pueden obtener utilizando la técnica del desarrollo en serie de potencias de la Sección 13.5 (véase el Problema 13.25). Alternativamente, $\hat{x}_{min}[n]$ y $\hat{x}_{ap}[n]$ se puede obtener de forma exacta a partir de $\hat{x}[n]$ mediante la operación explicada en la Sección 13.8.1 y como se indica en la Figura 13.7. Si los sistemas característicos de la Figura 13.7 se implementan utilizando la DFT, entonces la separación es sólo aproximada, ya que $x_{ap}[n]$ es de longitud infinita, pero el error de aproximación puede ser pequeño en el intervalo donde $x_{ap}[n]$ es grande si la longitud de la DFT es suficientemente grande. La Figura 13.19(a) muestra el cepstrum complejo de $x[n]$ calculado utilizando una DFT de 1024 puntos, de nuevo eliminando un retardo de una muestra de $v[n]$ de manera que la fase sea continua en π. La Figura 13.19(b) muestra el cepstrum complejo de la componente de fase mínima $\hat{x}_{min}[n]$, y la Figura 13.19(c) muestra el capstrum complejo de la componente paso todo $\hat{x}_{ap}[n]$ tal como se obtiene aplicando las operaciones de la Figura 13.7 con $D_*[\cdot]$ implementado como se indica en la Figura 13.4(a).

Utilizando la DFT de la Figura 13.4(b) para implementar el sistema $D_*^{-1}[\cdot]$ se obtienen las aproximaciones de las componentes de fase mínima y paso todo que se muestran en las Figuras 13.20(a) y 13.20(b), respectivamente. Como todos los ceros de $P(z)$ están en el interior de la circunferencia unidad, toda $P(z)$ está incluida en la transformada Z de fase mínima o, de forma equivalente, $\hat{p}[n]$ está totalmente incluida en $\hat{x}_{min}[n]$. Por tanto, la componente de fase mínima consta de réplicas retardadas y escaladas de la componente de fase mínima de $v[n]$. En consecuencia, la componente de fase mínima de la Figura 13.20(a) tiene un aspecto muy similar al de la entrada mostrada en la Figura 13.10(c). Utilizando la Ecuación (13.110), se puede demostrar que la componente paso todo es

$$x_{ap}[n] = 0{,}98\delta[n] + 0{,}0396(-0{,}98)^{n-1}u[n-1]. \tag{13.111}$$

El resultado de la Figura 13.20(b) es muy cercano al resultado ideal para valores pequeños de n, donde los valores de la secuencia tienen una amplitud significativa. Este ejemplo ilustra una técnica de descomposición que ha sido utilizada por Bauman, Lipshitz y Vanderkooy (1985) en el análisis y caracterización de la respuesta de transductores electroacústicos. Se puede utilizar una técnica de descomposición similar para factorizar funciones módulo al cuadrado, lo que se requiere en diseño de filtros digitales (véase el Problema 13.27).

Como alternativa a la descomposición fase mínima/paso todo, podemos expresar $X(z)$ como un producto de una transformada Z de fase mínima y una transformada Z de fase máxima. Es decir,

$$X(z) = X_{mn}(z)X_{mx}(z), \tag{13.112}$$

siendo

$$X_{mn}(z) = \frac{z^{-1}(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30})}{(1 - 0{,}9e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - 0{,}9e^{-j\pi/6}z^{-1})} \tag{13.113}$$

y

$$X_{mx}(z) = 0{,}98z + 1. \tag{13.114}$$

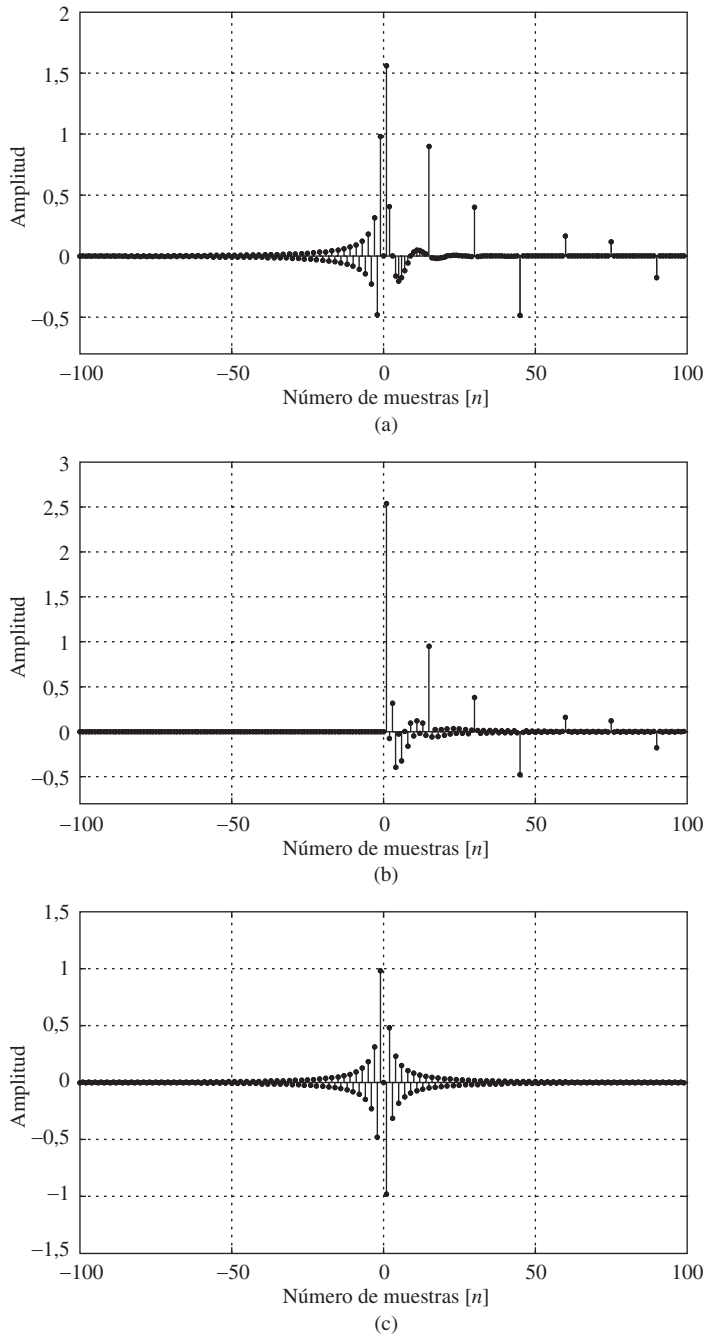


Figura 13.19 (a) Cepstrum complejo de $x[n] = x_{min}[n] * x_{ap}[n]$. (b) Cepstrum complejo de $x_{min}[n]$. (c) Cepstrum complejo de $x_{ap}[n]$.

Las secuencias $x_{mn}[n]$ y $x_{mx}[n]$ se pueden obtener utilizando los métodos de descomposición en fracciones simples del Capítulo 3, y los correspondientes cepstra complejos $\hat{x}_{mn}[n]$ y $\hat{x}_{mx}[n]$ se pueden obtener utilizando la técnica del desarrollo en serie de potencias de la Sección 13.5 (véase el Problema 13.25). Alternativamente, $\hat{x}_{mn}[n]$ y $\hat{x}_{mx}[n]$ se puede obtener de forma exacta a partir de mediante las operaciones explicadas en la Sección 13.8.2 y como se indica en la Figura 13.8, siendo

$$\ell_{mn}[n] = u[n] \tag{13.115}$$

y

$$\ell_{mx}[n] = u[-n-1]. \tag{13.116}$$

Es decir, la secuencia de fase mínima se define ahora como la parte de tiempo positivo del cepstrum complejo y la parte de fase máxima se define como la parte de tiempo negativo del cepstrum complejo. Si los sistemas característicos de la Figura 13.8 se implementan utilizando la DFT, la parte negativa del cepstrum complejo se sitúa en la última mitad del intervalo de la DFT. En este caso, la separación de las componentes de fase mínima y de fase máxima sólo es aproximada debido al solapamiento temporal, pero el error de solapamiento temporal se puede hacer pequeño escogiendo una longitud de la DFT suficientemente grande. La Figura 13.19(a) muestra el cepstrum complejo de $x[n]$ calculado utilizando una DFT de 1024 puntos. La Figura 13.21 muestra las dos secuencias de salida que se obtienen del cepstrum complejo de la Figura 13.19(a) utilizando las Ecuaciones (13.87) y (13.88), implementando el

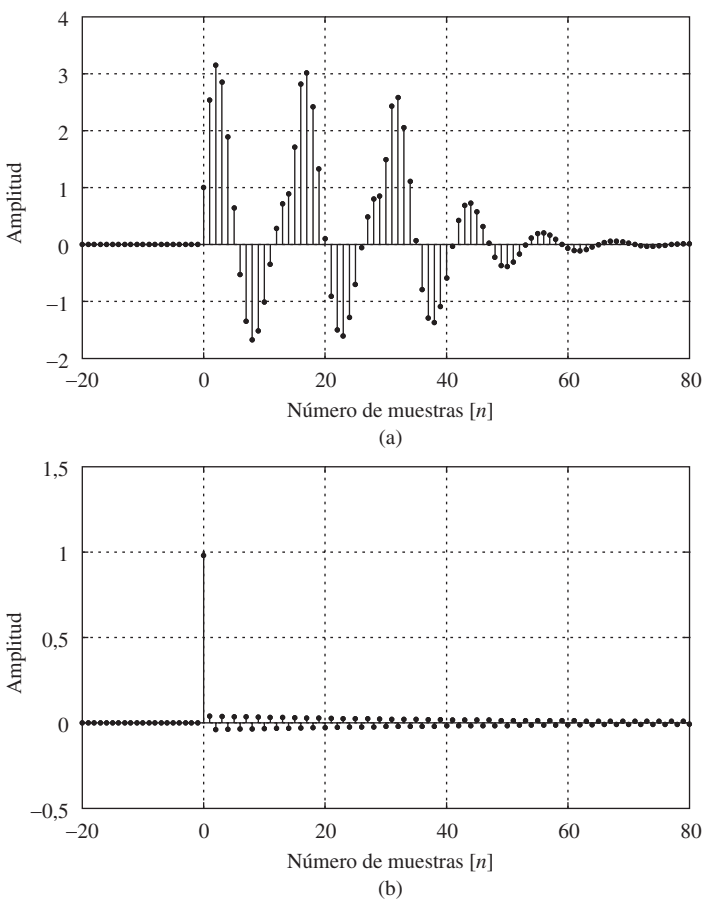


Figura 13.20 (a) Salida de fase mínima. (b) Salida paso todo obtenida como se indica en la Figura 13.7.

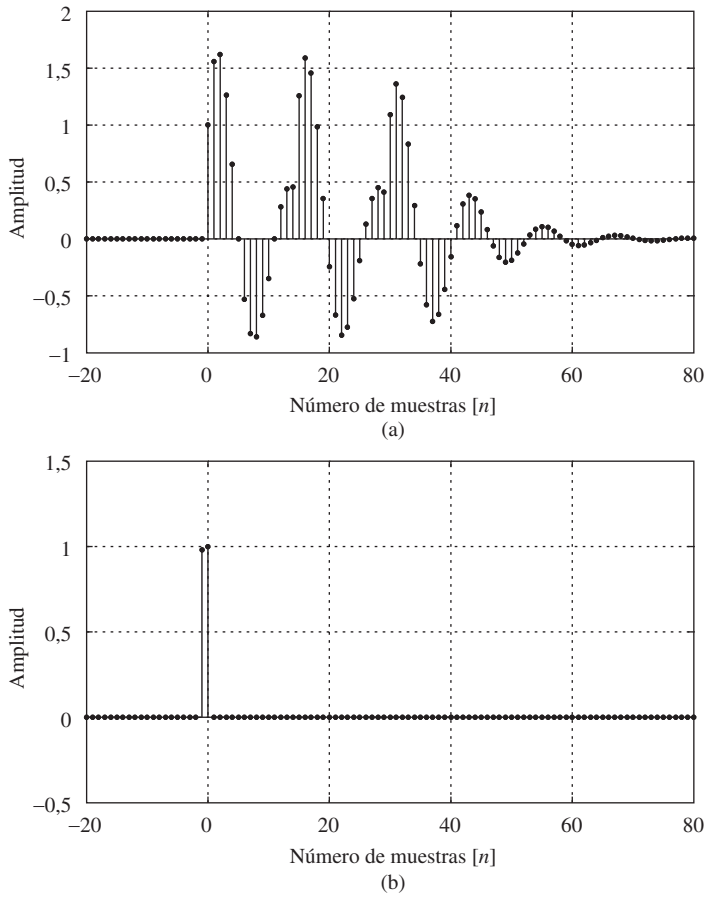


Figura 13.21 (a) Salida de fase mínima. (b) Salida de fase máxima obtenida como se indica en la Figura 13.8.

sistema característico inverso con la DFT, como se indica en la Figura 13.4(b). Como antes, dado que $\hat{p}[n]$ está totalmente incluida en $\hat{x}_{mn}[n]$, la correspondiente salida $x_{mn}[n]$ consta de réplicas retardadas y escaladas de una secuencia de fase mínima, y se parece mucho a la secuencia de entrada. Sin embargo, una cuidadosa comparación de las Figura 13.20(a) y 13.21(a) muestra que $x_{min}[n] \neq x_{mn}[n]$. Utilizando la Ecuación (13.114), la secuencia de fase máxima es

$$x_{mx}[n] = 0{,}98\delta[n+1] + \delta[n]. \tag{13.117}$$

La Figura 13.21(b) es muy cercana al resultado ideal. (Nótese el desplazamiento debido a la fase lineal eliminada en el desenrollado de la fase). Esta técnica de descomposición de fase mínima/fase máxima fue empleada por Smith y Barnwell (1984) en el diseño e implementación de bancos de filtros de reconstrucción exacta para análisis y codificación de voz.

13.9.5. Generalizaciones

El ejemplo de la Sección 13.9 ha considerado una señal exponencial sencilla que se convoluciona con un tren de impulsos para producir una serie de réplicas retardadas y escaladas de la señal exponencial original. Este modelo ilustra muchas de las características del cepstrum complejo y del filtrado homomórfico.

En particular, en modelos más generales asociados con el tratamiento de voz, las comunicaciones y las aplicaciones sísmicas un modelo apropiado de señal está formado por la convolución de dos componentes. Una componente tiene las características de $v[n]$, concretamente una transformada de Fourier que varía lentamente con la frecuencia. La segunda tiene las características de $p[n]$, es decir, un patrón tipo eco o tren de impulsos tal que su transformada de Fourier varía de forma más rápida y cuasiperiódica con la frecuencia. Por tanto, las contribuciones de las dos componentes quedarían separadas en el cepstrum complejo o en el cepstrum y, además, tanto el cepstrum complejo como el cepstrum contendrán impulsos en múltiplos de los retardos de los ecos. Por consiguiente, se puede utilizar el filtrado homomórfico para separar componentes convolucionales de la señal, o se puede utilizar el cepstrum para detertar los retardos de los ecos. En la sección siguiente, ilustraremos el uso de estas propiedades generales del cepstrum en aplicaciones de análisis de voz.

13.10. APLICACIONES A PROCESADO DE VOZ

Las técnicas basadas en el cepstrum se han aplicado con éxito al análisis de voz de diversas maneras. Como se expondrá brevemente en esta sección, la presentación teórica anterior y el ejemplo amplio del la Sección 13.9 se pueden aplicar de forma relativamente directa al análisis de voz.

13.10.1. El modelo de la voz

Como explicamos brevemente en la Sección 10.4.1, hay tres clases básicas de sonidos de voz que corresponden a diferentes formas de excitar al tracto vocal. Concretamente:

- Los *sonidos sonoros* se producen excitando al tracto vocal con pulsos cuasiperiódicos de flujo de aire causados por la apertura y cierre de la glotis.
- Los *sonidos fricativos* se producen formando un estrechamiento en alguna parte del tracto vocal y forzando a que el aire pase por ese estrechamiento de forma que se cree una turbulencia, produciéndose así una excitación del tipo de ruido.
- Los *sonidos oclusivos* se producen cerrando completamente el tracto vocal, creando presión tras el cierre, y abriendo después bruscamente para liberar la presión.

En todos los casos, la señal de voz se produce excitando al sistema del tracto vocal (un sistema de transmisión acústica) con una excitación de banda ancha. La forma del tracto vocal cambia de forma relativamente lenta con el tiempo, por lo que se puede modelar como un filtro lentamente variante con el tiempo que imponen las propiedades de su respuesta en frecuencia al espectro de la excitación. El tracto vocal se caracteriza por sus frecuencias naturales (denominadas *formantes*), que corresponden a resonancias de su respuesta en frecuencia.

Si suponemos que las fuentes de excitación y la forma del tracto vocal son independientes, llegamos al modelo en tiempo discreto de la Figura 13.22, como representación de la forma de onda de la voz muestreada. En este modelo, se supone que las muestras de la señal de voz son la salida de un sistema en tiempo discreto variante con el tiempo que modela las resonancias del sistema del tracto vocal. El modo de excitación del sistema conmuta entre impulsos periódicos y ruido aleatorio, dependiendo del tipo de sonido producido.

Como la forma del tracto vocal cambia de forma más bien lenta en el habla continua, es razonable suponer que el sistema en tiempo discreto del modelo tiene propiedades fijas en un intervalo de tiempo del orden de 10 ms. Por tanto, el sistema en tiempo discreto se puede caracterizar en cada uno de

esos intervalos de tiempo por una respuesta al impulso, una respuesta en frecuencia o un conjunto de coeficientes de un sistema IIR. Concretamente, un modelo de la función de transferencia del tracto vocal tiene la forma

$$V(z) = \frac{\sum_{k=0}^{K} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{P} a_k z^{-k}} \tag{13.118}$$

o, de forma equivalente,

$$V(z) = \frac{A z^{-K_o} \prod_{k=1}^{K_i} (1 - \alpha_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{K_o} (1 - \beta_k z)}{\prod_{k=1}^{[P/2]} (1 - r_k e^{j\theta_k} z^{-1})(1 - r_k e^{-j\theta_k} z^{-1})}, \tag{13.119}$$

donde las cantidades $r_k e^{j\theta_k}$ (with $|r_h| < 1$ son las frecuencias naturales complejas del tracto vocal que, por supuesto, dependen de la forma de dicho tracto vocal y en consecuencia varían con el tiempo. Los ceros de $V(z)$ dan cuenta de la duración finita de la forma de onda del pulso glótico y de los ceros de transmisión causados por el estrechamiento del tracto vocal en la creación de sonidos sonoros nasales y sonidos fricativos. Estos ceros a menudo no se incluyen, ya que resulta muy difícil estimar sus posiciones a partir sólo de la señal de voz. Además, se ha demostrado (Atal y Hanauer, 1971) que la forma espectral de la señal de voz se puede modelar de forma precisa sin utilizar ceros, si se incluyen polos extra en número mayor del estrictamente necesario para modelar las resonancias del tracto vocal. Los ceros están incluidos en nuestro análisis porque son necesarios para una representación exacta del cepstrum complejo de la señal de voz. Nótese que incluimos la posibilidad de existencia de ceros fuera de la circunferencia unidad.

El sistema del tracto vocal es excitado por la secuencia de excitación $p[n]$, que es un tren de impulsos que modelo los sonidos de voz sonoros y por $r[n]$, que es una secuencia de ruido pseudoaleatorio cuando se modelan sonidos de voz sordos, como los fricativos y los oclusivos.

Muchos de los problemas fundamentales del tratamiento de voz se reducen a la estimación de los parámetros del modelo de la Figura 13.22. Estos parámetros son los siguientes:

- Los coeficientes de $V(z)$ en la Ecuación (13.118) o las posiciones de los polos y los ceros en la Ecuación (13.119).

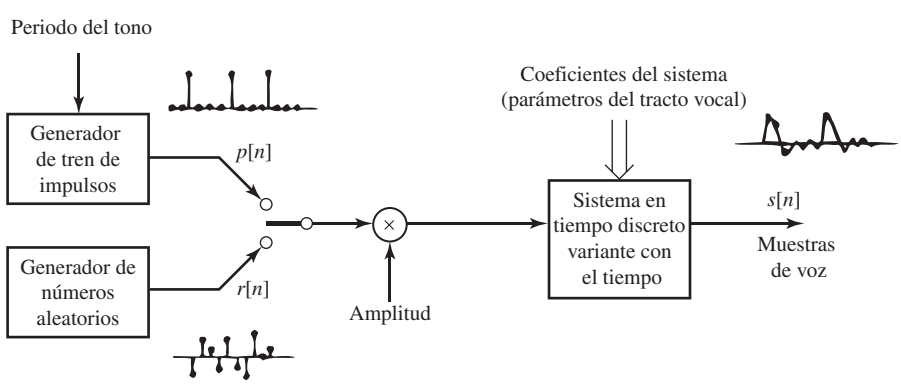


Figura 13.22 Modelo en tiempo discreto de la producción de voz.

- El modo de excitación del sistema del tracto vocal, es decir, un *tren de impulsos periódicos* o *ruido aleatorio*.
- La amplitud de la señal de excitación.
- El periodo del tono de la excitación vocal para sonidos sonoros.

La deconvolución homomórfica se puede aplicar a la estimación de los parámetros si se supone que el modelo es válido en un corto periodo de tiempo, de forma que un segmento corto de longitud L muestras de señal de voz muestreada se pueda expresar como la convolución

$$s[n] = v[n] * p[n] \qquad \text{for } \ 0 \leq n \leq L-1, \tag{13.120}$$

siendo $v[n]$ la respuesta al impulso del tracto vocal y $p[n]$ es o bien periódica (para sonidos sonoros) o ruido aleatorio (para sonidos sordos). Obviamente, la Ecuación (13.120) no es válida en los extremos del intervalo, debido a los pulsos que se producen antes del inicio del intervalo de análisis y a los pulsos que terminan después del final del intervalo. Para mitigar el efecto de las "discontinuidades" del modelo en los extremos del intervalo, la señal de voz $s[n]$ se puede multiplicar por una ventana $w[n]$ que descienda suavemente a cero en ambos extremos. Por tanto, la entrada al sistema de deconvolución homomórfica es

$$x[n] = w[n]s[n]. \tag{13.121}$$

Consideremos primero el caso de los sonidos sonoros. Si $w[n]$ varía suavemente con respecto a las variaciones de $v[n]$, entonces el análisis se simplifica grandemente si suponemos que

$$x[n] = v[n] * p_w[n], \tag{13.122}$$

siendo

$$p_w[n] = w[n]p[n]. \tag{13.123}$$

(Véase Oppenheim y Schafer, 1968). Un análisis más detallado sin esta suposición conduce esencialmente a las mismas conclusiones que se indicarán posteriormente (Verhelst y Steenhaut, 1986). Para el caso de sonidos sonoros, $p[n]$ es un tren de impulsos de la forma

$$p[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n - kN_0] \tag{13.124}$$

de manera que

$$p_w[n] = \sum_{k=0}^{M-1} w[kN_0]\delta[n - kN_0], \tag{13.125}$$

donde hemos supuesto que el periodo del tono es N_0 y que la ventana abarca M periodos.

Los cepstra complejos de $x[n]$, $v[n]$ y $p_w[n]$ están relacionados por

$$\hat{x}[n] = \hat{v}[n] + \hat{p}_w[n]. \tag{13.126}$$

Para obtener $\hat{p}_w[n]$, definimos una secuencia

$$w_{N_0}[k] = \begin{cases} w[kN_0], & k = 0, 1, \ldots, M-1, \\ 0, & \text{en el resto}, \end{cases} \tag{13.127}$$

cuya transformada de Fourier es

$$P_w(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M-1} w[kN_0]e^{-\omega kN_0} = W_{N_0}(e^{j\omega N_0}). \tag{13.128}$$

Por tanto, $P_w(e^{j\omega})$ y $\hat{P}_w(e^{j\omega})$ son ambas periódicas de periodo $2\pi/N_0$, y el cepstrum complejo de $p_w[n]$ es

$$\hat{p}_w[n] = \begin{cases} \hat{w}_{N_0}[n/N_0], & n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \tag{13.129}$$

La periodicidad del logaritmo complejo resultante de la periodicidad de la señal de voz sonora se manifiesta en el cepstrum complejo en forma de impulsos espaciados en múltiplos enteros de N_0 muestras (el periodo del tono). Si la secuencia $w_{N_0}[n]$ es de fase mínima, entonces $\hat{p}_w[n]$ será cero para $n < 0$. Si no es así, $\hat{p}_w[n]$ tendrá impulsos espaciados en intervalos de N_0 muestras para valores de n tanto positivos como negativos. En cualquier caso, la contribución de $\hat{p}_w[n]$ a $\hat{x}[n]$ se encontrará en el intervalo $|n| \geq N_0$.

Utilizando le desarrollo en serie de potencias del logaritmo complejo de $V(z)$, se puede demostrar que la contribución al cepstrum complejo debida a $v[n]$ es

$$\hat{v}[n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K_0} \frac{\beta_k^{-n}}{n}, & n < 0, \\ \log|A|, & n = 0, \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{K_i} \frac{\alpha_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{[P/2]} \frac{2r_k^n}{n}\cos(\theta_k n), & n > 0. \end{cases} \tag{13.130}$$

Como en el caso del ejemplo simple de la Sección 13.9.1, el término z^{-K_0} en la Ecuación (13.119) representa un factor de fase lineal que se podría eliminar al obtener la fase desenrollada y el cepstrum complejo. En consecuencia, $\hat{v}[n]$ en la Ecuación (13.130) es, más exactamente, el cepstrum complejo de $v[n+K_0]$.

Podemos ver en la Ecuación (13.130) que las contribuciones de la respuesta del tracto vocal al cepstrum complejo ocupan e intervalo completo $-\infty < n < \infty$, pero están concentradas alrededor de $n = 0$. Debemos advertir también que como las resonancias del tracto vocal están representadas por polos en el interior de la circunferencia unidad, su contribución al cepstrum complejo es cero para $n < 0$.

13.10.2. Ejemplo de deconvolución homomórfica de voz

Para el caso de voz muestreada a 10.000 muestras/sg, el periodo del tono N_0 varía desde 25 muestras para voces de tonos altos hasta 150 muestras para voces de tonos muy bajos. Como la componente del tracto vocal del cepstrum complejo $\hat{v}[n]$ decae rápidamente, los picos de $\hat{p}_w[n]$ resaltan sobre $\hat{v}[n]$. En otras palabras, en el logaritmo complejo, los componentes del tracto vocal son de variación lenta y lo componentes de la excitación son de variación rápida. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo. La Figura 13.23(a) muestra un segmento de señal de voz multiplicado por una ventana de Hamming de longitud 401 muestras (50 ms. de duración a una frecuencia de muestreo de 8000 muestras/s). La Figura 13.24 muestra el logaritmo complejo (logaritmo del módulo y fase desenrollada) de la DFT de la señal de la Figura 13.23(a).[11] Nótese la componente casi periódica y rápidamente variante debida a $p_w[n]$ y la

[11] En todas las figuras de esta sección, las muestras de todas las secuencias se unen por facilidad de representación.

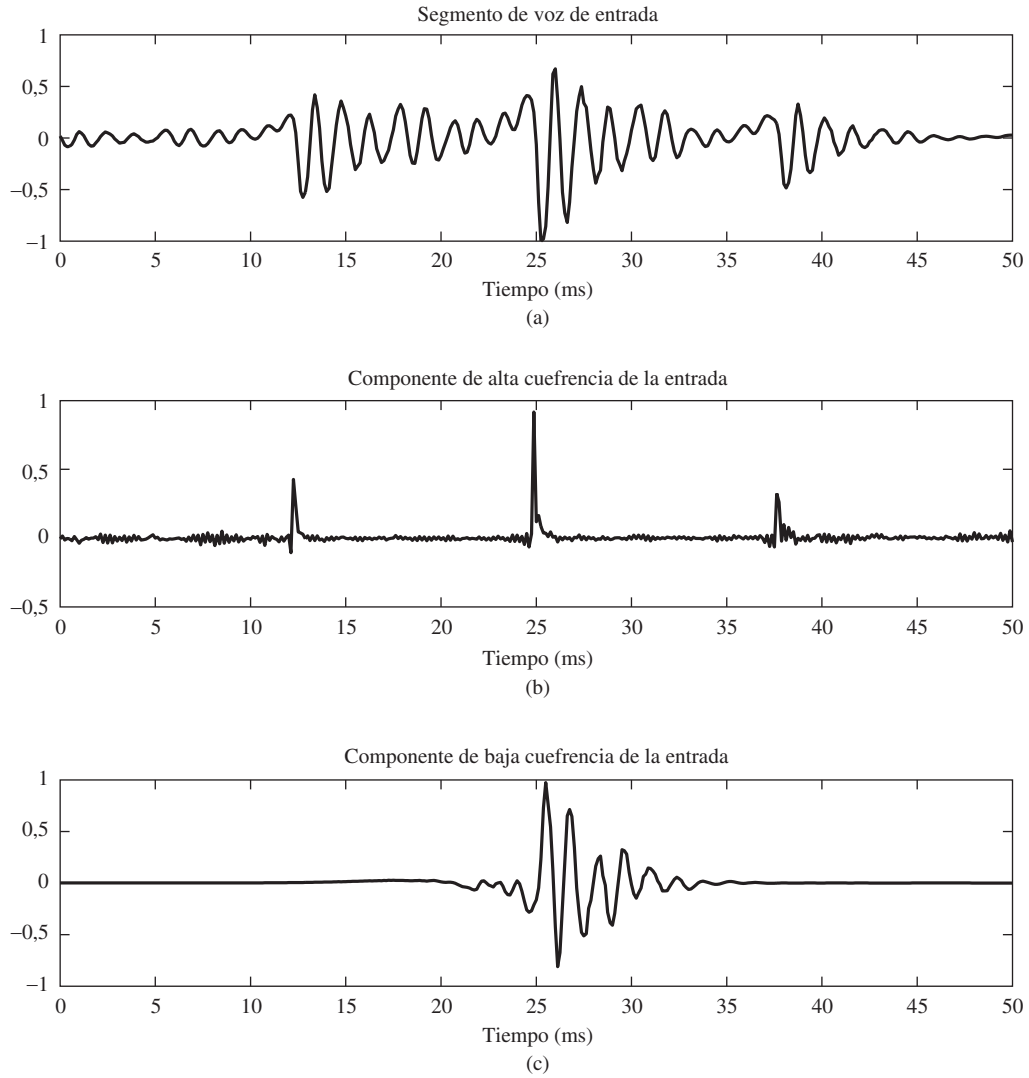


Figura 13.23 Deconvolución homomórfica de una señal de voz. (a) Segmento de voz ponderado con una ventana de Hamming. (b) Componente de alta cuefrencia de la señal de (a). (c) Componente de baja cuefrencia de la señal de (a).

componente de variación lenta debida a $v[n]$. Estas propiedades se manifiestan e el cepstrum complejo de la Figura 13.25 en forma de impulsos en múltiplos de aproximadamente 13 ms (el periodo del segmento de voz de la entrada), debidos a $\hat{p}_w[n]$ y en las muestras en la región $|nT| < 5$ ms, que atribuimos a $\hat{v}[n]$. Como en la sección anterior, se puede utilizar filtrado invariante con la frecuencia para separar las componentes del modelo convolucional de la señal de voz. Se puede utilizar filtrado paso bajo del logaritmo complejo para recuperar una aproximación a $v[n]$, y se puede utilizar filtrado paso alto para obtener $p_w[n]$. La Figura 13.23(c) muestra una aproximación a $v[n]$ obtenida utilizando un filtro paso bajo invariante con la frecuencia como en la Figura 13.16(a), con $N_1 = 30$ y $N_2 = 30$. Las curvas de trazos de variación lenta de la Figura 13.24 muestran el logaritmo complejo de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la componente de baja cuefrencia que se muestra en la Figura 13.23(c). Por otra

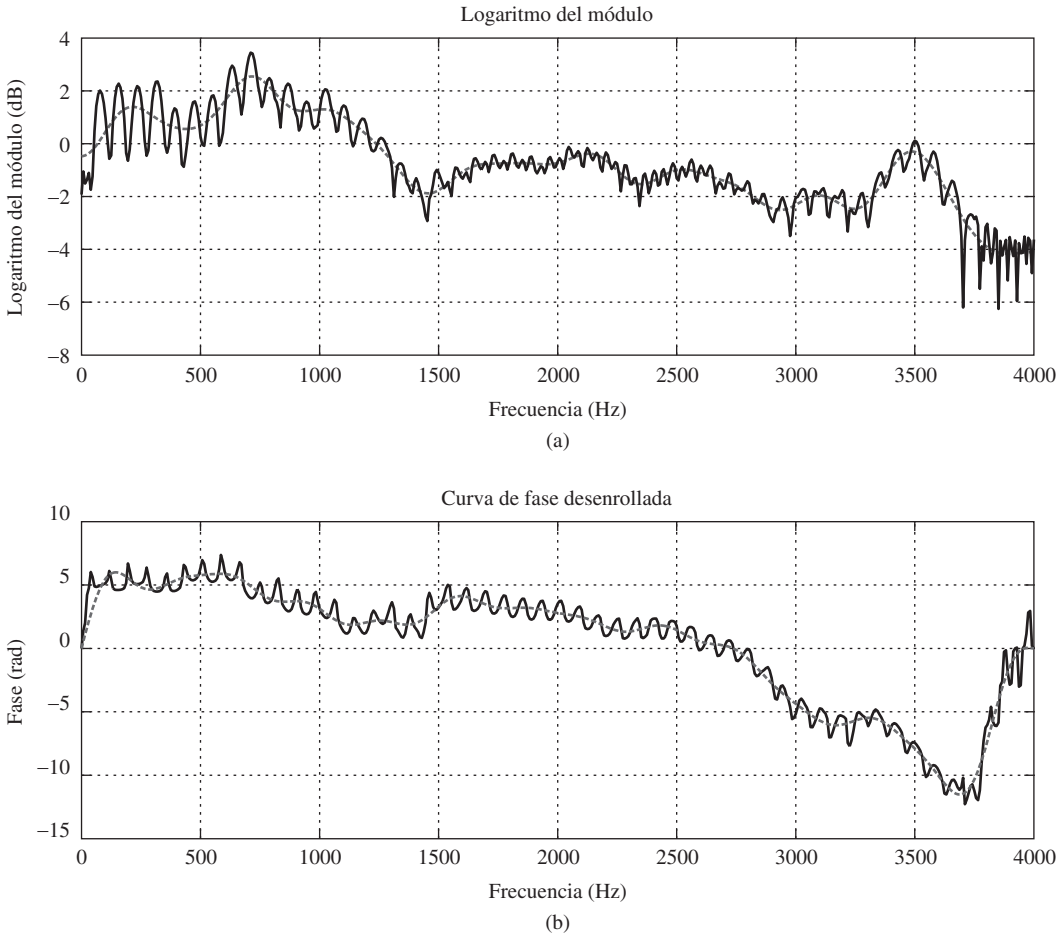


Figura 13.24 Logaritmo complejo de la señal de la Figura 13.23(a). (a) Logaritmo del módulo. (b) Fase desenrollada.

parte, la Figura 13.23(b) es una aproximación a $p_w[n]$ obtenida aplicando al cepstrum complejo un filtro paso alto simétrico invariante con la frecuencia como en la Figura 13.16(b), con $N_1 = 95$ y $N_2 = 95$. En ambos casos, el sistema característico inverso se ha implementado utilizando transformadas DFT de 1024 puntos, como en la Figura 13.4(b).

13.10.3. Estimación de los parámetros del modelo de voz

Aunque la deconvolución homomórfica se puede aplicar con éxito para *separar* las componentes del modelo de voz, en muchas aplicaciones de tratamiento de voz sólo estamos interesados en *estimar* los parámetros de una representación paramétrica de la señal de voz. Como las propiedades de la señal de voz cambian lentamente con el tiempo, es práctica común estimar los parámetros del modelo de la Figura 13.22 en intervalos de aproximadamente 10 ms (100 veces/s). En este caso, la transformada de Fourier dependiente del tiempo presentada en el Capítulo 10 sirve de base para el análisis homomórfico dependiente del tiempo. Por ejemplo, puede ser suficiente examinar segmentos seleccionados aproximadamente cada 10 ms (100 muestras a una frecuencia de muestreo de 10.000 Hz) para determinar el

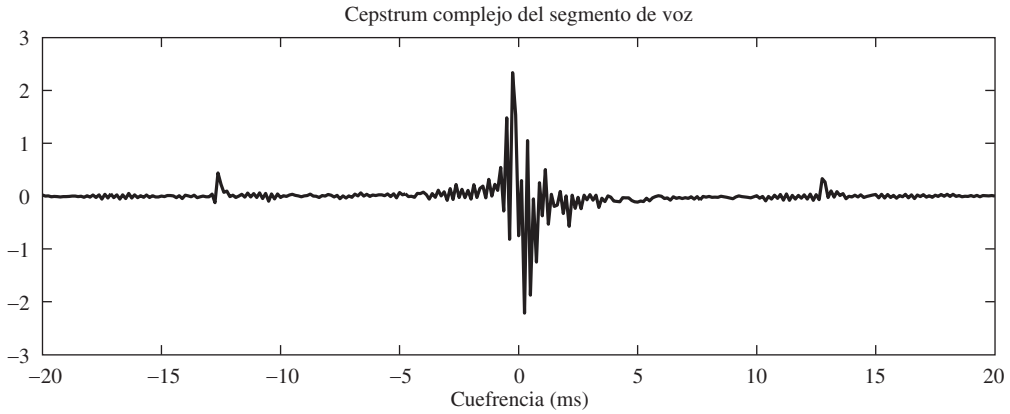


Figura 13.25 Cepstrum complejo de la señal de la Figura 13.23(a) (transformada inversa de Fourier en tiempo discreto de logaritmo complejo de la Figura 13.24).

modo de excitación del modelo (sonoro o sordo) y, para sonidos sonoros, el periodo del tono. O bien podemos desear seguir la variación de las resonancias del tracto vocal (formantes). Para estos problemas, se puede evitar el cálculo de la fase utilizando el cepstrum, que requiere sólo el cómputo del logaritmo del módulo de la transformada de Fourier. Como el cepstrum es la parte par del cepstrum complejo, nuestra presentación anterior sugiere que la parte de tiempo bajo de $c_x[n]$ debería corresponder a las componentes de variación lenta del logaritmo del módulo de la transformada de Fourier del segmento de voz, y para sonidos sonoros, el cepstrum debería contener impulsos en múltiplos del periodo del tono. La Figura 13.26 muestra un ejemplo.

La Figura 13.26(a) muestra las operaciones necesarias para estimar los parámetros de la voz utilizando el cepstrum. La Figura 13.26(b) muestra un resultado típico para un sonido sonoro. La señal de voz enventanada se etiqueta como A, $\log|X[k]|$ se etiqueta como C y el cepstrum $c_x[n]$ se etiqueta como D. El pico en el cepstrum aproximadamente en 8 ms indica que ese segmento de voz es sonoro con ese periodo. El espectro suavizado, o *envolvente del espectro*, obtenido mediante filtrado paso bajo invariante con la frecuencia con frecuencia de corte por debajo de 8 ms se etiqueta como E y se superpone con C. La situación para sonidos sordos, que se muestra en la Figura 13.26(c), es similar, excepto porque la naturaleza aleatoria de la componente de la excitación del segmento de voz de entrada causa una componente aleatoria de variación rápida en $\log|X[k]|$ en vez de una componente periódica. Por tanto, en el cepstrum, las componentes de tiempo bajo corresponden como antes a la función de transferencia del tracto vocal. Sin embargo, dado que las variaciones rápidas de $\log|X[k]|$ no son periódicas, no aparece un pico fuerte en el cepstrum. Por tanto, la presencia o ausencia de un pico en el cepstrum en el intervalo del periodo normal del tono sirve como un detector muy bueno de segmento sonoro/sordo y como estimador del periodo del tono. El resultad del filtrado paso bajo invariante con la frecuencia en el caso sordo es similar al del caso sonoro. Se obtiene una estimación suavizada de la envolvente espectral como en E.

En aplicaciones de análisis de voz, las operaciones de la Figura 13.26(a) se aplican repetidamente a segmentos secuenciales de la señal de voz. La longitud de los segmentos debe seleccionarse cuidadosamente. Si los segmentos son demasiado largos, las propiedades de la señal de vos cambiarán demasiado a lo largo del segmento. Si los segmentos son demasiado cortos, no tendremos suficiente señal para obtener una indicación fuerte de la periodicidad. Habitualmente, la longitud del segmento es aproximadamente tres o cuatro veces el periodo medio del tono de la señal de voz. La Figura 13.27 muestra un ejemplo de cómo se puede utilizar el cepstrum para detectar el tono y para estimar las frecuencias

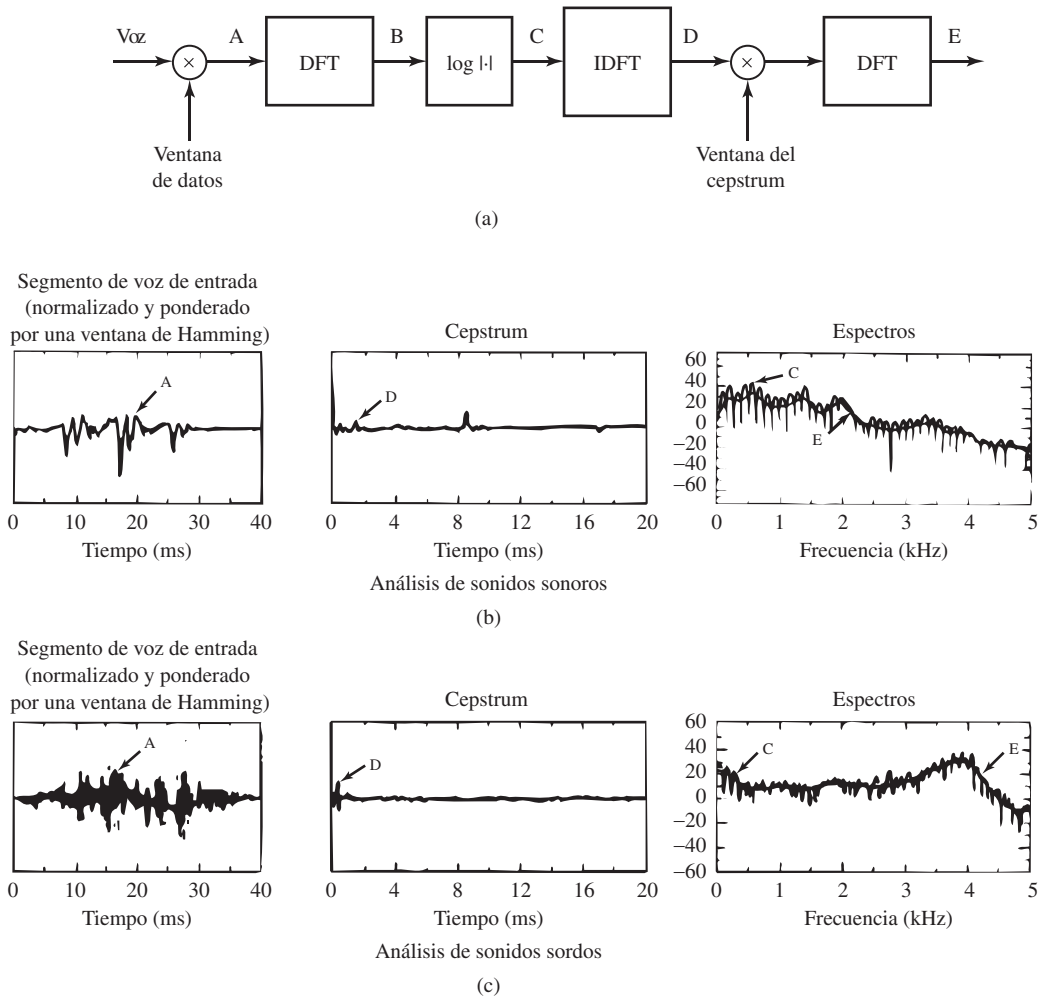


Figura 13.26 (a) Sistema para análisis mediante el cepstrum de señales de voz. (b) análisis de señales sonoras. (c) Análisis de señales sordas.

de resonancia del tracto vocal. La Figura 13.27(a) muestra una secuencia de cepstra calculados para segmentos de señal de voz seleccionados a intervalos de 20 ms. La existencia de un pico prominente en la secuencia de segmentos de voz indica que el segmento es sonoro. La localización del pico del cepstrum indica el valor del periodo del tono en cada correspondiente intervalo de tiempo. La Figura 13.27(b) muestra el logaritmo del módulo con el correspondiente espectro suavizado superpuesto. Las líneas conectan las estimaciones de las resonancias del tracto vocal obtenidas mediante un algoritmo heurístico de búsqueda de picos (véase Schafer y Rabiner, 1970).

13.10.4. Aplicaciones

Como se ha indicado anteriormente, los métodos de análisis basados en el cepstrum han encontrado una amplia aplicación en problemas de tratamiento de voz. Una de las aplicaciones de más éxito ha sido la

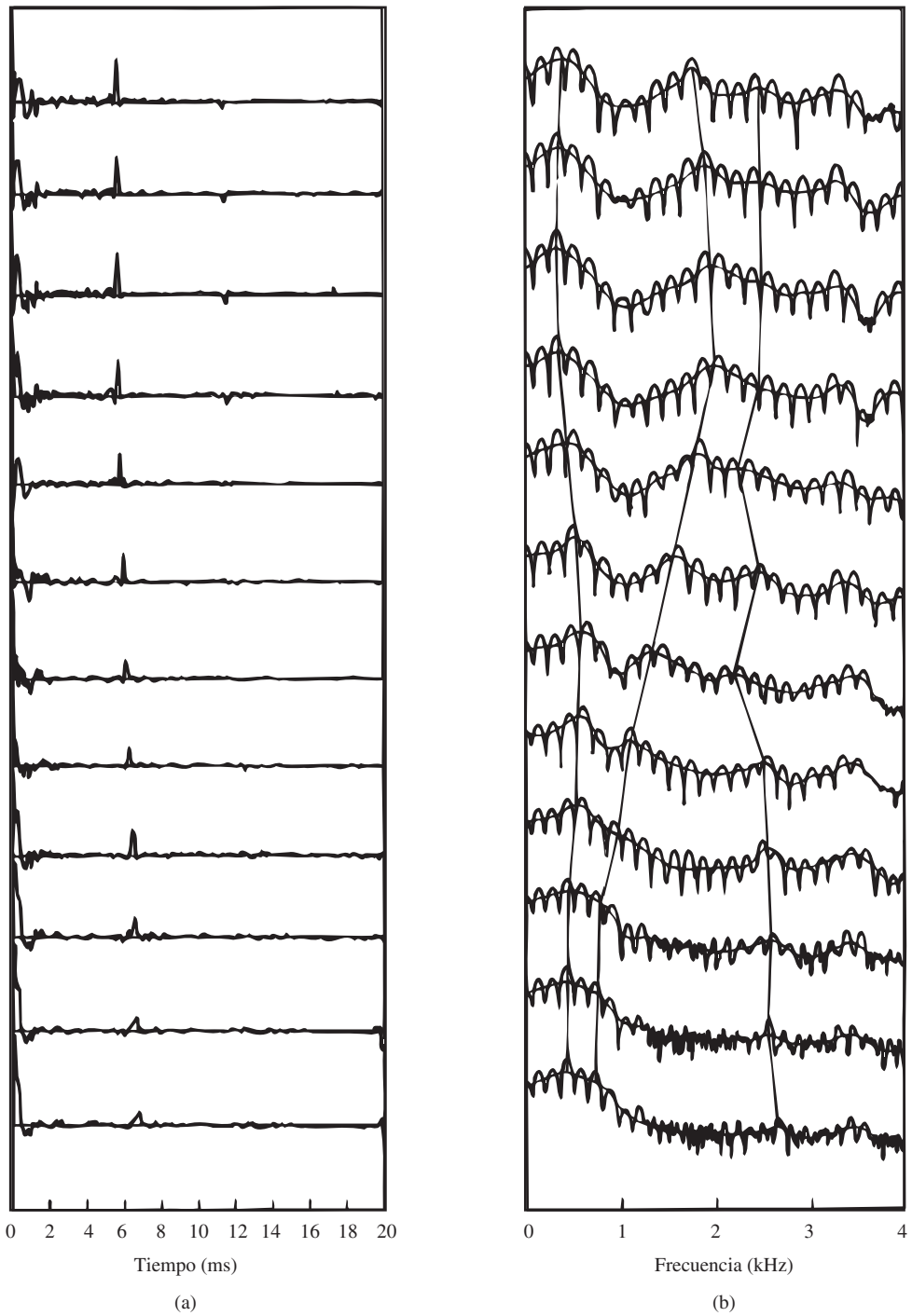


Figura 13.27 (a) Cepstra y (b) logaritmo del módulo del espectro para segmentos secuenciales de un sonido sonoro.

detección del tono (Noll, 1967). Se han utilizado también con éxito en sistemas de análisis/síntesis de voz para codificación de baja velocidad de la señal de voz (Oppenheim, Schafer y Rabiner, 1970).

Las representaciones basadas en el cepstrum de la voz se han utilizado también con éxito considerable en problemas de reconocimiento de patrones asociados con el tratamiento de voz, como la identificación de locutores (Atal, 1976), la verificación de locutores (Furui, 1981) y reconocimiento de voz (Davis y Mermelstein, 1980). Aunque la técnica de análisis predictivo lineal del Capítulo 11 es el método más ampliamente utilizado para obtener una representación de la componente del tracto vocal de la señal de voz, la representación del modelo predictivo lineal se transforma a menudo en una representación basada en el cepstrum para su uso en problemas de reconocimiento de patrones (Schroeder, 1981; Juang, Rabiner y Wilpon, 1987). Esta transformación se explora en el Problema 13.30.

13.11. RESUMEN

En este capítulo, hemos presentado la técnica de análisis basado en el cepstrum y la deconvolución homomórfica. Nos hemos enfocado principalmente en la definición y propiedades del cepstrum complejo y en los problemas prácticos del cálculo del cepstrum complejo. Se ha estudiado un ejemplo idealizado para ilustrar el uso del análisis basado en el cepstrum y la deconvolución homomórfica para separar las componentes de una convolución. La aplicación de técnica de análisis basado en el cepstrum a problemas de tratamiento de voz se presenta con algún detalle como ilustración de su uso en una aplicación real.

Problemas

Problemas básicos

13.1. **(a)** Considere un sistema en tiempo discreto lineal en sentido convencional. Si $y[n] = T\{x[n]\}$ es la salida cuando la entrada es $x[n]$, entonces la *señal cero* $\mathbf{0}[n]$ es la señal que se puede sumar a $x[n]$ tal que $T\{x[n]+\mathbf{0}[n]\} = y[n]+T\{\mathbf{0}[n]\} = y[n]$. ¿Cuál es la señal cero para sistemas lineales convencionales?

(b) Considere un sistema en tiempo discreto $y[n] = T\{x[n]\}$ que es homomórfico, siendo la convolución la operación para combinar señales tanto a la entrada como a la salida. ¿Cuál es la señal cero para este sistema, es decir, cuál es la señal $\mathbf{0}[n]$ tal que $T\{x[n]*\mathbf{0}[n]\} = y[n]*T\{\mathbf{0}[n]\} = y[n]$?

13.2. Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos secuencias, y $\hat{x}_1[n]$ y $\hat{x}_2[n]$ sus correspondientes cepstra complejos. Si $x_1[n]*x_2[n] = \delta[n]$, determine la relación entre $\hat{x}_1[n]$ y $\hat{x}_2[n]$.

13.3. Al considerar la implementación de sistema homomórficos para la convolución, restringimos nuestra atención a señales de entrada con transformadas Z racionales en la forma de la Ecuación (13.32). Si una secuencia de entrada $x[n]$ tiene transformada Z racional pero, o bien tiene la constante de ganancia negativa o una cantidad de retardo no representada por la Ecuación (13.32), entonces podemos obtener una transformada Z con la forma de la Ecuación (13.32) desplazando $x[n]$ apropiadamente y multiplicándola por -1. Entonces, se puede calcular el cepstrum complejo utilizando la Ecuación (13.33).

Suponga que $x[n] = \delta[n]-2\delta[n-1]$, y defina $y[n] = \alpha x[n-r]$, siendo $\alpha = \pm 1$ y r un entero. Calcule α y r tales que $Y(z)$ tenga la forma de la Ecuación (13.32), y calcule después $\hat{y}[n]$.

13.4. En la Sección 13.5.1 indicamos que las contribuciones de fase lineal deben eliminarse de la curva de fase desenrollada antes de calcular el cepstrum complejo. Este problema considera el efecto de no eliminar la componente de fase lineal debida al factor z^r en la Ecuación (13.29).

Concretamente, suponga que la entrada al sistema característico para la convolución es $x[n] = \delta[n+r]$. Demuestre que la aplicación formal de la definición de transformada de Fourier

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log[X(e^{j\omega})]e^{j\omega n}d\omega \tag{P13.4-1}$$

conduce a

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} r\dfrac{\cos(\pi n)}{n}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

La ventaja de eliminar la componente lineal de la fase es clara a partir de este resultado, ya que para r grande, esa componente dominaría el cepstrum complejo.

13.5. Suponga que la transformada Z de $s[n]$ es

$$S(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}.$$

Determine las posiciones de los polos de la transformada Z de $n\hat{s}[n]$, diferentes de los polos en $|z| = 0$ o ∞.

13.6. Suponga que el cepstrum complejo de $y[n]$ es $\hat{y}[n] = \hat{s}[n] + 2\delta[n]$. Determine $y[n]$ en función de $s[n]$.

13.7. Determine el cepstrum complejo de $x[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1] + 0{,}5\delta[n-2]$, desplazando $x[n]$ o cambiándola de signo, si fuera necesario.

13.8. Suponga que la transformada Z de una secuencia estable $x[n]$ está dada por

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z},$$

y que una secuencia estable $y[n]$ tiene como cepstrum complejo $\hat{y}[n] = \hat{x}[-n]$, siendo $\hat{x}[n]$ el cepstrum complejo de $x[n]$. Determine $y[n]$.

13.9. Las Ecuaciones (13.65) y (13.68) son relaciones recursivas que se pueden utilizar para calcular el cepstrum complejo $\hat{x}[n]$ cuando la secuencia de entrada $x[n]$ es de fase mínima y de fase máxima, respectivamente.

(a) Utilice la Ecuación (13.65) para calcular recursivamente el cepstrum complejo de la secuencia $x[n] = a^n u[n]$, con $|a| < 1$.

(b) Utilice la Ecuación (13.68) para calcular recursivamente el cepstrum complejo de la secuencia $x[n] = \delta[n] - a\delta[n+1]$, con $|a| < 1$.

13.10. $\mathrm{ARG}\{X(e^{j\omega})\}$ representa el valor principal de la fase de $X(e^{j\omega})$, y $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ representa la fase continua de $X(e^{j\omega})$. Suponga que $\mathrm{ARG}\{X(e^{j\omega})\}$ se muestrea en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$ obteniéndose $\mathrm{ARG}\{X[k]\} = \mathrm{ARG}\{X(e^{j(2\pi/N)k})\}$ como se muestra en la Figura 13.10. Suponiendo que $|\arg\{X[k]\} - \arg\{X[k-1]\}| < \pi$ para todo k, determine y dibuje la secuencia $r[k]$, como indica la Ecuación (13.49) y $\arg\{X[k]\}$ para $0 \leq k \leq 10$.

13.11. Sea $\hat{x}[n]$ el cepstrum complejo de una secuencia real $x[n]$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Proporcione una breve justificación de sus respuestas.

Afirmación 1: Si $x_1[n] = x[-n]$ entonces $\hat{x}_1[n] = \hat{x}[-n]$.

Afirmación 2: Como $x[n]$ es real, el cepstrum complejo $\hat{x}[n]$ debe ser también real.

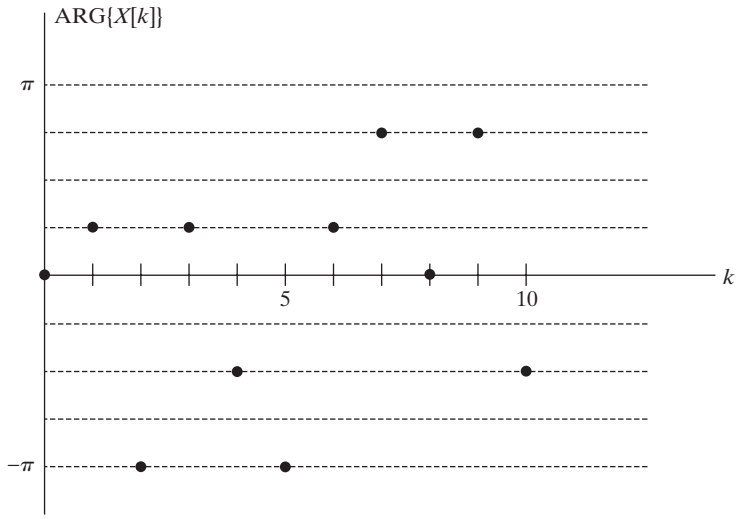


Figura P13.10

Problemas avanzados

13.12. Considere el sistema que se muestra en la Figura P13.12, donde S_1 en un sistema con respuesta al impulso $h_1[n]$ y S_2 es un sistema homomórfico con respecto a la convolución como operación de entrada y salida. Es decir, la transformación $T_2\{\cdot\}$ cumple

$$T_2\{w_1[n] * w_2[n]\} = T_2\{w_1[n]\} * T_2\{w_2[n]\}.$$

Suponga que el cepstrum complejo de la entrada $x[n]$ es $\hat{x}[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$. Obtenga una expresión cerrada de $h_1[n]$ tal que la salida sea $y[n] = \delta[n]$.

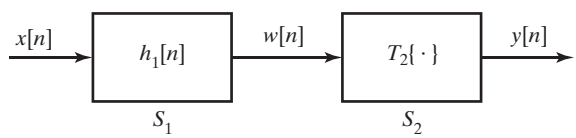


Figura P13.12

13.13. El cepstrum complejo de una señal de *longitud finita* $x[n]$ se calcula como se muestra en la Figura P13.13-1. Suponga que sabemos que $x[n]$ es de fase mínima (todos sus polos y ceros están en el interior de la circunferencia unidad). Se utiliza el sistema de la Figura P13.13-2 para obtener el cepstrum real de $x[n]$. Explique cómo construir $\hat{x}[n]$ a partir de $c_x[n]$.

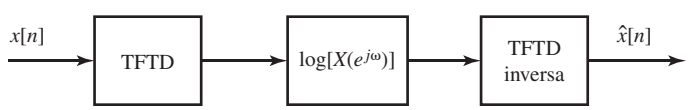


Figura P13.13-1

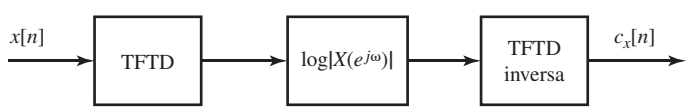


Figura P13.13-2

13.14. Considere la clase de secuencias que son reales y estables y cuyas transformadas Z son de la forma

$$X(z) = |A| \frac{\prod_{k=1}^{M_i}(1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o}(1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_o}(1 - d_k z)},$$

siendo $|a_k|, |b_k|, |c_k|, |d_k| < 1$. Sea $\hat{x}[n]$ el cepstrum complejo de $x[n]$.

(a) Sea $y[n] = x[-n]$. Determine $\hat{y}[n]$ en función de $\hat{x}[n]$.
(b) Si $x[n]$ es causal, ¿es también de fase mínima? Explique su respuesta.
(c) Suponga que $x[n]$ es una secuencia de duración finita tal que

$$X(z) = |A| \prod_{k=1}^{M_i}(1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o}(1 - b_k z),$$

con $|a_k| < 1$ y $|b_k| < 1$. La función $X(z)$ tiene ceros en el interior y en el exterior de la circunferencia unidad. Suponga que se desea determinar $y[n]$ tal que $|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ y que $Y(z)$ no tenga ceros en el exterior de la circunferencia unidad. Un planteamiento para conseguir este objetivo se muestra en la Figura 13.14. Determine la secuencia $\ell[n]$ requerida. Una posible aplicación del sistema de la Figura 13.14 es estabilizar un sistema inestable aplicando la transformación que se muestra en dicha figura a la secuencia de coeficientes del denominador de la función de transferencia.

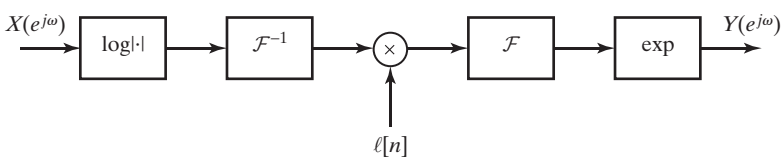


Figura P13.14

13.15. Se puede demostrar (véase el Problema 3.50) que si $x[n] = 0$ para $n < 0$, entonces

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z).$$

Este resultado se denomina *teorema del valor inicial para secuencias limitadas por la izquierda en el origen*.

(a) Demuestre un teorema similar para *secuencias limitadas por la derecha en el origen*, es decir, para secuencias tales que $x[n] = 0$ para $n > 0$.
(b) Utilice los teoremas del valor inicial para demostrar que $\hat{x}[0] = \log(x[0])$ si $x[n]$ es una secuencia de fase mínima.
(c) Utilice los teoremas del valor inicial para demostrar que $\hat{x}[0] = \log(x[0])$ si $x[n]$ es una secuencia de fase máxima.
(d) Utilice los teoremas del valor inicial para demostrar que $\hat{x}[0] = \log|A|$ cuando $X(z)$ está dada por la Ecuación (13.32) ¿es consistente este resultado con los apartados (b) y (c)?

13.16. Considere una secuencia $x[n]$ cuyo cepstrum complejo es $\hat{x}[n]$, tal que cumple que $\hat{x}[n] = -\hat{x}[-n]$. Determine la cantidad

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n].$$

13.17. Considere una secuencia $h[n]$ real, estable, par y bilateral. La transformada de Fourier de $h[n]$ es positiva para todo ω, es decir,

$$H(e^{j\omega}) > 0, \qquad -\pi < \omega \leq \pi.$$

Suponga que existe la transformada Z de $h[n]$. No suponga que $H(z)$ es racional.

(a) Demuestre que existe una señal de fase mínima $g[n]$, tal que

$$H(z) = G(z)G(z^{-1}),$$

siendo $G(z)$ la transformada Z de una secuencia $g[n]$, con la propiedad de que $g[n] = 0$ para $n < 0$. Indique explícitamente la relación entre $\hat{h}[n]$ Y $\hat{g}[n]$, los cepstra complejos de $h[n]$ y $g[n]$, respectivamente.

(b) Dada una señal estable $s[n]$, con transformada Z racional.

$$S(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-4z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Defina $h[n] = s[n] * s[-n]$. Obtenga $G(z)$ (como en el apartado (a)) en función de $S(z)$.

(c) Considere el sistema de la Figura P13.17, donde $\ell[n]$ se define como

$$\ell[n] = u[n-1] + (-1)^n u[n-1].$$

Determine las condiciones *más generales* sobre $x[n]$ tales que aseguren que $y[n] = x[n]$ para todo n.

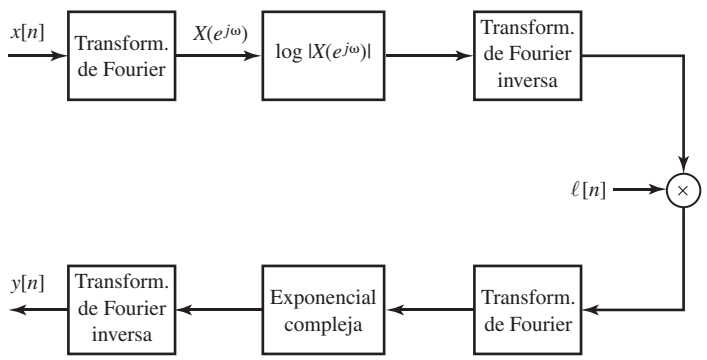


Figura P13.17

13.18. Considere una señal $x[n]$ de fase máxima.

(a) Demuestre que el cepstrum complejo $\hat{x}[n]$ de una señal de fase máxima está relacionado con su cepstrum $c_x[n]$ de la siguiente forma

$$\hat{x}[n] = c_x[n]\ell_{max}[n],$$

siendo $\ell_{max}[n] = 2u[-n] - \delta[n]$.

(b) Utilizando las relaciones del apartado (a), demuestre que

$$\arg\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi} \log|X(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta.$$

(c) Demuestre también que

$$\log|X(e^{j\omega})| = \hat{x}[0] - \frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi} \arg\{X(e^{j\theta})\} \cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta.$$

13.19. Considere una secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier es $X(e^{j\omega})$ y cuyo cepstrum complejo es $\hat{x}[n]$. Se obtiene una nueva señal $y[n]$ mediante filtrado homomórfico, siendo

$$\hat{y}[n] = (\hat{x}[n] - \hat{x}[-n])u[n-1].$$

(a) Demuestre que $y[n]$ es la fase mínima.
(b) ¿Cuál es la fase de $Y(e^{j\omega})$?
(c) Obtenga una relación entre $\arg[Y(e^{j\omega})]$ y $\log|Y(e^{j\omega})|$.
(d) Si $x[n]$ es de fase mínima, ¿cómo se relaciona $y[n]$ con $x[n]$?

13.20. La Ecuación (13.65) representa una relación recursiva entre una secuencia $x[n]$ y su cepstrum complejo $\hat{x}[n]$. Demuestre, a partir de la Ecuación (13.65), que el sistema característico $D_*[\cdot]$ se comporta como un sistema causal para entradas de fase mínima, es decir, demuestre que para entradas de fase mínima, $\hat{x}[n]$ depende sólo de $x[k]$ para $k \leq n$.

13.21. Describa un procedimiento para calcular una secuencia causal $x[n]$, para la que

$$X(z) = -z^3 \frac{(1-0{,}95z^{-1})^{2/5}}{(1-0{,}9z^{-1})^{7/13}}.$$

13.22. La secuencia

$$h[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n-n_0]$$

es un modelo simplificado de la respuesta al impulso de un sistema que introduce un eco.

(a) Determine el cepstrum complejo $\hat{h}[n]$ de esta secuencia. Dibuje el resultado.
(b) Determine y dibuje el cepstrum $c_h[n]$.
(c) Suponga que se calcula una aproximación al cepstrum complejo utilizando una DFT de N puntos como en las Ecuaciones (13.46a) a (13.46c). Obtenga una expresión cerrada de la aproximación $\hat{h}_p[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, para el caso $n_0 = N/6$.Suponga que se ha realizado exactamente el desenrollado de la fase. ¿Qué sucede si N no es divisible por n_0?
(d) Repita el apartado (c) para la aproximación al cepstrum $c_{xp}[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, calculado utilizando las Ecuaciones (13.60a) y (13.60c).
(e) Si para detectar el valor del retardo del eco n_0 se utiliza el máximo impulso en la aproximación del cepstrum $c_{xp}[n]$, ¿cómo tiene que ser N de grande para evitar ambigüedad? Suponga que para ese valor de N se puede realizar exactamente el desenrollado de la fase.

13.23. Sea $x[n]$ una secuencia de fase máxima de *longitud finita* cuyo cepstrum complejo es $\hat{x}[n]$, y defina $y[n]$ como

$$y[n] = \alpha^n x[n]$$

cuyo cepstrum complejo es $\hat{y}[n]$.

(a) Si $0 < \alpha < 1$, ¿cómo se relaciona $\hat{y}[n]$ con $\hat{x}[n]$?
(b) ¿Cómo se debe elegir α para que $y[n]$ ya no sea más de fase máxima?
(c) ¿Cómo se debe elegir α para que si se eliminan los términos de fase lineal antes de calcular el cepstrum complejo, entonces $\hat{y}[n] = 0$ para $n > 0$?

13.24. Considere una secuencia $x[n]$ de fase mínima cuya transformada Z es $X(z)$ y cuyo cepstrum complejo es $\hat{x}[n]$. Se define un nuevo cepstrum complejo mediante la relación

$$\hat{y}[n] = (\alpha^n - 1)\hat{x}[n].$$

Determine la transformada Z $Y(z)$. ¿Es también el resultado de fase mínima?

13.25. La Sección 13.9.4 contiene un ejemplo de cómo se puede utilizar el cepstrum complejo para obtener dos descomposiciones diferentes donde interviene la convolución de una secuencia de fase mínima con otra secuencia. En ese ejemplo,

$$X(z) = \frac{(0{,}98 + z^{-1})(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30})}{(1 - 0{,}9e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - 0{,}9e^{-j\pi/6}z^{-1})}.$$

(a) En una descomposición, $X(z) = X_{min}(z)X_{ap}(z)$ siendo

$$X_{min}(z) = \frac{(1 + 0{,}98z^{-1})(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30})}{(1 - 0{,}9e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - 0{,}9e^{-j\pi/6}z^{-1})}$$

y

$$X_{ap}(z) = \frac{(0{,}98 + z^{-1})}{(1 + 0{,}98z^{-1})}.$$

Utilice el desarrollo en serie de potencias de los términos logarítmicos para obtener los cepstra complejos $\hat{x}_{min}[n]$, $\hat{x}_{ap}[n]$ y $\hat{x}[n]$. Dibuje las secuencias y compare sus dibujos con los de la Figura 13.19.

(b) En la segunda descomposición, $X(z) = X_{mn}(z)X_{mx}(z)$ siendo

$$X_{mn}(z) = \frac{z^{-1}(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30})}{(1 - 0{,}9e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - 0{,}9e^{-j\pi/6}z^{-1})}$$

y

$$X_{mx}(z) = (0{,}98z + 1).$$

Utilice el desarrollo en serie de potencias de los términos logarítmicos para obtener los cepstra complejos y demuestre que $\hat{x}_{mn}[n] \neq \hat{x}_{min}[n]$ pero que $\hat{x}[n] = \hat{x}_{mn}[n] + \hat{x}_{mx}[n]$ es el mismo que en el apartado (a). Observe que

$$(1 + 0{,}9z^{-15} + 0{,}81z^{-30}) = \frac{(1 - (0{,}9)^3 z^{-45})}{(1 - 0{,}9z^{-15})}.$$

13.26. Suponga que $s[n] = h[n] * g[n] * p[n]$, siendo $h[n]$ una secuencia de fase mínima, $g[n]$ una secuencia de fase máxima y $p[n]$

$$p[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha_k \delta[n - kn_0],$$

donde α_k y n_0 no son conocidos. Desarrolle un método para separar $h[n]$ a partir de $s[n]$.

Problemas de ampliación

13.27. Sea $x[n]$ una secuencia cuya transformada Z es $X(z)$ y cuyo cepstrum complejo es $\hat{x}[n]$. El módulo al cuadrado de $X(z)$ es

$$V(z) = X(z)X^*(1/z^*).$$

Como $V(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \geq 0$, el cepstrum complejo $\hat{v}[n]$ correspondiente a $V(z)$ se puede calcular sin desenrollar la fase.

(a) Obtenga una relación entre el cepstrum complejo $\hat{v}[n]$ y el cepstrum complejo $\hat{x}[n]$.

(b) Exprese el cepstrum complejo $\hat{v}[n]$ en función del cepstrum $c_x[n]$.

(c) Determine la secuencia $\ell[n]$ tal que

$$\hat{x}_{min}[n] = \ell[n]\hat{v}[n]$$

sea el cepstrum complejo de una secuencia de fase mínima $x_{min}[n]$ para la que

$$|X_{min}(e^{j\omega})|^2 = V(e^{j\omega}).$$

(d) Suponga que $X(z)$ está dada por la Ecuación (13.32). Utilice el resultado del apartado (c) y las Ecuaciones (13.36a), (13.36b) y (13.36c) para obtener el cepstrum complejo de la secuencia de fase mínima, y trabaje hacia atrás para obtener $X_{min}(z)$.

La técnica empleada en el apartado (d) se puede utilizar de forma general para obtener una factorización de fase mínima de una función módulo al cuadrado.

13.28. Sea $\hat{x}[n]$ el cepstrum complejo de $x[n]$. Defina una secuencia $x_e[n]$ como

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Demuestre que el cepstrum complejo de $x_e[n]$ está dado por

$$\hat{x}_e[n] = \begin{cases} \hat{x}[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

13.29. En análisis, síntesis y codificación de voz, la señal de voz se modela comúnmente en un intervalo corto de tiempo como la respuesta del un sistema lineal e invariante con el tiempo, excitado por una excitación que conmuta entre un tren de impulsos equiespaciados para sonidos sonoros y una fuente de ruido aleatorio de banda ancha para sonidos sordos. Para utilizar deconvolución homomórfica para separar las componentes del modelo de voz, la señal de voz $s[n] = v[n] * p[n]$ se multiplica por una secuencia de ventana $w[n]$ para obtener $x[n] = s[n]w[n]$. Para simplificar el análisis, $x[n]$ se aproxima por

$$x[n] = (v[n] * p[n]) \cdot w[n] \simeq v[n] * (p[n] \cdot w[n]) = v[n] * p_w[n]$$

siendo $p_w[n] = p[n]w[n]$ como en la Ecuación (13.123).

(a) Proporcione un ejemplo de $p[n]$, $v[n]$ y $w[n]$ en el que la suposición anterior no resulte adecuada.

(b) Un planteamiento para estimar los parámetros de la excitación (decisión sonoro/sordo y espaciado entre pulsos para sonidos sonoros) es calcular el cepstrum real $c_x[n]$ del segmento enventanado de voz $x[n]$ como se muestra en la Figura P13.29-1. Para el modelo de la Sección 13.10.1, exprese $c_x[n]$ en función del cepstrum complejo $\hat{x}[n]$. ¿Cómo utilizaría $c_x[n]$ para estimar los parámetros de la excitación?

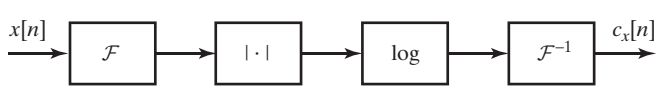


Figura P13.29-1

(c) Suponga que sustituimos la operación log de la Figura 13.29-1 por la operación de elevación al "cuadrado" de forma que el sistema resultante es el que se muestra en la Figura P13.29-2. ¿Puede utilizarse el nuevo "cepstrum" $q_x[n]$ para estimar los parámetros de la excitación? Explique su respuesta.

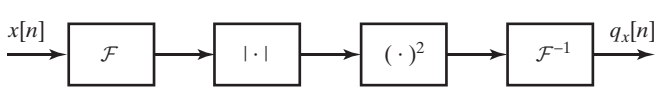


Figura P13.29-2

13.30. Considere un sistema lineal, invariante con el tiempo y estable con respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia todo polos

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}.$$

Estos sistemas todo polos aparecen en análisis predictivo lineal. Es de interés calcular el cepstrum complejo directamente a partir de los coeficientes de $H(z)$.

(a) Determine $\hat{h}[0]$.

(b) Demuestre que

$$\hat{h}[n] = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{h}[k] a_{n-k}, \qquad n \geq 1.$$

Con las relaciones de los apartados (a) y (b), se puede calcular el cepstrum complejo sin desenrollar la fase y sin calcular las raíces del denominador de $H(z)$.

13.31. Un modelo algo más general para el eco que el sistema del Problema 13.22 es el sistema que se muestra en la Figura P13.31. La respuesta al impulso de este sistema es

$$h[n] = \delta[n] + \alpha g[n - n_0],$$

donde $\alpha g[n]$ es la respuesta al impulso de la vía del eco.

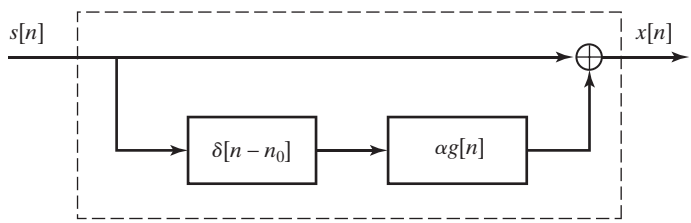


Figura P13.31

(a) Suponiendo que

$$\max_{-\pi<\omega<\pi} |\alpha G(e^{j\omega})| < 1,$$

demuestre que el cepstrum complejo $\hat{h}[n]$ tiene la forma

$$\hat{h}[n] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{k} g_k[n - kn_0],$$

y determine una expresión de $g_k[n]$ en función de $g[n]$.

(b) Para las condiciones del apartado (a), determine y dibuje el cepstrum complejo $\hat{h}[n]$ cuando $g[n] = \delta[n]$.

(c) Para las condiciones del apartado (a), determine y dibuje el cepstrum complejo $\hat{h}[n]$ cuando $g[n] = a^n u[n]$. ¿Qué condición debe ser satisfecha por α y a para que se pueda aplicar el resultado del apartado (a)?

(d) Para las condiciones del apartado (a), determine y dibuje el cepstrum complejo $\hat{h}[n]$ cuando $g[n] = a_0\delta[n] + a_1\delta[n - n_1]$. ¿Qué condición debe ser satisfecha por α, a_0, a_1 y n_1 para que se pueda aplicar el resultado del apartado (a)?

13.32. Un uso interesante de la ponderación exponencial es el cálculo del cepstrum complejo sin desenrollado de la fase. Suponga que $X(z)$ no tiene polos ni ceros en la circunferencia unidad. Entonces es posible calcular un factor de ponderación exponencial α en el producto $w[n] = \alpha^n x[n]$, tal que ninguno de los polos ni de los ceros de $X(z)$ se desplace cruzando la circunferencia unidad al formar $W(z) = X(\alpha^{-1}z)$.

(a) Suponiendo que ningún polo ni cero de $X(z)$ se desplaza cruzando la circunferencia unidad, demuestre que

$$\hat{w}[n] = \alpha^n \hat{x}[n]. \tag{P13.32-1}$$

(b) Suponga ahora que, en vez del cepstrum complejo, calculamos $c_x[n]$ y $c_w[n]$. Utilice el resultado del apartado (a) para obtener expresiones de $c_x[n]$ y $c_w[n]$ en función de $\hat{x}[n]$.

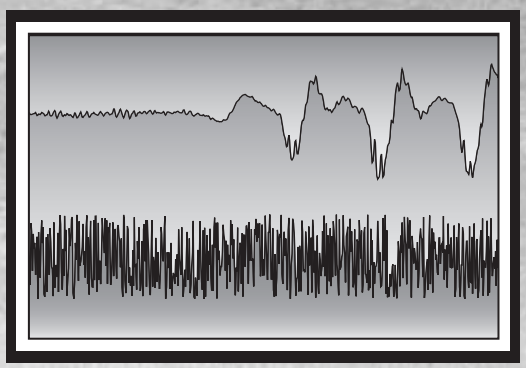
(c) Demuestre ahora que

$$\hat{x}[n] = \frac{2(c_x[n] - \alpha^n c_w[n])}{1 - \alpha^{2n}}, \qquad n \neq 0. \tag{P13.32-2}$$

(d) Como $c_x[n]$ y $c_w[n]$ se pueden calcular a partir de $\log|X(e^{j\omega})|$ y $\log|W(e^{j\omega})|$, se pueden calcular a partir de $X(e^{j\omega})$. Discuta algunos problemas potenciales que podrían presentarse con este planteamiento.

A

Señales aleatorias



En este apéndice recopilamos y resumimos diversos resultados sobre señales estocásticas y establecemos la notación que se utiliza en su representación. No intentamos hacer una presentación detallada de los sutiles y difíciles aspectos matemáticos de la teoría de procesos aleatorios. Aunque nuestra perspectiva no es rigurosa, hemos resumido los resultados importantes y los supuestos matemáticos implícitos en su obtención. En textos como Davenport (1970), Papoulis (2002), Gray y Davidson (2004) y Bertsekas y Tsitsiklis (2008) se pueden encontrar presentaciones detalladas de la teoría de señales aleatorias.

A.1. PROCESOS ALEATORIOS EN TIEMPO DISCRETO

El concepto fundamental de la representación matemática de señales estocásticas es el de *proceso aleatorio*. En nuestra presentación de los procesos aleatorios como modelos para señales en tiempo discreto, supondremos que el lector está familiarizado con conceptos básicos de teoría de la probabilidad, como variables aleatorias, distribuciones de probabilidad y promedios.

Al utilizar modelos basados en procesos aleatorios en aplicaciones prácticas de tratamiento de señales, consideraremos que una secuencia particular es una realización de un conjunto de secuencias. Dada una señal en tiempo discreto, la estructura, es decir, la ley de probabilidad subyacente, del correspondiente proceso aleatorio generalmente no es conocida y se debe inferir de alguna forma. Puede ser posible realizar suposiciones razonables sobre la estructura del proceso, o puede ser posible estimar las propiedades de una representación basada en procesos aleatorios a partir de un segmento finito de una secuencia muestra típica.

Formalmente, un proceso aleatorio es una familia indexada de variables aleatorias $\{\mathbf{x}_n\}$ caracterizado por un conjunto de funciones de distribución de probabilidad que en general, pueden ser función del índice n. Al utilizar el concepto de proceso aleatorio como un modelo para señales en tiempo discreto, el índice n está asociado al índice temporal. En otras palabras, cada valor muestra $x[n]$ de una señal aleatoria se supone que ha resultado de un mecanismo gobernado por una ley de probabilidad. Una variable aleatoria individual $\mathbf{x}_n$ se describe mediante la función de distribución de probabilidad

$$P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \text{Probabilidad}\,[\mathbf{x}_n \leq x_n], \tag{A.1}$$

donde $\mathbf{x}_n$ indica la variable aleatoria y x_n es un valor particular de $\mathbf{x}_n$.[1] Si $\mathbf{x}_n$ puede tomar un conjunto continuo de valores, queda especificada de forma equivalente por su *función densidad de probabilidad*

$$p_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \frac{\partial P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n)}{\partial x_n}, \tag{A.2}$$

o por su *función de distribución de probabilidad*

$$P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \int_{-\infty}^{x_n} p_{\mathbf{x}_n}(x, n)dx. \tag{A.3}$$

La interdependencia de dos variables aleatorias $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{x}_m$ de un proceso aleatorio se describe utilizando la función de distribución de probabilidad conjunta

$$P_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = \text{Probabilidad}\,[\mathbf{x}_n \leq x_n \text{ y } \mathbf{x}_m \leq x_m] \tag{A.4}$$

y por la densidad de probabilidad conjunta

$$p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = \frac{\partial^2 P_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m)}{\partial x_n \partial x_m}. \tag{A.5}$$

Dos variables aleatorias son *estadísticamente independientes* si el conocimiento del valor de una de ellas no afecta a la densidad de probabilidad de la otra. Si todas las variables aleatorias de un conjunto $\{\mathbf{x}_n\}$ son estadísticamente independientes, entonces

$$P_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = P_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) \cdot P_{\mathbf{x}_m}(x_m, m) \qquad m \neq n. \tag{A.6}$$

Una caracterización completa de un proceso aleatorio requiere la especificación de todas las posibles distribuciones de probabilidad conjuntas. Como hemos indicado, estas distribuciones de probabilidad pueden ser función de los índices temporales m y n. En el caso en el que todas las distribuciones de probabilidad sean independientes de un desplazamiento del origen de tiempos, se dice que el proceso aleatorio es *estacionario*. Por ejemplo, la distribución de segundo orden de un proceso estacionario satisface

$$P_{\mathbf{x}_{n+k},\mathbf{x}_{m+k}}(x_{n+k}, n+k, x_{m+k}, m+k) = P_{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) \qquad \text{para todo } k. \tag{A.7}$$

En muchas de las aplicaciones del tratamiento de señales en tiempo discreto, los procesos aleatorios sirven como modelos de señales en el sentido de que una señal particular puede ser considerada como una secuencia muestra de un proceso aleatorio. Aunque los detalles de esas señales son impredecibles (lo que hace que un planteamiento determinista para la representación de esas señales no sea apropiado), se pueden determinar ciertas propiedades promedio del conjunto, dada la ley de probabilidad del proceso. Estas propiedades promedio sirven a menudo como una caracterización útil, aunque incompleta, de esas señales.

[1] En este apéndice, el tipo negrita se utiliza para indicar las variables aleatorias y el tipo normal para las variables de las funciones de probabilidad.

A.2. PROMEDIOS

A menudo es útil caracterizar una variable aleatoria por promedios como la media y la varianza. Como un proceso aleatorio es un conjunto indexado de variables aleatorias, podemos asimismo caracterizar el proceso mediante los promedios estadísticos de las variables aleatorias que lo componen. Estos promedios se denominan *promedios conjuntos*. Comenzaremos nuestra presentación de los promedios con algunas definiciones.

A.2.1. Definiciones

El promedio, o media, de un proceso aleatorio se define como

$$m_{\mathbf{x}_n} = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{x}_n}(x,n)dx, \tag{A.8}$$

donde $\mathscr{E}$ indica el operador *esperanza matemática*. En general, la media (valor esperado) puede depender de n. Además, si $g(\cdot)$ es una función, $g(\mathbf{x}_n)$ es una variable aleatoria y el conjunto de variables aleatorias $\{g(\mathbf{x}_n)\}$ define un nuevo proceso aleatorio. Para calcular promedios de este nuevo proceso, podemos obtener distribuciones de probabilidad de las nuevas variables aleatorias, o se puede demostrar que

$$\mathscr{E}\{g(\mathbf{x}_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\mathbf{x}_n}(x,n)dx. \tag{A.9}$$

Si las variables aleatorias son discretas (es decir, sus valores están cuantificados), las integrales se convierten en sumas sobre todos los posibles valores de la variable aleatoria. En ese caso $\mathscr{E}\{g(x)\}$ tiene la forma

$$\mathscr{E}\{g(\mathbf{x}_n)\} = \sum_x g(x)\hat{p}_{\mathbf{x}_n}(x,n). \tag{A.10}$$

En los casos en los que estamos interesados en la relación entre múltiples procesos aleatorios, debemos tratar con conjuntos múltiples de variables aleatorias. Por ejemplo, el valor esperado de una función de dos variables aleatorias $\{\mathbf{x}_n\}$ y $\{\mathbf{y}_m\}$, se define como

$$\mathscr{E}\{g(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_m)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_m}(x,n,y,m)dx\,dy, \tag{A.11}$$

donde $p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_m}(x_m,n,y_m,m)$ es la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{y}_m$.

El operador esperanza matemática es un operador lineal. Es decir, se puede demostrar que

1. $\mathscr{E}\{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_m\} = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\} + \mathscr{E}\{\mathbf{y}_m\}$; es decir, el promedio de la suma es la suma de promedios.
2. $\mathscr{E}\{a\mathbf{x}_n\} = a\mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\}$; es decir, el promedio de la multiplicación de $\mathbf{x}_n$ por una constante es igual a la constante multiplicada por el promedio de $\mathbf{x}_n$.

En general, el promedio del producto de dos variables aleatorias no es igual al producto de promedios. Sin embargo, cuando esta propiedad se cumple, se dice que las dos variables aleatorias son *linealmente independientes* o *incorreladas*. Es decir, $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{y}_m$ son linealmente independientes o incorreladas si

$$\mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_m\} = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_m\} \cdot \mathscr{E}\{\mathbf{y}_m\}. \tag{A.12}$$

Es fácil ver, a partir de las Ecuaciones (A.11) y (A.12), que una condición suficiente para la independencia lineal es

$$p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_m}(x_n,n,y_m,m) = p_{\mathbf{x}_n}(x_n,n)\cdot p_{\mathbf{y}_m}(y_m,m). \tag{A.13}$$

Sin embargo, se puede demostrar que la Ecuación (A.13) es un requisito más fuerte para la independencia que la (A.12). Las variables aleatorias que satisfacen la Ecuación (A.13) se denominan *estadísticamente independientes*. Si la Ecuación (A.13) se cumple para todos los valores de m y n, se dice que los procesos aleatorios $\{\mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{y}_m\}$ son estadísticamente independientes. Los procesos aleatorios estadísticamente independientes son también linealmente independientes, pero lo contrario no es cierto. La independencia lineal no implica independencia estadística.

Observando las Ecuaciones (A.9)-(A.11) puede verse que los promedios son generalmente funciones del índice temporal. En procesos estacionarios, todas las variables aleatorias que constituyen el proceso tienen la misma media. Es decir, la media de un proceso aleatorio estacionario es una constante que indicaremos simplemente como m_x.

Además de la media de un proceso aleatorio, que se define en la Ecuación (A.8), existen otros promedios que son particularmente importantes dentro del contexto de tratamiento de señales. Se definen a continuación. Por conveniencia de notación, supondremos que las distribuciones de probabilidad son continuas. Las correspondientes definiciones para procesos aleatorios discretos se pueden obtener aplicando la Ecuación (A.10).

El valor *cuadrático medio* de $\mathbf{x}_n$ es el promedio de $|\mathbf{x}_n|^2$; es decir,

$$\mathscr{E}\{|\mathbf{x}_n|^2\} = \text{valor cuadrático medio} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p_{\mathbf{x}_n}(x,n)dx. \tag{A.14}$$

El valor cuadrático medio se denomina a veces *potencia media*.

La *varianza* de $\mathbf{x}_n$ es el valor cuadrático medio de $[\mathbf{x}_n - m_{x_n}]$; es decir,

$$\text{var}[\mathbf{x}_n] = \mathscr{E}\{|(\mathbf{x}_n - m_{x_n})|^2\} = \sigma^2_{\mathbf{x}_n}. \tag{A.15}$$

Como el promedio de la suma es la suma de promedios, se deduce que la Ecuación (A.15) se puede expresar como

$$\text{var}[\mathbf{x}_n] = \mathscr{E}\{|\mathbf{x}_n|^2\} - |m_{x_n}|^2. \tag{A.16}$$

En general, el valor cuadrático medio y la varianza son funciones del tiempo. Sin embargo, son constantes para procesos estacionarios.

La media, el valor cuadrático medio y la varianza son promedios simples que proporcionan sólo una pequeña cantidad de información sobre un proceso. Un promedio más útil es la *secuencia de autocorrelación*, que se define como

$$\begin{aligned}\phi_{xx}[n,m] &= \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_m^*\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n,n,x_m,m)dx_n\,dx_m,\end{aligned} \tag{A.17}$$

donde * indica conjugación compleja. La secuencia de autocovarianza se un proceso aleatorio se define como

$$\gamma_{xx}[n,m] = \mathscr{E}\{(\mathbf{x}_n - m_{x_n})(\mathbf{x}_m - m_{x_m})^*\}, \tag{A.18}$$

que se puede expresar como

$$\gamma_{xx}[n,m] = \phi_{xx}[n,m] - m_{x_n}m^*_{x_m}. \tag{A.19}$$

Nótese que, en general, tanto la autocorrelación como la autocovarianza son secuencias bidimensionales, es decir, funciones de dos variables.

La secuencia de autocorrelación es una medida de la dependencia entre los valores de un proceso aleatorio en instantes diferentes. En ese sentido, describe parcialmente la variación con el tiempo de una señal aleatoria. Una medida de la dependencia entre dos señales aleatorias diferentes se obtiene mediante la secuencia de correlación cruzada. Si $\{\mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{y}_m\}$ son dos procesos aleatorios, su correlación cruzada es

$$\begin{aligned}\phi_{xy}[n,m] &= \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_m^*\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^* p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_m}(x,n,y,m)\,dx\,dy,\end{aligned} \tag{A.20}$$

donde $p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_m}(x,n,y,m)$ es la función densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{y}_m$. La función de covarianza cruzada se define como

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}[n,m] &= \mathscr{E}\{(\mathbf{x}_n - m_{x_n})(\mathbf{y}_m - m_{y_m})^*\} \\ &= \phi_{xy}[n,m] - m_{x_n}m_{y_m}^*.\end{aligned} \tag{A.21}$$

Como hemos indicado, las propiedades estadísticas de un proceso aleatorio varían generalmente con el tiempo. Sin embargo, los procesos aleatorios estacionarios se caracterizan por una condición de equilibrio en la que las propiedades estadísticas son invariantes a un desplazamiento del origen de tiempos. Esto significa que la función de distribución de primer orden es independiente del tiempo. De forma similar, todas las funciones de probabilidad conjunta son también invariantes a un desplazamiento del origen de tiempos. Es decir, las funciones de probabilidad conjunta de segundo orden dependen sólo de la diferencia de tiempos $(m-n)$. Los promedios de primer orden como la media o la varianza son independientes del tiempo, y los promedios de segundo orden, como la autocorrelación $\phi_{xx}[n,m]$, dependen de la diferencia de tiempos $(m-n)$. Por tanto, si un proceso es estacionario, podemos escribir

$$m_x = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\}, \tag{A.22}$$

$$\sigma_x^2 = \mathscr{E}\{|(\mathbf{x}_n - m_x)|^2\}, \tag{A.23}$$

ambas independientes de n, y si denominamos m a la diferencia de tiempos tenemos que

$$\phi_{xx}[n+m,n] = \phi_{xx}[m] = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*\}. \tag{A.24}$$

Es decir, la autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario es una secuencia unidimensional, función de la diferencia de tiempos m.

En muchos casos, encontramos procesos aleatorios que no son estacionarios en *sentido estricto* (es decir, sus funciones de probabilidad no son invariantes con el tiempo), pero que cumplen las Ecuaciones (A.22)-(A.24). Estos procesos se denominan *estacionarios en sentido amplio*.

A.2.2. Promedios temporales

En el contexto del tratamiento de señales, la noción de conjunto de señales es un concepto matemático conveniente, que nos permite utilizar la teoría de la probabilidad para representar dichas señales. Sin embargo, en situaciones prácticas, de lo que se dispone siempre es de un número finito de secuencias de longitud finita en lugar de un conjunto infinito de secuencias. Por ejemplo, nuestro interés podría ser inferir la ley de probabilidad o ciertos promedios de la representación mediante procesos aleatorios, a

partir de medidas realizadas sobre un solo miembro del conjunto. Cuando las distribuciones de probabilidad son independientes del tiempo, parece intuitivo que la distribución de amplitud (histograma) de un segmento grande de una secuencia concreta de muestras, debe ser aproximadamente igual a la función densidad de probabilidad que describe cada una de las variables del modelo del proceso aleatorio. Similarmente, el promedio aritmético de un gran número de muestras de una secuencia concreta debe dar un resultado muy cercano a la media del proceso. Para formalizar estos resultados intuitivos, definimos el promedio temporal de un proceso aleatorio como

$$\langle \mathbf{x}_n \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} \mathbf{x}_n. \tag{A.25}$$

De forma similar, la secuencia de autocorrelación temporal se define como

$$\langle \mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^* \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} \mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*. \tag{A.26}$$

Se puede demostrar que los límites anteriores existen si $\{\mathbf{x}_n\}$ es un proceso aleatorio estacionario de media finita. Como se define en las Ecuaciones (A.25) y (A.26), estos promedios temporales son funciones de un conjunto infinito de variables aleatorias y, por tanto, es apropiado verlos también como variables aleatorias. Sin embargo, bajo la condición conocida como *ergodicidad*, los promedios temporales de las Ecuaciones (A.25) y (A.26) son iguales a constantes, en el sentido de que los promedios temporales de casi todas las posibles secuencias muestra son iguales a la misma constante. Además, son iguales al correspondiente promedio de conjunto.[2] Es decir, para cualquier secuencia concreta $\{x[n]\}$ para $-\infty < n < \infty$,

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} x[n] = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\} = m_x \tag{A.27}$$

y

$$\langle x[n+m]x^*[n] \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} x[n+m]x^*[n] = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*\} = \phi_{xx}[m]. \tag{A.28}$$

El operador de promediado temporal $\langle\cdot\rangle$ tiene las mismas propiedades que el operador de promediado de conjunto $\mathscr{E}\{\cdot\}$. Por tanto, generalmente no distinguiremos entre la variable aleatoria $\mathbf{x}_n$ y su valor en una secuencia $x[n]$. Por ejemplo, la expresión $\mathscr{E}\{x[n]\}$ se debe interpretar como $\mathscr{E}\{\mathbf{x}_n\} = \langle x[n] \rangle$. En general, un proceso aleatorio en el que los promedios temporales son iguales a los promedios de conjunto se denomina *proceso ergódico*.

En la práctica, es común suponer que una secuencia dada es una realización de un proceso aleatorio ergódico, de forma que los promedios se puede calcular a partir de esa única secuencia. Por supuesto, no se pueden calcular directamente los límites de las Ecuaciones (A.27) y (A.28) sino las cantidades

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n], \tag{A.29}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |x[n] - \hat{m}_x|^2, \tag{A.30}$$

[2] Una afirmación más precisa es que las variables aleatorias $\langle \mathbf{x}_n \rangle$ y $\langle \mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^* \rangle$ tienen medias iguales a m_x y $\phi_{xx}[m]$, respectivamente, y sus varianzas son cero.

y

$$\langle x[n+m]x^*[n]\rangle_L = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} x[n+m]x^*[n] \tag{A.31}$$

u otras cantidades similares, que se denominan *estimadores* de la media, la varianza y la autocorrelación. $\hat{m}_x$ y $\hat{\sigma}_x^2$ se denominan respectivamente media muestral y varianza muestral. La estimación de promedios de un proceso aleatorio a partir de un segmento finito de datos es un problema de estadística, que consideramos brevemente en el Capítulo 10.

A.3. PROPIEDADES DE LAS SECUENCIAS DE CORRELACIÓN Y COVARIANZA

De las definiciones de las funciones de correlación y de covarianza se pueden deducir de forma simple algunas propiedades útiles, que se presentan en esta sección.

Consideremos dos procesos aleatorios estacionarios $\{\mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{y}_n\}$ cuyas funciones de autocorrelación, autocovarianza, correlación cruzada y covarianza cruzada están dadas, respectivamente por

$$\phi_{xx}[m] = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{x}_n^*\}, \tag{A.32}$$

$$\gamma_{xx}[m] = \mathscr{E}\{(\mathbf{x}_{n+m} - m_x)(\mathbf{x}_n - m_x)^*\}, \tag{A.33}$$

$$\phi_{xy}[m] = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_{n+m}\mathbf{y}_n^*\}, \tag{A.34}$$

$$\gamma_{xy}[m] = \mathscr{E}\{(\mathbf{x}_{n+m} - m_x)(\mathbf{y}_n - m_y)^*\}, \tag{A.35}$$

donde m_x y m_y son las medias de los dos procesos. Las siguientes propiedades se pueden obtener fácilmente a partir de las definiciones:

Propiedad 1

$$\gamma_{xx}[m] = \phi_{xx}[m] - |m_x|^2, \tag{A.36a}$$

$$\gamma_{xy}[m] = \phi_{xy}[m] - m_x m_y^*. \tag{A.36b}$$

Estos resultados se deducen directamente de las Ecuaciones (A.19) y (A.21), e indican que las secuencias de correlación y covarianza son idénticas para procesos de media cero.

Propiedad 2

$$\phi_{xx}[0] = \mathscr{E}[|\mathbf{x}_n|^2] = \text{Valor cuadrático medio}, \tag{A.37a}$$

$$\gamma_{xx}[0] = \sigma_x^2 = \text{Varianza}. \tag{A.37b}$$

Propiedad 3

$$\phi_{xx}[-m] = \phi_{xx}^*[m], \tag{A.38a}$$

$$\gamma_{xx}[-m] = \gamma_{xx}^*[m], \tag{A.38b}$$

$$\phi_{xy}[-m] = \phi_{yx}^*[m], \tag{A.38c}$$

$$\gamma_{xy}[-m] = \gamma_{yx}^*[m]. \tag{A.38d}$$

Propiedad 4

$$|\phi_{xy}[m]|^2 \leq \phi_{xx}[0]\phi_{yy}[0], \tag{A.39a}$$

$$|\gamma_{xy}[m]|^2 \leq \gamma_{xx}[0]\gamma_{yy}[0]. \tag{A.39b}$$

En particular,

$$|\phi_{xx}[m]| \leq \phi_{xx}[0], \tag{A.40a}$$

$$|\gamma_{xx}[m]| \leq \gamma_{xx}[0]. \tag{A.40b}$$

Propiedad 5. Si $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_{n-n_0}$, entonces

$$\phi_{yy}[m] = \phi_{xx}[m], \tag{A.41a}$$

$$\gamma_{yy}[m] = \gamma_{xx}[m]. \tag{A.41b}$$

Propiedad 6. En muchos procesos aleatorios, las variables aleatorias se van haciendo incorreladas a medida que aumenta la separación temporal. Si esto es cierto,

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_{xx}[m] = 0, \tag{A.42a}$$

$$\lim_{m\to\infty} \phi_{xx}[m] = |m_x|^2, \tag{A.42b}$$

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_{xy}[m] = 0, \tag{A.42c}$$

$$\lim_{m\to\infty} \phi_{xy}[m] = m_x m_y^*. \tag{A.42d}$$

La esencia de estos resultados es que la correlación y la covarianza son secuencias de energía finita que tienden a hacerse cero para valores altos de m. Por tanto, a menudo es posible representar esas secuencias en función de sus transformadas de Fourier o sus transformadas Z.

A.4. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES ALEATORIAS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Aunque la transformada de Fourier de una señal aleatoria no existe sino en un sentido generalizado, las secuencias de autocorrelación y de autocovarianza de una señal aleatoria son secuencias aperiódicas para las que sí existe la transformada de Fourier. La representación espectral de las funciones de correlación tiene un importante papel al describir las relaciones entrada–salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo, cuando la entrada es una señal aleatoria. Por lo tanto, es de interés considerar las propiedades de las secuencias de correlación y covarianza y de sus correspondientes transformadas de Fourier.

Definamos $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{xy}(e^{j\omega})$ y $\Gamma_{xy}(e^{j\omega})$ como las transformadas de Fourier de $\phi_{xx}[m]$, $\gamma_{xx}[m]$, $\phi_{xy}[m]$ y $\gamma_{xy}[m]$, respectivamente. Como todas esas funciones son transformadas de Fourier en tiempo discreto de secuencias, deben ser periódicas de periodo 2π. Utilizando las Ecuaciones (A.36a) y (A.36b) se deduce que en un periodo $|\omega| \leq \pi$,

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) + 2\pi|m_x|^2\delta(\omega), \qquad |\omega| \leq \pi, \tag{A.43a}$$

y

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega}) + 2\pi m_x m_y^* \delta(\omega), \qquad |\omega| \leq \pi. \tag{A.43b}$$

En el caso de procesos de media cero ($m_x = 0$ y $m_y = 0$), las funciones de correlación y covarianza son idénticas, de forma que $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega})$ y $\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega})$.

De la ecuación de la transformada inversa de Fourier se deduce que

$$\gamma_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega, \tag{A.44a}$$

$$\phi_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega, \tag{A.44b}$$

y, por tanto,

$$\mathscr{E}\{|x[n]|^2\} = \phi_{xx}[0] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega, \tag{A.45a}$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \tag{A.45b}$$

Algunas veces es conveniente, por motivos de notación, definir

$$P_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(e^{j\omega}), \tag{A.46}$$

en cuyo caso las Ecuaciones (A.45a) y (A.45b) se expresan como

$$\mathscr{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega, \tag{A.47a}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega. \tag{A.47b}$$

Por tanto, el área encerrada por $P_{xx}(\omega)$ en $-\pi \leq \omega \leq \pi$ es proporcional a la potencia media de la señal. De hecho, como comentamos en la Sección 2.10, la integral de $P_{xx}(\omega)$ en una banda de frecuencias es proporcional a la potencia de la señal en esa banda. Por esta razón, la función $P_{xx}(\omega)$ se denomina *densidad espectral de potencia*, o simplemente *espectro de potencia*. Cuando $P_{xx}(\omega)$ es una constante independiente de ω, el proceso aleatorio se denomina proceso de ruido blanco, o simplemente, ruido blanco. Cuando $P_{xx}(\omega)$ es constante en una banda y cero en el resto, se denomina ruido blanco de banda limitada.

De la Ecuación (A.38a) se deduce que $P_{xx}(\omega) = P_{xx}^*(\omega)$; es decir, $P_{xx}(\omega)$ es siempre real. Además, para procesos aleatorios reales, $\phi_{xx}[m] = \phi_{xx}[-m]$, por lo que en el caso real, $P_{xx}(\omega)$ es real y par. Es decir,

$$P_{xx}(\omega) = P_{xx}(-\omega). \tag{A.48}$$

Una propiedad adicional importante es que la densidad espectral de potencia es no negativa, es decir, $P_{xx}(\omega) \geq 0$ para todo ω. Este punto se comenta en la Sección 2.10.

La *densidad espectral de potencia cruzada* se define como

$$P_{xy}(\omega) = \Phi_{xy}(e^{j\omega}). \tag{A.49}$$

Esta función es generalmente compleja, y de la Ecuación (A.38c) se deduce que

$$P_{xy}(\omega) = P^*_{yx}(\omega). \tag{A.50}$$

Finalmente, como se demuestra en la Sección 2.10, si $x[n]$ es una señal aleatoria de entrada a un sistema en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, y si $y[n]$ es la correspondiente salida, entonces

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) \tag{A.51}$$

y

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \tag{A.52}$$

Ejemplo A.1 Potencia de ruido de salida de un filtro paso bajo

Supongamos que $x[n]$ es una secuencia de ruido blanco de media cero con $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$ y espectro de potencia $\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2$ para $|\omega| \leq \pi$. Supongamos además que $x[n]$ es la entrada de un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte ω_c. Entonces, de la Ecuación (A.51), se deduce que la salida $y[n]$ será un proceso de ruido blanco de banda limitada cuyo espectro de potencia será

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sigma_x^2, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \tag{A.53}$$

Utilizando la transformada inversa de Fourier obtenemos la secuencia de autocorrelación

$$\phi_{yy}[m] = \frac{\operatorname{sen}(\omega_c m)}{\pi m}\sigma_x^2. \tag{A.54}$$

Utilizando ahora la ecuación (A.45a), podemos obtener la potencia media de la salida,

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sigma_x^2 d\omega = \sigma_x^2 \frac{\omega_c}{\pi}. \tag{A.55}$$

A.5. USO DE LA TRANSFORMADA Z EN CÁLCULOS DE POTENCIA MEDIA

Para realizar cálculos de potencia media utilizando la Ecuación (A.45a), debemos evaluar una integral del espectro de potencia como se hace en el Ejemplo A.1. Aunque la integral en ese ejemplo era fácil de calcular, esas integrales en general son difíciles de resolver considerándolas como integrales reales. Sin embargo, existe un resultado basado en la transformada Z que hace que el cálculo de la potencia media de salida sea directo en el caso importante de los sistemas con función de transferencia racional.

En general, la transformada Z se puede utilizar para representar la función de covarianza pero no una función de autocorrelación. Esto es porque cuando una señal tiene un valor medio distinto de cero, su función de correlación contendrá una componente aditiva constante que no tiene representación en el dominio de la transformada Z. Sin embargo, cuando el valor medio es cero, las funciones de covarianza y de correlación son, por supuesto, iguales. Si la transformada Z de $\gamma_{xx}[m]$ existe entonces, como $\gamma_{xx}[-m] = \gamma^*_{xx}[m]$ se deduce que, en general,

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma^*_{xx}(1/z^*). \tag{A.56}$$

Además, como $\gamma_{xx}[m]$ es bilateral y simétrica conjugada, se deduce que la región de convergencia de $\Gamma_{xx}(z)$ debe ser de la forma

$$r_a < |z| < \frac{1}{r_a}$$

donde necesariamente $0 < r_a < 1$. En el caso importante de que $\Gamma_{xx}(z)$ sea una función racional de z, la Ecuación (A.56) implica que los polos y los ceros de $\Gamma_{xx}(z)$ deben aparecer en parejas inversas conjugadas.

La principal ventaja de la representación basada en la transformada Z es que cuando $\Gamma_{xx}(z)$ es una función racional, la potencia media de la señal aleatoria se puede calcular utilizando la relación

$$\mathscr{E}\{|x[n]-m_x|^2\} = \sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \left\{ \begin{array}{c} \text{Transformada } Z \text{ inversa de} \\ \Gamma_{xx}(z), \\ \text{evaluada en } m=0 \end{array} \right. . \tag{A.57}$$

Es directo evaluar el miembro derecho de esta ecuación utilizando un método basado en la observación de que cuando $\Gamma_{xx}(z)$ es una función racional de z, $\gamma_{xx}[m]$ se puede calcular para todo m empleando una descomposición en fracciones simples. Entonces, para obtener la potencia media, podemos evaluar simplemente $\gamma_{xx}[m]$ en $m = 0$.

La transformada Z es también útil para determinar la autocovarianza y la potencia media de la salida de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuando la entrada es una señal aleatoria. Generalizando la Ecuación (A.51) se llega a

$$\Gamma_{yy}(z) = H(z)H^*(1/z^*)\Gamma_{xx}(z), \tag{A.58}$$

y a partir de las propiedades de la transformada Z y de la Ecuación (A.58), se sigue que la autocovarianza de la salida es la convolución

$$\gamma_{yy}[m] = h[m] * h^*[-m] * \gamma_{xx}[m]. \tag{A.59}$$

Este resultado es particularmente útil en el análisis del ruido de cuantificación, donde es necesario calcular la potencia media de salida cuando la entrada a una ecuación en diferencias lineal es una señal de ruido blanco de media cero con potencia media σ_x^2. Como la autocovarianza de una entrada como esa es $\gamma_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m]$, se deduce que la autocovarianza de la salida es $\gamma_{yy}[m] = \sigma_x^2(h[m] * h^*[-m])$. Es decir, la covarianza de la salida es proporcional a la autocorrelación determinista de la respuesta al impulso del sistema lineal e invariante con el tiempo. De este resultado se sigue que

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2. \tag{A.60}$$

Como una alternativa a calcular la suma de cuadrados de la secuencia respuesta al impulso, que puede ser bastante difícil para sistemas IIR, podemos aplicar el método sugerido por la Ecuación (A.57) para obtener $\mathscr{E}\{\dagger^{\in}[\backslash]\}$ a partir de la descomposición en fracciones simples de $\Gamma_{yy}(z)$. Recordamos que para una entrada de ruido blanco con $\gamma_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m]$, la transformada Z es $\Gamma_{xx}(z) = \sigma_x^2$, por lo que $\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 H(z)H^*(1/z^*)$. Por tanto, aplicando la Ecuación (A.57) a la salida del sistema resulta

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \gamma_{yy}[0] = \left\{ \begin{array}{c} \text{Transformada } Z \text{ inversa de} \\ \Gamma_{yy}(z) = H(z)H^*(1/z^*)\sigma_x^2, \\ \text{evaluada en } m=0 \end{array} \right. . \tag{A.61}$$

Consideremos ahora el caso especial de un sistema causal y estable con una función de transferencia racional de la forma

$$H(z) = A\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \qquad |z| > \max_k\{|d_k|\}, \tag{A.62}$$

donde $\max_k\{|d_k|\} < 1$ y $M < N$. Una función de transferencia como esa podría describir la relación entre una fuente de ruido de redondeo interno y la salida de un sistema realizado con aritmética de coma fija. Al sustituir la Ecuación (A.62) de $H(z)$ en la Ecuación (A.58) resulta

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 H(z)H^*(1/z^*) = \sigma_x^2|A|^2\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})(1-c_m^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z)}. \tag{A.63}$$

Como hemos supuesto que $|d_k| < 1$ para todo k, todos los polos originales están en el interior de la circunferencia unidad y por tanto los otros polos en $(d_k^*)^{-1}$ están en posiciones inversas conjugadas en el exterior de la circunferencia unidad. La región de convergencia de $\Gamma_{yy}(z)$ es por tanto $\max_k |d_k| < |z| < \min_k |(d_k^*)^{-1}|$. Para esas funciones racionales, se puede demostrar que como $M < N$, la descomposición en fracciones simples tiene la forma

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}} - \frac{A_k^*}{1-(d_k^*)^{-1}z^{-1}}\right)\right), \tag{A.64}$$

donde los coeficientes se calculan como

$$A_k = H(z)H^*(1/z^*)(1-d_k z^{-1})\big|_{z=d_k}. \tag{A.65}$$

Como los polos en $z = d_k$ están dentro de la frontera interna de la región de convergencia, cada uno de ellos corresponde a una secuencia limitada por la izquierda, mientras que los polos en $z = (d_k^*)^{-1}$ corresponden a secuencias limitadas por la derecha. Por tanto, la función de autocovarianza correspondiente a la Ecuación (A.64) es

$$\gamma_{yy}[n] = \sigma_x^2\sum_{k=1}^{N}(A_k(d_k)^n u[n] + A_k^*(d_k^*)^{-n}u[-n-1]),$$

de donde se deduce que la potencia media se puede obtener como

$$\sigma_y^2 = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2\left(\sum_{k=1}^{N}A_k\right), \tag{A.66}$$

con las cantidades A_k dadas por la Ecuación (A.65).

Por tanto, el cálculo de la potencia media total de la salida de un sistema con función de transferencia racional y con entrada de ruido blanco se reduce al problema de obtener los coeficientes de la descomposición en fracciones simples de la transformada Z de la función de autocorrelación de salida. La utilidad de este planteamiento se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.2 Potencia de ruido de salida de un filtro IIR de segundo orden

Consideremos un sistema con respuesta al impulso

$$h[n] = \frac{r^n \operatorname{sen}\theta(n+1)}{\sin\theta} u[n] \tag{A.67}$$

y función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}. \tag{A.68}$$

Cuando la entrada es ruido blanco con potencia total σ_x^2, la transformada Z de la función de autocovarianza de la salida es

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2 \left(\frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}\right)\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z)(1-re^{j\theta}z)}\right) \tag{A.69}$$

de donde obtenemos, utilizando la Ecuación (A.65),

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2 \Bigg[&\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z^{-1})}\right)\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z)(1-re^{j\theta}z)}\right)\Bigg|_{z=re^{j\theta}} \\ &+ \left(\frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})}\right)\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z)(1-re^{j\theta}z)}\right)\Bigg|_{z=re^{-j\theta}}\Bigg].\end{aligned} \tag{A.70}$$

Realizando las sustituciones indicadas, poniendo en denominador común ambos términos y realizando algo de álgebra llegamos a

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\left(\frac{1}{1-2r^2\cos(2\theta)+r^4}\right). \tag{A.71}$$

Por tanto, utilizando la descomposición en fracciones simples de $\Gamma_{yy}(z)$, hemos evaluado efectivamente la expresión

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{r^n \operatorname{sen}\theta(n+1)}{\operatorname{sen}\theta}\right|^2,$$

que sería difícil de sumar en forma cerrada, y la expresión

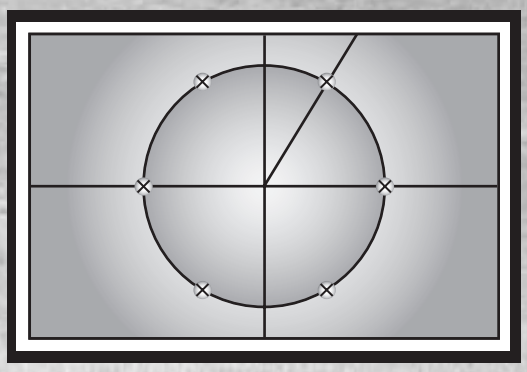
$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_x^2 |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega})|^2},$$

que sería difícil de evaluar como una integral sobre la variable real ω.

El resultado del Ejemplo A.2 es una ilustración de la potencia del método de descomposición en fracciones simples para evaluar fórmulas de potencia media. En el Capítulo 6, hacemos uso de esta técnica en el análisis de los efectos de la cuantificación en la realización de filtros digitales.

B

Filtros en tiempo continuo



Las técnicas presentadas en el Capítulo 7 para el diseño de filtros digitales IIR se basan en la disponibilidad de diseño de filtros en tiempo continuo apropiados. En este apéndice, resumiremos brevemente las características de algunas clases de aproximaciones de filtros paso bajo que mencionamos en dicho Capítulo 7. En Guillemin (1957), Weinberg (1975), y Parks y Burrus (1987) se pueden encontrar presentaciones más detalladas sobre estas clases de filtros. Zevrev (1967) contiene una extensa colección de fórmulas y tablas de diseño, y existen programas para el diseño de aproximaciones en tiempo continuo y transformaciones de filtros digitales en MATLAB, Simulink y LabVIEW.

B.1. FILTROS PASO BAJO DE BUTTERWORTH

Los filtros paso bajo de Butterworth se definen por la propiedad de que la respuesta en amplitud es maximalmente plana en la banda de paso. Para un filtro paso bajo de orden N, esto significa que las primeras $(2N-1)$ derivadas del módulo de la respuesta en frecuencia valen cero en $\Omega = 0$. Otra propiedad es que el módulo de la respuesta en frecuencia es monótono en la banda de paso y en la banda eliminada. El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo de Butterworth en tiempo continuo es de la forma

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(j\Omega/j\Omega_c)^{2N}}. \tag{B.1}$$

Esta función se muestra en la Figura B.1.

A medida que aumenta el parámetro N en la Ecuación (B.1), la característica del filtro se va haciendo más abrupta. Es decir, permanece cercana a la unidad en una porción mayor de la banda de paso y desciende a cero más rápidamente en la banda eliminada, aunque la función del módulo al cuadrado en la frecuencia de corte Ω_c siempre vale un medio, debido a la naturaleza de la Ecuación (B.1). La Figura B.2 muestra $|H_c(j\Omega)|$ para varios valores de N, e ilustra la dependencia del módulo de un filtro de Butterworth con el parámetro N.

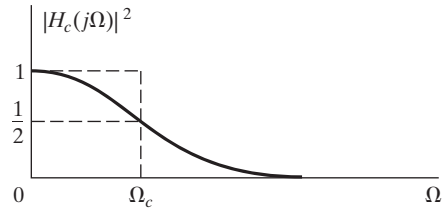


Figura B.1 Módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de un filtro de Butterworth en tiempo continuo.

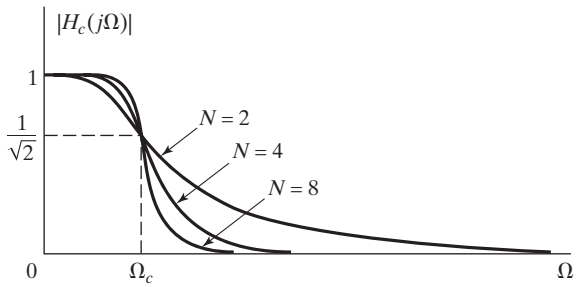


Figura B.2 Dependencia del módulo de un filtro de Butterworth con el orden N.

Observando el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de la ecuación (B.1) podemos ver, sustituyendo $j\Omega = s$ que $H_c(s)H_c(-s)$ debe ser de la forma

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}}. \tag{B.2}$$

Las raíces del polinomio del denominador (los polos del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia) están por tanto localizados en los valores de s que satisfacen la ecuación $1+(s/j\Omega_c)^{2N} = 0$. Es decir,

$$s_k = (-1)^{1/2N}(j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{B.3}$$

Por tanto, hay $2N$ polos equiespaciados angularmente en una circunferencia de radio Ω_c en el plano s. Los polos están localizados simétricamente con respecto al eje imaginario. Un polo nunca podrá estar situado sobre el eje imaginario, y habrá uno en el eje real si N es impar, pero ninguno si N es par. La separación angular entre los polos de la circunferencia es de π/N radianes. Por ejemplo, para $N = 3$, los polos están separados $\pi/3$ radianes o 60 grados, como indica la Figura B.3. Para determinar la función de transferencia que se asocia con la función módulo al cuadrado de Butterworth, debemos realizar la factorización $H_c(s)H_c(-s)$. Los polos del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia aparecen siempre en parejas. Es decir, si hay un polo en $s = s_k$, hay otro polo en $s = -s_k$. Por tanto, para construir $H_c(s)$ a partir de la función módulo al cuadrado, debemos escoger un polo de cada una de las parejas. Para obtener un filtro causal y estable, debemos escoger los polos que estén en el semiplano izquierdo del plano s.

De esta forma, $H_c(s)$ será

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s-\Omega_c e^{j2\pi/3})(s-\Omega_c e^{-j2\pi/3})},$$

que se puede expresar como

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c s + \Omega_c^3}.$$

En general, el numerador de $H_c(s)$ será Ω_c^N para asegurar que $|H_c(0) = 1$.

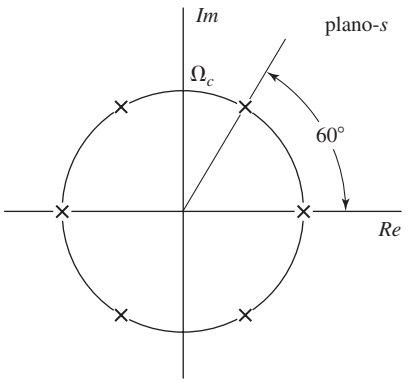


Figura B.3 Posiciones en el plano s de los polos de la función módulo al cuadrado de un filtro de Butterworth de tercer orden.

B.2. FILTROS DE CHEBYSHEV

En los filtros de Butterworth, el módulo de la respuesta en frecuencia es monótono en la banda de paso y en la banda eliminada. Por tanto, si el filtro se especifica en términos de máximo error de aproximación en la banda de paso y en la banda eliminada, las especificaciones se cumplirán con exceso hacia la parte de bajas frecuencias en la banda de paso y por encima de la frecuencia de corte de la banda eliminada. Un planteamiento más eficiente, que produce generalmente filtros de orden inferior, es distribuir la exactitud de la aproximación uniformemente en la banda de paso, en la banda eliminada o en ambas. Esto se puede conseguir escogiendo una aproximación que tenga un comportamiento de rizado constante en vez de un comportamiento monótono. La clase de filtros de Chebyshev tiene la propiedad de que el módulo de la respuesta en frecuencia o bien tiene rizado constante en la banda de paso y es monótona en la banda eliminada (que se denomina filtro de Chebyshev de tipo I) o es monótona en la banda de paso y tiene rizado constante en la banda eliminada (que se denomina filtro de Chebyshev de tipo II). La Figura B.4 muestra la respuesta en frecuencia de un filtro de Chebyshev de tipo I. El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de este filtro tiene la forma

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}, \tag{B.4}$$

donde $V_N(x)$ es el polinomio de Chebyshev de orden N definido como

$$V_N(x) = \cos(N\cos^{-1}x). \tag{B.5}$$

Por ejemplo, para $N=0, V_0(x)=1$; para $N=1, V_1(x)=\cos(\cos^{-1}x)=x$; para $N=2, V_2(x)=\cos(2\cos^{-1}x)=2x^2-1$, etc.

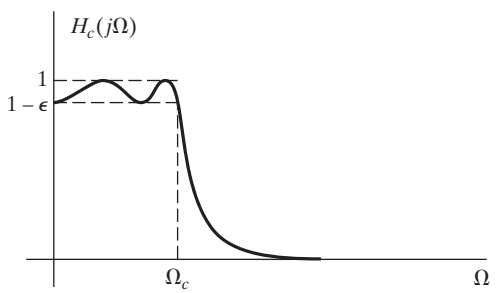


Figura B.4 Aproximación a un filtro paso bajo mediante un filtro de Chebyshev de tipo I.

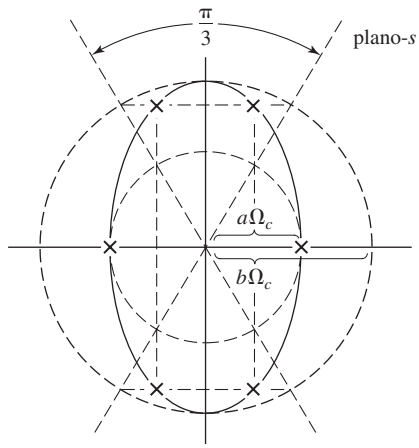


Figura B.5 Localización de los polos de la función módulo al cuadrado de un filtro paso bajo de Chebyshev de tipo I de tercer orden.

A partir de la Ecuación (B.5), que define los polinomios de Chebyshev, es inmediato obtener una fórmula de recurrencia para obtener $V_{N+1}(x)$ en función de $V_N(x)$ y $V_{N-1}(x)$. Aplicando igualdades trigonométricas a la Ecuación (B.5), se deduce que

$$V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N-1}(x). \tag{B.6}$$

Observando la Ecuación (B.5), advertimos que $V_N^2(x)$ varía entre cero y la unidad para $0 < x < 1$. Para $x > 1$, $\cos^{-1} x$ es imaginario, por lo que $V_N(x)$ se comporta como un coseno hiperbólico y, en consecuencia, crece monótonamente. Considerando la Ecuación (B.4), vemos que $|H_c(j\Omega)|^2$ presenta un rizado entre 1 y $1/(1+\varepsilon^2)$ para $0 \leq \Omega/\Omega_c \leq 1$ y decrece monótonamente para $\Omega/\Omega_c > 1$. Para especificar el filtro son necesarios tres parámetros: ε, Ω_c y N. En un diseño típico, ε queda especificado por el rizado admisible en la banda de paso y Ω_c queda especificada por la frecuencia de corte de la banda de paso. El orden N se escoge entonces de forma que se cumplan las especificaciones de la banda eliminada.

Los polos de un filtro de Chebyshev están en una elipse en el plano s. Como se muestra en la Figura B.5, la elipse queda definida por dos circunferencias cuyos diámetros coinciden con el eje mayor y el menor de la elipse. La longitud del eje menor es $2a\Omega_c$, donde

$$a = \tfrac{1}{2}(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}) \tag{B.7}$$

con

$$\alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1+\varepsilon^{-2}}. \tag{B.8}$$

La longitud del eje mayor es $2b\Omega_c$, donde

$$b = \tfrac{1}{2}(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}). \tag{B.9}$$

Para situar los polos del filtro de Chebyshev en la elipse, identificamos primero los puntos de las circunferencias mayor y menor que están equiespaciados en ángulo con una separación de π/N de forma que los puntos estén situados simétricamente con respecto al eje imaginario, que no haya puntos en el eje imaginario y que aparezca un punto en el eje real para N impar, pero no para N par. Esta división de las circunferencias mayor y menor corresponde exactamente a la manera en la que se divide la circunferencia al localizar los polos del filtro de Butterworth en la Ecuación (B.3). Los polos del filtro de Chebyshev están situados en la elipse, con su ordenada especificada por los puntos identificados en la

circunferencia mayor y la abscisa especificada por los puntos identificados en la circunferencia menor. En la Figura B.5 se muestran los polos para $N = 3$.

Un filtro paso bajo de Chebyshev de tipo II se puede relacionar con un filtro de tipo I mediante una transformación. Concretamente, si en la Ecuación (B.4) sustituimos el término $\varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)$ por su recíproco y sustituimos también el argumento de V_N^2 por su recíproco, obtenemos

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 V_N^2(\Omega_c/\Omega)]^{-1}}. \tag{B.10}$$

que es la forma analítica del filtro paso bajo de Chebyshev de tipo II. Una forma de diseñar un filtro de Chebyshev de tipo II es diseñar primero un filtro de tipo I y aplicar después la transformación de la Ecuación (B.10).

B.3. FILTROS ELÍPTICOS

Si distribuimos uniformemente el error en toda la banda de paso o en toda la banda eliminada, como en los casos de Chebyshev, podemos cumplir las especificaciones de diseño con un filtro de orden inferior que si permitimos un error monótonamente creciente en la banda de paso, como en el caso de Butterworth. En las aproximaciones de Chebyshev de tipo I y de Buterworth, el error de la banda eliminada decrece monótonamente con la frecuencia, lo que abre la posibilidad de mejoras adicionales si distribuimos el error en la banda eliminada uniformemente. Esto sugiere la aproximación a un filtro paso bajo como el de la Figura B.6. De hecho, se puede demostrar (Papoulis, 1957) que este tipo de aproximación (de rizado constante en la banda de paso y en la banda eliminada), es la mejor que se puede conseguir dado un orden del filtro N, en el sentido de que dados los valores de Ω_p, δ_1 y δ_2, la banda de transición $(\Omega_s - \Omega_p)$ es lo más pequeña posible.

Esta clase de aproximaciones, denominadas filtros elípticos, tienen la forma

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega)}, \tag{B.11}$$

donde $U_N(\Omega)$ es la función elíptica Jacobiana. Para obtener un error con rizado constante tanto en la banda de paso como en la banda eliminada, los filtros elípticos deben tener polos y ceros. Como se puede ver en la Figura B.6, un filtro de este tipo tiene ceros en el eje $j\Omega$ del plano s. Una presentación del diseño de filtros elípticos, incluso a nivel superficial está fuera del alcance de este apéndice. Referimos al lector a los textos de Guillemin (1957), Storer (1957), Gold y Rader (1969) y Parks y Burrus (1987), donde se pueden encontrar presentaciones más detalladas.

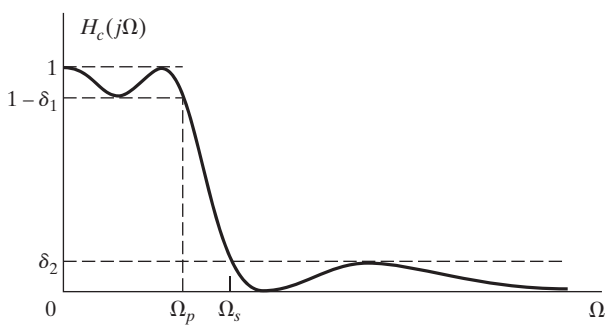


Figura B.6 Aproximación de rizado constante en la banda de paso y en la banda eliminada.

C

Respuestas a problemas básicos seleccionados

Este apéndice contiene las respuestas de los primeros 20 problemas básicos de los Capítulos 2 al 10.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 2

2.1. **(a)** Siempre (2), (3), (5). Si $g[n]$ está acotada, (1).

(b) (3).

(c) Siempre (1), (3), (4). Si $n_0 = 0$, (2) y (5).

(d) Siempre (1), (3), (4). Si $n_0 = 0$, (5). Si $n_0 \geq 0$, (2).

(e) (1), (2), (4), (5).

(f) Siempre (1), (2), (4), (5). Si $b = 0$, (3).

(g) (1), (3).

(h) (1), (5).

2.2. **(a)** $N_4 = N_0 + N_2$, $N_5 = N_1 + N_3$.

(b) Como mucho $N + M - 1$ puntos distintos de cero.

2.3.

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{a^{-n}}{1-a}, & n < 0, \\ \dfrac{1}{1-a}, & n \geq 0. \end{cases}$$

2.4. $y[n] = 8[(1/2)^n - (1/4)^n]u[n]$.

2.5. **(a)** $y_h[n] = A_1(2)^n + A_2(3)^n$.

(b) $h[n] = 2(3^n - 2^n)u[n]$.

(c) $s[n] = [-8(2)^{(n-1)} + 9(3)^{(n-1)} + 1]u[n]$.

2.6. **(a)**

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(b) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$.

2.7. **(a)** Periódica, $N = 12$.

(b) Periódica, $N = 8$.

(c) No periódica.

(d) No periódica.

2.8. $y[n] = 3(-1/2)^n u[n] + 2(1/3)^n u[n]$.

2.9. **(a)**

$$h[n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n],$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}},$$

$$s[n] = \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right]u[n].$$

(b) $y_h[n] = A_1(1/2)^n + A_2(1/3)^n$.

(c) $y[n] = 4(1/2)^n - 3(1/3)^n - 2(1/2)^n u[-n-1] + 2(1/3)^n u[-n-1]$. Son posibles otras respuestas.

2.10. **(a)**

$$y[n] = \begin{cases} a^{-1}/(1 - a^{-1}), & n \geq -1, \\ a^n/(1 - a^{-1}), & n \leq -2. \end{cases}$$

(b)

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 3, \\ 2^{(n-3)}, & n \leq 2. \end{cases}$$

(c)

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 2^n, & n \leq -1. \end{cases}$$

(d)

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n \geq 9, \\ 1 - 2^{(n-9)}, & 8 \geq n \geq -1, \\ 2^{(n+1)} - 2^{(n-9)}, & -2 \geq n. \end{cases}$$

2.11. $y[n] = 2\sqrt{2}\,\text{sen}(\pi(n+1)/4)$.

2.12. **(a)** $y[n] = n!u[n]$.

(b) El sistema es lineal.

(c) El sistema no es invariante con el tiempo.

2.13. **(a)**, **(b)** y **(e)** son autofunciones de sistema lineales e invariantes con el tiempo.

2.14. **(a)** (iv).

(b) (i).

(c) (iii), $h[n] = (1/2)^n u[n]$.

2.15. **(a)** No lineal e invariante con el tiempo. Las entradas $\delta[n]$ y $\delta[n-1]$ violan la invarianza temporal.

(b) No causal. Considere $x[n] = \delta[n-1]$.

(c) Estable.

2.16. **(a)** $y_h[n] = A_1(1/2)^n + A_2(-1/4)^n$.

(b) Causal: $h_c[n] = 2(1/2)^n u[n] + (-1/4)^n u[n]$.
Anticausal: $h_{ac}[n] = -2(1/2)^n u[-n-1] - (-1/4)^n u[-n-1]$.

(c) $h_c[n]$ es absolutamente sumable, $h_{ac}[n]$ no lo es.

(d) $y_p[n] = (1/3)(-1/4)^n u[n] + (2/3)(1/2)^n u[n] + 4(n+1)(1/2)^{(n+1)} u[n+1]$.

2.17. **(a)**

$$R(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \frac{\text{sen}\left(\omega\left(\frac{M+1}{2}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

(b) $W(e^{j\omega}) = (1/2)R(e^{j\omega}) - (1/4)R(e^{j(\omega-2\pi/M)}) - (1/4)R(e^{j(\omega+2\pi/M)})$.

2.18. Los sistemas (a) y (b) son causales.

2.19. Los sistemas (b), (c), (e) y (f) son estables.

2.20. **(a)** $h[n] = (-1/a)^{n-1} u[n-1]$.

(b) El sistema será estable para $|a| > 1$.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 3

3.1. **(a)** $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$

(b) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$

(c) $\dfrac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}.$

(d) $1, \quad$ para todo z.

(e) $z^{-1}, \quad z \neq 0.$

(f) $z, \quad |z| < \infty.$

(g) $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10} z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| \neq 0.$

3.2. $X(z) = \dfrac{(1-z^{-N})^2}{(1-z^{-1})^2}.$

3.3. **(a)** $X_a(z) = \dfrac{z^{-1}(\alpha-\alpha^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha^{-1}z^{-1})}, \quad$ RDC: $|\alpha| < |z| < |\alpha^{-1}|.$

(b) $X_b(z) = \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \quad$ RDC: $z \neq 0.$

(c) $X_c(z) = \dfrac{(1-z^{-N})^2}{(1-z^{-1})^2}, \quad$ RDC: $z \neq 0.$

3.4. **(a)** $(1/3) < |z| < 2$, bilateral.

(b) Dos secuencias $(1/3) < |z| < 2$ y $2 < |z| < 3$.

(c) No. La secuencia causal tiene $|z| > 3$, que no incluye a la circunferencia unidad.

3.5. $x[n] = 2\delta[n+1] + 5\delta[n] - 4\delta[n-1] - 3\delta[n-2].$

3.6. **(a)** $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, existe la transformada de Fourier.

(b) $x[n] = -(-\frac{1}{2})^n u[-n-1]$, existe la transformada de Fourier.

(c) $x[n] = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, existe la transformada de Fourier.

(d) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Existe la transformada de Fourier.

(e) $x[n] = -(a^{-(n+1)})u[n] + a^{-(n-1)}u[n-1]$. Existe la transformada de Fourier si $|a| > 1$.

3.7. **(a)** $H(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad |z| > 1.$

(b) RDC$\{Y(z)\} = |z| > 1$.

(c) $y[n] = \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right] u[n]$.

3.8. **(a)** $h[n] = \left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$.

(b) $y[n] = \frac{8}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] - \frac{8}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.

(c) El sistema es estable.

3.9. **(a)** $|z| > (1/2)$.

(b) Sí. La region de convergencia incluye a la circunferencia unidad.

(c) $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$, RDC: $|z| < 2$.

(d) $h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.

3.10. **(a)** $|z| > \frac{3}{4}$.

(b) $0 < |z| < \infty$.

(c) $|z| < 2$.

(d) $|z| > 1$.

(e) $|z| < \infty$.

(f) $\frac{1}{2} < |z| < \sqrt{13}$.

3.11. **(a)** Causal.

(b) No causal.

(c) Causal.

(d) No causal.

3.12. **(a)**

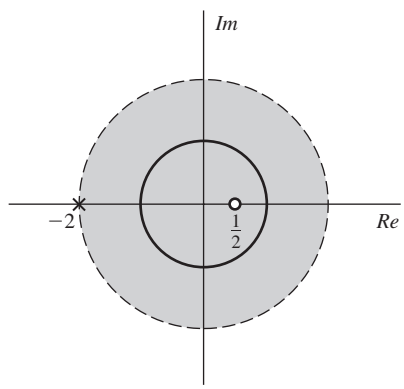


Figura 3.12 (a)

(b)

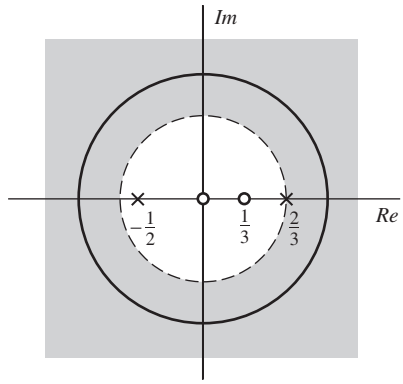


Figura 3.12 (b)

(c)

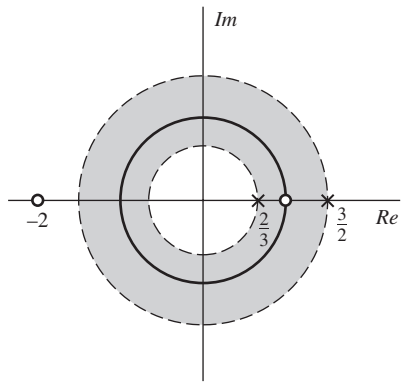


Figura 3.12 (c)

3.13. $g[11] = -\dfrac{1}{11!} + \dfrac{3}{9!} - \dfrac{2}{7!}$.

3.14. $A_1 = A_2 = 1/2, \quad \alpha_1 = -1/2, \quad \alpha_2 = 1/2.$

3.15. $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$. El sistema es causal.

3.16. **(a)** $H(z) = \dfrac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{2}{3}$.

(b) $h[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)} u[n-1]$.

(c) $y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$.

(d) El sistema es estable y causal.

3.17. $h[0]$ puede ser 0, $1/3$ o 1. Para ser estrictos, $h[0]$ puede ser también $2/3$, debido a la respuesta al impulso $h[n] = (2/3)(2)^n u[n] - (1/3)(1/2)^n u[-n-1]$, que satisface la ecuación en diferencias pero no tiene región de convergencia. Este sistema no causal sin región de convergencia se puede realizar como la combinación en paralelo de sus componentes causal y anticausal.

3.18. **(a)** $h[n] = -2\delta[n] + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{8}{3}u[n]$.

(b) $y[n] = \dfrac{18}{5}2^n$.

3.19. **(a)** $|z| > 1/2$.
(b) $1/3 < |z| < 2$.
(c) $|z| > 1/3$.

3.20. **(a)** $|z| > 2/3$.

(b) $|z| > 1/6$.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 4

4.1. $x[n] = \text{sen}(\pi n/2)$.

4.2. $\Omega_0 = 250\pi, 1750\pi$.

4.3. **(a)** $T = 1/12{,}000$. **(b)** No único. $T = 5/12.000$.

4.4. **(a)** $T = 1/100$. **(b)** No único. $T = 11/100$.

4.5. **(a)** $T \leq 1/10{,}000$. **(b)** 625 Hz. **(c)** 1250 Hz.

4.6. **(a)** $H_c(j\Omega) = 1/(a + j\Omega)$.

(b) $H_d(e^{j\omega}) = T/(1 - e^{-aT}e^{-j\omega})$.

(c) $|H_d(e^{j\omega})| = T/(1 + e^{-\alpha T})$.

4.7. **(a)**

$$X_c(j\Omega) = S_c(j\Omega)(1 + \alpha e^{-j\Omega\tau_d}),$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left(\frac{1}{T}\right) S_c\left(\frac{j\omega}{T}\right)\left(1 + \alpha e^{-j\omega\tau_d/T}\right) \qquad \text{for } |\omega| \leq \pi.$$

(b) $H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\omega\tau_d/T}$.

(c) (i) $h[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n-1]$.

(ii) $h[n] = \delta[n] + \alpha\frac{\text{sen}(\pi(n-1/2))}{\pi(n-1/2)}$.

4.8. **(a)** $T \leq 1/20.000$.

(b) $h[n] = Tu[n]$.

(c) $TX\left(e^{j\omega}\right)|_{\omega=0}$.

(d) $T \leq 1/10.000$.

4.9. **(a)** $X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right) = X\left(e^{j(\omega+\pi-\pi)}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)$.

(b) $x[3] = 0$.

(c) $x[n] = \begin{cases} y[n/2], & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$

4.10. **(a)** $x[n] = \cos(2\pi n/3)$.

(b) $x[n] = -\text{sen}(2\pi n/3)$.

(c) $x[n] = \text{sen}(2\pi n/5)/(\pi n/5000)$.

4.11. **(a)** $T = 1/40, T = 9/40$.

(b) $T = 1/20$, único.

4.12. **(a)** (i) $y_c(t) = -6\pi\,\text{sen}(6\pi t)$.

(ii) $y_c(t) = -6\pi\,\text{sen}(6\pi t)$.

(b) (i) Sí.

(ii) No.

4.13. **(a)** $y[n] = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

(b) La misma $y[n]$.

(c) $h_c(t)$ no tiene ningún efecto sobre T.

4.14. **(a)** No.

(b) Sí.

(c) No.

(d) Sí.

(e) Sí. (No se pierde información; sin embargo, la señal no se puede recuperaar mediante el sistema de la Figura P3.21.)

4.15. **(a)** Sí.

(b) No.

(c) Sí.

4.16. **(a)** $M/L = 5/2$, único.

(b) $M/L = 2/3$; único.

4.17. **(a)** $\tilde{x}_d[n] = (4/3)\,\text{sen}\,(\pi n/2)\,/(\pi n)$.

(b) $\tilde{x}_d[n] = 0$.

4.18. **(a)** $\omega_0 = 2\pi/3$.

(b) $\omega_0 = 3\pi/5$.

(c) $\omega_0 = \pi$.

4.19. $T \leq \pi/\Omega_0$.

4.20. **(a)** $F_s \geq 2000$ Hz.

(b) $F_s \geq 4000$ Hz.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 5

5.1. $x[n] = y[n], \omega_c = \pi$.

5.2. **(a)** Polos: $z = 3, 1/3$, Ceros: $z = 0, \infty$.

(b) $h[n] = -(3/8)(1/3)^n u[n] - (3/8)3^n u[-n-1]$.

5.3. **(a)**, **(d)** son las respuestas al impulso.

5.4. **(a)** $H(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}, |z| > 3/4$.

(b) $h[n] = (3/4)^n u[n] - 2(3/4)^{n-1} u[n-1]$.

(c) $y[n] - (3/4)y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$.

(d) Estable y causal.

5.5. **(a)** $y[n] - (7/12)y[n-1] + (1/12)y[n-2] = 3x[n] - (19/6)x[n-1] + (2/3)x[n-2]$.

(b) $h[n] = 3\delta[n] - (2/3)(1/3)^{n-1}u[n-1] - (3/4)(1/4)^{n-1}u[n-1]$.

(c) Estable.

5.6. **(a)** $X(z) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}, \quad \dfrac{1}{2} < |z| < 2$.

(b) $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

(c) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$.

5.7. **(a)** $H(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}, \quad |z| > \dfrac{3}{4}$.

(b) $h[n] = -(2/5)(1/2)^n u[n] + (7/5)(-3/4)^n u[n]$.

(c) $y[n] + (1/4)y[n-1] - (3/8)y[n-2] = x[n] - x[n-1]$.

5.8. **(a)** $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}, \quad |z| > 2$.

(b) $h[n] = -(2/5)(-1/2)^n u[n] + (2/5)(2)^n u[n]$.

(c) $h[n] = -(2/5)(-1/2)^n u[n] - (2/5)(2)^n u[-n-1]$.

5.9.

$$h[n] = \left[-\frac{4}{3}(2)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u[-n], \qquad |z| < \frac{1}{2},$$

$$h[n] = -\frac{4}{3}(2)^{n-1}u[-n] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1], \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2,$$

$$h[n] = \frac{4}{3}(2)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1], \qquad |z| > 2.$$

5.10. $H_i(z)$ no puede ser causal y estable. El cero de una $H(z)$ en $z=\infty$ es un polo de $H_i(z)$. La existencia de un polo en $z=\infty$ implica que el sistema no es causal.

5.11. **(a)** No se puede determinar.

(b) No se puede determinar.

(c) Falso.

(d) Verdadero .

5.12. **(a)** Estable.
(b)

$$H_1(z) = -9\frac{(1+0{,}2z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{(1-j0{,}9z^{-1})(1+j0{,}9z^{-1})},$$

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{\left(z^{-1}-\frac{1}{3}\right)\left(z^{-1}+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

5.13. $H_1(z)$, $H_3(z)$ y $H_4(z)$ = son sistemas paso todo.

5.14. **(a)** 5.

(b) $\frac{1}{2}$.

5.15. **(a)** $\alpha=1, \beta=0, A\left(e^{j\omega}\right)=1+4\cos(\omega)$. El sistema es de fase lineal generalizada, pero no es de fase lineal, debido a que $A\left(e^{j\omega}\right)$ es no negativa para todo ω.

(b) No es un sistema de fase lineal generalizada ni de fase lineal.

(c) $\alpha=1, \beta=0, A\left(e^{j\omega}\right)=3+2\cos(\omega)$. Fase lineal, ya que $|H(e^{j\omega})|=A\left(e^{j\omega}\right)\geq 0$ para todo ω.

(d) $\alpha=1/2, \beta=0, A\left(e^{j\omega}\right)=2\cos(\omega/2)$. Fase lineal generalizada, porque $A\left(e^{j\omega}\right)$ es no negativa para todo ω.

(e) $\alpha=1, \beta=\pi/2, A\left(e^{j\omega}\right)=2\,\text{sen}(\omega)$. Fase lineal generalizada, ya que $\beta\neq 0$.

5.16. $h[n]$ no es necesariamente causal. Tanto $h[n]=\delta[n-\alpha]$ como $h[n]=\delta[n+1]+\delta[n-(2\alpha+1)]$ tendrán esta fase.

5.17. $H_2(z)$ y $H_3(z)$ son sistemas de fase mínima.

5.18. **(a)** $H_{\min}(z)=\dfrac{2\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$.

(b) $H_{\min}(z)=3\left(1-\dfrac{1}{2}z^{-1}\right)$.

(c) $H_{\min}(z)=\dfrac{9}{4}\dfrac{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)^2}$.

5.19. $h_1[n]:2$, $h_2[n]:3/2$, $h_3[n]:2$, $h_4[n]:3$, $h_5[n]:3$, $h_6[n]:7/2$.

5.20. Los sistemas $H_1(z)$ y $H_3(z)$ tienen fase lineal y se pueden implementar mediante una ecuación en diferencias de valores reales.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 6

6.1. Red 1:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Red 2:

$$H(z) = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Ambos sistemas tienen los mismos denominadores y por tanto los mismos polos.

6.2. $y[n] - 3y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$.

6.3. El sistema del apartado (d) es el mismo que el del apartado (a).

6.4. (a)

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}.$$

(b)

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = 2x[n] + \frac{1}{4}x[n-1].$$

6.5. (a)

$$y[n] - 4y[n-1] + 7y[n-3] + 2y[n-4] = x[n].$$

(b)

$$H(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}.$$

(c) Dos multiplicaciones y cuatro sumas.

(d) No. Se requieren como mínimo cuatro retardos para implementar un sistema de cuarto orden.

6.6.

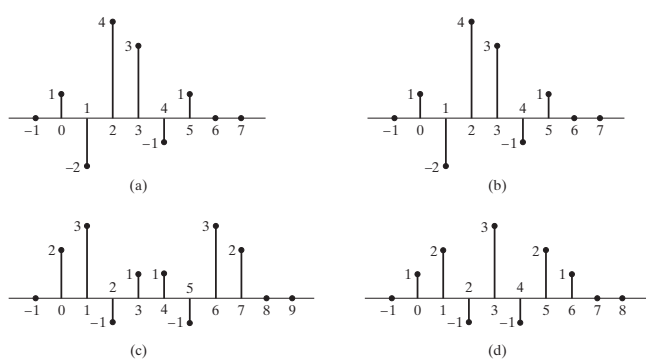


Figura 6.6

6.7.

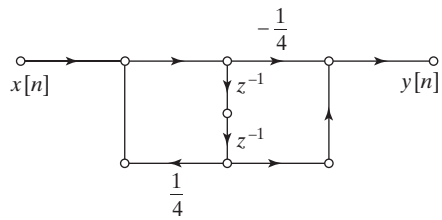


Figura 6.7

6.8. $y[n] - 2y[n-2] = 3x[n-1] + x[n-2]$.

6.9. **(a)** $h[1] = 2$.

(b) $y[n] + y[n-1] - 8y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + x[n-2] - 8x[n-3]$.

6.10. **(a)**

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + v[n-1]. \\ v[n] &= 2x[n] + \frac{1}{2}y[n] + w[n-1]. \\ w[n] &= x[n] + \frac{1}{2}y[n]. \end{aligned}$$

(b)

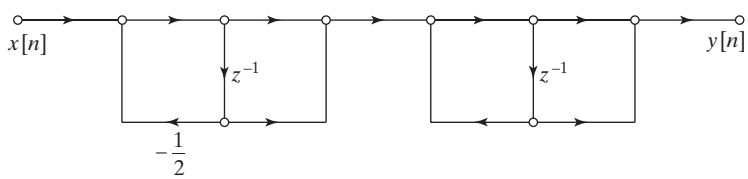


Figura 6.10

(c) Los polos están en $z = -1/2$ y $z = 1$. Como el segundo polo está en la circunferencia unidad, el sistema no es estable.

6.11. **(a)**

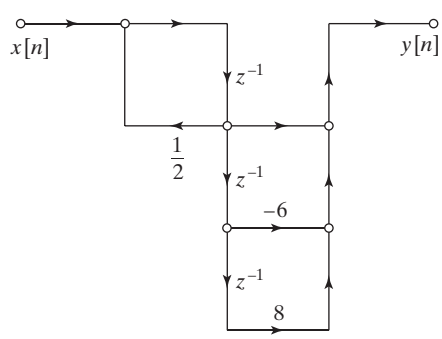


Figura 6.11 **(a)**

(b)

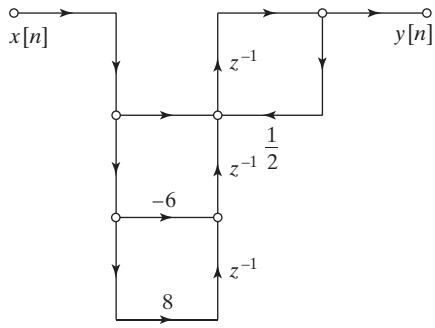


Figura 6.11 (b)

6.12. $y[n] - 8y[n-1] = -2x[n] + 6x[n-1] + 2x[n-2]$.

6.13.

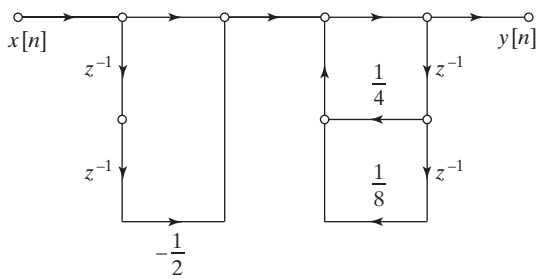


Figura 6.13

6.14.

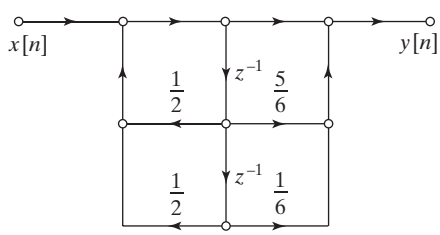


Figura 6.14

6.15.

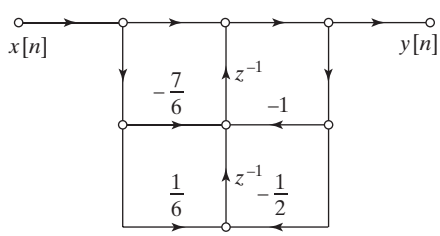


Figura 6.15

6.16. (a)

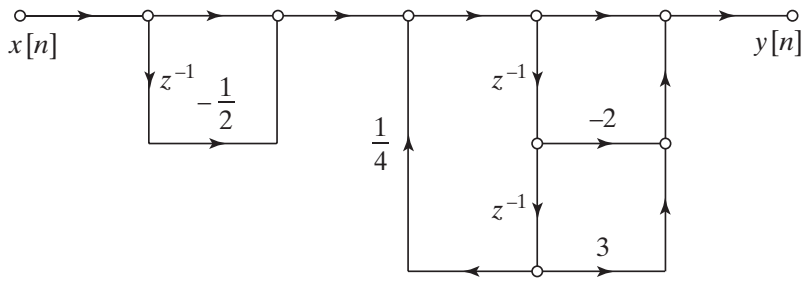


Figura 6.16

(b) Ambos sistemas tienen la función de transferencia

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}\right)}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}.$$

6.17. (a)

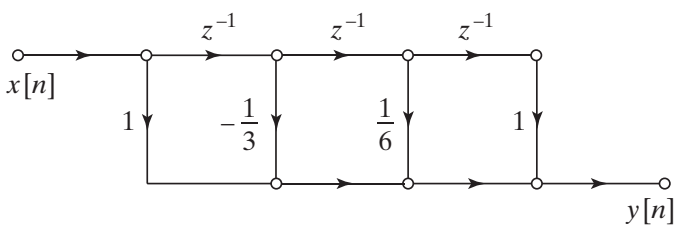


Figura 6.17 (a)

(b)

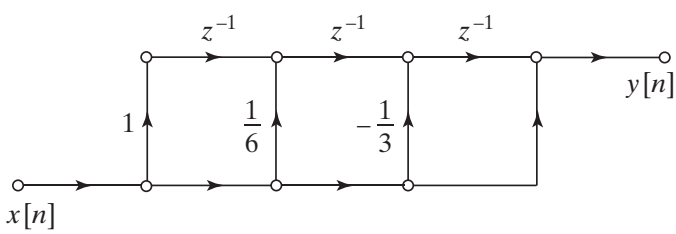


Figura 6.17 (b)

6.18. Si $a = 2/3$, la función de transferencia global es

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}.$$

Si $a = -2$, la función de transferencia global es

$$H(z) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}.$$

6.19.

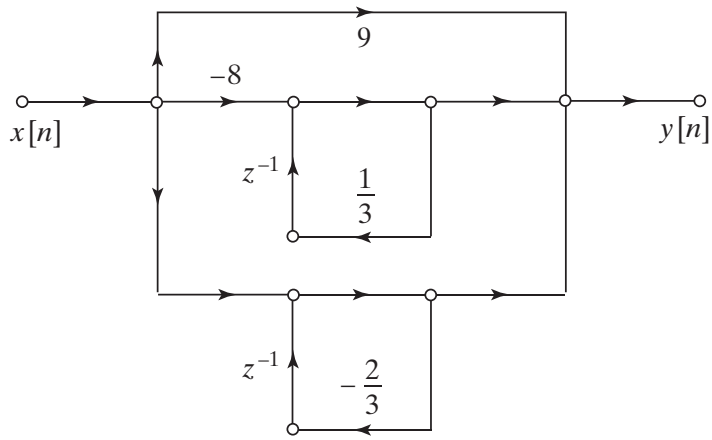


Figura 6.19

6.20.

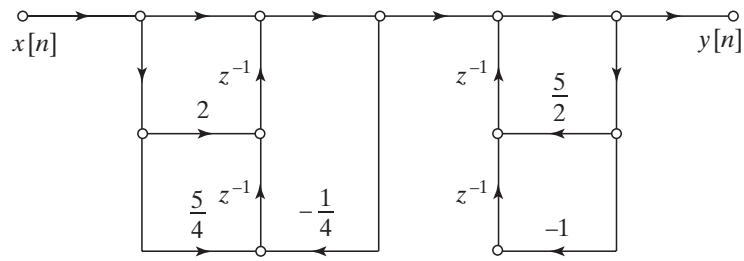


Figura 6.20

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 7

7.1. **(a)**

$$H_1(z) = \frac{1 - e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}}{1 - 2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2}},$$

$$\text{RDC: } |z| > e^{-aT}.$$

(b)

$$H_2(z) = (1 - z^{-1})S_2(z),$$

$$\text{RDC:} |z| > e^{-aT} \text{ siendo}$$

$$S_2(z) = \frac{a}{a^2 + b^2}\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{2(a + jb)}\frac{1}{1 - e^{-(a+jb)T}z^{-1}} - \frac{1}{2(a - jb)}\frac{1}{1 - e^{-(a-jb)T}z^{-1}}.$$

(c) No son iguales.

7.2. (a)

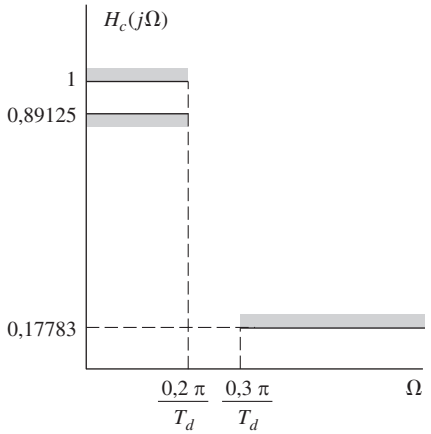


Figura 7.2

(b) $N = 6$, $\Omega_c T_d = 0{,}7032$.

(c) Los polos en el plano s están en una circunferencia de radio $R = 0{,}7032/T_d$. Se corresponden con los polos del plano z en $z = e^{s_k T_d}$. Los factores de T_d se cancelan, haciendo que las posiciones de los polos de $H(z)$ en el plano z sean independientes de T_d.

7.3. (a) $\hat{\delta}_2 = \delta_2/(1+\delta_1)$, $\hat{\delta}_1 = 2\delta_1/(1+\delta_1)$.

(b)

$$\delta_2 = 0{,}18806, \delta_1 = 0{,}05750$$

$$H(z) = \frac{0{,}3036 - 0{,}4723z^{-1}}{1 - 1{,}2971z^{-1} + 0{,}6949z^{-2}} + \frac{-2{,}2660 + 1{,}2114z^{-1}}{1 - 1{,}0691z^{-1} + 0{,}3699z^{-2}} + \frac{1{,}9624 - 0{,}6665z^{-1}}{1 - 0{,}9972z^{-1} + 0{,}2570z^{-2}}$$

(c) Usar los mismos δ_1 y δ_2.

$$H(z) = \frac{0{,}0007802(1+z^{-1})^6}{(1 - 1{,}2686z^{-1} + 0{,}7051z^{-2})(1 - 1{,}0106z^{-1} + 0{,}3583z^{-2})(1 - 0{,}9044z^{-1} + 0{,}2155z^{-2})}.$$

7.4. (a)

$$H_c(s) = \frac{1}{s+0{,}1} - \frac{0{,}5}{s+0{,}2}.$$

La respuesta no es única. Otra posibilidad es

$$H_c(s) = \frac{1}{s+0{,}1+j2\pi} - \frac{0{,}5}{s+0{,}2+j2\pi}.$$

(b)

$$H_c(s) = \frac{2(1+s)}{0{,}1813 + 1{,}8187s} - \frac{1+s}{0{,}3297 + 1{,}6703s}.$$

La respuesta es única

7.5. **(a)** $M+1=91$, $\beta=3{,}3953$.

(b) $M/2=45$.

(c) $h_d[n]=\dfrac{\sin[0{,}625\pi(n-45)]}{\pi(n-45)}-\dfrac{\operatorname{sen}[0{,}3\pi(n-45)]}{\pi(n-45)}$.

7.6. **(a)** $\delta=0{,}03$, $\beta=2{,}181$.

(b) $\Delta\omega=0{,}05\pi$, $M=63$.

7.7.

$$\begin{aligned} 0{,}99\le|H(e^{j\omega})|\le 1{,}01, &\qquad |\omega|\le 0{,}2\pi,\\ |H(e^{j\omega})|\le 0{,}01, &\qquad 0{,}22\pi\le|\omega|\le\pi \end{aligned}$$

7.8. **(a)** Seis alternancias. $L=5$, por lo que no cumple el teorema de alternancia y no es óptimo.

(b) Siete alternancias, por lo que satisface el teorema de alternancia para $L=5$.

7.9. $\omega_c=0{,}4\pi$.

7.10. $\omega_c=2{,}3842$ rad.

7.11. $\Omega_c=2\pi(1250)$ rad/s.

7.12. $\Omega_c=2000$ rad/s.

7.13. $T=50\,\mu$s. Este T es único.

7.14. $T=1{,}46$ ms. Este T es único.

7.15. Hamming y Hanning: $M+1=81$, Blackman: $M+1=121$.

7.16. $\beta=2{,}6524$, $M=181$.

7.17.

$$\begin{aligned} |H_c(j\Omega)|<0{,}02, &\qquad |\Omega|\le 2\pi(20)\text{ rad/s},\\ 0{,}95<|H_c(j\Omega)|<1{,}05, &\qquad 2\pi(30)\le|\Omega|\le 2\pi(70)\text{ rad/s},\\ |H_c(j\Omega)|<0{,}001, &\qquad 2\pi(75)\text{ rad/s}\le|\Omega|. \end{aligned}$$

7.18.

$$\begin{aligned} |H_c(j\Omega)|<0{,}04, &\qquad |\Omega|\le 324{,}91\text{ rad/s},\\ 0{,}995<|H_c(j\Omega)|<1{,}005, &\qquad |\Omega|\ge 509{,}52\text{ rad/s}. \end{aligned}$$

7.19. $T=0{,}41667$ ms. Este T es único.

7.20. Verdadera.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 8

8.1. **(a)** $x[n]$ es periódica de periodo $N=6$.

(b) T no evitará el solapamiento.

(c)

$$\tilde{X}[k] = 2\pi \begin{cases} a_0 + a_6 + a_{-6}, & k = 0, \\ a_1 + a_7 + a_{-5}, & k = 1, \\ a_2 + a_8 + a_{-4}, & k = 2, \\ a_3 + a_9 + a_{-3} + a_{-9}, & k = 3, \\ a_4 + a_{-2} + a_{-8}, & k = 4, \\ a_5 + a_{-1} + a_{-7}, & k = 5. \end{cases}$$

8.2. **(a)**

$$\tilde{X}_3[k] = \begin{cases} 3\tilde{X}[k/3], & \text{para } k = 3\ell, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(b)

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ -1, & k = 1. \end{cases}$$

$$\tilde{X}_3[k] = \begin{cases} 9, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, 4, 5, \\ -3, & k = 3. \end{cases}$$

8.3. **(a)** $\tilde{x}_2[n]$.

(b) Ninguna de las secuencias.

(c) $\tilde{x}_1[n]$ and $\tilde{x}_3[n]$.

8.4. **(a)**

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}.$$

(b)

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j(2\pi/N)k}}.$$

(c)

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi k/N)}.$$

8.5. **(a)** $X[k] = 1$.

(b) $X[k] = W_N^{kn_0}$.

(c)

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0, N/2, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(d)

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0, \\ e^{-j(\pi k/N)(N/2-1)}(-1)^{(k-1)/2}\frac{1}{\operatorname{sen}(k\pi/N)}, & k \text{ impar}, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(e)

$$X[k] = \frac{1 - a^N}{1 - aW_N^k}.$$

8.6. (a)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{j(\omega_0 - \omega)N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \omega)}}.$$

(b)

$$X[k] = \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k}.$$

(c)

$$X[k] = \begin{cases} N, & k = k_0 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

8.7.

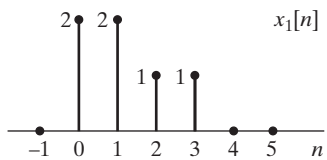


Figura 8.7

8.8.

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1024}{1023}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & 0 \le n \le 9, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

8.9. (a) **1.** Sea $x_1[n] = \sum_m x[n + 5m]$ para $n = 0, 1, \ldots 4$.

2. Sea $X_1[k]$ la FFT de cinco puntos de $x_1[n]$. $M = 5$.

3. $X_1[2]$ is $X(e^{j\omega})$ at $\omega = 4\pi/5$.

(b) Definamos $x_2[n] = \Sigma_m W_{27}^{-(n+9m)} x[n + 9m]$ para $n = 0, \ldots, 8$.
Calcular $X_2[k]$, la DFT de 9 puntos de $x_2[n]$.
$X_2[2] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega = 10\pi/27}$.

8.10. $X_2[k] = (-1)^k X_1[k]$.

8.11.

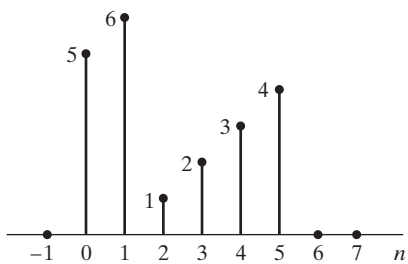


Figura 8.11

8.12. **(a)**

$$X[k] = \begin{cases} 2, & k = 1,3, \\ 0, & k = 0,2. \end{cases}$$

(b)

$$H[k] = \begin{cases} 15, & k = 0, \\ -3 + j6, & k = 1, \\ -5, & k = 2, \\ -3 - j6, & k = 3. \end{cases}$$

(c) $y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$.

(d) $y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$.

8.13.

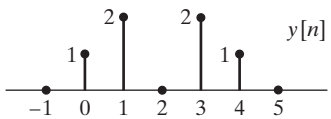


Figura 8.13

8.14. $x_3[2] = 9$.

8.15. $a = -1$. Es única.

8.16. $b = 3$. Es única.

8.17. $N = 9$.

8.18. $c = 2$.

8.19. $m = 2$. No es única. Cualquier $m = 2 + 6\ell$ para ℓ entero vale.

8.20. $N = 5$. Es única.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 9

9.1. Si la entrada es $(1/N)X[((-n))_N]$, la salida del programa de la DFT será $x[n]$, la DFT inversa de $X[k]$.

9.2.

$$\begin{aligned} X &= AD - BD + CA - DA = AC - BD \\ Y &= AD - BD + BC + BD = BC + AD. \end{aligned}$$

9.3.

$$y[32] = X(e^{-j2\pi(7/32)}) = X(e^{j2\pi(25/32)}).$$

9.4. $\omega_k = 7\pi/16$.

9.5.

$$\begin{aligned} a &= -\sqrt{2} \\ b &= -e^{-j(6\pi/8)}. \end{aligned}$$

9.6. **(a)** La ganancia es $-W_N^2$.

(b) Sólo hay un camino. En general, sólo hay un camino desde cualquier muestra de entrada hasta cualquier muestra de salida.

(c) Trazando los caminos, vemos que

$$X[2] = x[0]\cdot 1 + x[1]W_8^2 - x[2] - x[3]W_8^2 + \ldots$$
$$x[4] + x[5]W_8^2 - x[6] - x[7]W_8^2.$$

9.7. **(a)** Almacenar $x[n]$ en $A[\cdot]$ en orden de inversión de bits, y $D[\cdot]$ contendrá $X[k]$ en orden secuencial (normal).

(b)

$$D[r] = \begin{cases} 8, & r = 3, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

(c)

$$C[r] = \begin{cases} 1, & r = 0,1,2,3, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

9.8. **(a)** $N/2$ mariposas con $2^{(m-1)}$ coeficientes diferentes.

(b) $y[n] = W_N^{2^{v-m}} y[n-1] + x[n]$.

(c) Periodo: 2^m, Frecuencia: $2\pi 2^{-m}$.

9.9. La afirmación 1.

9.10.

$$y[n] = X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{\omega=(2\pi/7)+(2\pi/21)(n-19)}.$$

9.11. **(a)** 2^{m-1}.

(b) 2^m.

9.12. $r[n] = e^{-j(2\pi/19)n} W^{n^2/2}$ siendo $W = e^{-j(2\pi/10)}$.

9.13. $x[0], x[8], x[4], x[12], x[2], x[10], x[6], x[14], x[1], x[9], x[5], x[13], x[3], x[11], x[7], x[15]$.

9.14. Falso.

9.15. $m = 1$.

9.16.

$$r = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ 0,4, & m = 2, \\ 0,2,4,6, & m = 3, \\ 0,1,2,3,4,5,6,7, & m = 4. \end{cases}$$

9.17. $N = 64$.

9.18. $m = 3$ o 4.

9.19. Diezmado en el tiempo.

9.20. 1021 es primo, por lo que el programa debe implementar las ecuaciones completas de la DFT y no puede explotar ningún algoritmo de FFT. El tiempo de cómputo es proporcional a N^2. Por el contrario, 1024 es potencia de 2 y se puede explotar la reducción que produce la FFT a un tiempo proporcional a $N \log N$.

Respuestas a los problemas básicos del Capítulo 10

10.1. **(a)** $f = 1500$ Hz.
(b) $f = -2000$ Hz.

10.2. $N = 2048$ y $10000 \text{ Hz} < f < 10240$ Hz.

10.3. **(a)** $T = 2\pi k_0/(N\Omega_0)$.
(b) No es única. $T = (2\pi/\Omega_0)(1 - k_0/N)$.

10.4.

$$X_c(j2\pi(4200)) = 5 \times 10^{-4}$$

$$X_c(-j2\pi(4200)) = 5 \times 10^{-4}$$

$$X_c(j2\pi(1000)) = 10^{-4}$$

$$X_c(-j2\pi(1000)) = 10^{-4}$$

10.5. $L = 1024$.

10.6. $x_2[n]$ tendrá dos picos diferentes.

10.7. $\Delta\Omega = 2\pi(2{,}44)$ rad/s.

10.8. $N \geq 1600$.

10.9.

$$X_0[k] = \begin{cases} 18, & k = 3, 33, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

$$X_1[k] = \begin{cases} 18, & k = 9, 27, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

$$X_r[k] = 0 \text{ para } r \neq 0, 1.$$

10.10. $\omega_0 = 0{,}25\pi$ rad/muestra, $\lambda = \pi/76000$rad/muestra^2.

10.11. $\Delta f = 9{,}77$ Hz.

10.12. Los picos no tendrán la misma altura. El pico de la ventana rectangular será mayor

10.13. **(a)** $A = 21$ dB.
(b) Las componentes débiles serán visibles si su amplitud es superior a 0,0891.

10.14. **(a)** 320 muestras.
(b) 400 DFT/segundo.
(c) $N = 256$.
(d) 62,5 Hz.

10.15. **(a)** $X[200] = 1 - j$.
(b)

$$X(j2\pi(4000)) = 5 \times 10^{-5}(1 - j)$$

$$X(-j2\pi(4000)) = 5 \times 10^{-5}(1 + j).$$

10.16. Sirven las ventanas rectangular, de Hanning, de Hamming y de Bartlett.

10.17. $T > 1/1024$ segundos.

10.18. $x_2[n]$, $x_3[n]$, $x_6[n]$.

10.19. Los métodos 2 y 5 mejorarán la resolución.

10.20. $L = M + 1 = 262$.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, J. W. y Wilson, J. A. N., "A New Approach to FIR Digital Filters with Fewer Multiplies and Reduced Sensitivity", *IEEE Trans. of Circuits and Systems*, Vol. 30, pp. 277–283, mayo 1983.

Ahmed, N., Natarajan, T. y Rao, K. R., "Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. on Computers*, Vol. C-23, pp. 90–93, enero 1974.

Allen, J. y Rabiner, L., "A Unified Approach to Short-time Fourier Analysis and Synthesis", *Proc. IEEE Trans. on Computers*, Vol. 65, pp. 1558–1564, noviembre 1977.

Atal, B. S. y Hanauer, S. L., "Speech Analysis and Synthesis by Linear Prediction of the Speech Wave", *J. Acoustical Society of America*, Vol. 50, pp. 637–655, 1971.

Atal, B. S., "Automatic Recognition of Speakers from their Voices", *IEEE Proceedings*, Vol. 64, No. 4, pp. 460–475, abril 1976.

Andrews, H. C. y Hunt, B. R.,*Digital Image Restoration*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

Bagchi, S. y Mitra, S., *The Nonuniform Discrete Fourier Transform and Its Applications in Signal Processing*, Springer, New York, NY, 1999.

Baran, T. A. y Oppenheim, A. V., "Design and Implementation of Discrete-time Filters for Efficient Rate-conversion Systems", *Proceedings of the 41st Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Asilomar, CA, Nov. 4–7, 2007.

Baraniuk, R., "Compressive Sensing", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 24, No. 4, pp. 118–121, julio 2007.

Barnes, C. W. y Fam, A. T., "Minimum Norm Recursive Digital Filters that are Free of Over-flow Limit Cycles", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, pp. 569–574, octubre 1977.

Bartels R. H., Beatty, J. C. y Barsky, B. A., *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling*, Morgan Kauffman, San Francisco, CA, 1998.

Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, 3ª ed, John Wiley and Sons, New York, NY, 2000.

Bartlett, M. S., *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1953.

Bauman, P., Lipshitz, S. y Vanderkooy, J., "Cepstral Analysis of Electroacoustic Transducers", *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing* (ICASSP '85), Vol. 10, pp. 1832–1835, abril 1985.

Bellanger, M., *Digital Processing of Signals*, 3ª ed., Wiley, New York, NY, 2000.

Bennett, W. R., "Spectra of Quantized Signals", *Bell System Technical J.*, Vol. 27, pp. 446–472, 1948.

Bertsekas, D y Tsitsiklis, J., *Introduction to Probability*, 2ª ed. Athena Scientific, Belmont, MA, 2008.

Blackman, R. B. y Tukey, J. W., *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, New York, NY, 1958.

Blackman, R., *Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

Blahut, R. E., *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1985.

Bluestein, L. I., "A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 451–455, 1970.

Bogert, B. P., Healy, M. J. R. y Tukey, J. W., "The Quefrency Alanysis of Times Series for Echos: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-cepstrum, and Saphe Cracking", Capítulo 15, *Proc. Symposium on Time Series Analysis*, M. Rosenblatt, ed., John Wiley and Sons, New York, NY, 1963.

Bosi, M. y Goldberg, R. E., *Introduction to Digital Audio Coding and Standards*, Springer Science+Business Media, New York, NY, 2003.

Bovic, A., ed., *Handbook of Image and Video Processing*, 2ª ed., Academic Press, Burlington, MA, 2005.

Bracewell, R. N., "The Discrete Hartley Transform", *J. Optical Society of America*, Vol. 73, pp. 1832–1835, 1983.

Bracewell, R. N., "The Fast Hartley Transform", *IEEE Proceedings*, Vol. 72, No. 8, pp. 1010–1018, 1984.

Bracewell, R. N., *Two-Dimensional Imaging*, Prentice Hall, New York, NY, 1994.

Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, 3ª ed., McGraw-Hill, New York, NY, 1999.

Brigham, E., *Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1988.

Brigham, E. O. y Morrow, R. E., "The Fast Fourier Transform", *IEEE Spectrum*, Vol. 4, pp. 63–70, Dec. 1967.

Brown, J. W. y Churchill, R. V., *Introduction to Complex Variables and Applications*, 8ª ed., McGraw-Hill, New York, NY, 2008.

Brown, R. C., *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*, Wiley, New York, NY, 1983.

Burden, R. L. y Faires, J. D., *Numerical Analysis*, 8ª ed., Brooks Cole, 2004.

Burg, J. P., "A New Analysis Technique for Time Series Data," *Proc. NATO Advanced Study Institute on Signal Processing*, Enschede, Netherlands, 1968.

Burrus, C. S., "Efficient Fourier Transform and Convolution Algorithms", in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Burrus, C. S. y Parks, T. W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms Theory and Implementation*, Wiley, New York, NY, 1985.

Burrus, C. S., Gopinath, R. A. y Guo, H., *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer*, Prentice Hall, 1997.

Candy, J. C. y Temes, G. C., *Oversampling Delta-Sigma Data Converters: Theory, Design, and Simulation*, IEEE Press, New York, NY, 1992.

Candes, E., "Compressive Sampling", *Int. Congress of Mathematics*, 2006, pp. 1433–1452.

Candes, E., and Wakin, M., "An Introduction to Compressive Sampling", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 25, No. 2, pp. 21–30, marzo 2008.

Capon, J., "Maximum-likelihood Spectral Estimation," in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, 2ª ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York, NY, 1983.

Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3ª ed., Dover Publications, New York, NY, 1952.

Castleman, K. R., *Digital Image Processing*, 2ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

Chan, D. S. K. y Rabiner, L. R., "An Algorithm for Minimizing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters", *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 3, pp. 347–385, marzo 1973.

Chan, D. S. K. y Rabiner, L. R., "Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 21, pp. 354–366, agosto 1973.

Chellappa, R., Girod, B., Munson, D. C., Tekalp, A. M. y Vetterli, M., "The Past, Present, and Future of Image and Multidimensional Signal Processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 15, No. 2, pp. 21–58, marzo 1998.

Chen, W. H., Smith, C. H. y Fralick, S. C., "A Fast Computational Algorithm for the Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 25, pp. 1004–1009, septiembre 1977.

Chen, X. y Parks, T. W., "Design of FIR Filters in the Complex Domain," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 35, pp. 144–153, 1987.

Cheney, E. W., *Introduction to Approximation Theory*, 2ª ed., Amer. Math. Society, New York, NY, 2000.

Chow, Y. y Cassignol, E., *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, Wiley, New York, NY, 1962.

Cioffi, J. M. y Kailath, T., "Fast Recursive Least-squares Transversal Filters for Adaptive Filtering", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 32, pp. 607–624, junio 1984.

Claasen, T. A. y Mecklenbräuker, W. F., "On the Transposition of Linear Time-varying Discrete-time Networks and its Application to Multirate Digital Systems", *Philips J. Res.*, Vol. 23, pp. 78–102, 1978.

Claasen, T. A. C. M., Mecklenbrauker, W. F. G. y Peek, J. B. H., "Second-order Digital Filter with only One Magnitude-truncation Quantizer and Having Practically no Limit Cycles", *Electronics Letters*, Vol. 9, No. 2, pp. 531–532, noviembre 1973.

Clements, M. A. y Pease, J., "On Causal Linear Phase IIR Digital Filters", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 3, pp. 479–484, abril 1989.

Committee, DSP, ed., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, NY, 1979.

Constantinides, A. G., "Spectral Transformations for Digital Filters", *IEEE Proceedings*, Vol. 117, No. 8, pp. 1585–1590, agosto 1970.

Cooley, J. W., Lewis, P. A. W. y Welch, P. D., "Historical Notes on the Fast Fourier Transform", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 15, pp. 76–79, junio 1967.

Cooley, J. W. y Tukey, J. W., "An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297–301, Apr. 1965.

Crochiere, R. E. y Oppenheim, A. V., "Analysis of Linear Digital Networks," *IEEE Proceedings*, Vol. 63, pp. 581–595, abril 1975.

Crochiere, R. E. y Rabiner, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

Daniels, R. W., *Approximation Methods for Electronic Filter Design*, McGraw-Hill, New York, NY, 1974.

Danielson, G. C. y Lanczos, C., "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and their Application to X-ray Scattering from Liquids", *J. Franklin Inst.*, Vol. 233, pp. 365–380 and 435–452, abril–mayo 1942.

Davenport, W. B., *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970.

Davis, S. B. y Mermelstein, P., "Comparison of Parametric Representations for Monosyllabic Word Recognition", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 4, pp. 357–366, agosto 1980.

Deller, J. R., Hansen, J. H. L. y Proakis, J. G., *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, Wiley-IEEE Press, New York, NY, 2000.

Donoho, D. L., "Compressed Sensing", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 52, No. 4, pp. 1289–1306, abril 2006.

Dudgeon, D. E. y Mersereau, R. M., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

Duhamel, P., "Implementation of 'Split-radix' FFT Algorithms for Complex, Real, and Real-symmetric Data", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 34, pp. 285–295, abril 1986.

Duhamel, P. y Hollmann, H., "Split Radix FFT Algorithm", *Electronic Letters*, Vol. 20, pp. 14–16, enero 1984.

Ebert, P. M., Mazo, J. E. y Taylor, M. C., "Overflow Oscillations in Digital Filters", *Bell System Technical J.*, Vol. 48, pp. 2999–3020, 1969.

Eldar, Y. C. y Oppenheim, A. V., "Filterbank Reconstruction of Bandlimited Signals from Nonuniform and Generalized Samples", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 48, No. 10, pp. 2864–2875, octubre 2000.

Elliott, D. F. y Rao, K. R., *Fast Transforms: Algorithms, Analysis, Applications*, Academic Press, New York, NY, 1982.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York, NY, 1950, Volúmenes 1 y 2.

Fettweis, A., "Wave Digital Filters: Theory and Practice", *IEEE Proceedings*, Vol. 74, No. 2, pp. 270–327, febrero 1986.

Flanagan, J. L., *Speech Analysis, Synthesis and Perception*, 2ª ed., Springer-Verlag, New York, NY, 1972.

Frerking, M. E., *Digital Signal Processing in Communication Systems*, Kluwer Academic, Boston, MA, 1994.

Friedlander, B., "Lattice Filters for Adaptive Processing", *IEEE Proceedings*, Vol. 70, pp. 829–867, agosto 1982.

Friedlander, B., "Lattice Methods for Spectral Estimation", *IEEE Proceedings*, Vol. 70, pp. 990–1017, septiembre 1982.

Frigo, M. y Johnson, S. G., "FFTW: An Adaptive Software Architecture for the FFT", *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing* (ICASSP '98), Vol. 3, pp. 1381–1384, msyo 1998.

Frigo, M. y Johnson, S. G., "The Design and Implementation of FFTW3", *Proc. of the IEEE*, Vol. 93, No. 2, pp. 216–231, febrero 2005.

Furui, S., "Cepstral Analysis Technique for Automatic Speaker Verification", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-29, No. 2, pp. 254–272, abril 1981.

Gallager, R., *Principles of Digital Communication*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.

Gardner, W., *Statistical Spectral Analysis: A Non-Probabilistic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Gentleman, W. M. y Sande, G., "Fast Fourier Transforms for Fun and Profit", *1966 Fall Joint Computer Conf., AFIPS Conf. Proc*, Vol. 29., Spartan Books, Washington, D.C., pp. 563–578, 1966.

Goertzel, G., "An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series", *American Math. Monthly*, Vol. 65, pp. 34–35, enero 1958.

Gold, B., Oppenheim, A. V. y Rader, C. M., "Theory and Implementation of the Discrete Hilbert Transform", en *Proc. Symp. Computer Processing in Communications*, Vol. 19, Polytechnic Press, New York, NY, 1970.

Gold, B. y Rader, C. M., *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, New York, NY, 1969.

Gonzalez, R. C. y Woods, R. E., *Digital Image Processing*, Wiley, 2007.

Goyal, V., "Theoretical Foundations of Transform Coding", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 18, No. 5, pp. 9–21, septiembre 2001.

Gray, A. H. y Markel, J. D., "A Computer Program for Designing Digital Elliptic Filters", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 24, pp. 529–538, diciembre 1976.

Gray, R. M. y Davidson, L. D., *Introduction to Statistical Signal Processing*, Cambridge University Press, 2004.

Griffiths, L. J., "An Adaptive Lattice Structure for Noise Canceling Applications", *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing* (ICASSP '78), Tulsa, OK, Apr. 1978, pp. 87–90.

Grossman, S., *Calculus Part 2*, 5ª ed., Saunders College Publications, Fort Worth, TX, 1992.

Guillemin, E. A., *Synthesis of Passive Networks*, Wiley, New York, NY, 1957.

Hannan, E. J., *Time Series Analysis*, Methuen, London, UK, 1960.

Harris, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform", *IEEE Proceedings*, Vol. 66, pp. 51–83, enero 1978.

Hayes, M. H., Lim, J. S. y Oppenheim, A. V., "Signal Reconstruction from Phase and Magnitude", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 28, No. 6, pp. 672–680, diciembre 1980.

Hayes, M., *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley, New York, NY, 1996.

Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, 4ª ed., Prentice Hall, 2002.

Haykin, S. y Widrow, B., *Least-Mean-Square Adaptive Filters*, Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2003.

Heideman, M. T., Johnson, D. H. y Burrus, C. S., "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform", *IEEE ASSP Magazine*, Vol. 1, No. 4, pp. 14–21, octubre 1984.

Helms, H. D., "Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 15, No. 2, pp. 85–90, 1967.

Herrmann, O., "On the Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase", *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 328–329, 1970.

Herrmann, O., Rabiner, L. R. y Chan, D. S. K., "Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters", *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 6, pp. 769–799, julio–agosto 1973.

Herrmann, O. y Schüssler, W., "Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase", *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 6, pp. 329–330, 1970.

Herrmann, O. y W. Schüssler, "On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters", *Arch. Electronic Ubertragungstechnik*, Vol. 24, pp. 525–526, 1970.

Hewes, C. R., Broderson, R. W. y Buss, D. D., "Applications of CCD and Switched Capacitor Filter Technology", *IEEE Proceedings*, Vol. 67, No. 10, pp. 1403–1415, octubre 1979.

Hnatek, E. R., *A User's Handbook of D/A and A/D Converters*, R. E. Krieger Publishing Co., Malabar, 1988.

Hofstetter, E., Oppenheim, A. V. y Siegel, J., "On Optimum Nonrecursive Digital Filters", *Proc. 9th Allerton Conf. Circuit System Theory*, octubre 1971.

Hughes, C. P. y Nikeghbali, A., "The Zeros of Random Polynomials Cluster Near the Unit Circle", arXiv:math/0406376v3 [math.CV], http://arxiv.org/ PS_cache/math/pdf/0406/0406376v3.pdf.

Hwang, S. Y., "On Optimization of Cascade Fixed Point Digital Filters", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 21, No. 1, pp. 163–166, enero 1974.

Itakura, F. I. y Saito, S., "Analysis-synthesis Telephony Based upon the Maximum Likelihood Method", *Proc. 6th Int. Congress on Acoustics*, pp. C17–20, Tokyo, 1968.

Itakura, F. I. y Saito, S., "A Statistical Method for Estimation of Speech Spectral Density and Formant Frequencies", *Elec. and Comm. in Japan*, Vol. 53-A, No. 1, pp. 36–43, 1970.

Jackson, L. B., "On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters", *Bell System Technical J.*, Vol. 49, pp. 159–184, febrero 1970.

Jackson, L. B., "Roundoff-noise Analysis for Fixed-point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 18, pp. 107–122, junio 1970.

Jackson, L. B., *Digital Filters and Signal Processing: With MATLAB Exercises*, 3ª ed., Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, 1996.

Jacobsen, E. y Lyons, R., "The Sliding DFT", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 20, pp. 74–80, marzo 2003.

Jain, A. K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

Jayant, N. S. y Noll, P., *Digital Coding of Waveforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

Jenkins, G. M. y Watts, D. G., *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1968.

Jolley, L. B. W., *Summation of Series*, Dover Publications, New York, NY, 1961.

Johnston, J., "A Filter Family Designed for Use in Quadrature Mirror Filter Banks", *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing* (ICASSP '80), Vol. 5, pp. 291–294, abril 1980.

Juang, B.-H., Rabiner, L. R. y Wilpon, J. G., "On the Use of Bandpass Liftering in Speech Recognition", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, No. 7, pp. 947–954, julio 1987.

Kaiser, J. F., "Digital Filters", en *System Analysis by Digital Computer*, Chapter 7, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, eds., Wiley, New York, NY, 1966.

Kaiser, J. F., "Nonrecursive Digital Filter Design Using the I_0-sinh Window Function", *Proc. 1974 IEEE International Symp. on Circuits and Systems*, San Francisco, CA, 1974.

Kaiser, J. F. y Hamming, R. W., "Sharpening the Response of a Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 25, No. 5, pp. 415–422, octubre 1977.

Kaiser, J. F. y Schafer, R. W., "On the Use of the I_0-sinh Window for Spectrum Analysis", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 28, No. 1, pp. 105–107, febrero 1980.

Kan, E. P. F. y Aggarwal, J. K., "Error Analysis of Digital Filters Employing Floating Point Arithmetic", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. 18, pp. 678–686, noviembre 1971.

Kaneko, T. y Liu, B., "Accumulation of Roundoff Error in Fast Fourier Transforms", *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol. 17, pp. 637–654, octubre 1970.

Kanwal, R., *Linear Integral Equations*, 2ª ed., Springer, 1997.

Karam, L. J. y McClellan, J. H., "Complex Chebychev Approximation for FIR Filter Design," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 42, pp. 207–216, marzo 1995.

Karam, Z. N. y Oppenheim, A. V., "Computation of the One-dimensional Unwrapped Phase," *15th International Conference on Digital Signal Processing,* pp. 304–307, julio 2007.

Kay, S. M., *Modern Spectral Estimation Theory and Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Kay, S. M., *Intuitive Probability and Random Processes Using MATLAB*, Springer, New York, NY, 2006.

Kay, S. M. y Marple, S. L., "Spectrum Analysis: A Modern Perspective", *IEEE Proceedings*, Vol. 69, pp. 1380–1419, noviembre 1981.

Keys, R., "Cubic Convolution Interpolation for Digital Image Processing", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 29, No. 6, pp. 1153–1160, diciembre 1981.

Kleijn, W., "Principles of Speech Coding", en *Springer Handbook of Speech Processing*, J. Benesty, M. Sondhi, and Y. Huang, eds., Springer, 2008, pp. 283–306.

Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms*, 3ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1997, Vol. 2.

Koopmanns, L. H., *Spectral Analysis of Time Series*, 2ª ed., Academic Press, New York, NY, 1995.

Korner, T. W., *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.

Lam, H. Y. F., *Analog and Digital Filters: Design and Realization*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

Lang, S. W. y McClellan, J. H., "A Simple Proof of Stability for All-pole Linear Prediction Models", *IEEE Proceedings*, Vol. 67, No. 5, pp. 860–861, mayo 1979.

Leon-Garcia, A., *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, 2ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.

Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1958.

Lim, J. S., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

Liu, B. y Kaneko, T., "Error Analysis of Digital Filters Realized in Floating-point Arithmetic", *IEEE Proceedings*, Vol. 57, pp. 1735–1747, octubre 1969.

Liu, B. y Peled, A., "Heuristic Optimization of the Cascade Realization of Fixed Point Digital Filters", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 464–473, 1975.

Macovski, A., *Medical Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

Makhoul, J., "Spectral Analysis of Speech by Linear Prediction", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-21, No. 3, pp. 140–148, junio 1973.

Makhoul, J., "Linear Prediction: A Tutorial Review", *IEEE Proceedings*, Vol. 62, pp. 561–580, abril 1975.

Makhoul, J., "A Fast Cosine Transform in One and Two Dimensions", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 28, No. 1, pp. 27–34, febrero 1980.

Maloberti, F., *Data Converters*, Springer, New York, NY, 2007.

Markel, J. D., "FFT Pruning", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. 19, pp. 305–311, diciembre 1971.

Markel, J. D. y Gray, A. H., Jr., *Linear Prediction of Speech*, Springer-Verlag, New York, NY, 1976.

Marple, S. L., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

Martucci, S. A., "Symmetrical Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 5, pp. 1038–1051, mayo 1994.

Mason, S. y Zimmermann, H. J., *Electronic Circuits, Signals and Systems*, Wiley, New York, NY, 1960.

Mathworks, *Signal Processing Toolbox Users Guide*, The Mathworks, Inc., Natick, MA, 1998.

McClellan, J. H. y Parks, T. W., "A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear Phase Digital Filters", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. 20, pp. 697–701, noviembre 1973.

McClellan, J. H. y Rader, C. M., *Number Theory in Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

McClellan, J. H., "Parametric Signal Modeling", Capítulo 1, *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim y A. V. Oppenheim, eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.

Mersereau, R. M., Schafer, R. W., Barnwell, T. P. y Smith, D. L., "A Digital Filter Design Package for PCs and TMS320s", *Proc. MIDCON*, Dallas, TX, 1984.

Mills, W. L., Mullis, C. T. y Roberts, R. A., "Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 26, pp. 334–338, agosto 1978.

Mintzer, F., "Filters for Distortion-free Two-band Multirate Filter Banks", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 33, No. 3, pp. 626–630, junio 1985.

Mitra, S. K., *Digital Signal Processing*, 3ª ed., McGraw-Hill, New York, NY, 2005.

Moon, T. y Stirling, W., *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice Hall, 1999.

Nawab, S. H. y Quatieri, T. F., "Short-time Fourier transforms", en *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Neuvo, Y., Dong, C.-Y. y Mitra, S., "Interpolated Finite Impulse Response Filters", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 32, No. 3, pp. 563–570, junio 1984.

Noll, A. M., "Cepstrum Pitch Determination", *J. Acoustical Society of America*, Vol. 41, pp. 293–309, febrero 1967.

Nyquist, H., "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", *AIEE Trans.*, Vol. 90, No. 2, pp. 280–305, 1928.

Oetken, G., Parks, T. W. y Schüssler, H. W., "New Results in the Design of Digital Interpolators", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 23, pp. 301–309, junio 1975.

Oppenheim, A. V., "Superposition in a Class of Nonlinear Systems", *RLE Technical Report No. 432*, MIT, 1964.

Oppenheim, A. V., "Generalized Superposition", *Information and Control*, Vol. 11, Nos. 5–6, pp. 528–536, Nov.–Dic., 1967.

Oppenheim, A. V., "Generalized Linear Filtering", Capítulo 8, *Digital Processing of Signals*, B. Gold and C. M. Rader, eds., McGraw-Hill, New York, 1969a.

Oppenheim, A. V., "A Speech Analysis-synthesis System Based on Homomorphic Filtering", *J. Acoustical Society of America*, Vol. 45, pp. 458–465, febrero 1969b.

Oppenheim, A. V. y Johnson, D. H., "Discrete Representation of Signals", *IEEE Proceedings*, Vol. 60, No. 6, pp. 681–691, junio 1972.

Oppenheim, A. V. y Schafer, R. W., "Homomorphic Analysis of Speech", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-16, No. 2, pp. 221–226, junio 1968.

Oppenheim, A. V. y Schafer, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. y Stockam, T. G., Jr., "Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals", *IEEE Proceedings*, Vol. 56, No. 8, pp. 1264–1291, agosto 1968.

Oppenheim, A. V. y Willsky, A. S., *Signals and Systems*, 2ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

Oraintara, S., Chen, Y. J. y Nguyen, T., "Integer Fast Fourier Transform", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 50, No. 3, pp. 607–618, marzo 2001.

O'Shaughnessy, D., *Speech Communication, Human and Machine*, 2ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1999.

Pan, D., "A Tutorial on MPEG/audio Compression", *IEEE Multimedia*, pp. 60–74, verano de 1995.

Papoulis, A., "On the Approximation Problem in Filter Design", en *IRE Nat. Convention Record, Part 2*, 1957, pp. 175–185.

Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, NY, 1962.

Papoulis, A., *Signal Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1977.

Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4ª ed., McGraw-Hill, New York, NY, 2002.

Parks, T. W. y Burrus, C. S., *Digital Filter Design*, Wiley, New York, NY, 1987.

Parks, T. W., and McClellan, J. H., "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. 19, pp. 189–194, marzo 1972.

Parks, T. W. y McClellan, J. H., "A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 20, No. 3, pp. 195–199, agosto 1972.

Parsons, T. J., *Voice and Speech Processing*, Prentice Hall, New York, NY, 1986.

Parzen, E., *Modern Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York, NY, 1960.

Pennebaker, W. B. y Mitchell, J. L., *JPEG: Still Image Data Compression Standard*, Springer, New York, NY, 1992.

Phillips, C. L. y Nagle, H. T., Jr., *Digital Control System Analysis and Design*, 3ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

Pratt, W., *Digital Image Processing*, 4ª ed., Wiley, New York, NY, 2007.

Press, W. H. F., Teukolsky, S. A. B. P., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.

Proakis, J. G. y Manolakis, D. G., *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2006.

Quatieri, T. F., *Discrete-Time Speech Signal Processing: Principles and Practice*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2002.

Rabiner, L. R., "The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques", *Bell System Technical J.*, Vol. 51, pp. 1117–1198, agosto 1972.

Rabiner, L. R., "Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. 20, No. 4, pp. 280–288, octubre 1972.

Rabiner, L. R. y Gold, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

Rabiner, L. R., Kaiser, J. F., Herrmann, O. y Dolan, M. T., "Some Comparisons Between FIR and IIR Digital Filters", *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 305–331, febrero 1974.

Rabiner, L. R. y Schafer, R. W., "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers", *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 361–388, febrero 1974.

Rabiner, L. R. y Schafer, R. W., *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

Rabiner, L. R., Schafer, R. W. y Rader, C. M., "The Chirp z-transform Algorithm", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 17, pp. 86–92, junio 1969.

Rader, C. M., "Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Samples is Prime", *IEEE Proceedings*, Vol. 56, pp. 1107–1108, junio 1968.

Rader, C. M., "An Improved Algorithm for High-speed Autocorrelation with Applications to Spectral Estimation", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 18, pp. 439–441, diciembre 1970.

Rader, C. M. y Brenner, N. M., "A New Principle for Fast Fourier Transformation", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 25, pp. 264–265, junio 1976.

Rader, C. M. y Gold, B., "Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain", *IEEE Proceedings*, Vol. 55, pp. 149–171, febrero 1967.

Ragazzini, J. R. y Franklin, G. F., *Sampled Data Control Systems*, McGraw-Hill, New York, NY, 1958.

Rao, K. R. y Hwang, J. J., *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

Rao, K. R. e Yip, P., *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*, Academic Press, Boston, MA, 1990.

Rao, S. K. y Kailath, T., "Orthogonal Digital Filters for VLSI Implementation", *IEEE Trans. Circuits and System*, Vol. 31, No. 11, pp. 933–945, npviembre 1984.

Reut, Z., Pace, N. G. y Heaton, M. J. P., "Computer Classification of Sea Beds by Sonar", *Nature*, Vol. 314, pp. 426–428, abril, 1985.

Robinson, E. A. y Durrani, T. S., *Geophysical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

Robinson, E. A. y Treitel, S., *Geophysical Signal Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

Romberg, J., "Imaging Via Compressive Sampling", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 25, No. 2, pp. 14–20, marzo 2008.

Ross, S., *A First Course in Probability*, 8ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2009.

Runge, C., "Uber die Zerlegung Empirisch Gegebener Periodischer Functionen in Sinuswellen", *Z. Math. Physik*, Vol. 53, pp. 117–123, 1905.

Sandberg, I. W., "Floating-point-roundoff Accumulation in Digital Filter Realizations", *Bell System Technical J.*, Vol. 46, pp. 1775–1791, octubre 1967.

Sayed, A., *Adaptive Filters*, Wiley, Hoboken, NJ, 2008.

Sayed, A. H., *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley-IEEE Press, 2003.

Sayood, K., *Introduction to Data Compression*, 3ª ed., Morgan Kaufmann, 2005.

Schaefer, R. T., Schafer, R. W. y Mersereau, R. M., "Digital Signal Processing for Doppler Radar Signals", *Proc. 1979 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 170–173, 1979.

Schafer, R. W., "Echo Removal by Generalized Linear Filtering", *RLE Tech. Report No. 466*, MIT, Cambridge, MA, 1969.

Schafer, R. W., "Homomorphic Systems and Cepstrum Analysis of Speech", Capítulo 9, *Springer Handbook of Speech Processing and Communication*, J. Benesty, M. M. Sondhi, and Y. Huang, eds., Springer-Verlag, Heidelberg, 2007.

Schafer, R. W. y Rabiner, L. R., "System for Automatic Formant Analysis of Voiced Speech", *J. Acoustical Society of America*, Vol. 47, No. 2, pt. 2, pp. 634–648, febrero 1970.

Schafer, R. W. y Rabiner, L. R., "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation", *IEEE Proceedings*, Vol. 61, pp. 692–702, junio 1973.

Schmid, H., *Electronic Analog/Digital Conversions*, Wiley, New York, NY, 1976.

Schreier, R. y Temes, G. C., *Understanding Delta-Sigma Data Converters*, IEEE Press and John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2005.

Schroeder, M. R., "Direct (Nonrecursive) Relations Between Cepstrum and Predictor Coefficients", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 29, No. 2, pp. 297–301, abril 1981.

Schüssler, H. W. y Steffen, P., "Some Advanced Topics in Filter Design", en *Advanced Topics in Signal Processing*, S. Lim and A. V. Oppenheim, eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Senmoto, S. y Childers, D. G., "Adaptive Decomposition of a Composite Signal of Identical Unknown Wavelets in Noise", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-2, No. 1, pp. 59, enero 1972.

Shannon, C. E., "Communication in the Presence of Noise", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* (IRE), Vol. 37, No. 1, pp. 10–21, enero 1949.

Singleton, R. C., "An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transforms", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 17, pp. 93–103, junio 1969.

Sitton, G. A., Burrus, C. S., Fox, J. W. y Treitel, S., "Factoring Very-high-degree Polynomials", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 20, No. 6, pp. 27–42, noviembre 2003.

Skolnik, M. I., *Introduction to Radar Systems*, 3ª ed., McGraw-Hill, New York, NY, 2002.

Slepian, D., Landau, H. T. y Pollack, H. O., "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty Principle (I and II)", *Bell System Technical J.*, Vol. 40, No. 1, pp. 43–80, 1961.

Smith, M. y Barnwell, T., " A Procedure for Designing Exact Reconstruction Filter Banks for Tree-structured Subband Coders", *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing* (ICASSP '84), Vol. 9, Pt. 1, pp. 421–424, marzo 1984.

Spanias, A., Painter, T. y Atti, V., *Audio Signal Processing and Coding*, Wiley, Hoboken, NJ, 2007.

Sripad, A. y Snyder, D., "A Necessary and Sufficient Condition for Quantization Errors to be Uniform and White", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 25, No. 5, pp. 442–448, octubre 1977.

Stark, H. y Woods, J., *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*, 3ª ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.

Starr, T., Cioffi, J. M. y Silverman, P. J., *Understanding Digital Subscriber Line Technology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

Steiglitz, K., "The Equivalence of Analog and Digital Signal Processing", *Information and Control*, Vol. 8, No. 5, pp. 455–467, octubre 1965.

Steiglitz, K. y Dickinson, B., "Phase Unwrapping by Factorization", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 30, No. 6, pp. 984–991, diciembre 1982.

Stockham, T. G., "High Speed Convolution and Correlation" en *1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proceedings*, Vol. 28, pp. 229–233, 1966.

Stockham, T. G., Cannon, T. M. e Ingebretsen, R. B., "Blind Deconvolution Through Digital Signal Processing", *IEEE Proceedings*, Vol. 63, pp. 678–692, abril 1975.

Stoica, P. y Moses, R., *Spectral Analysis of Signals*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.

Storer, J. E., *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1957.

Strang, G., "The Discrete Cosine Transforms", *SIAM Review*, Vol. 41, No. 1, pp. 135–137, 1999.

Strang, G. y Nguyen, T., *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley–Cambridge Press, Cambridge, MA, 1996.

Taubman D. S. y Marcellin, M. W., *JPEG 2000: Image Compression Fundamentals, Standards, and Practice*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2002.

Therrien, C. W., *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

Tribolet, J. M., "A New Phase Unwrapping Algorithms", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 25, No. 2, pp. 170–177, abril 1977.

Tribolet, J. M., *Seismic Applications of Homomorphic Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

Tukey, J. W., *Exploratory Data Analysis*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.

Ulrych, T. J., "Application of Homomorphic Deconvolution to Seismology", *Geophysics*, Vol. 36, No. 4, pp. 650–660, agosto 1971.

Unser, M., "Sampling—50 Years after Shannon", *IEEE Proceedings*, Vol. 88, No. 4, pp. 569–587, abril 2000.

Vaidyanathan, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

Van Etten, W. C., *Introduction to Random Signals and Noise*, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2005.

Verhelst, W. y Steenhaut, O., "A New Model for the Short-time Complex Cepstrum of Voiced Speech", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, No. 1, pp. 43–51, febrero 1986.

Vernet, J. L., "Real Signals Fast Fourier Transform: Storage Capacity and Step Number Reduction by Means of an Odd Discrete Fourier Transform", *IEEE Proceedings*, Vol. 59, No. 10, pp. 1531–1532, octubre 1971.

Vetterli, M., "A Theory of Multirate Filter Banks", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 35, pp. 356–372, marzo 1987.

Vetterli, M. y Kovacević, J., *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

Volder, J. E., "The Cordic Trigonometric Computing Techniques", *IRE Trans. Electronic Computers*, Vol. 8, pp. 330–334, septiembre 1959.

Walden, R., “Analog-to-digital Converter Survey and Analysis”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 17, No. 4, pp. 539–550, abril 1999.

Watkinson, J., *MPEG Handbook*, Focal Press, Boston, MA, 2001.

Weinberg, L., *Network Analysis and Synthesis*, R. E. Kreiger, Huntington, NY, 1975.

Weinstein, C. J., “Roundoff Noise in Floating Point Fast Fourier Transform Computation”, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 17, pp. 209–215, septiembre 1969.

Weinstein, C. J. y Oppenheim, A. V., “A Comparison of Roundoff Noise in Floating Point and Fixed Point Digital Filter Realizations”, *IEEE Proceedings*, Vol. 57, pp. 1181–1183, junio 1969.

Welch, P. D., “A Fixed-point Fast Fourier Transform Error Analysis”, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 17, pp. 153–157, junio 1969.

Welch, P. D., “The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra”, *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 15, pp. 70–73, junio 1970.

Widrow, B., “A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory”, *IRE Trans. Circuit Theory*, Vol. 3, pp. 266–276, diciembre 1956.

Widrow, B., “Statistical Analysis of Amplitude-quantized Sampled-data Systems”, *AIEE Trans. (Applications and Industry)*, Vol. 81, pp. 555–568, enero 1961.

Widrow, B. y Kollár, I., *Quantization Noise: Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.

Widrow, B. y Stearns, S. D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

Winograd, S., “On Computing the Discrete Fourier Transform”, *Mathematics of Computation*, Vol. 32, No. 141, pp. 175–199, enero 1978.

Woods, J. W., *Multidimensional Signal, Image, and Video Processing and Coding*, Academic Press, 2006.

Yao, K. y Thomas, J. B., “On Some Stability and Interpolatory Properties of Nonuniform Sampling Expansions”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-14, pp. 404–408, diciembre 1967.

Yen, J. L., On Nonuniform Sampling of Bandwidth-limited Signals”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-3, pp. 251–257, diciembre 1956.

Zverev, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, New York, NY, 1967.

ÍNDICE

Absolutamente sumable, 50
definición, 50
para exponenciales aplicadas de forma súbita, 50
Acumulador, 19, 20-21, 32, 35
como sistema invariante con el tiempo, 20-21
en cascada con sistema de diferencias regresivas, 34
representación mediante ecuación en diferencias del, 35
respuesta al impulso del, 32
sistema inverso, 34
y sistema de diferencias regresivas, 34
Algoritmo de la transformada *chirp* (CTA), 730-734
Algoritmo de la transformada de Fourier de Winograd (WFTA), 729
Algoritmo de la transformada *Z chirp* (CZT), 734
Algoritmo en celosía *k*-a-a, 895
Algoritmo FFT de base *m*, 761
Algoritmos de factor primo, 727, 729
Algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT), 2, 645, 657, 699
algoritmos de diezmado en el tiempo, 706-718
cómputo en el mismo lugar, 713-716
definición, 706
formas alternativas, 716-718
generalización y programación de la FFT, 712
algoritmos de diezmado en frecuencia, 718-724
cómputo en el mismo lugar, 722
formas alternativas, 722-724
algoritmos generales de FFT, 726-729
longitud finita de registro, efectos de, 735-742
Análisis de datos sísmicos, 4
y técnicas de tratamiento de señales multidimensionales, 4
Análisis de Fourier de señales aleatorias estacionarias,
análisis de periodogramas, ejemplo de, 821-825
cómputo del promediado de periodogramas utilizando la DFT, 820-821
periodograma, 813-818
promediado de periodogramas, 818-820
Análisis de Fourier de señales no estacionarias,
ejemplos de, 805-812
señales de voz, 806-810
señales radar, 810-812
Análisis de Fourier de señales mediante la DFT, 769-773
pasos básicos, 769
relación entre valores de la DFT, 773
señales sinusoidales, 773-787
efecto del enventanado, 773-776
efecto del muestreo en el espectro, 779-787
propiedades de las ventanas, 777-779
Análisis de Fourier dependiente del tiempo de banda estrecha, 809
Análisis de Fourier dependiente del tiempo de señales de radar, 810-812
clutter, 811
señales de radar con doppler, 811-812
Análisis espectral de señales aleatorias utilizando estimaciones de la secuencia de autocorrelación, 825-837
espectro de potencia de una señal de voz, 836-837
espectro de potencia de ruido de cuantificación, 830-836
estimaciones de la correlación y del espectro de potencia, 828-830
Análisis espectral todo polos, 881-889
posiciones de los polos, 885-887
señales de voz, 882-885
señales sinusoidales, 887-889
Análisis espectral, 4
Análisis mediante el cepstrum, 953
Análisis mediante transformadas de sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI), 271-368
Análisis predictivo lineal, 867
Aproximación por mínimos cuadrados, 867
Aproximación trapezoidal, 594
Aproximaciones de rizado constante, 549
Aritmética de coma flotante, 451
Autocorrelación:
circular, 828
invarianza a la, 595
método de la, 875-877
secuencia de autocorrelación determinista, 65
y modelado paramétrico de señales, 875-877
Autofunciones, 40
de sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI), 40, 60
Autovalor, 40
Banco de filtros de diezmado máximo, 199
Bancos de filtros multitasa, 199-202
condición de cancelación del solapamiento, 200
filtros especulares en cuadratura, 200

Bancos de filtros:
analizador-sintetizador, 262
multitasa, 199-202
condición de cancelación del solapamiento, 200
filtros especulares en cuadratura, 200
Bandas muertas, definición, 455
Bartlett, procedimiento de, 819
Bartlett, ventanas de (triangular), 525-528, 799-800, 836
Blackman, ventanas de, 525-528, 801
Blackman-Tukey, estimaciones, 836
Butterworth, filtro de, 570
invarianza al impulso, 491-495
transformación bilineal de, 500-503
Característica, uso del término, 413, 451
Caso de extrarrizado, 550
Cauchy-Riemann, condiciones de, 917
Causalidad, 21
Cepstrum complejo, 955-996
aplicaciones a procesado de voz, 996-1005
aplicaciones, 1003
deconvolución homomórfica de la voz, ejemplo de, 999-1001
formantes, 996, 1002
sonidos fricativos, 996
sonidos oclusivos, 996
cálculo del, 964-996
cálculo recursivo para secuencias de fase mínima y de fase máxima, 971-972
desenrollado de la fase, 966-969
ponderación exponencial, 972-973
realizaciones de fase mínima para secuencias de fase mínima, 970-971
usando de raíces de polinomios, 973-974
uso de la derivada logarítmica, 969-970
uso de la DFT, 983-988
de secuencias de fase mínima y de fase máxima, 962
de secuencias exponenciales, 959-961
de un modelo multicamino simple, 978-996
deconvolución homomórfica, 988
descomposición de fase mínima, 989-995
generalizaciones, 995
definición, 955
expresiones alternativas de, 958
mediante análisis de transformada *Z*, 980
modelo de voz, 996-999
estimación de los parámetros del, 1001-1003
sonidos sonoros, 996,
tracto vocal, 996
relación entre el cepstrum real y, 963
uso en deconvolución, 974-975
Chebyshev, criterio de, 546
Chirps, definición, 788
Cholesky, descomposición de, 890
Ciclos límite:
cómo evitarlos, 456
debidos al desbordamiento, 455-456
debidos al redondeo y al truncamiento, 453-455
Circunferencia unidad, 100
Clutter, 811
Codificación predictiva lineal (LPC), 4, 867
Coeficientes de predicción, 870
Coeficientes de reflexión, 890
Coma flotante por bloques, 741
Compensación de la respuesta en frecuencia de sistemas de fase no mínima, 310
Complemento a dos, 409
Complemento a uno, 409
Componente
antisimétrica conjugada periódica, 639
periódica impar, 639
periódica par, 639
simétrica conjugada periódica, 639
Componentes polifásicas de $h[n]$, 197
Compresor, 21, 178
Cómputo en el mismo lugar:
algoritmos FFT de diezmado en el tiempo, 713-716
algoritmos FFT de diezmado en frecuencia, 722
definición, 713
Cómputo recursivo, 38
Condición de cancelación del solapamiento, 200
Condición de sumable (cuadrático medio), 51, 68
del filtro paso bajo ideal, 51-52
Condiciones de reposo inicial, 38
Conformación de ruido,
conformación de ruido multietapa (MASH), 231, 269
en conversión analógico-digital (A/D), 222-231
en conversión D/A, 232-233
Constante, transformada de Fourier de una, 52-53
Conversión A/D. *Véase* Conversión analógico-digital (A/D)
Conversión analógico-digital (A/D), 2, 206-211
configuración física para, 206
cuantificador, 208-211
errores de cuantificación, análisis, 211-218
errores de cuantificación para una señal sinusoidal, 213-214
esquema de codificación con offset binario, 209
medidas de ruido de cuantificación, 215
sobremuestreo y conformación de ruido en, 227-231
Conversión D/A. *Véase* Conversión digital-analógica (D/A)
Conversión digital-analógica (D/A), 2, 218-222
conversor D/C ideal, 218
diagrama de bloques, 219
retenedor de orden cero, 219-220
sobremuestreo y conformación de ruido en, 232
Conversor
analógico-digital (A/D), 203
D/C ideal, 218
digital-analógico (D/A), 203
tiempo continuo a tiempo discreto (C/D) ideal, 153, 203
tiempo discreto a tiempo continuo (D/C) ideal, 203
Convolución
circular, transformada discreta de Fourier (DFT), 640-645
lineal, 645
con solapamiento, convolución circular como, 646
de dos secuencias de longitud finita, 645

Convolución (*continuación*)
periódica, 61
desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, 617-620
por bloques, 652, 655, 725, 803
propiedad conmutativa de, 33
sistema característico para, 957
Convolución, suma de, 23-26
cálculo, 23-26
definición, 23
evaluación analítica, 26-29
Cooley-Tukey, algoritmos de, 716, 727-728, 729
Correlación cruzada, 69, 686, 725, 899, 1019, 1021
Corte, 410
Criterio minimax, 546
CTA. *Véase* Algoritmo de la transformada *chirp* (CTA)
Cuantificación de coeficientes, efectos de, 415-430
en sistemas FIR, 422-424
en sistemas IIR, 415-417
en un filtro elíptico, 417-421
en un filtro FIR óptimo, 424-426
mantenimiento de la fase lineal, 426-430
polos de secciones de segundo orden cuantificadas, 421-422
Cuantificadores, 208-211
de conformación de ruido, 217-219
lineales, 208
saturados, 212
DCT. *Véase* Transformada discreta del coseno (DCT)
DCT-1/DCT-2. *Véase* Transformada discreta del coseno (DCT)
definición, 658-661
relación entre la DFT y, 661-663
Deconvolución homomórfica, 953
de voz, ejemplo de, 999
del modelo multicamino, 988
fase mínima/fase máxima, 977
fase mínima/paso todo, 975
utilizando el cepstrum complejo, 974-977
Densidad espectral de energía, 59
Densidad espectral de potencia, 223-225, 229, 234
Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto (DFS), 611-615
de un pulso rectangular, 630-632
de un tren de pulsos rectangulares periódicos, 614-615
dualidad en, 616-617
propiedades de, 615-620, 633-645
convolución circular, 640-645
convolución periódica, 617-620
desplazamiento circular de una secuencia, 634-636
desplazamiento de una secuencia, 616
dualidad, 616-617, 636-638
linealidad, 615-616, 633
propiedades de simetría, 617, 638-640
representación de secuencias periódicas, 620
representación de Fourier de secuencias de duración finita, 628-633
transformada de Fourier:
de señales periódicas, 621-624
de un periodo, relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier y, 623-624
de un tren de impulsos periódico en tiempo discreto, 622
muestreo, 624-628
Desarrollo en serie de potencias, 121-123
mediante división de polinomios, 123
secuencia de longitud finita, 122
transformada inversa mediante, 122
Desbordamiento por saturación, 410
Descomposición:
de Cholesky, 890
de fase mínima, 989-995
de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, 308-309
de transformada de Fourier unilateral, 922
en fracciones simples, transformada *Z* inversa, 116-117, 120-121
polifásica, 194-196
Desplazador de fase de 90 grados, 580, 922
Desplazamiento circular de una secuencia, transformada discreta de Fourier (DFT), 634-636
Desplazamiento en frecuencia, 58
Detección de eco y cepstrum, 955
DFS. *Véase* Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto (DFS)
DFT. *Véase* Transformada discreta de Fourier (DFT)
DFT de *N* puntos, 706
Diezmado, 178-180
con filtrado previo para evitar el solapamiento, 182
con solapamiento, 182
definición, 178
ilustración en el dominio de la frecuencia de, 180-181
multietapa, 193-194
Diferencia progresiva, 21, 32
Diferencia regresiva, 13, 21, 32-33
Diferenciadores en tiempo discreto, 537
y método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser, 531-537
Diseño de Chebyshev tipo I, 570
Diseño de Chebyshev tipo II, 570
Diseño de filtros:
con sobremuestreo, 567-570
de Butterworth, 498-515
transformación bilineal de, 500-503
de Chebyshev, 498-515
elípticos, 498-515
especificaciones, 485-487
etapas de, 485
FIR, 566
algoritmo de Parks-McClellan, 546, 555-557
aproximaciones óptimas de, 543-548
características del filtro paso bajo FIR óptimo, 557-558
diseño mediante enventanado, 522
ejemplos de aproximación de rizado constante, 558-566

filtros paso bajo óptimos de tipo I, 548
filtros paso bajo óptimos de tipo II, 553
IIR, 566
comparaciones de diseño, 504-509
ejemplo de diseño para comparación con diseño de filtros FIR, 509-515
ejemplos de diseño, 500-515
paso bajo, transformaciones en frecuencia de, 516-522
mediante invarianza al impulso, 488-495
técnicas, 484-609
transformación bilineal, 495-498
Diseño mediante ventana de Kaiser de transformadores de Hilbert, 934-935
Distorsión de frecuencia, y transformación bilineal, 496-498
División de polinomios, desarrollo en serie de potencias mediante, 118-119
Doppler, frecuencia, 810
Doppler, señales de radar con,
definición, 769
señales, 810-812
Dualidad:
desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, 614, 616-617, 636-638
transformada discreta de Fourier (DFT), 636-638
Ecuaciones en diferencias:
determinación de la respuesta al impulso a partir de, 63
ecuación en diferencias homogénea, 37
representación mediante diagramas de bloques de, 371-372
Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, 35-39
del sistema de promediado móvil, 36
ecuación en diferencias homogénea, 37
representación en ecuaciones en diferencias del acumulador, 35
sistemas caracterizados por, 280-287
estabilidad y causalidad, 281-283
respuesta al impulso de funciones de transferencia racionales, 285-287
sistema de segundo orden, 281
sistemas inversos, 283-285
Ecuaciones normales de la autocorrelación, 871
algoritmo de Levinson-Durbin, obtención del, 891-894
recursión de Levinson-Durbin, 890-891
soluciones de, 889-894
Efectos numéricos de precisión finita, 409-415
cuantificación en la realización de sistemas, 413-415
representaciones numéricas, 409-413
Ejemplos de aproximaciones FIR de rizado constante, 558-566
compensación del filtro de retención de orden cero, 562-563
filtro paso bajo, 559
filtro paso banda, 563-566
Enventanado, 769
teorema, 60-61
ventana de Hann, 525-528
ventanas comúnmente utilizadas, 525-528
ventanas de Bartlett (triangular), 525-528
ventanas de Blackman, 525-528
ventanas de Hamming, 525-528
ventanas rectangulares, 525-528
y filtros FIR,
diseño mediante enventanado, 522
incorporación de fase lineal generalizada, 528-531
método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser, 531-537
propiedades de las ventanas comúnmente utilizadas, 525-528
Error cuadrático medio mínimo, 872
Error de predicción hacia atrás, 896, 899, 915
Error de predicción hacia delante, 896, 899
Errores de cuantificación, 410
análisis de, 211-213
conversión analógico-digital (A/D), 211-218
definición, 211
para una señal sinusoidal, 213-214
Escalado, interacción entre ruido de redondeo y, 441-442
Escalón unidad, secuencia, 12-13
Especificaciones, diseño de filtros, 485-487
Espectro de potencia, 68
de estimaciones de ruido de cuantificación, 830-836
de potencia de estimaciones de voz, 836-837
Espectrogramas, 790-792
de banda ancha, 809
representación, 809
Esquemas de tolerancia, 485
Estabilidad, 22-23
Estacionario, uso del término, 65
Estimación de frecuencia,
sobremuestreo e interpolación lineal para, 786-787
Estimación de Welch, 836
Estimadores asintóticamente insesgados, 813
Estimadores insesgados, 813
Estructura de filtro transversal, 395
Estructura de línea de retardo, 395
Estructura en celosía todo polos, 406-409
Estructuras con forma en cascada, 385-387
ilustración de, 386
Estructuras en forma directa, 383-384
ilustraciones de, 384
Estructuras en forma en paralelo, 387-389
ilustración de, 388-389
Estructuras IIR
con forma en cascada, análisis de, 442-449
en forma directa, análisis de, 430-438
Expansor (frecuencia de muestreo), 180
Exponencial aplicada de forma súbita:
entradas, 45-47
sumabilidad absoluta de, 51-52
Extremos, 547
Factor entero:
incremento de la frecuencia de muestreo por, 180
reducción de la frecuencia de muestreo por, 178-180
Factores *twiddle*, 712

Fase:
definición, 14
desenrollada, 345
distorsiones de, 272
función de retardo de fase mínimo, 315
lineal
filtro paso bajo ideal con, 320-322
generalizada, 322-324
sistemas causales con fase lineal generalizada, 324-333
sistemas con, 318-324
relación entre el modulo de la fase y, 298-301
respuesta de, 272
FFT. V*éase* Algoritmos de la transformada rápida de Fourier (FFT)
FFT con división de base (SRFFT), 759
FFTW (“Fastest Fourier Transform in the West”), algoritmo, 728
Filtrado digital de señales analógicas, 203-222
conversión A/D, 206-211
conversión D/A, 218-222
conversor ideal continuo-discreto (C/D), 203
conversor ideal discreto, continuo (D/C), 203
Filtro
adaptado, 79
antisolapamiento, 203-206, 770
respuesta en frecuencia de, 770
blanqueador, 872
de Butterworth en tiempo discreto, diseño de, 498-516
de retención de orden cero, 219-220
compensación para, 562-563
digital, 485
en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo (LTI), 4
FIR interpolado, definición, 194
no cuantificado, 417
Filtro paso bajo:
esquema de tolerancia, 485
FIR óptimo, características de, 557-558
ideal, sumabilidad, 51-52
transformación en un filtro paso alto, 519-522
y aproximación FIR de rizado constante, 558-562
Filtro paso banda, aproximación FIR de rizado constante, 563-566
Filtros conjugados en cuadratura (CQF), 201
Filtros de diezmado, interpretación polifásica de, 197-198
Filtros de interpolación, 185-188
implementación polifásica de, 198-199
Filtros digitales IIR, ciclos límite con entrada cero en realizaciones en coma fija de, 453-457
Filtros elípticos, diseño de, 498-516, 570
Filtros en celosía, 399-409, 894-900
cómputo directo de los parámetros *k*, 898-900
estructura en celosía todo polos, 406
FIR, 399-406
generalización de sistemas en celosía, 409
implementación en celosía de un sistema IIR, 408
red en celosía de error de predicción, 894-898
red en celosía de un modelo todo polos, 898
Filtros en tiempo continuo, diseño de filtros IIR en tiempo discreto a partir de, 487-498
diseño de filtros por invarianza al impulso, 488-495
transformación bilineal, 495-498
Filtros en tiempo discreto:
determinación de especificaciones de, 485-487
diseño de filtros IIR, a partir de filtros en tiempo continuo, 487-498
diseño de filtros por el método de invarianza al impulso, 488-495
diseño de, 484-485
transformación bilineal, 495-498
Filtros especulares en cuadratura, 200
Filtros FIR:
aproximaciones óptimas de, 543-548
diseño mediante enventanado, 522-543
incorporación de la fase lineal generalizada, 528
método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser, 531-537
propiedades de las ventanas comúnmente utilizadas, 525-528
Filtros IIR paso bajo, transformaciones en frecuencia, 516-522
Filtros paso alto, transformación de un filtro paso bajo en, 519-522
Filtros paso bajo de fase lineal, y enventanado, 529-530
Filtros selectivos en frecuencia, 484, 516
FIR en celosía, filtros, 399-406
FIR, sistemas:
efectos de cuantificación de coeficientes en, 422-424
estructuras básicas de redes para, 395-399
estructuras en forma directa, 395
estructuras en forma en cascada, 395-396
Forma acoplada de sistemas de segundo orden, 422
Forma traspuesta, 391-395
de un sistema de primer orden sin ceros, 392
de una sección básica de segundo orden, 393
inversión o trasposición del grafo de flujo, 391
Formantes, 807, 996, 1002
Fórmula de ganancia de Mason de la teoría de grafos de flujo de señales, 391
Formulación de predicción lineal, del modelado todo polos, 869-870
Fórmulas “cerradas”, 29
Frecuencia, 14
de Nyquist, 158
instantánea, 788
Frecuencia de muestreo, 152
cambio por un factor no entero, 188-190
cambio usando señales en tiempo discreto, 177-190
compresor de la, 178
expansor de la, 180
incremento por un factor no entero, 180-185
reducción por un factor no entero, 178-180
Fuga, 775
Función de transferencia, 271-272

determinación de, a partir de un grafo de flujo, 380-382
sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI), 115, 131, 271
Función delta de Dirac, 12, 102, 153
Función impulso unidad, 153
Función módulo al cuadrado, 288, 301, 308, 492, 500-501, 503
Función par, 54
Ganancia, 272
Gibbs, fenómeno de, 52, 523
Goertzel, algoritmo de, 700, 702-705
Grafo de flujo:
de dos puertos, 399
inversión, 391
trasposición de, 391-395
Hamming, ventanas de, 278, 525-528, 799-800, 836
Hann, ventanas de, 525-528, 799-800
Implementación en forma canónica, 375
Impulso unidad, secuencia, 12-13
Indexación, transformada discreta de Fourier (DFT), 724-725
Inestabilidad, comprobación de, 22
Ingeniería financiera, definición, 3
Ingeniería microelectrónica, y tratamiento digital de señales, 7
Integrador, 578
Interpolación, 180, 185
de banda limitada, 234, 320, 951
Interpolador, 185
multietapa, 193-194
Interpretación como banco de filtros de la transformada de Fourier dependiente del tiempo, 803-805
Interpretación de señales, 3
Invarianza al impulso:
bases de, 493
con un filtro de Butterworth, 491-495
diseño de filtros mediante, 488-495
Invarianza temporal, 23
JPEG (*Joint Photographic Expert Group*), 1
LabView, 3, 499
Laurent, series de, 102
Ley de Moore, 2
Linealidad:
de la transformada de Fourier, 58
transformada discreta de Fourier (DFT), 633
transformada *Z*, 124
Logaritmo complejo, 957
Longitud finita de registros, efectos de la, 735-742
Mantisa, 413, 451
Mariposa, 712
Mathematica, 3
MATLAB, 3, 280, 499, 568
Media muestral, 812
Método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser, 531-537
diferenciadores en tiempo discreto, 537, 540-543
ejemplos de diseño de filtros FIR mediante, 534
filtro paso alto, 535, 537
filtro paso bajo, 534-535, 536, 538
relación de la ventana de Kaiser con otras ventanas, 533-534
Método de inspección, transformada *Z* inversa, 116
Método de solapamiento-almacenamiento, 655, 756, 803
Método de solapamiento-suma, 654, 680, 798, 802, 803, 804
Modelado de señales, 4-5
aleatorias, 871-872
Modelado paramétrico de señales, 865-915
análisis espectral todo polos, 881-889
posiciones de los polos, 885-887
señales de voz, 882-885
señales sinusoidales, 887-889
aplicaciones, 866
definición, 865
ecuaciones normales de la autocorrelación:
algoritmo de Levinson-Durbin, obtención del, 891-894
recursión de Levinson-Durbin, 890-891
soluciones de, 889-894
estimación de funciones de correlación, 875-879
comparación de métodos, 878-879
ecuaciones de los coeficientes del predictor, 879
error de predicción, 878
estabilidad del sistema modelo, 879
método de la autocorrelación, 875-877
método de la covarianza, 877
filtros en celosía, 894-900
cálculo directo de parámetros *k*, 898-900
red en celosía de error de predicción, 894-898
red en celosía del modelo todo polos, 898
modelado todo polos. *Véase* Modelado todo polos de señales
modelos de señales deterministas y aleatorias, 870-874
orden del modelo, 879-881
Modelado todo polos de señales, 866-870
análisis predictivo lineal, 867
aproximación por mínimos cuadrados, 867
de señales deterministas de energía finita, 870-871
determinación del parámetro de ganancia *G*, 873-874
error cuadrático medio mínimo, 872
formulación de predicción lineal de, 869
modelado de señales aleatorias, 871-872
modelo inverso de mínimos cuadrados, 867-869
predicción lineal, 867
propiedad de ajuste de la autocorrelación, 873
Modelo de voz, 996-999
estimación de los parámetros del, 1001-1003
Modelo en tiempo discreto de la producción de voz, 996
Modelo inverso de mínimos cuadrados, 867-869
Modulador Delta-Sigma de datos muestreados, 227
Módulo:
de la respuesta en frecuencia, 272, 277
de la transformada de Fourier, 48
relación entre la fase y el, 298-301
MP3, codificación de audio, 802
MPEG (*Moving Picture Expert Group*), 1
MPEG-II, estándar de codificación de audio, 805

Muestreo:
del espectro, efecto del, 779-887
en el tiempo y en la frecuencia, 795-798
periódico, 152-154, 234
representación en el dominio de la frecuencia del, 188-190
Multiplexación por división en el tiempo (TDM), 264
Multiplexacion por división en frecuencia (FDM), 263
Nodos fuente, 378
Nodos sumidero, 378
Obtención del algoritmo de Levinson-Durbin, 891-894, 899
Onda acústica superficial, 733
Operaciones en coma flotante (FLOPS), 727-728
Orden de inversión de bits, 714
Oscilación por desbordamiento, 455
en sistema de segundo orden, 455-456
Oscilador en forma acoplada, 464
Parámetros *k*, 399, 894
cálculo directo de, 898-900
PARCOR, coeficiente, 890, 899
Parks-McClellan, algoritmo, 485, 555-557, 559, 568, 935
Parseval, teorema de, 58, 60, 94, 435, 440, 664, 691, 882
Periodo de muestreo, 152
Periodograma, 813-825
análisis del, 813, 821-825
cálculo de periodogramas promedio utilizando la DFT, 820-821
definición, 814
modificado, 814
promediado de periodogramas, 818-820
propiedades de, 814-818
suavizado, 827
Poisson, fórmulas de, 917
Polinomio de Chebyshev de orden *n*, 545
Polinomios, y teorema de alternancia, 547
Polos de secciones de segundo orden cuantificadas, 421-422
Posiciones de los polos, análisis espectral todo polos, 885-887
Predictor lineal, 870
Primera diferencia regresiva, 13, 93, 96, 593
Procedimiento de blanqueado, 361
Procesado en tiempo continuo de señales en tiempo discreto, 173-177
retardo no entero, 174-175
Procesado por bloques, 769
Proceso aleatorio, 64
proceso aleatorio lineal autoregresivo (AR), 861
proceso aleatorio lineal autoregresivo de promediado móvil (ARMA), 861
proceso aleatorio lineal de promediado móvil (MA), 861
Promediado móvil, 17-18, 32, 36, 43
Propiedad de aditividad, 18
Propiedad de ajuste de la autocorrelación, modelado todo polos, 868
Propiedad de compactación de la energía de la DCT-2, 664-667
Propiedad de conjugación, transformada *Z*, 128-129
Propiedad de convolución, transformada *Z*, 129-131
convolución de secuencias de longitud finita, 130
Propiedad de desplazamiento de la función impulso, 153
Propiedad de diferenciación, transformada *Z*, 127-128
inversa de una transformada *Z* no racional, 128
polo de segundo orden, 128
Propiedad de escalado, 18
Propiedad de homogeneidad, 18
Propiedad de multiplicación exponencial, transformada *Z*, 126-127
Propiedad de retardo de grupo mínimo, 315-316
Propiedades de simetría,
desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, 617, 638-640
transformada de Fourier, 54-56
transformada discreta de Fourier (DFT), 638-640
Pulso rectangular, desarrollo enserie de Fourier en tiempo discreto de, 630-632
Puntos externos, 547
Rango, 810
Realización en forma directa I, 376
Realización en forma directa II, 376
Realizaciones en coma fija de filtros digitales IIR, ciclos límite con entrada cero en, 453-457
Realizaciones en coma flotante de sistemas en tiempo discreto, 451-452
Recursión de Levinson-Durbin, 890-891, 897
Red en celosía de un modelo todo polos, 898
Red no computable, 391
Redes, uso del término, 370
Región de convergencia (RDC), 101, 282
determinación, 282
estabilidad, causalidad y, 115
no solapadas, 113
propiedades para la transformada *Z*, 110-115
Registro de retardo, 371
Razón de sobremuestreo, 222
Relación señal-ruido (SNR), 3
Relación señal-ruido de cuantificación, 216-217
Relaciones de transformada de Hilbert, 916-952
de secuencias complejas, 930
definición, 916
entre módulo y fase, 929
fórmulas de Poisson, 917
secuencias de longitud finita, teoremas de suficiencia de, 919-920
suficiencia de la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier para secuencias causales, 918-923
Relleno con ceros, 651
Remuestreo, 178, 247
Representación en el dominio de la frecuencia:
de señales/sistemas en tiempo discreto, 40-47
del muestreo, 155-156
Representación mediante grafos de flujo de señales de ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, 377-382
Residuo, 879
Residuo del error de predicción, 870

Respuesta al impulso:
del acumulador, 32
del retardo ideal, 32
determinación a partir de la respuesta en frecuencia, 63
determinación a partir de una ecuación en diferencias, 63
para funciones de transferencia racionales, 285-287
Respuesta en amplitud, 272
Respuesta en frecuencia, 40-43
de funciones de transferencia racionales, 287-297
ejemplos con múltiples polos y ceros, 293-297
sistema FIR de segundo orden, 295
sistema IIR de segundo orden, 293
sistema IIR de tercer orden, 296-297
sistemas de primer orden, 289-293
de sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI), 272-280
efectos del retardo de grupo y de la atenuación, 275-280
fase de la respuesta en frecuencia y retardo de grupo, 272-275
definición, 40
del filtro antisolapamiento, 770
del sistema de promediado móvil, 43-45
del sistema de retardo ideal, 40
determinación de la respuesta al impulso a partir de, 63
Rotación de una secuencia, 636
Rotaciones, 761
Ruido aleatorio, 415, 830, 996, 998
Ruido blanco, 68, 437
Ruido de cuantificación, medidas de, 215-216
Ruido de redondeo en filtros digitales:
análisis de las estructuras IIR en forma directa, 430-438
efectos de, 430-452
escalado en implementaciones en coma fija de sistemas IIR, 438-441
estructura IIR en cascada, análisis de, 442-449
interacción entre escalado y ruido de redondeo, 441-442
sistema de primer orden, 435-436
sistema de segundo orden, 436
sistemas FIR en forma directa, análisis de, 449-451
Secuencias:
antisimétricas conjugadas, 54-55
básicas, 12-15
causales, 31, 918-921
complejas, relaciones de transformada de Hilbert para, 930
de autocorrelación, 67-68
de autocorrelación determinista, 67
de longitud finita, 109, 919, 923-927
convolución de, 130
teoremas de suficiencia de, 918
escalón unidad, 12-13
exponencial invertida en el tiempo, 129
exponencial limitada por la izquierda, 103-104
exponenciales, 13-14, 931
exponenciales complejas, 14-15, 53
exponenciales desplazadas, 125
impares, 54
impulso unidad, 12-13
limitadas por la derecha, 104-105
limitadas por la izquierda, 103-104
pares, 54
periódicas, 14-15, 923, 928
simétricas conjugadas, 54-55
sinusoidales, 14
Segmentos
sonoros, 808, 1002
sordos, 808, 1002
Señal *chirp* lineal, transformada de Fourier dependiente del tiempo de, 788-790
Señal de banda limitada, reconstrucción a partir de sus muestras, 163-165
Señales:
aleatorias, 64-69
analíticas, 930, 937
como función temporal compleja, 916
y comunicación de banda estrecha, 937
y muestreo paso banda, 940-942
chirp, 731
de radar, análisis de Fourier dependiente del tiempo de, 810-812
de voz:
análisis de Fourier dependiente del tiempo de, 806-810
análisis espectral todo polos, 882-885
definición, 9
deterministas de energía finita, modelado todo polos de, 870-871
digitales, 9
predecibles, 3
representación matemática de, 9
sinusoidales:
análisis espectral todo polos, 887-889
error de cuantificación para, 213-214
para cuantificadores uniformes, 217
en tiempo discreto, periódicas/aperiódicas, 15
relación señal-ruido de cuantificación, 217-218
Señales analógicas, 9, 203-222
conversión A/D, 206-211
conversión D/A, 218-222
conversor continuo-discreto (C/D) ideal, 203
conversor discreto-continuo (D/C) ideal, 203
procesado digital de, 203-222
Señales en tiempo continuo
diferenciador ideal de banda limitada en tiempo continuo, implementación en tiempo discreto de, 169-170
filtrado digital de señales analógicas, 203-222
filtrado paso bajo en tiempo discreto, filtro paso bajo ideal en tiempo continuo utilizando, 167-169
frecuencia de muestreo, cambio utilizando procesado en tiempo discreto, 177-190
invarianza al impulso, 171-173
aplicación a sistemas en tiempo continuo con funciones de transferencia racionales, 172-173

Señales en tiempo continuo, invarianza al impulso (*continuación*)
filtro paso bajo en tiempo discreto obtenido mediante, 172
muestreo de, 152-270
muestreo y reconstrucción de una señal sinusoidal, 159
reconstrucción de una señal de banda limitada a partir de sus muestras, 161-165
representación en el dominio de la frecuencia del muestreo, 153, 155-161
señal de banda limitada, reconstrucción a partir de sus muestras, 161-165
señales en tiempo discreto, tratamiento en tiempo continuo de, 175-177
solapamiento en la reconstrucción de una señal sinusoidal, 160
tratamiento de señales multitasa, 190-204
tratamiento en tiempo discreto de, 165-176
Señales en tiempo discreto, 10
como secuencias de números, 10-17
definición, 9
descripción gráfica de, 11
frecuencia de muestreo, 10
periodo de muestreo, 10
representación gráfica de, 11
secuencia escalón unidad, 13
secuencia impulso unidad, 13
secuencias exponenciales complejas, 14-15
secuencias exponenciales, 13-14
secuencias sinusoidales, 14
sistemas de tratamiento de señales, clasificación de, 10
sistemas en tiempo discreto, 17-23
tratamiento en tiempo continuo de, 173-177
Signo y módulo, 409
Simulink, 3
Síntesis de Fourier dependiente del tiempo, 798, 802
Sistema característico para la convolución, 957
Sistema con amortiguamiento crítico, 347
Sistema de diferencia regresiva, 21, 32, 93, 96, 98
respuesta al impulso de, 32
y el acumulador, 34
Sistema de entrada acotada-salida acotada (BIBO), 22
Sistema de promediado móvil, 17-18, 32, 36, 43
con retardo no entero, 174-175
representación mediante ecuaciones en diferencias de un, 36
respuesta en frecuencia de, 43-45
Sistema de retardo de fase mínimo, 315
Sistema de retardo ideal, 17
respuesta en frecuencia de, 40-41
Sistema invariante con el desplazamiento. *Véase* Sistemas invariantes con el tiempo,
Sistema no anticipativo, 21
Sistemas causales de fase lineal generalizada, 322-333
Sistemas con respuesta al impulso de duración infinita (IIR), 32, 484
Sistemas con retardo de energía máximo, 317
Sistemas con retardo de energía mínimo, 316
Sistemas de diferencia progresiva, 21-22
no causales, 33-34
Sistemas de fase máxima, 317
Sistemas de fase mínima, 306-317
compensación de la respuesta en frecuencia de sistemas de fase no mínima, 310
definición, 306
descomposición, 308-309
propiedades de, 310, 315-317
propiedad de mínimo retardo de energía, 316-317
propiedad de retardo de fase mínimo, 315
propiedad de retardo de grupo mínimo, 315-316
Sistemas de fase no mínima, compensación de la respuesta en frecuencia de, 310
Sistemas de muestreo en frecuencia, 391
Sistemas de respuesta al impulso finita (FIR), 484
Sistemas de tratamiento de señales, clasificación de, 10
Sistemas en cascada, 33-34
Sistemas en celosía, generalización de, 409
Sistemas en tiempo discreto, 17-23
ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, 35-39
diagrama de bloques de, 370-377
representación en grafo de flujo de señales de, 377-382
efectos de la cuantificación de coeficientes, 415-430
en sistemas FIR, 422-424
en sistemas IIR, 415-417
en un filtro elíptico, 417-421
en un filtro FIR óptimo, 424-426
mantenimiento de la fase lineal, 426-430
polos de secciones de segundo orden cuantificadas, 421-422
efectos de precisión numérica finita, 409-415
cuantificación en la realización de sistemas, 413-415
representaciones numéricas, 409-413
estabilidad, 22-23
filtros en celosía, 399-409
estructura en celosía todo polos, 406-409
FIR, 399-406
generalización de sistemas en celosía, 409
implementación en celosía de un sistema IIR, 408
formas traspuestas, 391-395
promediado móvil, 17-18
propiedades de simetría de la transformada de Fourier, 54-56
función impar, 54
función par, 54
ilustración de, 56-57
secuencia antisimétrica conjugada, 54
secuencia impar, 54
secuencia par, 54
secuencia simétrica conjugada, 54
realizaciones en coma flotante de, 451-452
representación de secuencias mediante transformadas de Fourier, 48-53
filtro paso bajo ideal, 51-52

sumabilidad absoluta de exponencial aplicada súbitamente, 50
transformada de Fourier de secuencias exponenciales complejas, 53
transformada de Fourier de una constante, 52
transformada inversa de Fourier, 48
representación en el dominio de la frecuencia de, 39-47
autofunciones de sistemas lineales e invariantes, 40-45
exponencial compleja aplicada de forma súbita, 45-47
filtros ideales selectivos en frecuencia, 43-44
respuesta a una sinusoide de sistemas lineales e invariantes con el tiempo, 41-42
respuesta en frecuencia del sistema de promediado móvil, 43-45
respuesta en frecuencia del sistema de retardo ideal, 40
ruido de redondeo en filtros digitales, efectos de, 430-452
señales aleatorias en tiempo discreto, 64-69
densidad espectral de potencia, 67
proceso aleatorio, 64
ruido blanco, 68
secuencia de autocorrelación determinista, 67-68
secuencia de autocorrelación/autocovarianza, 64-66
sistema de retardo ideal, 17
sistemas FIR:
de fase lineal, estructuras para, 396-399
estructuras básicas de redes de, 395-399
estructuras en forma directa, 395
estructuras en forma en cascada, 395-396
sistemas IIR:
estructuras básicas de, 382-391
estructuras en cascada, 385-387
estructuras en forma directa, 383-384
estructuras en forma en paralelo, 387-389
realimentación en, 390-391
sistemas invariantes con el tiempo, 20-21
acumulador como, 20
sistema compresor, 21
sistemas lineales e invariantes con el tiempo, 23-34
autofunciones de, 40-45
propiedades de, 29-34
suma de convolución, 23-29
sistemas lineales, 18-19
sistema acumulador, 19
sistema no lineal, 20
sistemas sin memoria, 18
teoremas de la transformada de Fourier, 56-64
desplazamiento en frecuencia, 58
desplazamiento temporal, 58
diferenciación en frecuencia, 59
inversión temporal, 59
linealidad de la transformada de Fourier, 58
teorema de convolución, 59-60
teorema de modulación o enventanado, 60-61
teorema de Parseval, 59-60
Sistemas FIR de fase lineal:
de tipo I, 325, 327-328
de tipo II, 326, 329
de tipo III, 326, 330
de tipo IV, 326, 331
ejemplos de, 326-327
estructuras de, 396-399
posición de los ceros, 332-333
relación con sistemas de fase mínima, 333-336
Sistemas FIR en forma directa, análisis de, 449-451
Sistemas homomórficos, 953
Sistemas IIR:
cuantificación de coeficientes, efectos de, 415-417
escalado en implementaciones en coma fija de, 438-442
estructuras básicas de, 382-391
estructuras en forma directa, 383-384
estructuras en forma en cascada, 385-387
estructuras en forma en paralelo, 387-389
implementación en celosía de, 408
realimentación en, 390-391
Sistemas invariantes con el tiempo, 20-21
acumuladores como, 20
sistema compresor, 21
Sistemas inversos, 34, 283-285
acumulador, 34
de sistema de primer orden, 284
definición, 34
inverso de un sistema con un cero en su región de convergencia, 284
Sistemas lineales, 18-19
sistema acumulador, 19
sistema no lineal, 20
Sistemas lineales e invariantes con el tiempo, 4, 23-34
análisis mediante transformadas de, 271-368
autofunciones de, 40-45
combinación en paralelo de, 30
ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, 35-39
sistemas caracterizados por, 280-287
entradas exponenciales complejas aplicadas de forma súbita, 45-47
función de transferencia, 115, 131
propiedades de, 29-34
relación entre módulo y fase, 298-301
respuesta a una sinusoide de, 41
respuesta en frecuencia de funciones de transferencia racionales, 287-297
respuesta en frecuencia de, 272-280
sistemas de fase mínima, 306-317
descomposición, 308-309
relación de sistemas FIR de fase lineal con, 333-336
sistemas de fase no mínima, compensación de la respuesta en frecuencia de, 310
sistemas lineales con fase lineal generalizada, 317-336
fase lineal generalizada, 322-324
sistemas causales con fase lineal generalizada, 324-336
sistemas con fase lineal, 318-322

Sistemas lineales e invariantes con el tiempo (*continuación*)
sistemas paso todo, 302-306
suma de convolución, 23-29
transformada *Z* y, 131-135
Sistemas mecánicos microelectrónicos (MEM), 8
Sistemas paso todo, 302-306
Sistemas sin memoria, 18
Sobremuestreo:
conversión A/D sobremuestreada con cuantificación directa, 222-226
e interpolación lineal para estimación de frecuencia, 786-787
en conversión A/D, 222-231
en conversión D/A, 222, 232-233
Solapamiento, 156
diezmado con, 182
distorsión de, 156
en reconstrucción de señales sinusoidales, 160
filtro antisolapamiento, 203-206
y transformación bilineal, 495
Solución homogénea, 37
Sonidos fricativos, 806, 996
Sonidos oclusivos, 806, 996
Sonidos sonoros, 806, 877, 996, 1002
Superposición, principio de, 18 -20, 23, 41, 953, 975
Tecnologías de condensadores conmutados, 2
Telecomunicaciones, y tratamiento de señales en tiempo discreto, 8
Teorema de alternancia, 546-553
definición, 546-547
y polinomios, 547
Teorema de convolución:
transformada de Fourier, 59-60
transformada *Z,* 129-131
Teorema de la integral de Cauchy, 917
Teorema de modulación, 60-61
Teorema de muestreo de Nyquist, 158, 233
Teorema del valor inicial, 151
para secuencias limitadas por la izquierda, 1008
Tiempo y frecuencia, muestreo en, 795-798
Tracto vocal, 806, 885, 979, 996
Transformación bilineal, 495-498
de un filtro de Butterworth, 500-503
distorsión de frecuencia, 496-498
y solapamiento, 495
Transformaciones unitarias, 660
Transformada *chirp*, definición, 731
Transformada de Fourier dependiente del tiempo, 769, 787-805
de una señal de voz, representación espectral de, 808
de una señal *chirp* lineal, 788-790
definición, 787
efecto de la ventana, 793-795
espectrograma, 790-792
interpretación como banco de filtros, 803-805
invertibilidad de $X[n, l]$, 792
método de reconstrucción de solapamiento/suma, 798-801
muestreo en el tiempo y en la frecuencia, 795-798
tratamiento de señales basado en, 801-803
Transformada de Fourier, 48
de secuencias exponenciales complejas, 53
de señales periódicas, 621-624
de un periodo, relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier y, 623-624
de un tren de impulsos periódico en tiempo discreto, 622
de una constante, 52
de una secuencia de ventana típica, 770
en tiempo discreto (DTFT), 48. *Véase* Transformada de Fourier dependiente del tiempo
fase de la, 48
inversa, 48
linealidad de, 58
módulo de, 48
muestreo, 624-628
parejas, 61
propiedades de simetría de, 54-56
representación de secuencias mediante, 48-53
teorema de convolución, 59-60
teorema de diferenciación en frecuencia, 59
teorema de inversión temporal, 59
teorema de modulación o enventanado, 60-62
teorema de Parseval para, 58, 59
teoremas de desplazamiento en el tiempo y en la frecuencia, 58
unilateral, descomposición de, 922
Transformada discreta de Fourier (DFT), 3, 610-698
algoritmos de FFT de diezmado en el tiempo, 706-718
cómputo en el mismo lugar, 713-716
definición, 706
formas alternativas, 716-718
generalización y programación de la FFT, 712
algoritmos de FFT de diezmado en frecuencia, 718-724
cómputo en el mismo lugar, 722
formas alternativas, 722-724
algoritmos de FFT generales, 726-729
algoritmo de la transformada *chirp* (CTA), 730-734
algoritmo de transformada de Fourier de Winograd (WFTA), 729
análisis de Fourier de señales aleatorias estacionarias,
análisis de periodogramas, ejemplo de, 821-825
cómputo del promediado de periodogramas utilizando la DFT, 820-821
periodograma, 813-818
promediado de periodogramas, 818-820
análisis de Fourier de señales no estacionarias:
ejemplos de, 805-812
señales de voz, 806-810
señales radar, 810-812
análisis de Fourier de señales mediante la, 769-773
análisis espectral de señales aleatorias utilizando estimaciones de la secuencia de autocorrelación, 825-837
espectro de potencia de una señal de voz, 836-837
espectro de potencia de ruido de cuantificación, 830-836

estimaciones de la correlación y del espectro de potencia, 828-830
análisis mediante la DFT de señales sinusoidales, 773-787
efecto del enventanado, 773-776
efecto del muestreo en el espectro, 779-787
propiedades de las ventanas, 777-779
utilizando una ventana de Kaiser, 783-784
cálculo de, 699-768
algoritmo de Goertzel, 700, 702-705
cálculo directo de, 700-706
coeficientes, 725
consideraciones prácticas, 724-726
evaluación directa de la definición de, 701-702
explotación de la simetría y la periodicidad, 705-706
indexación, 724-725
cálculo del cepstrum complejo utilizando, 983-988
cálculo del promedio de periodogramas utilizando, 820-821
convolución lineal, 645-657
convolución circular como convolución lineal con solapamiento, 648-650
de dos secuencias de longitud finita, 645-646
de un pulso rectangular, 630-633
frecuencias se señales que se ajustan exactamente a las frecuencias de la DFT, 781-783
interpretación como banco de filtros de $X[n, l)$, 792-793
invertibilidad de $X[n, l)$, 792
de una señal *chirp* lineal, 788-790
espectrograma, 790-792
método de reconstrucción de solapamiento-suma, 798-801
muestreo en el tiempo y en la frecuencia, 795-798
tratamiento de señales basado en, 801-803
longitud finita de registro, efectos de, 735-742
propiedades de, 633-646
convolución circular, 640-645
desplazamiento circular de una secuencia, 634-636
dualidad, 636-637
linealidad, 633
propiedades de simetría, 638-640
resumen, 645, 646
secuencias de longitud finita, teoremas de suficiencia de, 919
Transformada discreta del coseno (DCT), 657-667
aplicaciones de, 667
DCT-1/DCT-2, 658-663
definiciones de, 658-661
propiedad de compactación de la energía de la DCT-2, 664-667
Transformada discreta del seno (DST), 658
Transformada *Z*, 99-151
bilateral, 100, 135
circunferencia unidad, 100
definición, 99-100
inversa, 115-123
desarrollo en serie de potencias, 121
descomposición en fracciones simples, 116-117
método de inspección, 116
obtención mediante descomposición en fracciones simples, 120-121
operador, 100
parejas comunes, 110
propiedades, 123-132
conjugación, 128-129
convolución, 129-131
desplazamiento en el tiempo, 125
diferenciación, 127
inversión temporal, 129
linealidad, 124
multiplicación por exponencial, 126-127
resumen de, 131, 132
región de convergencia (RDC), 101
propiedades de la, 110-115
secuencia exponencial bilateral, 107-108
secuencia exponencial limitada por la derecha, 104
secuencia exponencial limitada por la izquierda, 103-104
secuencia exponencial truncada de longitud finita, 109
sistemas lineales e invariantes con el tiempo y, 131-135
suma de dos secuencias exponenciales, 105-107
suma infinita, 103
transformada *Z* de segundo orden, 117-118
unilateral, 100, 135-137
condiciones iniciales distintas de cero, efecto de, 136-137
de un impulso, 135
Transformadas de teoría de números (NTT), 767-768
Transformadas discretas de Hilbert, 916-952
Transformador de Hilbert, 922
diseño de, 933-937
diseño mediante el método de la ventana de Kaiser, 934-935
muestreo paso banda, 940-942
respuesta al impulso de, 933
señales paso banda, representación de, 937-939
Trasposición, 391-395
Tratamiento de señales, 1
basado en la transformada de Fourier dependiente del tiempo, 801-803
multidimensionales, 4
perspectiva histórica, 5-7
problemas/soluciones, 4
tratamiento digital de señales, 10-16
Tratamiento de señales multitasa, 190-202
bancos de filtros multitasa, 199-202
definición, 190
descomposiciones polifásicas, 194-196
diezmado e interpolación multietapa, 193-194
intercambio de filtrado y compresor/expansor, 192-193
interpretación polifásica de filtros de diezmado, 197-198
Tratamiento de señales en tiempo discreto, 2, 17-23
causalidad, 21
definición, 17
estabilidad, 22-23

Tratamiento de señales en tiempo discreto (*continuación*)
inestabilidad, comprobación de, 22
promediado móvil, 17
señales aleatorias en tiempo discreto, 64-69
sistema de diferencia progresiva, 21
sistema de diferencia regresiva, 21
sistema de retardo ideal, 17
sistemas invariantes con el tiempo, 20-21
acumulador como, 20
sistemas lineales, 18-19
sistema acumulador, 19
sistema no lineal, 20
sistemas sin memoria, 18
técnicas, promesa de futuro de, 7-8
transformadas de Fourier, representación de secuencias mediante, 48-53
Tratamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo, 165-175
Twicing, 597
Valor de una secuencia, 706
Valor principal de Cauchy, 922
Varianza muestral, 813
Ventana de Kaiser, 777, 799
análisis mediante la DFT de señales sinusoidales, 783-785
diseño, 568
y relleno con ceros, análisis mediante la DFT de, 785-786
Ventana no causal, 793
Ventanas comúnmente utilizadas, 525-528
Ventanas rectangulares, 525-528
Yule-Walker, ecuaciones de, 871, 873, 890

Una característica fundamental de esta nueva edición es la incorporación y expansión de algunos de los temas más avanzados del Tratamiento digital de señales, con la inclusión de dos capítulos nuevos: modelado paramétrico de señales (Capítulo 11) y análisis cepstral y deconvolución homomórfica (Capítulo 13).

Se han creado nuevos problemas y se han seleccionado para incluirlos en la tercera edición, que ahora pasa a tener más de 700 problemas.

El libro resuelve los problemas con el paquete de software MATLAB.

Acceso protegido por contraseña a la nueva Companion Website, mejor integrada y más interactiva: **www.pearsonhighered.com/oppenheim**.

El **nuevo sitio web** proporciona recursos adicionales para el aprendizaje autónomo del alumno como por ejemplo:

- Figuras manipulables: ayudan al alumno a comprobar los efectos en las señales a medida que manipulan las variables.
- Ejercicios de creación de figuras: los estudiantes crean sus figuras utilizando los datos de los problemas.
- Ejercicios en MATLAB: más posibilidades de practicar con los contenidos.

Prentice Hall
es un sello editorial de

PEARSON

www.pearsoneducacion.com

ISBN 978-84-8322-718-3

9 788483 227183